論文の内容の要旨

論文題目

Non-commutative Reidemeister torsion, Morse-Novikov theory and homology cylinders of higher-order

（非可換ライデマイスタートーション，モース - ノビコフ理論及び高次のホモロジーシリンダー）

氏　　名　北山　貴裕

本論文の目標は，非可換係数の Reidemeister torsion の Morse 理論的或いは力学系的な表示を記述することと，後述する ‘高次の’homology cylinder たちの成す monoid 及びその homology 同境群の代数構造を非可換係数の Reidemeister torsion を用いて調べることである．

向き付けられた滑らかな閉多様体 X に対して，その上の Riemann 計量と S^1-値 Morse 関数 $f\colon X \to S^1$ であって，臨界点の安定多様体と不安定多様体が全て横断的に交わり，∇f の閉軌道が全て非退化であるものを選ぶ．生成元 $t \in \pi_1 S^1$ を S^1 の標準的な向きとは逆行するものとし，$f_*\colon \pi_1 X \to \langle t \rangle$ に付随する $\mathbb{Z}[\pi_1 X]$ の Novikov 完備化を Λ_f，$1 + \sum_{\gamma \in \pi_1 X, \deg f_*(\gamma) > 0} a_\gamma \gamma$ と書ける元から成る Λ_f の単数群の部分群を W とする．

まず，W のある可換商 $\overline{W}_{ab}$ を考え，‘非可換な’Lefschetz 型 zeta 関数 $\zeta_f \in \overline{W}_{ab}$ を以下の式によって定義する：

$$\zeta_f = \prod [1 - (-1)^{i_-(o)} [\sigma_o o \bar{\sigma}_o]]^{(-1)^{i_0(o)+1}}.$$

但し，積は像を 1 周だけするような閉軌道 $o\colon S^1 \to X$ 全体の集合のパラメータ変換 $U(1)$ による商集合に渡って取るものとする．ここで，$i_-(o)$，$i_0(o)$ は各 o に対して決まるある整数であり，また，σ_o，$\bar{\sigma}_o$ は任意に選ばれた X の基点から $o(S^1)$ への道とその逆，$[\sigma_o o \bar{\sigma}_o]$ は道の合成 $\sigma_o o \bar{\sigma}_o$ が定める $\pi_1 X$ の元である．任意の積の順序に対して，この無限積が意味を持つこと，更に，ζ_f はその積の順序，道 σ_o の選び方に依らないことが確かめられる．可換化写像 $\pi_1 X \to H_1(X;\mathbb{Z})$ が誘導する $\overline{W}_{ab}$ から $\mathbb{Z}[H_1(X:\mathbb{Z})]$ の Novikov 完備化の単数群への準同型写像によって，ζ_f は ‘可換な’Lefschetz 型 zeta 関数に写される．

次に，poly-torsion-free-abelian である群 G と $\alpha \circ \rho = f_*$ となるような準同型写像 $\rho\colon \pi_1 X \to G$，$\alpha\colon G \to \langle t \rangle$ を取る．群環 $\mathbb{Z}[G]$，$\mathbb{Z}[\mathrm{Ker}\,\alpha]$ は Ore 整域であり，それぞれの商体 $\mathbb{Q}(G)$，$\mathcal{K}$ に埋め込まれることが知られており，半直積分解 $G = \mathrm{Ker}\,\alpha \rtimes_\theta \langle t^l \rangle$ に対応して，$\mathbb{Q}(G) = \mathcal{K}_\theta(t^l)$ と表わすことができる．準同型写像

$\rho\colon \pi_1 X \to G$ は Laurent 冪級数環 $\mathcal{K}_\theta((t^l))$ への準同型写像 $\Lambda_f \to \mathcal{K}_\theta((t^l))$ に自然に拡張されるが，これを再び ρ で表わす．群 $\overline{W}_{ab}$ と同様に構成される $\mathcal{K}_\theta((t^l))$ の単数群のある可換商 $\overline{\mathcal{K}_\theta((t^l))}^{\times}_{ab}$ を考えると，誘導準同型写像 $\rho_*\colon \overline{W}_{ab} \to \overline{\mathcal{K}_\theta((t^l))}^{\times}_{ab}$ が得られる．

準同型写像 ρ に付随する局所系の homology 群 $H^\rho_*(X; \mathcal{K}_\theta((t^l)))$ が消えるとき，ρ に付随する Reidemeister torsion $\tau_\rho(X) \in \mathcal{K}_\theta((t^l))^\times_{ab}/\pm\rho(\pi_1 X)$ 及び f が定める $\mathcal{K}_\theta((t^l))$ 上の Novikov 複体の代数的 torsion として Novikov torsion $\tau^{Nov}_\rho(f) \in \mathcal{K}_\theta((t^l))^\times_{ab}/\pm\rho(\pi_1 X)$ が定義される．このとき，主定理は次の通りである．

定理 1. 上のような (ρ, α) に対して，$H^\rho_*(X; \mathcal{K}_\theta((t^l)))$ が消えるならば，

$$\tau_\rho(X) = \rho_*(\zeta_f)\tau^{Nov}_\rho(f) \in \overline{\mathcal{K}_\theta((t^l))}^{\times}_{ab}/\pm\rho(\pi_1 X).$$

これは可換表現の場合に Hutchings-Lee，Pazhitnov によって得られていた公式の非可換係数への一般化となっており，Cochran，Friedl，Harvey らによる higher-order Reidemeister torsion の積分解を導く．

