

Norme Minimale sur le Compléxifié d'un Espace de Hilbert Réel

By V. AVANISSIAN

Abstract. Let $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ be a real Hilbert space and let $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ be the complexification of $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. The first part of this paper treats the problem of the existence of the minimal norm $\tilde{\ell}$ on $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ such that

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}(z) &\leq \|z\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} && \text{for } z \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \\ \tilde{\ell}(x) &= \|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} && \text{for } x \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

We prove the following theorem :

- a) The minimal norme $\tilde{\ell}$ exists in $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.
- b) Let $D \subset \mathbb{C}^N$ be a bounded, convex, balanced domain. There exists a maximal bounded convex, balanced domain $\tilde{D} \subset \mathbb{C}^N$ such that

$$\tilde{D} \supset D, \quad \tilde{D} \cap \mathbb{R}^N = D \cap \mathbb{R}^N.$$

- c) Let $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^N$, then the minimal norm $\tilde{\ell}$ is the supporting function of the unit closed Lie ball in \mathbb{C}^N .

(a) and b) extend a result of K. T. Hahn and Peter Plug) where $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^N$ and D is the unit euclidean ball in \mathbb{C}^N . The second part of the paper gives a geometrical interpretation of the minimal norm $\tilde{\ell}$ in $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

If \mathcal{N} is a norm in \mathbb{C}^N , $\log \mathcal{N}(z)$ is plurisubharmonic function. The final part of the paper studies the plurisubharmonic functions V in \mathbb{C}^N such that $\forall k \in \mathbb{C}, V(kz) = |k|V(z), V(z) \leq \|z\|$ for $z \in \mathbb{C}^N, V(x) = \|x\|$ for $x \in \mathbb{R}^N, \|z\|$ is euclidean norm in \mathbb{C}^N .

PRÉLIMINAIRES. On considère ici la classe $(S)_{\mathbb{C}^N}$ des fonction V

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46C05, 31C10; Secondary 46A55, 52A40.

plurisousharmoniques dans \mathbb{C}^N (en abrégé p.s.h.) assujettie aux conditions suivantes :

- a) Pour tout $k \in \mathbb{C}$, $V(kz) = |k|V(z)$ ($z \in \mathbb{C}^N$)
- b) Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}^N$, ($x, y \in \mathbb{R}^N$),

$$V(z) \leq \|z\|$$

$$V(x) = \|x\|$$

où $\|z\| = (|z_1|^2 + \dots + |z_N|^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne dans \mathbb{C}^N . Dans le cas $N = 1$, la classe $(S)_{\mathbb{C}^N}$ est réduite à $V = |z|$ à cause de l'homogénéité de V et la 2e condition de b).

Un énoncé de P. Lelong (P.L. [1]) implique que les fonctions V p.s.h dans \mathbb{C}^N vérifiant a) sont à valeurs positives, $\log V$ est p.s.h. et (d'après la terminologie (P.L. [2]), ce sont des quasi-normes). L'ensemble $D_V = \{z \in \mathbb{C}^N \mid V(z) < 1\}$ est un domaine pseudo-convexe disqué (i.e. $z \in D_V$ implique $\alpha z \in D_V$, si $|\alpha| \leq 1$). Réciproquement, si D est un voisinage ouvert de 0, disqué, pseudo-convexe, sa jauge J_D est une quasi-norme. Ainsi, la donnée d'un domaine D de \mathbb{C}^N , pseudo-convexe, disqué, contenant la boule $B_{\mathbb{C}}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}^N \mid \|z\| < 1\}$ et tel que $D \cap \mathbb{R}^N = B_{\mathbb{R}}(0, 1) = B_{\mathbb{C}}(0, 1) \cap \mathbb{R}^N$ caractérise un élément de $(S)_{\mathbb{C}^N}$. La jauge J_D est une norme dans \mathbb{C}^N si D est convexe, disqué, borné. Remarquons que la condition a) implique la majoration

$$V(z) \leq M\|z\| \quad (M = \sup_{\|z\|=1} V(z))$$

mais la condition b) exige une majoration uniforme pour toute $V \in (S)_{\mathbb{C}^N}$. La classe $(S)_{\mathbb{C}^N}$ contient en particulier les fonctions

$$\begin{aligned} |Q(z)|^{1/2} \quad \text{où} \quad Q(z) &= z_1^2 + \dots + z_N^2 \\ h(z) &= [\|z\|^2 |Q(z)|]^{1/4} \end{aligned}$$

qui ne sont pas des normes (h est p.s.h. car $\log h$ l'est). Notons $(\mathcal{N}S)_{\mathbb{C}^N}$ la sous-classe de $(S)_{\mathbb{C}^N}$ constituée par les normes \mathcal{N} sur \mathbb{C}^N . Elle contient en particulier les normes :

$$z \mapsto \|z\|, \quad z \mapsto \ell_N(z) = \max_{\substack{\|a\|=1 \\ a \in \mathbb{R}^N}} |a_1 z_1 + \dots + a_N z_N|.$$

Remarquons que la norme de Lie

$$z \mapsto L(z) = [\|z\|^2 + \sqrt{\|z\|^4 - |Q(z)|^2}]^{1/2}$$

vérifie $L(x) = \|x\|$ sur \mathbb{R}^N , mais $L(z) \geq \|z\|$. Elle est la plus grande norme sur \mathbb{C}^N qui majore la norme euclidienne de \mathbb{C}^N et qui coïncide avec celle-ci sur \mathbb{R}^N (cf. [A]). Par contre, la norme

$$\ell_N(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\|z\|^2 + |Q(z)|]^{1/2}$$

est la plus petite norme sur \mathbb{C}^N , appartenant à $(\mathcal{NS})_{\mathbb{C}^N}$ d'après un résultat de K.T. Hahn-Peter Plug ([M-P]). On montrera (Théorème 1,c) que la norme minimale ℓ_N est la fonction d'appui de l'adhérence de la boule unité de Lie.

