Спектр Однородного Риманова Пространства

Акио Орихара

Отделение Математики, Общеобраэовательный Факультет,
Токийский Университет

(Поступило в редакцию 10 сентября 1976 г)

Пусть M однородное риманово пространство отлицательной кривизны и Δ-оператор Лапласа-Бельтрами на M. Точная нижняя грань спектра оператора $\sqrt{-\Delta}$ обозначается через c.

Это значение имеет простой вероятностый смысл. Пусть $(x_t, \infty, \mu_t, \boldsymbol{P}_x)$ диффузионный процесс на M с производящим дифференциальным оператором Δ и обозначим через $r(x)$ расстояние x от фиксированной точки пространства M.

Цель настоящей работы—доказать следующее

$$\boldsymbol{P}_x\left(\lim_{t\to\infty}\frac{r(x_t)}{t}=2c\right)=1 \qquad ({}^{\forall}x\in M)$$

§ **1.** Пусть M односвязное однородное риманово пространство неположительной кривизны. Как известно, на M просто транзитивным образом действует разрешимая группа Ли (см. [1] Теорема 1.1). Итак M можно отождествить с пространством группы G снабженным правоинвариантной римановой метрикой g. g задает скалярное произведение $\langle , \rangle$ на касательном пространстве, т.е. на алгебре Ли $\mathfrak{G}$. Наоборот, риманово пространство (G, g) полностью определяется «метрической алгеброй Ли» $(\mathfrak{G}, \langle , \rangle)$.

Пусть X, Y ортонормированные векторы в $\mathfrak{G}$ и $K(X, Y)$—кривизна по дву мерному направлению X, Y.

Лемма 1 ([1])

$$K(X, Y)=\langle L_X Y, L_X Y\rangle-\langle(adX)Y,(adX)Y\rangle$$
$$-\langle(adY)^2X, X\rangle-\langle L_X X, L_Y Y\rangle \tag{1}$$

где $L_X Y$ определяется формулой

$$2\langle L_X Y, Z\rangle=\langle[X, Y], Z\rangle+\langle[Z, Y], X\rangle+\langle[Z, X], Y\rangle \tag{2}$$

Доказательство. Напомним что ковариантная производная и тензор кривизны риманова пространства определяются следующим образом.

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X\cdot g(Y, Z) + Y\cdot g(X, Z) - Z\cdot g(x, y)$$
$$+ g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X)$$

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z$$

для векторных полей X, Y, Z.

Пусть $X \in \mathfrak{G}$ и X^*—сответствующее ему правоинвариантное векторное поле на G.

Полагая $L_X Y = (\nabla_{X^*} Y^*)_e$, имеем (2), поскольку $g(X, Y)$ постоянная на G. При этом имеет место

$$\langle L_X Y, Z\rangle = -\langle L_X Z, Y\rangle \tag{3}$$

$$L_X Y - L_Y X = [X, Y] \tag{4}$$

$$\langle L_X Y, Z\rangle + \langle L_Z Y, X\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle \tag{5}$$

В силу (3) и (4)

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Y, X\rangle &= \langle L_X(L_Y Y), X\rangle - \langle L_Y(L_X Y), X\rangle - \langle L_{[X,Y]}Y, X\rangle \\ &= -\langle L_Y Y, L_X X\rangle + \langle L_X Y, L_Y X\rangle - \langle L_{[X,Y]}Y, X\rangle \\ &= -\langle L_X X, L_Y Y\rangle + \langle L_X Y, L_X Y\rangle - \langle L_X Y, [X, Y]\rangle \\ &\quad -\langle L_{[X,Y]}Y, X]\rangle\end{aligned}$$

Это, вместе с (5), дает (1). Лемма доказана.

Как доказано в [1], алгебра $\mathfrak{G}$ разлагается в (ортогональную) прямую сумму

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{N}$$

где $\mathfrak{A}$ коммутативная картановская подалгебра $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{N} = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ ([1] Теорема 3.1)

Выберем ортонормированный базис $H_1, \cdots, H_l$ алгебры $\mathfrak{A}$ и положим

$$A_i = adH_i|\mathfrak{N} \text{ (ограничение на } \mathfrak{N}), \qquad S_i = \frac{1}{2}(A_i + {}^tA_i),$$

$$K_i = \frac{1}{2}(A_i - {}^tA_i)(1 \leqq i \leqq l)$$

Лемма 2 ([1])

1) $K(X, Y) = K^N(X, Y) + \sum_{i=1}^{l} \langle S_i X, Y\rangle^2 - \sum_{i=1}^{l} \langle S_i X, X\rangle\langle S_i Y, Y\rangle \quad (X, Y \in \mathfrak{N})$

2) $K(H, X) = -\langle (S^2 + [S, K])X, X\rangle \quad (X \in \mathfrak{N}, H \in \mathfrak{A})$

3) $K(H, H') = 0 \quad (H, H' \in \mathfrak{A})$

где $K^N(X, Y)$—кривизна пространства односвязной нильпотентной группы Ли $N = \exp \mathfrak{N}$.

Доказательство. 1) Очевидно, при $Z\in\mathfrak{N}$, имеем $\langle L_X Y, Z\rangle=\langle L_X^N Y, Z\rangle$ т.е. $L_X Y-L_X^N Y\in\mathfrak{A}$. Слеовательно, можно записать

$$L_X Y=L_X^N Y+\sum_{i=1}^{l} c_i H_i \tag{6}$$

причем

$$c_i=\langle L_X Y, H_i\rangle=\frac{1}{2}\langle(adH_i)X, Y\rangle+\frac{1}{2}\langle X,(adH_i)Y\rangle=\langle S_i X, Y\rangle$$

Подставляя (6) в (1), получаем 1).

