論文審査結果の要旨

氏　名：長 谷 川泰 子

論文題目

Principal series and generalized principal series Whittaker functions with peripheral K-types on the real symplectic group of rank 2

(実二次シンプレクティック群上の主系列表現及び一般主系列表現の周辺的 K-type を持つ Whittaker 関数)

一般に実リー群上 G の保型形式の，あるいは特に Langlands 型の Eisenstein 級数の，Fourier 展開を考える時に，G 上の Whittaker 関数は基本的な役割を果たす．実数体上の Whittaker 関数については，その存在と一意性は、分裂する群に対しては Shalika によって示されている．Whittaker 関数の明示的な公式は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 以外は、階数の低い群に対していくつかの結果がある．ここでは実 2 次シンプレクティック群上の Whittaker 関数について考える．

これまで，実二次シンプレクティック群 $G=\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ の極小 K-type を持つ Whittaker 関数の明示公式は極小放物形部分群に付随する主系列表現 (P_{min}-series) のときは石井卓によって，Jacobi 極大放物型部分群から誘導された一般主系列表現 (P_{J}-series) は宮崎琢也・織田孝幸によって，離散系列表現は織田によって得られている．標準表現の中では、唯一 Siegel 極大放物型部分群 P_{S} から誘導された一般主系列表現 (P_{S}-series) の Whittaker 関数の明示公式だけ得られていない．そこで本論文では P_{S}-series の Whittaker 関数の明示公式を得ることを目標にして研究している．

本論文で得られた結果は三つある．

一つ目は、主系列表現 P_{min}-series に属する第二種の Whittaker 関数で任意の 1 次元 K-type に属するものの明示公式を得た．

これは石井によって得られている極小 K-type における明示公式を用い，それにシフト作用素 (Dirac-Schmid 作用素) を適用することによって得られる．

より詳しく言うと、群 G の分裂カルタン部分群の連結成分を

$$A=\left\{\mathrm{diag}(a_1,\ a_2,\ a_1^{-1},\ a_2^{-1})\,\middle|\,a_1,a_2\in\mathbb{R}_{>0}\right\}$$

とするとき，P_{min}-series Whittaker 関数は $y_1=a_1/a_2=0$, $y_2=a_2^2=0$ の近傍で確定特異点型である．すなわち $y_1=0$, $y_2=0$ は原点で正規交

叉する二つの divisor で、原点 $(y_1, y_2) = (0, 0)$ の周りで Whittaker 関数は収束べき級数展開できる：

Theorem 1 全ての 1 次元 K-type $\tau_{(l,l)}$ を持つ Whittaker 関数を

$$\varphi^{(l,l)}_{(\tau_1,\tau_2)}(y) = \sum_{m,n\geq 0} a^{(l,l)}_{m,n}(2\pi y_1)^{2m+\tau_1}(2\pi y_2)^{n+\tau_2}$$

とする．この時，係数 $a^{(l,l)}_{m,n}$ は一般超幾何関数 ${}_3F_2$ の 1 での値を用いて明示できる．

二つ目の結果は、以下の通りである．まず群 $\mathrm{SL}^{\pm}(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現 D_k から誘導される一般化主系列表現 $\Pi = \Pi_{(e^{\nu_{\mathrm{S}}}\otimes D_k \otimes 1_{N_{\mathrm{S}}})}$ を定義する．ここでべき単部分群 N_{S} がアーベル群となる極大放物型部分群 P_{S} に対し，$P_{\mathrm{S}} = N_{\mathrm{S}}M_{\mathrm{S}}A_{\mathrm{S}}$ を Langlands 分解とするとき，$M_{\mathrm{S}} = \mathrm{SL}^{\pm}(2,\mathbb{R})$ であることに注意する．この Π に対して、著者は peripheral K-type と呼ぶ，次元が最小の特別な K-type（特にこの K-type は重複度が 1 である）の周辺の $(\mathfrak{g}, K)$-加群の構造を詳しく調べた．

G の表現 Π の peripheral K-type を (τ, V_τ) とすると，その dominant weight は $l = (l+k, l)$ $(l \in \mathbb{Z})$ の形である．本稿の二つ目の主結果は P_{S}-series の K-type $\tau_{(l+k,l)}$（$l \in \mathbb{Z}$）を持つベクトル値の Whittaker 関数が満たす 3 種類の微分方程式系を明示的に求めたことである．

微分方程式の一つは Casimir 方程式で，残りの二つは Dirac-Schmid 作用素から得られる．得られた偏微分方程式系は Weyl 群の位数と同じ 8 次の解空間を持つ holonomic 系であると予想している．

三つ目の結果は、この予想を特別な場合，すなわち $k = 2$, $l = -1$ の場合に、二つ目の主結果である偏微分方程式の解の例を与え、予想を正当化した．

ここで考える P_{S}-series は $\mathrm{SL}^{\pm}(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現 D_2 から誘導されている（つまり $k = 2$）．著者は、まず表現の埋め込み $\Pi \hookrightarrow \pi$ を考え、π の 1 次元 K-type に属する Whittaker 関数（石井の結果）を $S(\mathfrak{p}_{\pm})$ $(\hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ の元で Π の中へ移して，Π の中に生じる peripheral K-type を持つ Whittaker 関数を得た．今の場合は K-type $\tau_{(1,-1)}$ に属するもので，8 次元分一次独立なものを得ている．

高階の Lie 群上のベクトル値の Whittaker 関数の明示公式を得た例は、これまで殆どない．それゆえ、ここに展開された計算過程は新しい成果である．著者は、あまり例のない困難な計算をやり遂げ、今後応用上重要な緩増加 Whittaker 関数を調べる第一段階を完了した．特にここで得られた結果から、より一般の場合のありうる結果に大きな示唆を得ることができる．

このような理由から、論文提出者 長谷川泰子 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．