Problème (A). Parmi les domaines pseudo-convexes, disques D de \mathbb{C}^N , vérifiant

$$D \supset B_{\mathbb{C}}(0,1), \quad D \cap \mathbb{R}^N = B_{\mathbb{R}}(0,1)$$

y a-t-il un domaine maximal ? Si oui quelle est l'expression de la fonction V p.s.h. qui le caractérise ?

Problème (B). Soit (D_0) un domaine convexe borné, disqué de \mathbb{C}^N . Parmi les ouverts convexes bornés disqués D de \mathbb{C}^N vérifiant

$$D \supset D_0, \quad D \cap \mathbb{R}^N = D_0 \cap \mathbb{R}^N$$

y a-t-il un élément maximal \tilde{D}_0 ? Si oui quelle est la norme qui le caractérise ?

Dans le cas $D_0 = B_{\mathbb{C}}(0,1)$, la norme ℓ_N fournit une réponse positive au problème B. Dans le cas général (corollaire) le domaine \tilde{D}_0 maximal est :

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C}^N \mid \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} J_{D_0}(x \sin \theta + y \cos \theta) < 1\}.$$

Par exemple, dans le cas d'ellipsoïde E :

$$D_0 = E = \{z \in \mathbb{C}^N \mid \frac{|z_1|^2}{a_1^2} + \dots + \frac{|z_N|^2}{a_N^2} < 1\}$$

où les a_j sont réels non nuls. On a

$$\tilde{D}_0 = \{z \in \mathbb{C}^N \mid \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_{j=1}^N \frac{|z_j|^2}{a_j^2} + \left| \sum_{j=1}^N \frac{z_j^2}{a_j^2} \right| \right]^{1/2} < 1\}.$$

Pour $a_1 = \dots = a_N = 1$, on retrouve la boule unité correspondant à la norme minimale ℓ_N .

Le problème (B) équivaut à l'existence d'une norme minimale dans la classe $(\mathcal{N})_{\mathbb{C}^N}$ des normes \mathcal{N} sur \mathbb{C}^N vérifiant les conditions

- (1) $\mathcal{N}(z) \leq \mathcal{N}_0(z)$ si $z \in \mathbb{C}^N$
- (2) $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}_0(x)$ si $x \in \mathbb{R}^N$

où \mathcal{N}_0 est une norme donnée dans \mathbb{C}^N . Le rejet de la condition (1) implique la non existence d'une norme minimale. Par exemple considérons dans \mathbb{C}^N les normes $\mathcal{N}_0(z) = \|z\|$, et

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^* : z \mapsto & (|z_1 + iz_2|^2 + |z_3|^2 + \dots + |z_N|^2)^{1/2} \varepsilon \\ & + (|z_1 - iz_2|^2 + |z_3|^2 + \dots + |z_N|^2)^{1/2} (1 - \varepsilon) \end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$. Aux points $\zeta = (1, i, 0, \dots, 0)$; $\zeta' = \bar{\zeta} = (1, -i, 0, \dots, 0)$.

On a :

$$\mathcal{N}^*(\zeta) = 2(1 - \varepsilon), \quad \mathcal{N}^*(\bar{\zeta}) = 2\varepsilon.$$

Supposons qu'il existe une norme minimale \mathcal{N}_m dans la classe des normes sur \mathbb{C}^N vérifiant seulement (2) on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*(x) &= \mathcal{N}_m(x) = \|x\| \\ \mathcal{N}_m(\bar{\zeta}) &> 0 \end{aligned}$$

et $\mathcal{N}^*(\bar{\zeta}) < \mathcal{N}_m(\bar{\zeta})$ pour ε suffisamment petit. Donc, \mathcal{N}_m ne sera pas minimale.

Dans ce travail on envisage entre autre un problème analogue à (B) dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ complexifié d'un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$.