（空でもよい）n 個の境界成分を持つ種数 g の向き付けられたコンパクト曲面を $\Sigma_{g,n}$ と書き，$\Gamma_m := \pi_1\Sigma_{g,n}/(\pi_1\Sigma_{g,n})^{(m+1)}$ と置く．まず，与えられた整数 $m \geq 0$ に対して，‘マーキング写像’$i_\pm\colon \Sigma_{g,n} \to \partial M$ が同型写像 $\Gamma_m \to \pi_1 M/(\pi_1 M)^{(m+1)}$ を導くような homology cylinder $(M, i_\pm)$ として，$\Sigma_{g,n}$ 上の m 次の homology cylinder を導入する．これら m 次の homology cylinder の同型類の集合 $\mathcal{C}^{(m)}_{g,n}$，3 次元多様体として既約であるものたちの成す部分集合 $\overline{\mathcal{C}}^{(m)}_{g,n}$ は，cylinder の ‘積み重ね’ によって monoid，submonoid の構造を持つ．また，homology cylinder からの inclusion が基本群の同様の可解商の上に同型写像を導くような，滑らかな homology 同境による $\mathcal{C}^{(m)}_{g,n}$ の同境群 $\mathcal{H}^{(m)}_{g,n}$ を導入する．群 $\mathcal{H}^{(m)}_{g,n}$ は $\Sigma_{g,n}$ の写像類群の一つの拡大を与えていることが確認できる．曲面の写像類群の Dehn-Nielsen 写像の類似として，自然な準同型写像 $\mathcal{C}^{(m)}_{g,n} \to \mathrm{Out}(\Gamma_m)$ 及び誘導準同型写像 $\overline{\mathcal{C}}^{(m)}_{g,n} \to \mathrm{Out}(\Gamma_m)$，$\mathcal{H}^{(m)}_{g,n} \to \mathrm{Out}(\Gamma_m)$ が考えられ，これらの核をそれぞれ $\mathcal{IC}^{(m)}_{g,n}$，$\mathcal{I}\overline{\mathcal{C}}^{(m)}_{g,n}$，$\mathcal{IH}^{(m)}_{g,n}$ とする．

次に，Reidemeister torsion と上の Dehn-Nielsen 型準同型写像を用いて，準同型写像

$$\mathcal{C}^{(m)}_{g,n} \to (\mathbb{Q}(\Gamma_m)^\times_{ab}/\pm\Gamma_m) \rtimes \mathrm{Out}(\Gamma_m),$$
$$\mathcal{H}^{(m)}_{g,n} \to (\mathbb{Q}(\Gamma_m)^\times_{ab}/\pm\Gamma_m \cdot \langle q\overline{q}\rangle) \rtimes \mathrm{Out}(\Gamma_m)$$

を構成する．ここで，$\mathbb{Q}(\Gamma_m)^\times_{ab}$ は $\mathbb{Z}[\Gamma_m]$ の商体の単数群の可換化であり，$\overline{\cdot}\colon \mathbb{Q}(\Gamma_m)^\times_{ab} \to \mathbb{Q}(\Gamma_m)^\times_{ab}$ は Γ_m 上の involution $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ が誘導する involution である．これらは Cha-Friedl-Kim によって構成された $\mathcal{C}^{(0)}_{g,n}$，$\mathcal{H}^{(0)}_{g,n}$ 上の準同型写像の拡張になっている．また，以下の定理が示される．

定理 2. $(g, n) \neq (0, 0), (0, 1)$ のとき，全ての正整数 m に対して，準同型写像 $\mathcal{H}^{(m)}_{g,n} \to \mathcal{H}_{g,n}$，$\mathcal{IH}^{(m)}_{g,n} \to \mathcal{IH}_{g,n}$ は全射ではない．

更に，$\Sigma_{g,n} \times [0, 1]$，$S^3$ の結び目補空間を各結び目に沿って張り合わせることによって，$\mathcal{C}^{(m)}_{g,n}$ の元を構成する方法を与え，その Reidemeister torsion の計算を行う．帰結として，以下の定理が得られる．

定理 3. *(i)* $\mathcal{I}\overline{\mathcal{C}}^{(1)}_{0,2} \neq \mathcal{I}\overline{\mathcal{C}}^{(0)}_{0,2}$.
(ii) $\mathcal{I}\overline{\mathcal{C}}^{(1)}_{1,0} \neq \mathcal{I}\overline{\mathcal{C}}^{(0)}_{1,0}$.
(iii) $(g, n) \neq (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0)$ のとき，全ての m に対して，$\mathcal{I}\overline{\mathcal{C}}^{(m+1)}_{g,n} \neq \mathcal{I}\overline{\mathcal{C}}^{(m)}_{g,n}$ である．

最後に，$n > 0$ のとき，$\mathbb{Q}(\Gamma_m)^\times_{ab}/\pm\Gamma_m$ からある自由 abel 群への全射を構成することにより，以下の定理が示される．

定理 4. $n > 0$ かつ $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ のとき，全ての m に対して，$\mathcal{I}\overline{\mathcal{C}}^{(m)}_{g,n}$ は有限生成ではない．

この定理は合田-逆井によって示された $\overline{\mathcal{C}}^{(0)}_{g,n}$ の非有限生成性の類似的結果と見做せる．