論文の内容の要旨

Singularities for Solutions to Schrödinger Equations
(シュレーディンガー方程式の解の特異性)

毛　仕寛

この論文では、調和振動子ポテンシャルをもつ変数係数シュレーディンガー方程式について研究した。また、定磁場中の変数係数シュレーディンガー作用素についても考察した。この論文の目的は解の特異性を超局所の視点から初期値を用いて特徴付けることである。

以下のような線形シュレーディンガー方程式を考える。

$$\begin{cases} D_t u + Hu = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{0.1}$$

ここで、$u = u(t,x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ は各 $t \in \mathbb{R}$ について、時刻 t での波動関数を表す。ここで $D_t = \frac{1}{i}\partial_t$ と書いた。また

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n} \partial_{x_i} a_{ij}(x) \partial_{x_j} + W(x) \tag{0.2}$$

はシステムのハミルトン演算子である。

シュレーディンガー方程式は量子力学の基本的な方程式であり、その数学

的構造については、スペクトル理論、散乱理論、基本解に関する研究を含めて、多くの研究がある。(たとえば、テキスト [27] 等を参照せよ。)。

この論文においては $a_{ij}(x)$ と $W(x)$ に関する適当な仮定の下で、超局所的な特異性の伝播について考える。シュレーディンガー方程式に関しての特異性の研究は Boutet de Monvel[1] から始められた。その論文において、Boutet de Monvel はシュレーディンガー方程式の解の特異性が無限大の速度で伝播することを示した。これは波動方程式と大きく異なる性質である。Hörmander の有名な特異性の伝播定理から波動方程式の特異性は有限の速度で伝播する ([10])。しかし、Boutet de Monve の論文においては、シュレーディンガー方程式の解 $u(t)$ の時刻 t での特異性と初期値 u_0 との関係は与えられなかった。Craig, Kappeler and Strauss [2] は 1996 年で変数係数シュレーディンガー方程式の特異性の伝播について考察した。彼らはこの論文において、nontrapping な測地線に沿って、解の滑らかさは初期値の漸近速度に対応する錐形状領域での減衰から従うという smoothing property を証明した。その後、多くの関連する研究が行われた。([3–5, 7, 11, 17, 23, 26, 30] 等を見よ。)

2004 年の論文 [9] において Hassell と Wunsch は、Melrose [22] によって定義された散乱多様体上でのシュレーディンガー方程式の解の特異性の特徴付けについて研究した。また、Nakamura [24] は変数係数シュレーディンガー方程式に対して異なる手法を用いて、違う定式での特徴付けを得た。Nakamura の方法は比較的簡明であり、その結果は散乱多様体や解析的特異性などへ拡張された。([12, 18–20, 25] を見よ。)

一方、摂動した調和振動子の基本解の滑らかさ、解の特異性の伝播については、[6, 8, 13–16, 21, 28, 29, 31–35] などの研究がある。これらの論文の多くは、定数係数のシュレーディンガー方程式についての研究である。すなわち、$a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ の場合を考えている。本論文においては、調和振動子に対する変数係数の摂動を考える。また、同様の挙動を示す系として、定磁場をもつシュレーディンガー作用素の変数係数の摂動も考察する。具体的には、以下の問題を研究する。

- 調和振動子の短距離型摂動:すなわち、式 (0.2) で $W(x) = \frac{|x|^2}{2} + V(x)$ の場合を考える。$a_{ij}(x)$ と $V(x)$ は滑らかな実数値関数で、以下のような条件を満たすとする。

  Assumption A. 各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $(a_{jk}(x))_{j,k}$ は正対称行列 である。さらに、$\mu > 1$ が存在して 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $C_\alpha > 0$ が存在し

  $$\left|\partial_x^\alpha (a_{jk}(x) - \delta_{jk})\right| \le C_\alpha \langle x\rangle^{-\mu-|\alpha|},$$
  $$\left|\partial_x^\alpha V(x)\right| \le C_\alpha \langle x\rangle^{2-\mu-|\alpha|}$$