On montre l'existence d'une norme minimale $\tilde{\ell}_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ dans la classe $(\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ des normes \mathcal{N} sur $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}$ vérifiant

$$\begin{aligned} b') \quad & \tilde{\mathcal{N}}(z) \leq \|z\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}, \text{ si } z \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \\ & \tilde{\mathcal{N}}(x) = \|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}, \text{ si } x \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Grâce à une transformation T utilisée dans l'étude des cellules d'harmonie on donne une interprétation géométrique simple de $\tilde{\ell}_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ et les normes de la classe $(\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$. On étudie ensuite dans \mathbb{C}^N , les moyennes $\lambda(\log V, 0, R)$, $A(\log V, 0, R)$ des fonctions $V \in (S)_{\mathbb{C}^N}$ sur les sphères $\partial B_{\mathbb{C}}(0, R)$. Les graphes de ces moyennes par rapport à un repère orthornormé $(t = \log R, y)$ dans \mathbb{R}^2 sont des droites parallèles à la 1ère bissectrice et sont situées dans une zone U de même direction, limitée par les droites

$$y = \log R, \quad y = \log R - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2N-2}\right) - \frac{1}{2N}.$$

Le nombre $\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2N-2} + \frac{1}{2N}\right)$ peut être amélioré (il est lié au problème A). Par contre, la région concernant les normes $(\mathcal{N}S)_{\mathbb{C}^N}$ est rigoureusement limitée par la droite $y = t - \lambda(\log \ell_N, 0, 1)$.

L'étude du problème (A) sera publiée ultérieurement.

2. Soient $(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ un espace de Hilbert réel $x \mapsto \|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = \langle x, x \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^{1/2}$ la norme sur $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ induite par le produit scalaire de $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$.

Soit $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ (somme directe). Si $a + ib \in \mathbb{C}$ et $(x, y) \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, on définit le produit $(a + ib)(x, y) = (ax - by, bx + ay)$. L'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ est alors un espace vectoriel sur \mathbb{C} . On écrit $(x, y) = x + iy = z$, $(x, 0) = x$, et on confond $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ avec $\{z = x + iy \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}} | y = 0\}$. Le produit scalaire

$$\langle x + iy, x' + iy' \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \langle x, x' \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} + \langle y, y' \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} + i\langle y, x' \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} - i\langle x, y' \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}$$

munit $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ d'une structure d'espace de Hilbert qui est le complexifié de $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Si $z = x + iy \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, on pose

$$\|z\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = (\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2)^{1/2}.$$

THÉORÈME 1. Soient $(\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ l'ensemble des normes $\tilde{\mathcal{N}}$ sur l'espace de Hilbert $(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}})$ complexifié de l'espace de Hilbert réel $(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$, telles que

$$(a') \quad \tilde{\mathcal{N}}(z) \leq \|z\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}, \text{ si } z \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

$$(b') \quad \tilde{\mathcal{N}}(x) = \|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}, \text{ si } z = x \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}.$$

a) L'application

$$\tilde{\ell} : \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$z \mapsto \tilde{\ell}(z) = \inf_{\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}} \{\tilde{\mathcal{N}}(z)\}$$

est une norme de la classe $(\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$.

b) Pour tout $z = x + iy \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ fixé, $\tilde{\ell}(z)$ est égale à la norme de l'application linéaire continue

$$f_z : \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}, a \mapsto f_z(a)$$

avec

$$f_z(a) = \langle z, a \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \langle x, a \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} + i \langle y, a \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}.$$

On a

$$(1) \quad \tilde{\ell}(z) = \left(\frac{1}{2} [\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 + \sqrt{(\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 - \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2)^2 + 4\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}] \right)^{1/2} = \|f_z\|.$$

c) Dans le cas $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^N$, la norme minimale $\tilde{\ell}_N$ est égale à la fonction d'appui de la boule unité fermée de Lie.

Démonstration.

a) Le début de la démonstration est analogue au cas où $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^N$ (cf. [H.T]). Soient $\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$, $z = x + iy \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ fixé. On supposera sans restreindre la généralité que les vecteurs x et y sont linéairement indépendants (sur \mathbb{R}). L'application

$$\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(\zeta, \eta) \mapsto \rho(\zeta, \eta) = \tilde{\mathcal{N}}\left(\zeta \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} + i\eta \frac{y}{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}\right)$$

est une norme sur \mathbb{R}^2 et on a :

$$\begin{aligned}\rho(\pm 1, 0) &= \rho\left(\pm \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}\right) = 1 \\ \rho(0, \pm 1) &= \rho\left(\pm \frac{iy}{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}\right) = 1.\end{aligned}$$

Le disque $D_2 = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(\zeta, \eta) \leq 1\}$ dans \mathbb{R}^2 est convexe et son bord contient les points $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Par conséquent D_2 est inclus dans le disque convexe

$$D = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|\zeta|, |\eta|) \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Donc

$$(2) \quad \rho(\zeta, \eta) \geq \max(|\zeta|, |\eta|)$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{N}}(x + iy) &= \tilde{\mathcal{N}}\left(\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} + i\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} \frac{y}{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}\right) \\ &= \rho(\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}, \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}) \geq \max(\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}, \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}).\end{aligned}$$

(cette inégalité est encore valable si x et y sont dépendants).

