論文の内容の要旨

論文題目

Stone–Čech boundaries of discrete groups and measure equivalence theory
(離散群のストーン–チェック境界と測度同値理論)

氏名
酒匂宏樹

本論文で扱うのは可算無限離散群である．確率空間への作用による軌道同値関係を通して離散群をとらえなおす測度論的群論という分野が近年盛んになってきている．離散群の保測作用による軌道同値関係とその間の同型を次で定義する．

定義 1. 可算離散群 G が標準確率空間 X に測度を保つ自由な変換 $(\alpha_g)_{g\in G}$ でエルゴード的に作用しているとする．作用 α による測度同値関係とは次で与えられる X 上の同値関係, すなわち, $\mathcal{R}_\alpha = \{(\alpha_g(x), x); g \in G, x \in X\}$ である．もう一つの可算離散群 Γ が標準確率空間 Y に測度を保つ自由な変換 $(\beta_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ でエルゴード的に作用しているとする．二つの作用 α と β が軌道同値である (もしくは二つの同値関係 $\mathcal{R}_\alpha$, $\mathcal{R}_\beta$ が同型である) とは, X から Y への Borel 集合族と測度を保つ写像 θ があって次を満たすことである :

$$\theta(\alpha_G(x)) = \beta_\Gamma\theta(x), \quad \text{almost every } x \in X.$$

同型な軌道同値関係は群の間に弱いつながりを与えていて, 片方の群はもう片方の群のある種の変形であるととらえることができる．群 G と群 Γ に代数的なつながりがあるとは限らない場合でも, G のユニタリー表現から Γ のユニタリー表現が誘導され, 群の性質を調べることができる．

群 G と Γ が与えられたとき保測作用を適当に定めると軌道同値になり得るか, という問いが測度論的群論の根本的問いである．この問題は群 G と Γ が測度同値になるかという問いと (アンプリフィケーションを除いて) 同等のものである．測度同値の定義は以下のとおりである．

定義 2 (Gromov)**.** 群 G と Γ を可算離散群とする．次の条件が成り立っているときに G と Γ が測度同値であるといい, $G \sim_{\mathrm{ME}} \Gamma$ とかく: 標準測度空間 (Σ, ν), 測度を保つ $G \times \Gamma$ の Σ への作用, そして可測な Γ-基本領域 $X \subset \Sigma$ と可測な G-基本領域 $Y \subset \Sigma$ が存在し, $\nu(X) < \infty$, $\nu(Y) < \infty$ が成り立つ．このような $(G \times \Gamma)$-作用を伴った測度空間 Σ を G と Γ の測度カップリングと呼ぶ.

測度カップリングは群の左遷移と右遷移の対を一般化したものである．群 G と Γ の確率空間への保測作用が同型な軌道同値関係を与えるとき, 同値関係自身がカップリングを与えていて, 二つの群は測度同値である．逆に, 二つの群 G と Γ の間に測度カップリング Σ があるとき, 自然に有限測度空間 $X \cong \Gamma\backslash\Sigma$ への G-作用 α と $Y \cong G\backslash\Sigma$ への Γ-作用 β が定まり, 二つの軌道同値関係は (アンプリフィケーションを除いて) 同型である.

測度同値関係と測度カップリングを調べるために, 作用素環とくに von Neumann 環の理論を用いることが有用である．von Neumann 環の研究は 1930 年代に Murray と von Neumann によってはじめられた．von Neumann 環のうち II_1-型因子環の構造論は作用素環論において中心的な研究課題である．二つの保測作用が与えられたとき, 群測度空間構成により II_1-型因子環 $L^\infty X \rtimes_\alpha G$, $L^\infty Y \rtimes_\beta \Gamma$ が構成される．作用が軌道同値ならばこの二つの環は弱い意味で同型であり, この作用素環を調べることで測度論的群論の研究を行うことができる.

群測度空間構成とともに重要な II_1-型環の構成方法として群 von Neumann 環と呼ばれるものがある．小沢登高氏の研究によって近年群 von Neumann 環の分類に大きな進展があった．小沢はクラス $\mathcal{S}$ と呼ばれる Stone–Čech 境界の従順性で定められる離散群のクラスを定義した．ここで Stone–Čech 境界 $\beta G \setminus G$ とは可換 C^*-環 $\ell_\infty(G)/c_0(G)$ の Gelfand スペクトルのことである．またクラス $\mathcal{S}$ の相対的概念として Bi-exactness と呼ばれるものを Brown との共著書籍で定義した.

