

# 論文内容の要旨

## 題目

Coefficient inverse problems for partial differential equations in the viscoelasticity, the material science and population dynamics  
by Carleman estimates

(カーレマン評価を用いた、粘弾性論・材料科学・個体群動態学  
における偏微分方程式系の係数決定逆問題について)

上坂 正晃

2011 年 1 月 7 日

本論文では、Carleman 評価と呼ばれる偏微分方程式の解に関するア・プリオリ評価を用いた係数決定の逆問題について考察する。

係数決定の逆問題とは、偏微分方程式系で記述されるモデルの中で、(直接測定できないなどの理由で)未知の係数を、解の部分的な観測情報をもとに回復する問題である。こうした逆問題の数学解析で基本的になるのは、逆問題の一意性と安定性である。一意性とは、その観測によって係数を一意に定めることができるかということであり、安定性とは、観測に伴う誤差やノイズが、係数決定にどれだけの影響を与えるかということである。

本論文では、弾性論・材料科学・個体群動態学などにおいて提案されているモデルに対し、その係数決定の逆問題を定式化し、一意性と安定性を示すことを主眼とする。

特に本論文で取り扱うのは、以下の問題である。

- 粘弾性モデル (Kelvin-Voigt モデル) の係数決定問題
- Phase Field モデルの 1 成分のみの観測からの係数決定問題
- 構造化された人口モデルに対する係数決定問題

## 1 粘弾性モデルの係数決定問題

ここでは、粘弾性体を記述するモデルの中でも、基本的なモデルである Kelvin-Voigt モデルに関する逆問題を考察する。

等方的な Kelvin-Voigt モデルに関して説明する。 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  を有界領域とし、 $T > 0$  とする。このとき、

Kelvin-Voigt モデルは、

$$P\mathbf{u}(x, t) := \rho(x)\partial_t^2 \mathbf{u}(x, t) - L_{\lambda, \mu} \mathbf{u}(x, t) - L_{\eta, \gamma}(\partial_t \mathbf{u})(x, t) = \mathbf{f}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (-T, T) \quad (1)$$

という形で記述される。ここで、 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  は弾性体の変位を表すベクトルであり、 $\rho$  は密度、 $\mathbf{f}$  は外力項である。 $L_{\lambda, \mu}$  は、等方的線形弾性体における Lamé 作用素

$$L_{\lambda, \mu} \mathbf{u} := \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + (\operatorname{div} \mathbf{u}) \nabla \lambda + (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \nabla \mu \quad (2)$$

であるとし、 $\lambda, \mu$  は弾性係数、 $\eta, \gamma$  は粘性係数とし、これらは正の値を取る。

この方程式に関して、次のような係数決定問題を考える。

係数決定問題  $\mathbf{u}$  が (1) を満たすとし、外力項  $\mathbf{f}$  は既知とする。 $\Gamma \subset \partial\Omega$  を  $\Omega$  の部分境界とすると、観測データ

$$\mathbf{u}|_{\Gamma \times (-T, T)}, \quad \partial_\nu \mathbf{u}|_{\Gamma \times (-T, T)}, \quad \mathbf{u}|_{\Omega \times \{0\}}$$

から、密度  $\rho$ 、弾性係数  $\lambda, \mu$  及び粘性係数  $\eta, \gamma$  を決定せよ。

この係数決定問題問題に対して、適切な観測を 2 回行うという条件のもと、逆問題の一意性と安定性を証明した。

**Theorem 1.1.** 密度、弾性係数と粘性係数の 2 つのセット  $(\rho_j, \lambda_j, \mu_j, \eta_j, \gamma_j)$  ( $j = 1, 2$ ) は、 $\Gamma$  上で  $\rho_1 = \rho_2, \lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_2, \eta_1 = \eta_2, \gamma_1 = \gamma_2$  を満たすとする。また、 $\mathbf{u}_j^{(k)}$  ( $j, k = 1, 2$ ) は次を満たすとする。

$$\rho_j \partial_t^2 \mathbf{u}_j^{(k)} - L_{\lambda_j, \mu_j} \mathbf{u}_j^{(k)} - L_{\eta_j, \gamma_j}(\partial_t \mathbf{u}_j^{(k)}) = \mathbf{f}, \quad (x, t) \in \Omega \times (-T, T) \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_j^{(k)}(x, 0) = \mathbf{p}^{(k)}(x), \quad \partial_t \mathbf{u}_j^{(k)}(x, 0) = \mathbf{q}^{(k)}(x). \quad (4)$$