Or, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{\mathcal{N}}(x + iy) = \tilde{\mathcal{N}}(e^{i\theta}(x + iy)) \geq \max[\|x \cos \theta - y \sin \theta\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}, \|x \sin \theta + y \cos \theta\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}].$$

D'où

$$(3) \quad \mathcal{N}(x + iy) \geq \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|x \sin \theta + y \cos \theta\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = \tilde{\ell}(z).$$

L'application $z \mapsto \tilde{\ell}(z)$ de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme vérifiant a') et b'), donc, elle est un élément de $(\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ et d'après (3), $\tilde{\ell}(z)$ minore tous les $\tilde{\mathcal{N}}(x + iy)$ quelle que soit $\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$. Le calcul du second membre de (3) donne l'expression de $\tilde{\ell}(z)$ figurant dans le théorème.

b) Calcul de

$$\|f_z\| = \sup_{\substack{a \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \\ \|a\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 1}} |\langle z, a \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}|.$$

On a,

$$\|f_z\| = \sup_{\substack{a \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \\ \|a\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 1}} [|\langle x, a \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 + |\langle y, a \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2]^{1/2}.$$

Choisissons dans $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ un repère orthonormé $(e_i)_{i \in I}$, où e_1, e_2 sont dans le sous-espace vectoriel réel engendré par les vecteurs x et y de $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ (x et y supposés linéairement indépendants). Précisément soient :

$$e_1 = \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}, \quad e_2 = \alpha \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} + \beta \frac{y}{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}$$

avec $\|e_1\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 1$, $\langle e_1, e_2 \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 0$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Des relations

$$\begin{aligned} \|e_2\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 &= \left\langle \alpha \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} + \beta \frac{y}{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}, \alpha \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} + \beta \frac{y}{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} \right\rangle \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \frac{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} = 1, \end{aligned}$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = \alpha + \beta \frac{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} = 0,$$

on déduit :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\sqrt{D}} \quad (= 0, \text{ si } \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 0) \\ \beta &= \frac{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\sqrt{D}} \quad (= 1, \text{ si } \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 1) \end{aligned}$$

avec $D = \|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 - \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2$.

Soient

$$a = \sum_i a_i e_i, \quad x = \|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} e_1 = x_1 e_1$$

et

$$y = \frac{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\beta} (e_2 - \alpha e_1) = \frac{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} e_1 + \frac{\sqrt{D}}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}, \quad e_2 = y_1 e_1 + y_2 e_2$$

$$\begin{aligned}\langle x, a \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} &= x_1 a_1 \\ \langle y, a \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} &= y_1 a_1 + y_2 a_2.\end{aligned}$$

D'où

$$(3)' \quad \|f_z\|^2 = \sup_{\substack{a_1^2 + a_2^2 \leq 1 \\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}}} [(x_1^2 + y_1^2)a_1^2 + 2y_1 y_2 a_1 a_2 + y_2^2 a_2^2].$$

Le crochet est une forme quadratique en a_1, a_2 , positive, et atteint son maximum sur le cercle $a_1^2 + a_2^2 = 1$. (Le crochet a un laplacien ≥ 0 ; il est donc sousharmonique).

Pour calculer (3)' choisissons la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

Soit

$$\begin{aligned}\varphi(a_1, a_2) &= (x_1^2 + y_1^2)a_1^2 + 2y_1 y_2 a_1 a_2 + y_2^2 a_2^2 - t(a_1^2 + a_2^2 - 1) = \\ &= Aa_1^2 + 2Ba_1 a_2 + Ca_2^2 - t(a_1^2 + a_2^2 - 1)\end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} &= (A - t)a_1 + Ba_2 = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} &= Ba_1 + (C - t)a_2 = 0.\end{aligned}$$

Le système (4) doit avoir une solution non nulle d'où

$$\text{dét} \begin{vmatrix} A - t & B \\ B & C - t \end{vmatrix} = t^2 - (A + C)t + AC - B^2 = 0$$

on en déduit

$$(5) \quad t = A + C \pm \sqrt{(A + C)^2 - 4(AC - B^2)}.$$

De (4) et de la relation $a_1^2 + a_2^2 = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}Aa_1^2 + Ba_1 a_2 &= ta_1^2 \\ Ca_2^2 + Ba_1 a_2 &= ta_2^2.\end{aligned}$$

Donc,

$$Aa_1^2 + 2Ba_1a_2 + Ca_2^2 = t.$$

D'après (5)

$$(6) \quad \|f_z\|^2 = \frac{1}{2}(A+C+\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}) = \frac{1}{2}(A+C+\sqrt{(A-C)^2+4B^2}).$$

Avec

$$A = \|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 + \frac{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}$$

$$B = \frac{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2} \sqrt{D}, \quad C = \frac{D}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}.$$

D'où

$$A + C = \|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2, \quad A - C =$$

$$= \|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 + \frac{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2} - \frac{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 - \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}$$

$$A - C = \|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 - \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 + \frac{2\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}$$

$$(A - C)^2 + 4B^2 = (\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 - \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2)^2 + 4\frac{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^4}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^4} +$$

$$+ 4\frac{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2} (\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 - \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2) +$$

$$+ 4\frac{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^4} (\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 - \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2) =$$

$$= (\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 - \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2)^2 + 4\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2.$$

D'après (6)

$$\|f_z\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 + \sqrt{(\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2 - \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2)^2 + 4\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2})$$

on retrouve l'expression de $\tilde{\ell}(z)$. D'où

$$\|f_z\| = \tilde{\ell}(z).$$

c) La fonction d'appui d'un compact K de \mathbb{C}^N est la fonction positivement homogène d'ordre 1 et sous-additive $H_K(z) = \max_{\zeta \in K} \operatorname{Re}\langle \zeta, z \rangle$, où Re désigne la partie réelle de $\langle \zeta, z \rangle = \zeta_1 z_1 + \cdots + \zeta_N z_N$.

