

論文の内容の要旨

Weak Amenability for a Group Acting on a Finite Dimensional CAT(0) Cube Complex

(有限次元 CAT(0) 方体複体に作用する群の弱従順性)

水田 有一

作用素環論ではその起源より従順群 (アメナブル群) が中心にあった。従順群の \mathfrak{vN} 群環や作用の分類は 70 年代から 80 年代にかけて行われ、成功裏に終わった。一方、非従順群は数多く知られており、中でも自由群は非従順群の代表的な例である。過去には任意の非従順群は自由群を部分群に持つのではないかと予想が立てられたほどである。

従順群の C^* 群環は、核型と呼ばれ、有限次元の環を経由するよい近似を持つ。一方、非従順群である自由群も論文 [Ha] によってそれに準じる近似を持ちうることが発見され、それは後に弱従順性として定式化された。弱従順な群は、それに付随する Cowling-Haagerup 定数と呼ばれる量によってさらに細かく分けられている。例えば自由群、コクセター群 $[F][J]$ は従順群と同じくこの定数は 1 であり、また実階数 1 のリー群の格子に

よってこの定数が 1 より真に大きくなる例も与えられている [Do][DH]。他方、実階数 2 以上のリー群の格子は弱従順ではないことが知られている。

自由群はそのケイリーグラフである樹木に固有な作用を持ち、その作用が弱従順性を示す上で鍵となるのであるが、その議論は後に樹木に固有な作用を持つ群へと拡張された。本論文の目的は、有限次元の $CAT(0)$ 方体複体に作用する群の弱従順性を示すことである。 $CAT(0)$ 方体複体とは、方体 (Cube) からなる複体であり、単連結、非正曲率のものを言うが、一次元 (グラフ) の場合にはちょうど樹木にあたる。我々の手法は Bożejko-Picardello[BP] の樹木の場合を $CAT(0)$ 方体複体の場合へと拡張したものである。 $CAT(0)$ 方体複体の一次元骨格はメディアングラフと呼ばれるグラフとなっている。メディアングラフとは、任意の 3 点 x, y, z に対してそれらを結ぶ測地線上の点集合 $[x, y], [y, z], [z, x]$ 上の点がただ一つ存在するようなグラフのことである。この性質を用いて 2 点を結ぶ測地線の断面に凸胞複体の構造を新たに導入して、その位相的な性質及びその増大度を調べる。元々の Bożejko-Picardello の議論では、この複体は常に一点からなるが、 $CAT(0)$ 方体複体の場合には 1 点にホモトピック (可縮) であること、またその増大度が多項式的であることが証明される。これらを用いて得られたのが以下の定理である。

定理 1 X を有限次元の $CAT(0)$ 方体複体とする。また、非負整数 n に対して、 $X_n = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) = n\}$ と定める。このとき X_n の定義関数によるシューア積のノルムは多項式的に増大する。すなわちある多項式 p があり、 $\|X_n\|_{cb} \leq p(n)$ となる。

定理 2 群 Γ が有限次元の $CAT(0)$ 方体複体に固有な作用を持てば、弱従順であり、その Cowling-Haagerup 定数は 1 である。

なお、有限次元の $CAT(0)$ 方体複体に固有な作用を持つ群が弱従順であることは、一様有界表現を用いた別の手法で Guentner-Higson によって証明されている。

参考文献

- [BP] Bożejko, Marek; Picardello, Massimo A. Weakly amenable groups and amalgamated products. Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), no. 4, 1039–1046.
- [Do] Dorofaeff, B. Weak amenability and semidirect products in simple Lie groups. Math. Ann. 306 (1996), 737–742.

- [DH] De Cannière, Jean; Haagerup, Uffe Multipliers of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups. *Amer. J. Math.* 107 (1985), no. 2, 455–500.
- [F] Fendler, Gero Weak amenability of Coxeter groups, ArXiv preprint math.GR/0203052.
- [Ha] Haagerup, Uffe An example of a nonnuclear C^* -algebra, which has the metric approximation property. *Invent. Math.* 50 (1978/79), no. 3, 279–293.
- [J] Januszkiewicz, Tadeusz For Coxeter groups $z^{|g|}$ is a coefficient of a uniformly bounded representation. *Fund. Math.* 174 (2002), no. 1, 79–86.