論文の内容の要旨

論文題目　On hyperkähler manifolds of type A_∞

(A_∞ 型超ケーラー多様体について)

氏名　服部　広大

実 $4n$ 次元リーマン多様体 (X, g) とその上の 3 つの複素構造 I_1, I_2, I_3 が、$I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = I_1 I_2 I_3 = -1$ を満たし、各 (g, I_i) がケーラー多様体となるとき、これを超ケーラー多様体と呼ぶ。このとき g のホロノミー群は $Sp(n)$ の部分群と同型であり、さらに g はリッチ平坦計量となる。複素構造 I_1, I_2, I_3 が上記の条件を満たしているならば、任意の $y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ に対し $I_y := y_1 I_1 + y_2 I_2 + y_3 I_3$ もまた複素構造であり (g, I_y) はケーラー多様体であるので、超ケーラー多様体上には S^2 によってパラメトライズされた複素構造の族が存在する。

超ケーラー多様体の系統的な構成法はいくつか知られているが、そのひとつに Gibbons-Hawking ansatz [4] がある。これは、$\mathbb{R}^3$ の有限部分集合から 4 次元の超ケーラー計量を構成する方法である。この手法によって、4 次元の A_k 型の ALE 空間と呼ばれる非コンパクト完備超ケーラー多様体の全てを構成することができる。さらに Anderson-Kronheimer-LeBrun は、$\mathbb{R}^3$ の可算無限部分集合から出発し同様の手法を使うことによって、A_∞ 型の超ケーラー多様体を構成した [1]。これは無限大の位相的タイプをもつ 4 次元非コンパクト完備超ケーラー計量で、A_k 型の ALE 空間と多くの共通点を持つ。ここで無限大の位相タイプをもつ多様体とは、ホモロジー群が無限生成となるような多様体をいう。また、この超ケーラー計量は超ケーラー商としても構成できることが [5] で示されている。

本論文では、A_∞ 型超ケーラー多様体の、主に微分幾何学的な側面につい

て研究する。そこで、まずは A_∞ 型超ケーラー多様体の周期写像を計算する。[1] では A_∞ 型超ケーラー多様体の 2 次元のホモロジー群が可算無限個の基底をもつことを示しているが、本論文ではさらに踏み込んで、その基底をなす各ホモロジー類が、ある複素構造に関する正則曲線によって代表され、さらにその体積は同じホモロジー類の中で最小値を与えていることを示す。また、これらの正則曲線上でケーラー形式を積分することによって、超ケーラー構造の周期写像を計算する。その手法として、トーリック超ケーラー多様体のトポロジーと周期写像に関する研究 [2][8] を参考にする。

A_∞ 型超ケーラー多様体のリーマン多様体としての局所的な性質は、同じような構成法で作られる A_k 型の ALE 空間との違いが見えづらい。実際、A_∞ 型超ケーラー計量は、局所的には A_k 型の ALE 空間 (X_k, g_k) の列 $\{(X_k, g_k)\}_k$ によって近似できることが証明される。

そこで本論文では、超ケーラー計量の漸近挙動によって両者の違いを捉えるために体積増大度を調べる。ここで体積増大度とは, リーマン多様体 (X, g) に対して次のように定義されるものである. 点 $p_0 \in X$ を中心とする半径 r の球 $B_g(p_0, r) \subset X$ の体積を $V_g(p_0, r)$ と書くものとする。このとき、ある関数 $f(r)$ に対して

$$0 < \liminf_{r\to+\infty} \frac{V_g(p_0, r)}{f(r)} \leq \limsup_{r\to+\infty} \frac{V_g(p_0, r)}{f(r)} < +\infty$$

が成り立つならば、g の体積増大度は $f(r)$ であるという。ただし g のリッチ曲率が非負ならば、上記の条件は点 $p_0 \in X$ の取り方に依存しないことが Bishop-Gromov の比較定理より従う。

