論文の内容の要旨

論文題目 Finite Symplectic Actions on the $K3$ Lattice
（$K3$ 格子への有限シンプレクティック作用）

氏名 橋本 健治

本論文では有限群の $K3$ 曲面へのシンプレクティック作用について調べた。単連結な複素曲面 X が至る所消えない正則 2-形式 ω_X をもつとき、X を $K3$ 曲面という。X の自己同型 g がシンプレクティックであるとは、$g^*\omega_X = \omega_X$ となることをいう。Nikulin [Finite groups of Kählerian surfaces of type $K3$, Trans. Moscow Math. Soc. 38 (1980), 71–137] は $K3$ 曲面に（忠実かつ）シンプレクティックに作用する有限アーベル群 G を分類し、しかも G の $K3$ 格子 $\Lambda \cong H^2(X,\mathbb{Z})$ への作用は G の抽象群としての構造のみに依存して一意的に定まることを示した。（ここで、格子とは有限階数の自由 $\mathbb{Z}$-加群とその上の整数値対称双線形形式の組をいう。$H^2(X,\mathbb{Z})$ は交点形式により格子とみなせる。）その後、向井茂 [Finite groups of automorphisms of $K3$ surfaces and the Mathieu group, Invent. Math. 94 (1988), 183–221] は $K3$ 曲面にシンプレクティックに作用する有限群を分類した。そこで、非可換有限群の場合にも Nikulin の示した $K3$ 格子 Λ への作用の一意性が成立するかが問題となる。いくつかの $K3$ 曲面へのシンプレクティック作用についての結果は、多くの非可換有限群についてこの一意性が成立することを示唆している。例えば、Xiao [Galois covers between $K3$ surfaces, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 46 (1996), no. 1, 73–88] は次の定理を示した：有限群 G が $K3$ 曲面 X にシンプレクティックに作用するとき、2 つの例外の G を除き、商 X/G の特異点の型（各 A-D-E 型特異点の個数）は

G の抽象群としての構造のみに依存している。本論文では次の定理を示した。

主定理　有限群 $G \not\cong Q_8, T_{24}, \mathfrak{S}_5, L_2(7), \mathfrak{A}_6$ について、G の $K3$ 曲面へのシンプレクティックな作用が引き起こす $K3$ 格子への作用は同型を除き一意に定まる。より精確には、$G_i \cong G$ が $K3$ 曲面 X_i にシンプレクティックに作用しているとき $(i = 1, 2)$、（交点形式を保つ）同型 $\alpha : H^2(X_1, \mathbb{Z}) \to H^2(X_2, \mathbb{Z})$ が存在して、$GL(H^2(X_2, \mathbb{Z}))$ の中で $\alpha \circ G_1 \circ \alpha^{-1} = G_2$ となる。

主定理の証明について述べる。金銅誠之 [Niemeier lattices, Mathieu groups, and finite groups of symplectic automorphisms of $K3$ surfaces, Duke Math. J. 92 (1998), 593–603] の議論の精密化により主定理を証明した。有限群 G の $K3$ 曲面へのシンプレクティックな作用が引き起こす $K3$ 格子 Λ への作用を考える。まず、不変部分 Λ^G の直交補部分 $\Lambda_G = (\Lambda^G)^{\perp}_{\Lambda}$ を考える。金銅の補題 [ibid.] により、Λ_G はある（負定値）Niemeier 格子 N で Leech 格子と同型ではないものに埋め込むことができる。G の Λ_G への作用は N への作用に $\Lambda_G = N_G$ となるように拡張できる。このとき、N のある基本ルート系 R があって、R は G の作用で安定である。従って、G の作用を R に対応する Dynkin 図形の対称性と考えることができる。この G の Dynkin 図形への作用が満たすべき条件から、コンピュータを使うことで、Niemeier 格子 N と G の N への作用の組 (G, N) のリストを作ることができる。得られたリストから、Λ^G と Λ_G の格子としての同型類は 5 つの例外を除き G の抽象群としての構造から一意に定まることがわかる。さらに、各 G について、Λ^G または Λ_G の直交群からその判別形式の自己同型群への自然な射は全射であることもわかる：$O(L) \to O(q(L))$ は全射 $(L = \Lambda^G \text{ or } \Lambda_G)$。これは、2 つの判別法（定値の場合と不定値の場合）を準備して、リストにそれらを適用することで証明される。これらの結果の帰結として、G の Λ への作用の一意性が従う。また、Λ^G の交点行列などの具体的な情報も得られた。