Soit $K = \overline{BL(0,1)}$ l'adhérence de la boule unité de Lie dans \mathbb{C}^N , on a si L désigne la norme de Lie :

$$H_K(z) = \max_{L(\zeta) \leq 1} \operatorname{Re}\langle \zeta, z \rangle = \log \left[\max_{L(\zeta) \leq 1} |e^{\langle \zeta, z \rangle}| \right]$$

pour z fixe, $e^{\langle \zeta, z \rangle}$ étant holomorphe en ζ , le maximum figurant dans le crochet, est atteint sur la frontière de Bergman-Šilov \check{B} de $\overline{BL(0,1)}$. Or (cf. [A])

$$\check{B} = \{ \zeta = ae^{i\theta} \mid a \in \mathbb{R}^N, \|a\| = 1, \theta \in \mathbb{R} \}.$$

Donc, si $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} H_K(z) &= \max_{\substack{\|a\|=1 \\ \theta \in \mathbb{R}}} \operatorname{Re}\langle ae^{i\theta}, z \rangle = \max_{\substack{\|a\|=1 \\ \theta \in \mathbb{R}}} \operatorname{Re}\langle a, e^{i\theta}(x + iy) \rangle \\ &= \max_{\substack{\|a\|=1 \\ \theta \in \mathbb{R}}} [\langle a, x \cos \theta - y \sin \theta \rangle] \\ &= \max_{\|a\|=1} [\langle x, a \rangle^2 + \langle y, a \rangle^2]^{1/2} = \ell_N(z). \end{aligned}$$

D'où le résultat

COROLLAIRE 1. *A chaque ouvert, convexe borné et disqué D de \mathbb{C}^N est associée une norme ℓ_D qui est minimale dans la classe $(\mathcal{N})_D$ des normes \mathcal{N} sur \mathbb{C}^N vérifiant :*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(z) &\leq J_D(z) & \text{si } z \in \mathbb{C}^N \\ \mathcal{N}(x) &= J_D(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

où J_D est la jauge de D . Le domaine

$$\tilde{D}_0 = \{ z \in \mathbb{C}^N \mid \ell_D(z) < 1 \}$$

est le plus grand ouvert convexe, borné et disqué de \mathbb{C}^N qui contient D et dont la trace sur \mathbb{R}^N est égale à $D \cap \mathbb{R}^N$. On a

$$\ell_D(z) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} J_D(x \sin \theta + y \cos \theta), \quad z = x + iy.$$

Rappelons que $J_D(z) = \inf\{\alpha > 0 \mid z \in \alpha D\}$ et que les hypothèses sur D impliquent que ℓ_D est une norme. La démonstration du corollaire est analogue à celle du théorème 1 en considérant la norme

$\rho_{D_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\rho_D(\zeta, \eta) = \mathcal{N}\left(\zeta \frac{x}{J_D(x)} + i\eta \frac{y}{J_D(y)}\right)$ où $\mathcal{N} \in (\mathcal{N})_D$ et $z = x + iy$, x et y linéairement indépendants.

Exemple. Soit $\ell_{\mathbb{R}}^2$ l'espace de Hilbert des suites réelles $x = (x_n)_{n \geq 1}$ avec

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \text{ et } \langle x, y \rangle_{\ell_{\mathbb{R}}^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

soit $\ell_{\mathbb{C}}^2$ le complexifié de $\ell_{\mathbb{R}}^2$: $z = x + iy \in \ell_{\mathbb{C}}^2$,

$$\langle z, z' \rangle_{\ell_{\mathbb{C}}^2} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \bar{z}'_n, \quad \|z\|_{\ell_{\mathbb{C}}^2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Alors

$$z \mapsto \tilde{\ell}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\|z\|_{\ell_{\mathbb{C}}^2}^2 + \sqrt{(\|x\|_{\ell_{\mathbb{R}}^2}^2 - \|y\|_{\ell_{\mathbb{R}}^2}^2)^2 + 4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right)^2} \right]^{1/2}$$

est une norme sur $\ell_{\mathbb{C}}^2$ qui coïncide avec la norme $\|z\|_{\ell_{\mathbb{R}}^2}$ sur $\ell_{\mathbb{R}}^2$, et minore la norme $\|z\|_{\ell^2}$ ainsi que toutes les normes sur $\ell_{\mathbb{C}}^2$ majorées par $\|z\|_{\ell_{\mathbb{C}}^2}$ et qui coïncident avec $\|x\|_{\ell_{\mathbb{R}}^2}$ si $z = x$.

3. Interprétation géométrique des normes $\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$

A tout $z = x + iy \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (complexifié de l'espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$) associons la sphère $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ comme suit :

Soient

$$\begin{aligned} \Pi &= \{t \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \mid \langle t - x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 0\} \\ (S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}) &= \{t \in \Pi \mid \|t - x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}\} \end{aligned}$$

et ω la projection orthogonale de 0 sur Π .

