論文の内容の要旨

論文題目 Singular Problems Related to Curvature Flow and Hamilton-Jacobi Equations

（曲率流とハミルトン・ヤコビ方程式における特異問題）

氏　　名　　　　　柳　青　（Liu, Qing）

本博士論文は非線形偏微分方程式、特に曲率流方程式と Hamilton-Jacobi 方程式の特異問題を対象として考察する。ここでの特異問題は実際に最適制御、微分ゲーム、幾何運動、結晶成長など重要な応用と関連している。本研究では主に偏微分方程式の粘性解理論を用いて解析する。本論文は二つの部分から構成されている。第一部では微分ゲームによる手法で方程式の解の近似を行い、解の特異的性質を調べる。第二部では結晶成長に現れる非強圧的 Hamilton-Jacobi 方程式の解の漸近挙動を考察する。

【第一部・決定論的ゲームによる偏微分方程式の解の表現と解析】

ゲーム論的手法は近年注目されている。離散ゲームの値関数を用いて様々な方程式の解を近似することが証明されている。特に、最近は非常に一般的な二階楕円型方程式と放物型方程式の解もゲームの値関数で近似できることが分かってきた。本論文ではそのゲーム理論をさらに発展させ、解の新しい解析法を確立した。

平均曲率流方程式の Neumann 問題に対してゲームによる解釈を与えた。従来の結果は Cauchy 問題や Dirichlet 問題に集中することが多く、Neumann 境界値問題は考察されていない。我々は境界での Billiard 反射を使い、領域の境界で反射を許すゲームのルールを設定し、Neumann 境界条件付きの問題に対する近似定理を証明した。さらに、一階方程式にも Billiard ゲームを適用し、値関数の空間連続性を示した。

ゲーム理論により平均曲率流方程式の特異現象――level set の肥満現象（fattening phenomenon）の別証明を与えた。Level set の肥満現象は解析的にも幾何的にも重要であるが、実際に研究するのは困難であり、この現象が発生する必要十分条件はまだ把握されていない。特殊な８の字型の初期曲線に対しては、肥満現象の存在が放物型方程式の一般論により証明できることはよく知られているが、本研究では放物型方程式の一般論を一切利用せず、ゲーム理論だけで証明を行った。さらに、この fattening の証明に用いられるゲームの戦略を利用し、平均曲率型の定常問題の弱比較定理の反例を構成した。一般的には、正曲率流方程式の粘性解に fattening 現象が起きれば、定常問題の比較定理が成り立たないことも証明した。これにより、Kohn-Serfaty (2006) の比較原理に関する未解決問題を部分的に解決した。

保存則方程式の解の近似問題も考えた。今までのゲーム理論で扱える方程式は未知関数について単調であるので、方程式の粘性解が連続である場合がほとんどである。未知関数について単調でない方程式には通常の粘性解理論が適用できず、特異問題としてのゲーム理論による近似が大変興味深い問題となる。本論文はこの様な方程式の代表である保存則方程式に対して空間一次元の場合で離散スキームを試み、初期値が単調減少の場合に不連続な解の近似解を構成した。

【第二部・非強圧的Hamilton-Jacobi方程式の解の長時間挙動】

Hamilton-Jacobi方程式の初期値問題の長時間挙動に対する研究は1980年代から始まり、主に空間変数に依存しない形のHamilton-Jacobi方程式の場合に研究された。一般的なHamilton-Jacobi方程式については[Namah-Roquejoffre, 1999]に始まる。ここ十数年間で様々な研究があるが、ほとんどの論文はHamiltonianの強圧性を仮定している。その仮定によって空間一様に一定の速さで安定状態に近づくという解の長時間挙動が示されている。強圧性を仮定しない場合はあまり研究されていない。

本論文は結晶成長の現象を動機としたHamilton-Jacobi方程式を数学的に解析する。[Yokoyama-Giga-Rybka, 2008]は結晶成長を一次元化して考え、現れるDirichlet問題を初期値ゼロの場合で特性曲線の方法により解析を行った。その際、現象を記述する方程式は非強圧的なHamiltonianをもつ。本論文では、より一般の方程式を考え、その解の時間無限大での挙動について考察する。

典型的結果を簡単に述べる。非強圧的な方程式の解の漸近挙動が持つ特有な性質として有効領域と呼ばれる領域が存在することを発見した。この領域の中では、解の安定状態が存在し、解があるスピードで安定状態に収束する。一方で、領域の外では、より速い速度で解が変化する。また、方程式の強圧性がないため、解の時間と空間変数に対する一様なLipschitz連続性を失う。有効領域での定常問題を考えた時に、自然にNeumann型或いはDirichlet型特異境界条件が現れる。これらの特異問題に対し、比較定理と存在定理を証明した。一階方程式の場合、考察されていなかった新結果であり、この定常問題に関する結果を用いて、有効領域における収束を示すことにも成功した。

より詳しくは次の3つに要約される。まず、空間一次元のCauchy-Dirichlet問題を考察し、初期値ゼロの場合で得られた結果を一般化し、より精密な結果を得る事を試みた。定常問題について特異Neumann条件と特異Dirichlet条件両方で比較定理を示した。また、一般の初期値に対する適合条件を発見した。これは動機となった結晶成長の観察結果と整合している。次に研究したのは空間多次元の初期値問題である。この場合に考える定常問題の境界条件は特異Neumann型である。与えられたHamiltonianから有効領域とその領域での成長速度がどのように決まるかについて明らかにした。結晶成長のステップ源と対応するのはWeak KAM理論のAubry集合であることも分かった。最後に、より一般的なErgodic理論の観点から我々が示した長時間挙動に関する結果を分析し、有効領域の外での長時間挙動についても部分的な結果を与えた。