論文の内容の要旨

論文題目　Weyl modules, Demazure modules and finite crystals for non-simply laced type

和訳　ノンシンプリーレースド型のワイル加群, デマズール加群および有限クリスタルについて

氏名　直井　克之

本論文では、カレント代数の有限次元表現と量子アフィン代数のクリスタルという二つの対象に関するいくつかの結果を得ることができた。

単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し、$\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t]$ で定義されるリー代数をカレント代数と呼び $\mathcal{C}\mathfrak{g}$ と表す。また $\mathcal{C}\mathfrak{g}_d=\mathcal{C}\mathfrak{g}\oplus\mathbb{C}d$（ここで d は次数作用素）とおく。ワイル加群は有限次元 $\mathcal{C}\mathfrak{g}_d$ 加群の中で最も重要なもののひとつであり、いくつかの関係式により定義される一元生成加群である。P_+ で $\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイトの集合を表し、$\lambda\in P_+$ に付随するワイル加群を $W(\lambda)$ と表す。

デマズール加群もまた重要な有限次元 $\mathcal{C}\mathfrak{g}_d$ 加群である。$\widehat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]+\mathbb{C}K+\mathbb{C}d$ で $\mathfrak{g}$ に対応するアフィンリー代数を表す。ここで K は標準的中心元である。また $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分リー代数、$\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ のボレル部分リー代数とし、$\widehat{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}+\mathbb{C}K+\mathbb{C}d+\mathfrak{g}\otimes t\mathbb{C}[t]$ とおく。$\widehat{\mathfrak{g}}$ の支配的整ウェイト Λ を最高ウェイトとする既約 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群を $V(\Lambda)$ と表すとき、任意のアフィンワイル群の元 w に対し、$V(\Lambda)$ のウェイトが $w\Lambda$ のウェイト空間は一次元である。このウェイト空間から生成される $\widehat{\mathfrak{b}}$ 部分加群を $V_w(\Lambda)$ と表し、デマズール加群と呼ぶ。また $\lambda\in P_+$、$\ell\in\mathbb{Z}_{>0}$, $m\in\mathbb{Z}$ に対し $w\Lambda=w_0\lambda+\ell\Lambda_0+m\delta$ と表せるとき、$V_w(\Lambda)$ を $\mathcal{D}(\ell,\lambda)[m]$ とも表す。ただし w_0 は $\mathfrak{g}$ のワイル群の最長元、Λ_0 は単純ルート α_0 に対応する基本ウェイト、δ は $\langle d,\delta\rangle=1$ を満たす零ルートである．このとき $\mathcal{D}(\ell,\lambda)[m]$ は $\mathcal{C}\mathfrak{g}_d$ 加群となる。

$\mathfrak{g}$ が ADE 型の場合、$W(\lambda)$ は $\mathcal{C}\mathfrak{g}_d$ 加群として $\mathcal{D}(1,\lambda)[0]$ と同型であることが知られている。この結果は $\mathfrak{g}$ が一般の型の場合には必ずしも正しくない。本論文では、$\mathfrak{g}$ が BCFG 型の場合での上の結果のある種の一般化を得ることができた。

$\mathfrak{g}$ を BCFG 型と仮定する。いくつか記号を準備しよう。Δ を $\mathfrak{g}$ のルート系とし、短単純ルートから生成される Δ の部分ルート系を Δ^{sh} と表す。また Δ^{sh} に対応する $\mathfrak{g}$ の単純部分リー代数を $\mathfrak{g}^{\mathrm{sh}}$ と表し、$\mathfrak{h}^{\mathrm{sh}}=\mathfrak{g}^{\mathrm{sh}}\cap\mathfrak{h}$、$\mathcal{C}\mathfrak{g}_d^{\mathrm{sh}}=\mathfrak{g}^{\mathrm{sh}}\otimes\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{C}d$ とおく。$\mathfrak{g}^{\mathrm{sh}}$ のデマズール加群を $\mathcal{D}^{\mathrm{sh}}(\ell,\nu)[m]$ と表すことにする（ここで ν は $\mathfrak{g}^{\mathrm{sh}}$ の支配的整ウェイトである）。$\mathfrak{g}^{\mathrm{sh}}$ の支配的整ウェイトの集合を $\overline{P}_+$ と表す。また $\mathfrak{g}$ が BCF 型のとき $r=2$、$\mathfrak{g}$