La droite $(d) \subset \Pi$, $(d) = \{t = \omega + k(x - \omega), k \in \mathbb{R}\}$ coupe la sphère $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ en deux points* α et β (cf. Fig. 1, on remarquera que $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ est réduite au point x si $z = x \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ et, dans le cas $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ se compose de deux points $(z_1 + iz_2), (\bar{z}_1 + i\bar{z}_2)$ du plan complexe).

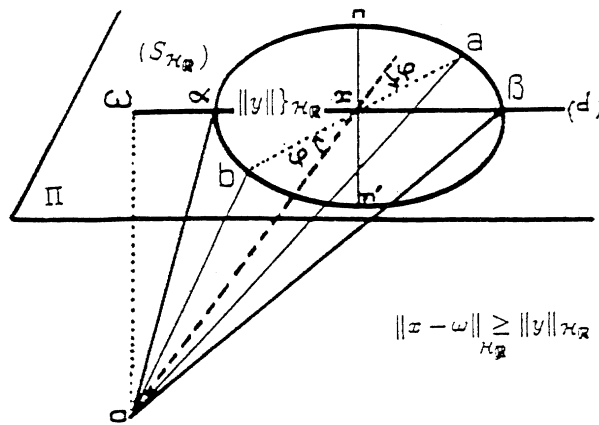


Fig. 1

THÉORÈME 2. Soit $\tilde{\ell} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ la norme minimale (théorème 1). On a

$$\tilde{\ell}(z) = \frac{1}{2}(\|\alpha\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} + \|\beta\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}).$$

Plus généralement, à toute norme $\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ et $z = x + iy \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ donné correspond deux points $a, b = 2x - a$ de $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ tels que

$$\tilde{\mathcal{N}}(z) = \frac{1}{2}(\|a\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} + \|b\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}).$$

*qui correspondent aux valeurs $k_1 = 1 - \frac{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x - \omega\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}$, $k_a = 1 + \frac{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x - \omega\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}$.

Démonstration.

Dans le cas $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^N$ la transformation T qui associe au point $z = x + iy \in \mathbb{C}^N$ la sphère $(S_{\mathbb{R}^N}^{N-2})$ est utilisée pour la détermination des cellules d'harmonicité des ouverts de $\mathbb{R}^N[A]$. Il semble séduisant qu'une telle transformation permet de donner une interprétation de la valeur de $\tilde{\mathcal{N}}(z)$.

La démonstration consiste à calculer la somme

$$\frac{1}{2}(\|\alpha\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} + \|\beta\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$$

et retrouver l'expression de $\tilde{\ell}(z)$.

Supposons le point ω à l'extérieur de $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ (i.e. $\|x - \omega\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} \geq \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}$). Les calculs sont analogues dans le cas contraire et $y \neq 0$.

D'après la loi de la médiane on a (Fig. 1) en posant $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = \|\cdot\|$:

$$(7) \quad \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Dans le triangle rectangle $(0, \omega, x)$,

$$\|x - \omega\|^2 = \|x\|^2 - \|\omega\|^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}{\|y\|^2} = \frac{D}{\|y\|^2}$$

avec $D = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2$. D'où

$$\begin{aligned} \|x - \omega\| &= \frac{\sqrt{D}}{\|y\|} \\ \|\alpha - \omega\| &= \frac{\sqrt{D}}{\|y\|} - \|y\|. \end{aligned}$$

Du triangle $(0, \omega, \alpha)$ on déduit,

$$(8) \quad \begin{aligned} \|\alpha\|^2 &= \left[\frac{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}{\|y\|^2} + \frac{D}{\|y\|^2} + \|y\|^2 - 2\sqrt{D} \right]. \\ \|\alpha\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\sqrt{D} \end{aligned}$$

et d'après (7),

$$(9) \quad \|\beta\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sqrt{D}$$

de (8) et (9) on déduit

$$(\|\alpha\| + \|\beta\|)^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|\alpha\|\|\beta\|)$$

et

$$\|\alpha\|\|\beta\| = [(\|x\|^2 + \|y\|^2)^2 - 4D]^{1/2} = [(\|x\|^2 - \|y\|^2)^2 + 4\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2]^{1/2}.$$

Finalement

$$(\|\alpha\| + \|\beta\|)^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2 + \sqrt{(\|x\|^2 - \|y\|^2)^2 + 4\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}]$$

et

$$\frac{1}{2}(\|\alpha\| + \|\beta\|)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\|x\|^2 + \|y\|^2 + \sqrt{(\|x\|^2 - \|y\|^2)^2 + 4\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}]^{1/2} = \tilde{\ell}(z)$$

REMARQUE. Si $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^N$, $\|\beta\| = L(z)$ (la norme de Lie).

Des calculs analogues montrent qu'étant donné une norme $\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ et le point $z = x + iy \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, on peut trouver deux points $a, b = 2x - a$ de $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ tels que

$$\tilde{\mathcal{N}}(z) = \frac{1}{2}(\|a\| + \|b\|).$$

En effet, plaçons-nous dans le cas $x \neq 0, y \neq 0$ et $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ non réduite à deux points.

Soient $a \in (S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ un point quelconque et $b = 2x - a$.