また、 $\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{q}^{(k)}$  は、ある正値性の条件を満たすとする。また、

$$M := \sum_{j=1,2} \sum_{k=1,2} \|\mathbf{u}_j^{(k)}\|_{H^5(-T, T; H^2(\Omega))}$$

と置く。

このとき、 $\operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega \setminus \Gamma) > 0$  を満たす任意の部分領域  $\omega \subset \bar{\Omega} \cup \Gamma$  に対し、 $M$  と  $T$  に依存する定数  $C > 0$  と  $\kappa \in (0, 1)$  が存在して、であるならば、

$$\|\lambda_2 - \lambda_1\|_{H^2(\omega)} + \|\mu_2 - \mu_1\|_{H^2(\omega)} + \|\gamma_2 - \gamma_1\|_{H^2(\omega)} + \|\eta_2 - \eta_1\|_{H^2(\omega)} + \|\rho_2 - \rho_1\|_{H^1(\omega)} \leq C (M^{1-\kappa} B^\kappa + B) \quad (5)$$

が成り立つ。ただし、ここに

$$B := \sum_{k=1,2} \left( \|\mathbf{u}_2^{(k)} - \mathbf{u}_1^{(k)}\|_{H^5(-T, T; H^2(\Gamma))} + \|\mathbf{u}_2^{(k)} - \mathbf{u}_1^{(k)}\|_{H^6(-T, T; H^1(\Gamma))} \right)$$

であるとする。

上の評価で、 $M$  は解に関するア・プリオリな情報であり、 $B$  は観測データの誤差を表すし、評価自体は条件付きの Hölder 型評価である。

## 2 Phase Field モデルの 1 成分のみの観測からの係数決定問題

線形化された Phase Field モデルを考える。

$$\partial_t u + l\partial_t v = \nabla \cdot (K\nabla u) + a_{11}u + a_{12}v + A_{11} \cdot \nabla u + A_{12} \cdot \nabla v + f_1 \quad \text{in } \Omega_T := (0, T) \times \Omega \quad (6)$$

$$\partial_t v = \nabla \cdot (M\nabla v) + a_{21}u + a_{22}v + A_{21} \cdot \nabla u + A_{22} \cdot \nabla v + f_2 \quad \text{in } \Omega_T := (0, T) \times \Omega \quad (7)$$

$$u = v = 0 \quad \text{on } \Sigma_T := (0, T) \times \partial\Omega \quad (8)$$

ここに、 $u$  は温度、 $v$  は状態変数、 $K$  と  $M$  はそれぞれ熱伝導係数と易動度を表すスカラー関数である。このモデルに対して次の係数決定問題を考える。

係数決定問題  $\omega \subset \Omega$  を部分領域、 $\theta \in (0, T)$  とする。また、 $M$  と  $K$  以外の係数と非斉次項は既知とする。観測データ

$$u|_{(0,T) \times \omega}, \quad (u, v)|_{\{\theta\} \times \Omega}$$

から、熱伝導係数  $K$  と易動度  $M$  を決定せよ。

この逆問題に関して、観測領域  $\omega$  におけるデータは  $u$  のみである。實際上こうした観測はより望ましいものであると考えられる。なぜなら、現実問題として、温度  $u$  は状態変数  $v$  よりもはるかに測定しやすい量だからである。

この逆問題に関して、以下のことを証明した。

**Theorem 2.1.**  $(u_j, v_j)$  ( $j = 1, 2$ ) は、上の (6)–(8) において、 $M = M_j, K = K_j$  としたものを満たすとす。次の仮定をおく。

- $\|a_{jk}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|K_j\|_{L^\infty(\Omega)}, \|M_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq R$  ( $j, k = 1, 2$ ),
- $\|A_{jk}\|_{(L^\infty(\Omega))^n} \leq R$  ( $j, k = 1, 2$ ),
- $\partial\omega \cap \partial\Omega = \gamma$  であり、かつ  $|\gamma| \neq 0$  である。また、 $\partial\omega$  は  $C^2$  級である。
- $|A_{12} \cdot \nu| \neq 0$  on  $\gamma$ ,
- ある  $\delta_0 > 0$  が存在して、 $\bar{\Omega}$  上で  $|\Delta u_2(\theta, \cdot)|, |\Delta v_2(\theta, \cdot)| > \delta_0$  が成り立つ。
- $\|u_2\|_{C(\bar{\Omega}_T)}, \|v_2\|_{C(\bar{\Omega}_T)} \leq R$ .