実 4 次元を例にとると、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の体積増大度は r^4 であり、$\mathbb{R}^3 \times S^1$ 上の平坦計量の体積増大度は r^3 である。これらは自明な例であるが、もう少し非自明な例では体積増大度が r^4 となる ALE 空間 [3][4][9] や、r^3 となる multi-Taub-NUT 計量 [12][10][7] などがある。このように、体積増大度が r の整数乗となるようなリッチ平坦多様体はいくつか知られている。

これに対し本論文では、A_∞ 型超ケーラー多様体の体積増大度が r^3 と r^4 の中間であることを証明する。

A_∞ 型超ケーラー多様体は、無限次元のパラメーターの空間

$$(Im\mathbb{H})_0^{\mathbb{N}} := \{\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (Im\mathbb{H})^{\mathbb{N}};\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+|\lambda_n|} < +\infty\}$$

の各元ごとに構成される。ただし、$\mathbb{H}$ は四元数体であり $Im\mathbb{H}$ はその虚部からなる 3 次元の部分空間である。そこで、$\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (Im\mathbb{H})_0^{\mathbb{N}}$ から構成される A_∞ 型超ケーラー多様体と、その上の超ケーラー計量の組を (X_λ, g_λ) と書くことにする。本研究の目的は、固定された $p_0 \in X_\lambda$ に対して $V_{g_\lambda}(p_0, r)$ の漸近挙動を調べ、その挙動がパラメーター λ のとり方に対してどのように依存するかを観察することにある。このような問題意識の下で、以下のような主結果を得た。

Theorem 1. 任意の $\lambda \in (Im\mathbb{H})_0^{\mathbb{N}}$ 及び $p_0 \in X_\lambda$ に対し、関数 $V_{g_\lambda}(p_0, r)$ は

$$0 < \liminf_{r\to+\infty} \frac{V_{g_\lambda}(p_0,r)}{r^2\tau_\lambda^{-1}(r^2)} \le \limsup_{r\to+\infty} \frac{V_{g_\lambda}(p_0,r)}{r^2\tau_\lambda^{-1}(r^2)} < +\infty$$

を満たす。ただし、ここで関数 $\tau_\lambda : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ は $R \ge 0$ に対して

$$\tau_\lambda(R) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{R^2}{R + |\lambda_n|}$$

によって定義される。さらに、

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{V_{g_\lambda}(p_0,r)}{r^4} = 0, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{V_{g_\lambda}(p_0,r)}{r^3} = +\infty$$

が成立する。

さらに、パラメーター λ をうまくとって Theorem 1 を適用することにより、以下のような体積増大度をもつ超ケーラー多様体が存在することがわかった。

Theorem 2. (1) 実数 α を、$3 < \alpha < 4$ となるように任意にとる。このとき $\lambda \in (Im\mathbb{H})_0^{\mathbb{N}}$ をうまくとることにより、

$$0 < \liminf_{r\to+\infty} \frac{V_{g_\lambda}(p_0,r)}{r^\alpha} \le \limsup_{r\to+\infty} \frac{V_{g_\lambda}(p_0,r)}{r^\alpha} < +\infty$$

を満たすような完備超ケーラー多様体 (X_λ, g_λ) が実現される。
(2) $\lambda \in (Im\mathbb{H})_0^{\mathbb{N}}$ をうまくとることにより、任意の $\alpha < 4$ に対して

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{V_{g_\lambda}(p_0,r)}{r^4} = 0, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{V_{g_\lambda}(p_0,r)}{r^\alpha} = +\infty$$

を満たすような完備超ケーラー多様体 (X_λ, g_λ) が実現される。

次に、g_λ の Taub-NUT 変形を $g_\lambda^{(s)}$ とおく。ただし $s > 0$ は変形のパラメーターである。すると、$g_\lambda^{(s)}$ の体積増大度は以下によって与えられる。

Theorem 3. 任意の $\lambda \in (Im\mathbb{H})_0^{\mathbb{N}}$ 及び $s > 0$ に対して

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{V_{g_\lambda^{(s)}}(p_0,r)}{r^3} = \frac{8\pi^2}{3\sqrt{s}}$$