Posons

$$\varphi = \text{l'angle } \widehat{(0x, xa)}$$

défini par

$$\langle x, x - a \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = \|x\|\|y\| \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

On obtient :

$$(10) \quad \frac{1}{2}(\|a\| + \|b\|)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\|x\|^2 + \|y\|^2 + \sqrt{(\|x\|^2 - \|y\|^2)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \cos^2 \varphi}]$$

ou

$$\frac{1}{2}(\|a\| + \|b\|)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\|x\|^2 + \|y\|^2 + \sqrt{(\|x\|^2 - \|y\|^2)^2 + 4\|x\|^2\|y\|^2 \sin^2 \varphi}]^{1/2}.$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $a = n$, $(n - x) \perp (\alpha - x)$, ou $(n - x) \perp (x)$ on retrouve la norme $\|z\| = \frac{1}{2}(\|n\| + \|n'\|)$.

Soit $\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$. Il suffit de montrer qu'il existe φ tel que l'expression figurant dans (10) soit égale à $\tilde{\mathcal{N}}(z)$. Posons $\cos \theta = \frac{\tilde{\mathcal{N}}(z)}{\|z\|}$, $0 \leq \theta = \theta(z) \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta(x) = 0$ si $x \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$.

Le carré du second membre de (10) s'écrit

$$\frac{1}{2}(\|z\|^2 + [\|z\|^4 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \cos^2 \varphi]).$$

D'où les relations

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \theta \|z\|^2 &= \|z\|^2 + (\|z\|^4 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} \\ ((\cos 2\theta)\|z\|^2)^2 &= \|z\|^4 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \cos^2 \varphi \\ (1 - \cos^2 2\theta)\|z\|^4 &= 4\|x\|^2\|y\|^2 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \sin 2\theta \cdot \|z\|^2 &= 2\|x\|\|y\| \cos \varphi \\ |\cos \varphi| &= \frac{\|z\|^2}{2\|x\|\|y\|} \sin 2\theta \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ou

$$(11) \quad |\cos \varphi| = \frac{\tilde{\mathcal{N}}(z) \sqrt{\|z\|^2 - \tilde{\mathcal{N}}^2(z)}}{\|x\|\|y\|}.$$

Le second nombre de (11) est toujours ≤ 1 . En effet cette affirmation équivaut à

$$\tilde{\mathcal{N}}^4 - \|z\|^2 \tilde{\mathcal{N}} + \|x\| \|y\| \geq 0 \quad (\tilde{\mathcal{N}} = \tilde{\mathcal{N}}(z))$$

ce qui est vérifié puisque les racines du trinôme

$$X^2 - \|z\|^2 X + \|x\|^2 \|y\|^2$$

sont $X_1 = \|x\|^2$, $X_2 = \|y\|^2$ et on a $\tilde{\mathcal{N}}^2(z) \leq \max(\|x\|^2, \|y\|^2)$ d'après (2). Ainsi l'équation (11) a deux solutions φ_0 , $\pi - \varphi_0$ qui correspondent à deux points $a, b \in (S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$.

4. Étude de la classe $(S)_{\mathbb{C}^N}$.

On note

$$\lambda(V, z_0, R), \quad A(V, z_0, R), \quad M_V(R)$$

respectivement la moyenne de V sur la sphère $\partial B(z_0, R) = \{Z \in \mathbb{C}^N \mid \|z - z_0\| = R\}$ et sur la boule $B(z_0, R)$:

$$\begin{aligned} \lambda(V, z_0, R) &= \frac{1}{\omega_N(1)} \int_{\|a\|=1} V(z_0 + Ra) d\omega_N(a), \\ A(V, z_0, R) &= \frac{2N}{R^{2N}} \int_0^R \lambda(V, z_0, t) t^{2N-1} dt. \\ M_V(R) &= \max_{\|z\|=R} V(z). \end{aligned}$$

Si $V \in (S)_{\mathbb{C}^N}$, $\log V$ est p.s.h et vérifie

$$\begin{aligned} a') \quad & \log V(kz) = \log |k| + \log V(z) \\ b') \quad & \log V(z) \leq \log \|z\| \quad (z \in \mathbb{C}^N) \\ & \log V(x) = \log \|x\| \quad (x \in \mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

PROPOSITION 1. Pour toute $V \in (S)_{\mathbb{C}^N}$ on a :

$$1) \quad M_{\log V}(R) = \log R$$

Si $N > 1$, $(S)_{\mathbb{C}^N}$ ne contient aucun élément de la forme $V = \log |F|$, F entière.

Si $N = 1$, $(S)_{\mathbb{C}}$ est réduite au seul élément $|z|$.

$$2) \quad \lambda(\log V, 0, R) = \log R + \lambda(\log V, 0, 1)$$

$$\text{avec, } \inf_{V \in (S)_{\mathbb{C}^N}} \lambda(V, 0, 1) \geq -\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2N-2}\right).$$

$$3) \quad A(\log V, 0, R) = \log R - \frac{1}{2N} + \lambda(\log V, 0, 1).$$

4) Toutes les fonctions $\log V$, $V \in (S)_{\mathbb{C}^N}$ ont dans la boule $B(0, R)$ la même masse

$$\mu_{\log V}(R) = \frac{1}{2N-2} R^{2N-2}.$$

5) Dans \mathbb{R}^2 rapporté à une base orthonormée $(y, t = \log R)$ les graphes des fonctions

$$R \mapsto \lambda(\log V, 0, R)$$

$$R \mapsto A(\log V, 0, R)$$

sont des droites parallèles, situées dans une zone parallèle à la 1re bissectrice et limitée par les droites

$$y = \log R$$

$$y = \log R - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2N-2}\right) - \frac{1}{2N}.$$

La démonstration résulte des propriétés élémentaires des fonctions p.s.h.