  を満たす。ここで、$\langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}$ である。

この場合については、[24] の手法を拡張することにより特異性の特徴付けを行う。この問題については、古典的な散乱データと摂動していない調和振動子 $H_0 = -\frac{1}{2}\triangle + \frac{1}{2}|x|^2$ の時間発展を用いて解の特異性を特徴付ける。詳細については、第 2 章で述べる。

- 定磁場の短距離型摂動：以下の形のハミルトン演算子を考える。

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\Big(D_{x_j}-(Mx)_j-A_j(x)\Big)a_{jk}(x)\Big(D_{x_k}-(Mx)_k-A_k(x)\Big)+V(x)$$

ここで、

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

とする。摂動については、上の調和振動子の短距離型摂動とほぼ同様の条件を仮定する。すなわち、$a_{jk}(x)$, $A_j(x)$, $V(x)$ は滑らかな実数値関数であり、以下の条件を満たすと仮定する。

Assumption B. 各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $(a_{jk}(x))_{j,k}$ は正対称行列 である。さらに、$\mu_1 > 1,\ \mu_2 > 1,\ \mu_3 > 0$ が存在して 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対してある $C_\alpha > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\alpha(a_{jk}(x) - \delta_{jk})\right| &\le C_\alpha \langle x\rangle^{-\mu_1-|\alpha|}, \\
\left|\partial_x^\alpha V(x)\right| &\le C_\alpha \langle x\rangle^{2-\mu_2-|\alpha|}, \\
\left|\partial_x^\alpha A_j(x)\right| &\le C_\alpha \langle x\rangle^{-\mu_3-|\alpha|}
\end{aligned}$$

を満たす。

第 3 章においては、調和振動子の短距離型摂動の場合と同様の手法を用いて、古典的な散乱データと摂動していない定磁場ハミルトン演算子 $H_0 = \frac{1}{2}(D_x - Mx)^2$ の時間発展作用素を用いて解の特異性を特徴付ける。

- 第 4 章においては、第 2 章の結果の長距離型摂動へ拡張を研究する。すなわち、第 2 章での仮定の中の $\mu > 1$ を $\mu > 0$ に置き換えた場合について考察する。ここでは、[25] の手法を拡張して、修正された自由発展作用素を構成する。さらに古典的な散乱データと摂動されていない調和振動子 $H_0 = -\frac{1}{2}\triangle + \frac{1}{2}|x|^2$ の時間発展作用素を組み合わせて、シュレーディンガー方程式の解の特異性を特徴付ける。

本論文の内容の一部は中村周教授（東京大学）との共同研究に基づいている。

References

[1] Boutet de Monvel, L.: Propagation des singularités des solutions d'equation de Schrödinger, in Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations, Springer L. N. M. **459**, 1975.

[2] Craig, W., Kappeler, T., Strauss, W.: Microlocal disipertive smoothing for the Schrödinger equation. Comm. Pure Appl. Math. **48**, 769–860 (1996).

[3] Doi, S.: Smoothing effects of Schrödinger evolution groups on Riemannian manifolds. Duke Mathematical Journal, vol.**82**-3 (1996), 679–706.

[4] Doi, S.: Commutator algebra and abstract smoothing effect. Journal of Functional Analysis, **168**-2 (1999), 428–469.

[5] Doi, S.: Smoothing effects for Schrödinger evolution equation and global behavior of geodesic flow. Mathematische Annalen, **318**-2 (2000), 355–389.

[6] Doi, S.: Dispersion of singularities of solutions for Schrödinger equations. Comm. Math. Phys. **250**-3(2004), 473–505.

[7] Doi, S.: Smoothness of solutions for Schrödinger equations with unbounded potentials. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **41**, 175–221 (2005).

[8] Doi, S.: Singularities of solutions of Schrödinger equations for perturbed harmonic oscillators. Hyperbolic problems and related topics, 185–199, Grad. Ser. Anal., Int. Press, Somerville, MA, 2003.

[9] Hassel, A., Wunsch, J.: The Schrödinger propagator for scattering metrics. Ann. Math. **162**, 487–523 (2005).

[10] Hörmander, L.: *Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol. I-IV. Springer Verlag, 1983–1985.