が G 型のとき $r = 3$ とおく。$\lambda \in P_+$ に対し、$\overline{\lambda} \in \overline{P}_+$ で標準的射影 $\mathfrak{h}^* \to (\mathfrak{h}^{\mathrm{sh}})^*$ での λ の像を表す。[1] の結果を用いることで $\mathcal{D}^{\mathrm{sh}}(1, \overline{\lambda})[0]$ はフィルトレーション $0 = D_0 \subseteq D_1 \subseteq \cdots \subseteq D_k = \mathcal{D}^{\mathrm{sh}}(1, \overline{\lambda})[0]$ で、各 i に対しある $\nu_i \in \overline{P}_+$ と $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $D_i/D_{i-1} \cong \mathcal{D}^{\mathrm{sh}}(r, \nu_i)[m_i]$ となるものが存在することが示せる。写像 $i_{\mathrm{sh}} : (\mathfrak{h}^{\mathrm{sh}})^* \to \mathfrak{h}^*$ を、$\alpha \in \Delta^{\mathrm{sh}}$ に対し $i_{\mathrm{sh}}(\alpha|_{\mathfrak{h}^{\mathrm{sh}}}) = \alpha$ を満たすものとして定義する。また $\lambda' = \lambda - i_{\mathrm{sh}}(\overline{\lambda})$ とおき、各 i に対し $\mu_i = i_{\mathrm{sh}}(\nu_i) + \lambda'$ とおく。このとき、以下の定理が成り立つ。

定理 1. ワイル加群 $W(\lambda)$ はフィルトレーション $0 = W_0 \subseteq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_k = W(\lambda)$ で $W_i/W_{i-1} \cong \mathcal{D}(1, \mu_i)[m_i]$ を満たすものが存在する。

この定理はワイル加群に関する多くの情報を与えてくれる。特にワイル加群の次元予想（中島啓氏により証明された）の別証明がこの定理により与えられる。

続いてクリスタルの理論における主定理について述べる。いくつか記号を用意する。$U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ で量子アフィン代数を表し、$U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ で次数作用素を取り除いたものを表す。また $\widehat{P}$ で $\widehat{\mathfrak{g}}$ のウェイト格子を表し、$\mathbb{P}$ で $\widehat{P}$ にウェイトをもつパス（$[0,1]$ から $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{P}$ への区間ごとに線形な連続写像で 0 を 0 へ、1 を $\widehat{P}$ の元へ写すもの）の集合を表すとき、$\mathbb{P}$ は $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ クリスタルの構造を持つことが知られている。$\lambda \in P_+$ を標準的な方法で $\widehat{P}$ の元とみなし、π_λ でパス $\pi_\lambda(t) = t\lambda$ を表すことにする。π_λ を含む $\mathbb{P}$ の連結成分を $\mathbb{B}_0(\lambda)$ と表す。$\widehat{P}_{\mathrm{cl}} = \widehat{P}/\mathbb{Z}\delta$ とおき、標準的射影 $\widehat{P} \to \widehat{P}_{\mathrm{cl}}$ を cl と表す。また $\pi \in \mathbb{P}$ に対し、$\mathrm{cl}(\pi)$ で $[0,1]$ から $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{P}_{\mathrm{cl}}$ への写像 $\mathrm{cl}(\pi)(t) = \mathrm{cl}(\pi(t))$ を表すことにする。このとき、集合 $\{\mathrm{cl}(\pi) \mid \pi \in \mathbb{B}_0(\lambda)\}$ は有限集合であり、自然に $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ クリスタルの構造を持つ。この $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ クリスタルを $\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ と表す。このとき $\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ は [3] において定義された $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ のレベル 0 基本表現のクリスタル基底のテンソル積と $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ クリスタルとして同型であることが知られている。もともとの定義では、$\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ のウェイトは $\widehat{P}_{\mathrm{cl}}$ の元として与えられるが、本論文では [4] で定義された次数関数を用いることで $\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ の元に $\widehat{P}$ ウェイトを与える。この $\widehat{P}$ ウェイトは、後に述べられる定理において重要な役割を果たす。