が成立する。

ここで、Theorem 2 より、パラメーターの列 $\{\lambda^{(k)} \in (Im\mathbb{H})_0^{\mathbb{N}}\}_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ をうまくとって $g_{\lambda^{(k)}}$ の体積増大度が $r^{3+\frac{1}{k}}$ となるようにする。このときに $k \to +\infty$ における極限を考えたい。$\{\lambda^{(k)}\}_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ を然るべくとっておけば、その極限 $\lambda^{(\infty)}$ は存在する。しかし、そのような場合でも $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+|\lambda_n^{(\infty)}|}$ の値が無限大に発散してしまうため、$\lambda^{(\infty)}$ というパラメーターから完備な超ケーラー計量を構成することはできない。そこで少し修正して、$\lambda^{(\infty)}$ に収束するようなパ

ラメーターの列 $\{\rho^{(k)} \in (Im\mathbb{H})_0^{\mathbb{N}}\}_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ を、$g_{\rho^{(k)}}$ の体積増大度が k について不変であるようにとる。このような状況で $\{(X_{\rho^{(k)}}, g_{\rho^{(k)}})\}_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ という多様体の列の「極限」を考えることにより、非完備な超ケーラー計量を構成できる。さらに $\lambda^{(\infty)}$ をうまくとっておけば、この非完備な計量は、リーマン多様体としては [11] で構成されている Ooguri-Vafa 計量の普遍被覆空間と同じものである。

本論文は、3 つの章から構成される。第 I 章 (第 2-3 節) では A_∞ 型超ケーラー多様体を構成し、その上の基本的な幾何学的性質を調べ、第 II 章 (第 4-8 節) で A_∞ 型超ケーラー多様体の体積増大度を計算し、そして第 III 章 (第 9-12 節) では超ケーラー商の列とその極限について論じる。

第 2 節では、A_∞ 型超ケーラー多様体を構成し、体積増大度を求めるのに必要な基本性質を調べる。構成の方法には Gibbons-Hawking ansatz と超ケーラー商構成法の 2 通りがあるが、我々は後者を採用し、[5] に従って構成を復習する。これは、第 5 節で論じる 2 点間の距離の下からの評価式を導くために、超ケーラー商による構成が必要となるからである。さらに A_∞ 型超ケーラー多様体 (X_λ, g_λ) を構成したのち、X_λ 上の超ケーラー構造を保つ S^1 作用と、その作用に関する超ケーラー運動量写像 $\mu_\lambda : X_\lambda \to Im\mathbb{H}$ を構成する。

第 3 節では、X_λ のホモロジー群と超ケーラー構造に関する周期写像を調べる。X_λ のホモロジー群は [2][5] に沿って、変形レトラクトを構成することによって求める。また、トーリック超ケーラー多様体の周期写像は [8] において計算されているが、全く同様にして A_∞ 型の場合にも計算することができる。

体積増大度に関する諸結果の証明は第 4 節から始める。体積増大度を求めるのに必要なことは、関数 $V_{g_\lambda}(p_0, r)$ の上下からの評価であるが、第 4 節において上からの評価を、第 5 節において下からの評価を論じる。第 4 節ではまず、X_λ 上の S^1 作用と超ケーラー運動量写像 μ_λ を用いて、計量 g_λ の情報を $\mathbb{R}^3$ 上可算個の極をもつ正値調和関数に帰着する。すると、この調和関数を用いることによって $V_{g_\lambda}(p_0, r)$ の上からの評価式を具体的に求めることができる。

続いて第 5 節では $V_{g_\lambda}(p_0, r)$ の下からの評価を考える。基本的なアイディアは第 4 節と同じだが、全く同様に評価をしていくと、どうしても我々が期待する評価よりも弱いものしか得られない。そこで第 5 節では、体積の評価をするのに便利な $B_{g_\lambda}(p_0, r)$ の開部分集合をうまくとることによって、期待通りの評価を得ることができる。

