論文の内容の要旨

論文題目

Extensions between finite-dimensional simple modules
over a generalized current Lie algebra
（一般化されたカレントリー代数上の有限次元単純加群の間の拡大）

氏名

小寺諒介

本論文では，一般化されたカレントリー代数上の有限次元単純加群に対して 1 次の Ext 群を決定する．さらに有限次元加群の圏のブロックの記述を与える．

まず，一般化されたカレントリー代数の定義を述べる．$\mathfrak{g}$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元半単純リー代数，A を有限生成可換 $\mathbb{C}$ 代数とする．$\mathbb{C}$ 上のテンソル積 $A \otimes \mathfrak{g}$ は

$$[a \otimes x, b \otimes y] = ab \otimes [x, y] \quad (a, b \in A,\ x, y \in \mathfrak{g})$$

によって $\mathbb{C}$ 上のリー代数の構造を持つ．これを一般化されたカレントリー代数と呼ぶ．A が 1 変数多項式環 $\mathbb{C}[t]$，または 1 変数ローラン多項式環 $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の場合，このリー代数はそれぞれカレントリー代数，ループリー代数と呼ばれ，比較的古くから研究されている．一般化されたカレントリー代数はこれら重要なリー代数の高次元への一般化であり，豊かな表現論を持つことが期待される．

扱う加群の圏が半単純でない場合，単純加群の間の拡大の様子を理解すること，より具体的に 1 次の Ext 群を決定することは基本的な問題である．$A = \mathbb{C}[t]$ および $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の場合，この問題は Chari-Greenstein [CG] によって解決された．本論文では，一般の A の場合に 1 次の Ext 群を決定する．ここで用いる手法は Chari-Greenstein [CG] のものとは異なるため，彼らの結果の別証明も与えている．

主定理を述べるために，Chari-Fourier-Khandai [CFK] によって与えられた有限次元単純 $A \otimes \mathfrak{g}$ 加群の分類とその記述について簡単に紹介する．P^+ を $\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイト全体の集合とし，最

高ウェイト $\lambda \in P^+$ の有限次元単純 $\mathfrak{g}$ 加群を $V(\lambda)$ であらわす．A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して，リー代数の準同型写像 $A \otimes \mathfrak{g} \to (A/\mathfrak{m}) \otimes \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}$ を通じて $V(\lambda)$ 上に $A \otimes \mathfrak{g}$ 加群の構造を与えたものを $V_{\mathfrak{m}}(\lambda)$ であらわす．$V_{\mathfrak{m}}(\lambda)$ は単純 $A \otimes \mathfrak{g}$ 加群である．$\operatorname{Specm} A$ を A の極大イデアル全体の集合とし，$\operatorname{Specm} A$ から P^+ への写像で台が有限であるもの全体の集合を $\mathcal{P}$ であらわす．任意の $\pi \in \mathcal{P}$ に対して $\bigotimes_{\mathfrak{m} \in \operatorname{supp} \mathfrak{m}} V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m}))$ は単純 $A \otimes \mathfrak{g}$ 加群であり，この対応を通じて有限次元単純 $A \otimes \mathfrak{g}$ 加群の同型類が $\mathcal{P}$ によってパラメトライズされる．$\pi \in \mathcal{P}$ に対応する単純加群を $\mathcal{V}(\pi)$ であらわす．また，A の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$ における導分全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $\operatorname{Der}(A, A/\mathfrak{m})$ であらわす．主定理は次の通りである．

定理（論文 Theorem 3.6）
$\pi, \pi' \in \mathcal{P}$ とする．

(i) $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi')) \neq 0$ ならば $\#\{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A \mid \pi(\mathfrak{m}) \neq \pi'(\mathfrak{m})\} \leq 1$ である．

(ii) $\#\{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A \mid \pi(\mathfrak{m}) \neq \pi'(\mathfrak{m})\} = 1$ ならば

