論文の内容の要旨

論文題目：Regularity of two dimensional steady capillary gravity water waves

（二次元定常表面張力重力波の正則性）

氏名：張　光輝 (チョウ　コウキ)(Zhang Guanghui)

本論文では二次元水面波の自由境界の正則性について考察する。流体は非圧縮非粘性で、自由表面を持ち、流体に作用する力は重力と自由表面にはたらく表面張力だけであると仮定する．流体の運動はオイラーの方程式で表現できる。波速 c の進行波について、次のように流れ関数 ψ を定義する：

$$\psi_x = -v, \quad \psi_y = u - c,$$

ここで $(u(x,y,t), v(x,y,t))$ は時刻 t と位置 (x,y) における流体の速度であって、c は波の伝播速度である。 流体の運動は次の自由境界問題で表現できる：

$$\begin{aligned} &\Delta\psi = -\gamma(\psi) \ \text{ in } \{\psi > 0\} \\ &|\nabla\psi|^2 + 2gy - 2\sigma\kappa = \text{constant} \ \text{ on } \ \Gamma = \partial\{\psi > 0\}. \end{aligned}$$

ここで g、σ、γ、κ は各々、重力加速度、表面張力係数、流体の渦度、自由境界 Γ の曲率である。

$\gamma = 0$、$\sigma = 0$ のとき、つまり渦度なしで表面張力を無視した場合は、この水面波はストークス（Stokes）波と呼ばれる。1880 年に Stokes は、最大振幅の水面波の表面が滑らかではなくて、角度 $2\pi/3$ の角を持つ点が存在することを予想した。これを Stokes 予想と呼ぶ。Amick-Fraenckel-Toland [1]、Plotnikov [4] は Stokes 予想が正しいことを示した。さらに Varvaruca-Weiss [5] は、より一般的な Stokes 予想を証明した。

表面張力が 0 でない時は、水面波の表面に特異点が現れるとは直観的には考えにくい。しかし、これまでは、$\gamma = 0$ の場合に部分的な結果が知られているだけであった。具体的には、$\gamma = 0$ という仮定の下に、[2]、[3] が自由境界にある程度の滑かさ（$W^{2,2}$ や $C^{2.\alpha}$）の仮定を置くと実解析になるという結果を示している。本論文では、より一般的なクラスの弱解

に対して水面波の表面が滑らかであることを証明するとともに、$\gamma = 0$ という制限を取り除いた。具体的には、渦度 γ を ψ の任意の有界関数とするとき、自由境界に $W^{1,1}$ の正則性を仮定し、かつ曲率が Radon 測度であると仮定しすると自由境界は $C^{2.\alpha}$ になることを証明した。さらに、γ が滑らかであるならば、自由境界も滑らかになることを示した。

第一章は序文である.

第二章で、領域変分方法を使って定常水面波についての変分公式を証明し、さらに弱解を定義した。

第三章で、Bonnet 型単調性公式証明した。この単調性公式を使って自由境界点で流れ関数の blow-up 極限が二種類あり、それぞれが自由境界の正則点と cusp 型特異点に対応することを示した。さらに cusp 型特異点は孤立点であることも示した。

第四章、で自由境界は cusp 型特異点以外で滑らかであることを証明した。そして、この正則性を使って cusp 型特異点は存在しないことを示した。これにより、自由境界は滑らかであることが結論できる。

第五章、で表面張力係数 σ を 0 に近づけたのとき、解は表面張力をを無視した重力波の変分解に収束することを示した。

参考文献

[1] C. J. Amick, L. E. Fraenkel, and J. F. Toland. On the Stokes conjecture for the wave of extreme form. *Acta Math.*, 148:193–214, 1982.

[2] B. Buffoni, E. N. Dancer, and J. F. Toland. The regularity and local bifurcation of steady periodic water waves. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 152(3):207–240, 2000.

[3] Walter Craig and Ana-Maria Matei. On the regularity of the Neumann problem for free surfaces with surface tension. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(8):2497–2504 (electronic), 2007.

[4] P. I. Plotnikov. Justification of the Stokes conjecture in the theory of surface waves. *Dinamika Sploshn. Sredy*, (57):41–76, 1982.

[5] E Varvaruca and G. Weiss. A geometric approach to generalized stokes conjectures. *Accepted for publication in Acta Math*, 2009.