第 6 節では、第 4、5 節の評価を使って主定理を証明し、第 7 節で具体例を挙げて体積増大度を計算する。

第 8 節では、(X_λ, g_λ) の Taub-NUT 変形を定義し、第 4-6 節と同様の手法によって体積増大度を計算する。

第 9 節では A_∞ 型超ケーラー多様体が ALE 空間の列によって近似できる

ことを証明する。もう少し詳しく言うと、(X_λ, g_λ) の有界な開部分集合 U に対して、A_k 型の ALE 超ケーラー多様体 (X_k, g_k) と、U に微分同相な有界な開部分集合 U_k で、$g_k|_{U_k}$ が $k \to +\infty$ において $g_\lambda|_U$ に収束するようなものが存在する。ただしここでの位相は、計量 $g_\lambda|_U$ によって定まる $\bigotimes^2 T^*U$ 上のベクトル束の計量による C^0 ノルムを使う。また、$\{g_k|_{U_k}\}$ の極限を考えるために、U_k から U への S^1 同変な微分同相を構成する。

これに対し第 10 節では、A_∞ 型超ケーラー多様体の列の極限について、第 9 節の手法を使って論じる。そして、列をうまくとることによって非完備な超ケーラー計量を得る。これは特殊な場合には、Ooguri-Vafa 計量の普遍被覆空間とリーマン多様体として同じものである。さらに第 11 節で、この超ケーラー構造を保つ推移的な $\mathbb{Z}$-作用が存在することを示し、商空間をとることで I_b 型特異ファイバー $(b = 1, 2, \cdots)$ をもつ楕円曲面の、特異ファイバーの近傍上の超ケーラー計量が構成されることを見る。

第 11 節で構成した計量は、Gibbons-Hawking ansatz によっても構成できる。[11][6] では、Gibbons-Hawking ansatz によって Ooguri-vafa 計量を構成しているが、この手法を適用することによって I_b 型の楕円曲面上の超ケーラー計量が構成できることを第 12 節で示す。

参考文献

[1] T. Anderson, P. Kronheimer and C. LeBrun, Complete Ricci-flat Kähler manifolds of infinite topological type, *Commun. Math. Phys.*, **125**, (1989) 637-642.

[2] R. Bielawski and A. S. Dancer, The geometry and topology of toric hyperkähler manifolds, *Comm. Anal. Geom.*, 8 (2000) 727-760.

[3] T. Eguchi and A. J. Hanson, Asymptotically flat selfdual solutions to Euclidean gravity, *Phys. Lett.*, **B74** no. 3, (1978) 249-251.

[4] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, Gravitational multi-instantons, *Phys. Lett.*, 78B:4, (1978) 430-432.

[5] R. Goto, On hyper-Kähler manifolds of type A_∞, *Geom. Funct. Anal.*, **4**, No. 4, (1994) 424-454.

[6] M. Gross and P. M. H. Wilson, Large Complex Structure Limits of K3 Surfaces, *Journal of Differential Geometry*, **55**, (2000) 475-546.

[7] S. W. Hawking, Gravitational Instantons, *Phys. Lett.*, **A60**, (1977) 81.

[8] H. Konno, Variation of toric hyperKähler manifolds, *Internat. J. Math.*, 14 (2003) 289-311.

[9] P. B. Kronheimer, The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, *Journal of Diff. Geom.*, **29**, (1989) 665-683.

[10] E. Newman, L. Tamburino, and T. Unti, Empty-Space Generalization of the Schwarzschild Metric, *J. Math. Phys.*, **4**, (1963) 915.

[11] H. Ooguri, C. Vafa, Summing up Dirichlet Instantons, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, (1996), 3296-3298.

[12] A. H. Taub, Empty Space-Times Admitting a Three Parameter Group of Motions, *Ann. Math.*, **53**, No. 3, (1951) 472-490.