本論文で Bi-exactness の概念を用いて測度同値についての剛性定理を得る．以下の三つの定理は二つの可算群の測度同値が各々の特徴的な部分群に遺伝することを示すものである．まずクラス $\mathcal{S}$ の直積群についての定理を述べたい．以下で離散群に完全性が仮定されているが, 多くの群が満たす性質であるため強い仮定ではないことに注意されたい.

定理 3. 群 G_i $(1 \leq i \leq m)$ が非従順な完全群であるとし, 群 Γ_j $(1 \leq j \leq n)$ を $\mathcal{S}$ の元とする．それらの直積を $G = \prod_i G_i$, $\Gamma = \prod_j \Gamma_j$ と書こう．整数 m は n 以上であるとする．もし $G \sim_{\mathrm{ME}} \Gamma$ であるならば, $m = n$ であり, 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在して, $G_{\sigma(j)} \sim_{\mathrm{ME}} \Gamma_j$ $(1 \leq j \leq n)$ である.

リース積についての結果も述べる． 群 A を底とする G のリース積 $A \wr G$ とは Bernoulli シフト $h((a_g)_g) = (a_{h^{-1}g})_g$ による半直積 $(\oplus_{g \in G} A^{(g)}) \rtimes G$ であたえられる群である (群 $A^{(g)}$ は A のコピーである).

定理 4. 群 G と Γ を非従順な完全群とし, 群 H と Λ は無限完全群であるとする．もし $A \wr (G \times H) \sim_{\mathrm{ME}} B \wr (\Gamma \times \Lambda)$ であるならば, $(G \times H) \sim_{\mathrm{ME}} (\Gamma \times \Lambda)$ である.

さらに自由積群についての結果を得る．融合を取らない自由積についての先行研究はあったが，次の結果は従順部分群についての融合を許している．

定理 5. 群 G_i $(i=1,2)$ と Γ_j $(j=1,2)$ はそれぞれ二つの非従順完全群の直積であるとする．群 $G = G_1 *_A G_2$ と $\Gamma = \Gamma_1 *_B \Gamma_2$ を共通の従順部分群 $A \subset G_i, B \subset \Gamma_j$ による融合積であるとする．このとき $G \sim_{\mathrm{ME}} \Gamma$ ならば，'$G_1 \sim_{\mathrm{ME}} \Gamma_1$ かつ $G_2 \sim_{\mathrm{ME}} \Gamma_2$' であるか '$G_1 \sim_{\mathrm{ME}} \Gamma_2$ かつ $G_2 \sim_{\mathrm{ME}} \Gamma_1$' である．

測度同値の意味で離散群を分類する際に重要なのは測度同値不変クラスの発見である．本論文で小沢のクラス $\mathcal{S}$ が測度同値不変クラスであることを示す．

定理 6. もし可算群 G と Γ が測度同値であり，Γ がクラス $\mathcal{S}$ の元ならば G もクラス $\mathcal{S}$ の元である．

この定理の証明ではクラス $\mathcal{S}$ であるという性質の C^*-環的な特徴付けを用いている．小沢の定理と合わせて次の群 von Neumann 環ついての結果を得る．Solid 性は von Neumann 環のある種の分解不可能性である．

系 7. もし可算群 G が $\mathbb{F}_2$ と測度同値であるならば，群 *von Neumann* 環 $L(G)$ は *Solid* である．

謝辞． 本研究の主要部分は著者のカリフォルニア大学ロサンゼルス校滞在中に得られたものである．カリフォルニア大学ロサンゼルス校の諸先生方，特にソリン・ポパ先生に深く感謝したい．同大学のアドリアン・イオアナ氏，同大学で講師をしていたシリル・ウデイエ氏によるコメントは初期の結果から本論文の結果に拡張させるのに不可欠であった．大学院在学中に北海道大学の佐藤康彦君，東京大学の水田有一君，カリフォルニア大学ロサンゼルス校のジェイソン・アシェー君，バンダービルト大学のイオヌット・キファン君など作用素環論に関わる若手研究者の活躍に刺激を受けた．東京大学数理科学研究棟 406, 421, 357 号室の皆様にお世話になった．九州大学の植田好道先生，京都大学の木田良才先生，東京理科大学の戸松玲治先生には研究の指針を探るにあたり，示唆に富んだアドバイスをいただいた．本研究科の小沢登高先生および指導教官の河東泰之先生には研究に関わるあらゆる面において絶え間なく支援していただいた．感謝の意は筆舌に尽くしがたい．最後になるが，酒匂真希さんと私たちの家族に感謝したい．