また、 $\Omega$  上で  $u_1(\theta, \cdot) = u_2(\theta, \cdot)$  かつ  $v_1(\theta, \cdot) = v_2(\theta, \cdot)$  であるとする。このとき、 $R$  に依存する定数  $C > 0$  が存在して、

$$\|K_1 - K_2\|_{H^1(\Omega)} + \|M_1 - M_2\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \|u_1 - u_2\|_{H^2(0,T;L^2(\omega))} + \|u_1 - u_2\|_{H^1(0,T;H^2(\omega'))} \right)$$

が成り立つ。

## 3 構造化された人口モデルに対する係数決定問題

構造化された人口モデル (structured population model) とは、生物群などにおける個体の年齢やサイズ分布を考慮に入れた人口モデルであり、具体的には次のように記述される。個体の特性を表す変数として、年齢  $a$  とサイズ  $s$  を導入し、 $u(t, x, a, s)$  を、時刻  $t$  において、場所  $x$  における、年齢  $a$ 、サイズ  $s$  の個体密度を表

すものとする。このとき、 $u$  は以下の偏微分方程式を満たす。

$$\partial_t u + \partial_a u + \partial_s (g(s)u) = \alpha(x)\Delta u - \gamma \cdot \nabla u - \mu(x)u, \quad (t, x, a, s) \in (0, T) \times \Omega \times (0, a_1) \times (s_1, s_2) \quad (9)$$

ここで、 $\alpha$  は拡散係数、 $g$  は個体の成長速度を表す係数、 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  は個体の走性を表すベクトル値関数で、 $\mu$  は死亡率を表す。

このとき、次の逆問題を考える。

係数決定問題  $\Gamma \subset \partial\Omega$  を部分境界とする。また、 $g$  は既知であるとする。観測データ

$$(u, \partial_\nu u)|_{(0, T) \times \Gamma \times (0, a_1) \times (s_1, s_2)}, \quad u|_{t=\theta}$$

から、 $\alpha$ 、 $\gamma$ 、 $\mu$  を決定せよ。

この問題に関して、十分な回数の適切な観測のもと、以下の安定性評価を得た。

**Theorem 3.1.**  $u_j(t, x, a, s; q)$  は、

$$\begin{cases} \partial_t u_j + \partial_a u_j + \partial_s (g u_j) - \alpha_j \Delta u_j + \gamma_j \cdot \nabla u_j + \mu_j u_j = 0 & \text{in } Q_T \\ u_j(\theta, x, a, s; q) = q(x, a, s) & \text{in } \Omega \times (0, a_1) \times (s_1, s_2) \end{cases}$$

の解であるとする。

$p_j \in C^2(\Omega)$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ) に対して、

**Assumption 3.2.** 1.  $g \in L^\infty(s_1, s_2)$ 、かつ、 $M > 0$  が存在して  $\|g\|_{L^\infty(s_1, s_2)} \leq M$  である。

2.  $\alpha_1, \alpha_2, \mu_1, \mu_2 \in L^2(\Omega)$   $\gamma_1, \gamma_2 \in (L^2(\Omega))^3$

3.  $|\alpha_1|, |\alpha_2| \neq 0$  on  $\Omega$ .

4.  $\alpha_1 = \alpha_2, \gamma_1 = \gamma_2, \mu_1 = \mu_2$  on  $\Gamma$ .

5. 行列

$$\begin{pmatrix} \Delta p_1 & \partial_1 p_1 & \partial_2 p_1 & \partial_3 p_1 & p_1 \\ \Delta p_2 & \partial_1 p_2 & \partial_2 p_2 & \partial_3 p_2 & p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta p_5 & \partial_1 p_5 & \partial_2 p_5 & \partial_3 p_5 & p_5 \end{pmatrix}^{-1}$$

$\overline{\Omega \times (0, a_1) \times (s_1, s_2)}$  が存在する。

6.  $\|u_j(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot; p_k)\|_{C^2(Q_T)} \leq M$ .

$\omega \subset \Omega$  を  $\overline{\partial\omega \cap \partial\Omega} \subset \Gamma$  かつ  $\text{dist}(\omega, \overline{\partial\Omega \setminus \Gamma}) > 0$  を満たす任意の領域とすると、 $M$  と  $T$  に依存する定数  $C = C(T, \omega) > 0$  と  $\kappa \in (0, 1)$  が存在して、

$$\begin{aligned} & \|\alpha_1 - \alpha_2\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{(L^2(\Omega))^2} + \|\mu_1 - \mu_2\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq CM^{1-\kappa} \left( \sum_{j=1}^5 (\|u_1(p_j) - u_2(p_j)\|_{H^{0,2}(\Sigma_T)} + \|u_1(p_j) - u_2(p_j)\|_{H^{1,1}(\Sigma_T)}) \right)^\kappa \end{aligned} \quad (10)$$

が成り立つ。