[11] Ito, K. , Propagation of singularities for Schrödinger equations on the Euclidean space with a scattering metric, Comm. Partial Differential Equations, **31**, 1735–1777, (2006).

[12] Ito, K., Nakamura, S.: Singularities of solutions to Schrödinger equation on scattering manifold. Preprint, Nov. 2007. To appear in American J. Math. (http://arxiv.org/abs/0711.3258)

[13] Kapitanski, L., Rodnianski, I. and Yajima, K.: On the fundamental solution of a perturbed harmonic oscillator, Topol. Methods Nonlinear Anal. **9**, 77–106 (1997).

[14] Mao, S.: Singularities for solutions to Schrödinger equations with constant magnetic fields. preprint.

[15] Mao, S.: Singularities for perturbed magnetic fields. preprint.

[16] Mao, S., Nakamra, S.: Wave front set for perturbed harmonic oscillators. Comm. Partial Differential Equations **34** (5), 506–519 (2009).

[17] Martinez, A., Nakamura, S., Sordoni, V.: Analytic smoothing effect for the Schrödinger equation with long-range perturbation. Comm. Pure Appl. Math. 59 1330–1351 (2006)

[18] Martinez, A., Nakamura, S., Sordoni, V.: Analytic singularities for long range Schrödinger equations. Comptes Rendus Mathematique **346**, 15-16 (2008), 849–852.

[19] Martinez, A., Nakamura, S., Sordoni, V.: Analytic wave front for solutions to Schrödinger equation, Advances in Math. **222**, 1277–1307 (2009).

[20] Martinez, A., Nakamura, S., Sordoni, V.: Analytic Wave Front Set for Solutions to Schrödinger Equations II – Long Range Perturbations. Preprint, July 2008. (preprint at arxiv.org).

[21] Martinez, A., Yajima, K.: On the fundamental solution of semiclassical Schrödinger equations at resonant times. Comm. Math. Phys. **216** (2001), no. 2, 357–373.

[22] Melrose, R.: Spectral and scattering theory for the Laplacian on asymptotically Euclidian spaces, Spectral and scattering theory (M. Ikawa, ed.), Marcel Dekker.

[23] Nakamura, S.: Propagation of homogeneous wave front set for Schrödinger equations. Duke Math. J. **126** (2005), 349–367.

[24] Nakamura, S.: Wave front set for solutions to Schrödinger equations. J. Functional Analysis **256**, 1299–1309 (2009).

[25] Nakamura, S.: Semiclassical singularity propagation property for Schrödinger equations. J. Math. Soc. Japan **61** (1), 177–211 (2009).

[26] Ōkaji, T.: Propagation of wave packets and smoothing properties of solutions to Schrödinger equations with unbounded potential. preprint.

[27] Reed, M. and Simon, B.: The methods of modern mathematical physics I-IV, Academic Press, 1972–1980.

[28] Weinstein, A.: A symbol class for some Schrödinger equations on $\mathbf{R}^n$, Amer. J. Math. **107** (1985), 1–21.

[29] Weinstein, A. and Zelditch, S.: Singularities of solutions of some Schrödinger equations on $\mathbf{R}^n$, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 449–452.

[30] Wunsch, J.: Propagation of singularities and growth for Schrödinger operators. Duke Math. J. **98** (1999), 137–186.

[31] Wunsch, J.: The trace of the generalized harmonic oscillator. Annales de l'institut Fourier, **49**, no.1, 351–373 (1999).

[32] Yajima, K.: Smoothness and non-smoothness of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equations. Comm. Math. Phys. **181**, 605–629 (1996).

[33] Yajima, K.: On fundamental solution of time dependent Schrödinger equations. Advances in differential equations and mathematical physics (Atlanta, GA, 1997), 49–68, Contemp. Math., **217**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[34] Yajima, K.: On the behaviour at infinity of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equation. Rev. Math. Phys. **13** (2001), no. 7, 891–920.

[35] Zelditch, S.: Reconstruction of singularities for solutions of Schrödinger's equation. Commun. Math. Phys. **90**, 1–26 (1983).