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi')) &\simeq \operatorname{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}_0}(\pi(\mathfrak{m}_0)), V_{\mathfrak{m}_0}(\pi'(\mathfrak{m}_0))) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\pi(\mathfrak{m}_0)), V(\pi'(\mathfrak{m}_0))) \otimes \operatorname{Der}(A, A/\mathfrak{m}_0)\end{aligned}$$

である．ここで $\mathfrak{m}_0 \in \operatorname{Specm} A$ は $\pi(\mathfrak{m}_0) \neq \pi'(\mathfrak{m}_0)$ を満たす唯一の元である．
$\pi = \pi'$ ならば

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi')) &\simeq \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \operatorname{supp} \pi} \operatorname{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m})), V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m}))) \\ &\simeq \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \operatorname{supp} \pi} \bigl(\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\pi(\mathfrak{m})), V(\pi(\mathfrak{m}))) \otimes \operatorname{Der}(A, A/\mathfrak{m})\bigr)\end{aligned}$$

である．

定理における $\operatorname{Der}(A, A/\mathfrak{m})$ の寄与は $A = \mathbb{C}[t]$ および $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の場合を扱った研究のいくつかにも陰に現れてはいたが，その場合この空間が 1 次元であるためにはっきりとは認識されていなかったと思われる．一般の A の場合を扱うことで初めて認識されたわけで，その観点からも本論文の結果には意義がある．また，この結果はアファインスキーム $\operatorname{Spec} A$ の幾何と一般化されたカレントリー代数 $A \otimes \mathfrak{g}$ の表現論との関連を示唆している．A が正則でない場合が特に興味深く，今後の研究が待たれる．

次に有限次元 $A \otimes \mathfrak{g}$ 加群の圏のブロックの記述について述べる．P を $\mathfrak{g}$ のウェイト格子，Q をルート格子とする．$\operatorname{Specm} A$ から P/Q への写像で台が有限であるもの全体の集合を Ξ であらわす．有限次元単純 $A \otimes \mathfrak{g}$ 加群 $\mathcal{V}(\pi)$ に対して，そのスペクトル指標 $\chi_\pi \in \Xi$ を $\chi_\pi(\mathfrak{m}) = \pi(\mathfrak{m}) \bmod Q$ $(\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A)$ によって定義する．V を一般の有限次元 $A \otimes \mathfrak{g}$ 加群とする．ある $\chi \in \Xi$ に対して V の任意の組成因子 $\mathcal{V}(\pi)$ が $\chi_\pi = \chi$ を満たすとき，V はスペクトル指標 χ を持つという．$\mathcal{F}$ を有限次元 $A \otimes \mathfrak{g}$ 加群の圏とし，スペクトル指標 $\chi \in \Xi$ を持つ加群全体のなす $\mathcal{F}$ の充満部分圏を $\mathcal{F}_\chi$ であらわす．

定理（論文 Theorem 4.4）
$\mathcal{F} = \bigoplus_{\chi \in \Xi} \mathcal{F}_\chi$ であり，さらに各 $\mathcal{F}_\chi$ は $\mathcal{F}$ のブロックである．

これは Chari-Moura [CM] による $A = \mathbb{C}[t]$ および $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の場合の結果の一般化であり，証明に用いる議論も彼らのものとほぼ同じである．

参考文献

[CFK] Vyjayanthi Chari, Ghislain Fourier, and Tanusree Khandai, *A categorical approach to Weyl modules*, Transform. Groups **15** (2010), no. 3, 517–549.

[CG] Vyjayanthi Chari and Jacob Greenstein, *An application of free Lie algebras to polynomial current algebras and their representation theory*, Infinite-dimensional aspects of representation theory and applications, Contemp. Math., vol. 392, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 15–31.

[CM] Vyjayanthi Chari and Adriano Moura, *Spectral characters of finite-dimensional representations of affine algebras*, J. Algebra **279** (2004), no. 2, 820–839.