1. Remarquons que si $N > 1$, $F(z) = \sum a_{\alpha} z^{\alpha}$, F entier, $|F| \notin (S)_{\mathbb{C}^N}$. En effet, si $|F| \in (S)_{\mathbb{C}}^N$,

$$\max_{\substack{|z_j|=r \\ j=1, \dots, N}} |F| \leq \sqrt{N}r$$

et $|a_{\alpha}| \leq \sqrt{N} \frac{r}{r^{|\alpha|}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$. D'où en faisant tendre r vers l'infini $|a_{\alpha}| = 0$ si $|\alpha| > 1$. Donc, $F(z) = a_1 z_1 + \cdots + a_N z_N$. L'égalité $|F(x)| = \|x\|$ ($x \in \mathbb{R}^N$) implique $|a_1| = \cdots = |a_N| = 1$, et l'inégalité

$|a_1 z_1 + \dots + a_N z_N| \leq \|z\|$ montre que $|a_j| = 1$, $|a_i| = 0$ si $i \neq j$. Finalement F doit être de la forme $e^{i\theta_j} z_j$. Mais alors $|F| = |z_j| \notin (S)_{\mathbb{C}^N}$. Si $N = 1$ $|F| = |z| \in (S)_{\mathbb{C}}$. Précisément dans ce cas $(S)_{\mathbb{C}}$ est réduite au seul élément $|z|$. (cf. préliminaires).

L'égalité 1) est une conséquence immédiate de l'hypothèse b'). D'autre part, $\lambda(\log V, 0, R)$ étant convexe de $\log R$ et majorée par $\log R$ est nécessairement de la forme $\log R + \lambda(\log V, 0, 1)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} A(\log V, 0, R) &= \frac{2N}{R^{2N}} \int_0^R [\log t + \lambda(\log V, 0, 1)] t^{2N-1} dt \\ &= \lambda(\log V, 0, 1) + \frac{2N}{R^{2N}} \int_0^R \log t \cdot t^{2N-1} dt. \end{aligned}$$

Le calcul de la dernière intégrale donne :

$$(12) \quad A(\log V, 0, R) = \log R + \lambda(\log V, 0, 1) - \frac{1}{2N}.$$

La minoration figurant dans 2) résulte d'une inégalité de P. Lelong (P.L. [2] Th. 6) : Si f est une fonction p.s.h dans tout \mathbb{C}^N et vérifie

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M_f(R)}{\log R} = \sigma \quad (0 < \sigma < \infty)$$

on a

$$M_f(R) - \lambda(f, 0, R) \leq C_N \sigma + C'_N (\sigma - \nu(0))$$

avec

$$\begin{aligned} C_N &= \sum_{q=1}^{2N-2} \frac{1}{q}, \quad C'_N = \sum_{q=2N-1}^{\infty} q^{-1} 2^{-q}, \quad \nu(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial \log t} \lambda(f, 0, t), \quad \nu(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \nu(t). \end{aligned}$$

Dans le cas $f = \log V$, $V \in (S)_{\mathbb{C}^N}$, on a, $\sigma = 1$, $\nu(0) = 1$. D'où l'estimation figurant dans 2).

L'égalité 3) résulte de 2) et (12). Enfin 4) est une conséquence de

$$\begin{aligned} \nu(R) &= \frac{\partial}{\partial \log R} \lambda(\log V, 0, R) = 1 \quad (V \in (S)_{\mathbb{C}^N}) \\ \mu_{\log V}(R) &= \frac{1}{2N-2} R^{2N-2} \nu(R) = \frac{1}{2N-2} R^{2N-2} \end{aligned}$$

References

- [A] Avanissian, V., Cellule d'harmonicit'e et prolongement analytique complexe, Travaux en cours Hermann, Paris (1985), 1–184.
- [P.L.-1] Lelong, P., Fonctions entières de type exponentiel dans \mathbb{C}^N , Ann. Inst. Fourier, t. **XVI** (1966), 269–318.
- [P.L.-2] Lelong, P., Sur les fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques et une extension du théorème de Banach-Steinhaus aux familles d'applications polynomiales, colloque d'analyse fonctionnelle, Liège sept. (1970), 21–45.
- [P.L.-3] Lelong, P., Mesure de Mahler et calcul de constantes universelles pour les polynômes de N -variables, Math. Ann. **299** (1994), 673–695.
- [H,P] Hahn-Petter Pflug, K. T., On minimal complex norm that extends the real Euclidian norm, Monatsh. Math. **105** (1988), 107–112.

(Received August 28, 1995)

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René-Descartes
67084 Strasbourg Cedex
France