Λ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の支配的整ウェイトとし、$\mathcal{B}(\Lambda)$ で最高ウェイト Λ の既約 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群のクリスタル基底を表す。デマズール加群は $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ に対しても古典的な場合と同様にして定義できる。[2] において、各デマズール加群に対してデマズールクリスタルと呼ばれる $\mathcal{B}(\Lambda)$ の部分集合が定義された。デマズール加群とデマズールクリスタルには様々な関係が知られている。特にデマズールクリスタルのウェイト和は対応するデマズール加群の指標と一致することが知られている。$\mathcal{D}(\ell, \lambda)[m]$（の q 変形）に対応するデマズール加群を $\mathcal{B}(\ell, \lambda)[m]$ と表す。

$\mathfrak{g}$ が BCFG 型であると仮定しよう。μ_i、m_i $(1 \leq i \leq k)$ で定理 1 の直前で定義された元を表すことにする。また $\mathcal{B}(\Lambda)$ の最高ウェイト元を b_Λ と表すことにする。

定理 2. $\mathcal{B}(\Lambda_0) \otimes \mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ は $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ クリスタルとして可積分既約最高ウェイト表現のクリスタル基底の直和と同型となる。しかもこの同型の $b_{\Lambda_0} \otimes \mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ への制限は $\widehat{P}$ ウェイトを保ち、その像はデマズールクリスタルの和 $\coprod_{1 \leq i \leq k} \mathcal{B}(1, \mu_i)[m_i]$ となる。

この結果を示すために、本論文では以下のような命題をあらかじめ示した。

命題 3. Λ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の任意の支配的整ウェイトとするとき、
(i) $\mathcal{B}(\Lambda) \otimes \mathbb{B}_0(\lambda)$ はいくつかの可積分既約最高ウェイト表現のクリスタル基底の直和と同型となる。
(ii) $b_\Lambda \otimes \mathbb{B}_0(\lambda)$ の (i) の同型での像は、いくつかのデマズールクリスタルの和となる。

ある場合には $\mathbb{B}_0(\lambda)$ は $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ のエクストリーマルウェイト加群のクリスタル基底と関係があることが知られており、$\mathbb{B}_0(\lambda)$ 自身もまた重要なクリスタルであると考えられているため、この命題そのものも重要な結果

であると思われる。

また定理 1, 2 から、これまで部分的にしか知られていなかったワイル加群と 1 次元和との関係についても示すことができる。$\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_\ell)$ を $\mathfrak{g}$ の単純ルートの添え字集合の任意の有限列とし、$U_q'(\widehat{\mathfrak{g}})$ クリスタル $\mathbb{B}_{\mathbf{i}}$ を $\mathbb{B}_{\mathbf{i}} = \mathbb{B}(\varpi_{i_1})_{\mathrm{cl}} \otimes \cdots \otimes \mathbb{B}(\varpi_{i_\ell})_{\mathrm{cl}}$ （ϖ_i は基本ウェイト）と定める。このとき、任意の $\mu \in P_+$ に対し古典的に制限された 1 次元和と呼ばれる多項式 $X(\mathbb{B}_{\mathbf{i}}, \mu; q)$（$q$ は変数）が定義され、以下の系が従う。

系 4. ある定数 $C \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (W(\lambda)_n : V_{\mathfrak{g}}(\mu)) q^n = q^C X(\mathbb{B}_{\mathbf{i}}, \mu; q^{-1})$$

が成り立つ。ここで $V_{\mathfrak{g}}(\mu)$ は最高ウェイト μ の既約 $\mathfrak{g}$ 加群を表し、$(W(\lambda)_n : V_{\mathfrak{g}}(\mu))$ は $W(\lambda)$ の次数 n の部分空間の $V_{\mathfrak{g}}(\mu)$ の重複度を表す。

参考文献

[1] A. Joseph. Modules with a Demazure flag. In *Studies in Lie theory*, volume 243 of *Progr. Math.*, pages 131–169. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[2] M. Kashiwara. The crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula. *Duke Math. J.*, 71(3):839–858, 1993.

[3] M. Kashiwara. On level-zero representations of quantized affine algebras. *Duke Math. J.*, 112(1):117–175, 2002.

[4] S. Naito and D. Sagaki. Lakshmibai-Seshadri paths of level-zero shape and one-dimensional sums associated to level-zero fundamental representations. *Compos. Math.*, 144(6):1525–1556, 2008.