論文の内容の要旨

論文題目　Deformation of torus equivariant spectral triples
トーラス同変なスペクトラル三つ組の変形

氏名　山下　真

コンパクトリーマン多様体 M および 2-トーラス $\mathbb{T}^2$ のなめらかな作用が与えられたとする。Connes–Landi は変形パラメータ $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して M の等スペクトル変形 M_θ を非可換幾何の枠組における対象として定義した。

「非可換空間 M_θ の上の滑らかな関数」の代数系 $C^\infty M_\theta$ は、線形空間としては M の上の滑らかな関数の代数系 $C^\infty M$ として定義されるが、通常の各点での値の積の操作の代わりに以下のように変形された積 $*_\theta$ を考える。f と g とがそれぞれトーラスの作用に関してウェイト (m,n) および (m',n') の固有関数であるとき、それらの積は

$$f *_\theta g = e^{\pi i\theta(mn'-m'n)}fg$$

と定められる。

多様体 M が 2-トーラス $\mathbb{T}^2$ によって与えられ、$\mathbb{T}^2$ の作用が群の推移作用によって与えられている場合、上の構成によって得られる代数系 $C^\infty M_\theta$ は、交換関係 $uv = e^{2\pi i\theta}vu$ を満たす二つのユニタリ作用素 u と v とに関する急減少係数 Laurent 級数の環になる。

Connes–Landi はさらに、M_θ のリーマン幾何（あるいはスピン幾何）を表すものとして、環 $C^\infty M_\theta$ の Hilbert 空間への表現および、 $C^\infty M_\theta$ が表す作用素に対して有界な交換子を持つようなコンパクトレゾルベントの非有界自己共役作用素からなるスペクトラル三つ組を与えた。

上記の構成は作用しているトーラスが一般次元で変形パラメータが歪対称行列 J で与えられる場合にも Connes–Dubois-Violette によって拡張されている。また、多様体へのトーラスの作用の代わりに、積の可換性を特に仮定しない環 A へのトーラスの作用から上のようにして積を変形した環 A_J を構成することができる。具体的には非可換 n-トーラスの関数環 $C^\infty\mathbb{T}^n_J$ と、n-トーラスのゲージ作用を用いて $A \otimes C^\infty\mathbb{T}^n_J$ を適切に完備したものへの $\mathbb{T}^n$ の直積作用に関する固定部分環をとることによって A_J が得られる。

このときさらに、(A, H, D) がスペクトラル三つ組であって A へのトーラス作用が H 上の D を不変にするユニタリ表現によって実現されているとする。このようなトーラス同変スペクトラル三つ組が与えられた

とき、変形された環 A_θ の H への作用を定めて新たなスペクトラル三つ組 (A_J, H, D) を構成することができる。

このようにして構成される環の不変量に K-群 $K_*(A_J)$ や周期巡回コホモロジー群 $\mathrm{HP}^*(A_J)$ が、スペクトラル三つ組の不変量として Chern–Connes 指標 $\mathrm{ch}_{(A_J,H,D)} \in \mathrm{HP}^*(A_J)$ が挙げられる。これらはそれぞれ、多様体 M の K-群 $K^*(M)$、de Rham ホモロジー群 $H_*(M)$ および Clifford 加群 E に対応するホモロジー類 $(\hat{A}(R_M) \cup \mathrm{ch}(E/\mathbb{S})) \cap [M]$ の類似になっている。Chern–Connes 指標と K-群との対合は D に対応する Dirac 型作用素をベクトル束でひねったものの Fredholm 指数を計算することに対応している。

まず、この論文では変形された環の不変量 $K_*(A_J)$ や $\mathrm{HP}^*(A_J)$ が変形パラメータ J の値によらず自然に同型になることを示した。実は、環の積の変形に関しては、先行する Rieffel による C^*-環への $\mathbb{R}^n$ の作用に関する環の変形量子化の構成を滑らかな関数の代数系に置き換えて実行したものになっている。Rieffel は $\mathbb{R}$ の作用に関する接合積の操作を繰り返して得られる A_J と強森田同値な環の構成を与えている。同様の構成をを滑らかな関数の環を含む Fréchet 環のカテゴリーで行うことによって、K-群に関する Connes–Thom 同型や周期巡回コホモロジーに関する Elliott–Natsume–Nest 同型を適用して、それぞれの不変量に関する自然な同型が与えられる。

次に、A の巡回コサイクルでトーラス作用に関して不変なものが与えられているとき、A と A_J との線形空間としての同一視をもとにして A_J 上の巡回コサイクルを得ることができる。とくに、巡回コサイクルがトーラス作用で不変なトレースによって与えられている場合、得られるものもトレースによって表されるコサイクルになる。

このような変形前後の環の線形空間としての同一視によって定まる不変コサイクルの対応と、Elliott–Natsume–Nest 同型によって得られる対応との差をトーラス作用の生成子の各方向成分 $(X_j)_{j=1}^n$ のコサイクルへの作用 $(i_{X_j})_{j=1}^n$ と変形パラメータの成分 $(J_{j,k})_{j,k=1}^n$ によって記述した。具体的には、上記二つの方法で変形した環の上に得られる巡回コサイクルの差を Elliott–Natsume–Nest 同型によって引き戻したものは

$$\sum_{i<j} 2J_{i,j} i_{X_i} i_{X_j} \phi + \sum_{\substack{i_1<i_2, i_3<i_4 \\ i_2<i_4}} 4J_{i_1,i_2} J_{i_3,i_4} i_{X_{i_1}} i_{X_{i_2}} i_{X_{i_3}} i_{X_{i_4}} \phi + \cdots \\ + \sum_{\substack{i_1<i_2,\ldots,i_{2m-1}<i_{2m} \\ i_2<i_4<\cdots<i_{2m}}} 2^m J_{i_1,i_2} \cdots J_{i_{2m-1},i_{2m}} i_{X_{i_1}} \cdots i_{X_{i_{2m}}} \phi$$

と表すことができる。もっとも簡単な 2-トーラスへの 2-トーラス自身の推移作用と変形パラメータ $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に関する変形を考える場合 $C^\infty \mathbb{T}^2_\theta$ 上の正規化された不変トレースと K-群との対合の値の可能性は $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ であることが知られていたが、上記の式はこの状況の説明を与えている。

ここでの鍵となったのは、$\mathbb{R}$ 作用に関する不変トレースに関する接合積環上の双対トレースと、もとの環上での作用の生成子がトレースに作用して得られる巡回 1-コサイクルとの間の対応に関する Connes の結果を、一般の不変巡回コサイクルに拡張することだった。

トーラス同変なスペクトラル三つ組について、その Chern–Connes 指標はトーラス作用で不変な巡回コサイクルになる。また、もとのスペクトラル三つ組の指標と変形されたスペクトラル三つ組の指標との対応は、上記の不変巡回コサイクルの対応の特別な場合になっている。K-群に関する Connes–Thom 同型と合わせると、変形パラメータに連続に依存した巡回コサイクルで、K-群の元に対し常に整数を与えるようなものが得られることになる。したがって、Chern–Connes 指標が K-群の上でとる値は環の積の変形パラメータに依存しないことが従う。