2) Так как $L_H X=K\cdot X$, $L_H H=0$,

$$K(H,X)=\langle K\cdot X, K\cdot X\rangle-\langle A\cdot X, A\cdot X\rangle=-\langle(K^2+{}^tAA)X, X\rangle$$

Это доказыват 2).

3) тривиально.

Лемма 3 ([1]) *Если* $\operatorname{Tr} A_i=0$ $(1\leqq i\leqq l)$, *то* M *плоское*

Доказательство. Пусть $\{X_i; 1\leqq i\leqq n\}$ некоторый ортонормированный базис алгебры $\mathfrak{N}$. Так как $\operatorname{Tr} A_i=0$ $(1\leqq i\leqq l)$, то из 1) леммы 2 вытекает

$$0\geqq\sum_{i=1}^{n} K(X_i, Y)=\sum_{i=1}^{n} K^N(X_i, Y)+\sum_{\alpha=1}^{1}\langle S_\alpha Y, S_\alpha Y\rangle\geqq\sum_{i=1}^{n} K^N(X_i, Y)\quad (Y\in\mathfrak{N}) \tag{7}$$

С другой стороны, при $Y\in\mathfrak{Z}$ (центр алгебры $\mathfrak{N}$), имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} K^N(X_i, Y)&=\sum_{i=1}^{n}\langle L_{X_i}^N Y, L_{X_i}^N Y\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\langle L_{X_i}^N Y, X_j\rangle^2\\&=\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\langle[X_i, X_j], Y\rangle^2\end{aligned} \tag{8}$$

Сопоставление (7) и (8) показывает

$$\langle Y,[X_i,X_j]\rangle=0, 1\leqq i,j\leqq n\quad (Y\in\mathfrak{Z})\qquad \text{т.е.}\qquad [\mathfrak{N},\mathfrak{N}]\subset\mathfrak{Z}^\perp$$

Это значит что $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{Z}^\perp$ идеал алгебры $\mathfrak{N}$. Если $\mathfrak{N}_1\neq 0$, будучи нильпотентной, $\mathfrak{N}_1$ имеет нетривиальный центр $\mathfrak{Z}_1$. Но $\mathfrak{Z}_1=\mathfrak{Z}\cap\mathfrak{N}_1=0$. Это противоречие. Значит, $\mathfrak{N}$ коммутативна, а с учетом (7) имеем

$$S_\nu=0\qquad (1\leqq\nu\leqq 1)$$

В силу леммы 2, из этого следует что $K(X, Y)=0$ $(X, Y\in\mathfrak{S})$. Так как M однородно, M плоское риманово пространство.

§2. Предположим что M неплоское и пусть G, как и в §1, (односвязная) разрешимая группа Ли действующая просто тразитивным образом на M, а $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}+\mathfrak{N}$—алгебра Ли G.

По доказаному выше, можно выбрать ортонормированный базис $H_1,\cdots,H_l$ алгебры $\mathfrak{A}$ так, чтобы $\mathrm{Tr}\,A_1=\alpha>0$, $\mathrm{Tr}\,A_2=0(\nu\geqq 2)$

Далее положим

$$\mathfrak{N}_i=[\mathfrak{N},\mathfrak{N}_i]\ (1\leqq i\leqq r),\qquad \mathfrak{N}_0=\mathfrak{N},$$
$$\mathfrak{N}_r=0\qquad \mathfrak{N}^{(i)}=\mathfrak{N}_{i-1}\ominus\mathfrak{N}_i$$

Выберем ортонормированный базис $X_1^{(i)},\cdots,X_{n_i}^{(i)}$ пространства $\mathfrak{N}^{(i)}\left(\sum_{i=1}^{r}n_i=n=\dim\mathfrak{N}\right)$ и нумеруем $X_j^{(i)}$, полагая $X_j^{(i+1)}=X_{n_1+\cdots+n_i+j}$.

Тогда отображене φ;

$$\varphi(u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_l)=\exp v_lH_l\cdots\exp v_1H_1\exp u_lX_l\cdots\exp u_nX_n$$

является диффеоморфизмом $\boldsymbol{R}^{n+l}$ на $G=AN$

В этой системе координат, компоненты g_{ij} метрического тензора g выражается в следующем виде.

По определению правоинвариантности, имеем

$$g_{ij}(x)=g\left(\dot{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x,\dot{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right)_{\varphi(x)=an}=\left\langle(\dot{an})^{-1}\circ\dot{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x,(\dot{an})^{-1}\circ\dot{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right\rangle$$

где $\dot{\varphi}$—дифференциал отображения φ.

1) При $i,j\leqq n$, по определению,

$$(\dot{an})^{-1}\circ\dot{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x f=\frac{d}{dt}f(\varphi(u_1,\cdots,u_i+t,\cdots,u_n,v_1,\cdots v_l)(an)^{-1})_{t=0}$$
$$=\frac{d}{dt}f((an_i)\exp tX_i(an_i)^{-1})_{t=0}$$

(здесь $n_i=\exp u_1X_1\cdots\exp u_iX_i$)

Это значит

$$(\dot{an})^{-1}\circ\dot{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_x=(Ada\ Adn_i)X_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}X_k$$

Поскольку $[\mathfrak{A},\mathfrak{N}_i]\subset\mathfrak{N}_i$, $[\mathfrak{N},\mathfrak{N}_i]\subset\mathfrak{N}_{i+1}$, α_{ki} имеет следующий вид

$$(\alpha_{ki})=\begin{pmatrix}A_{11} & & \\ \vdots & 0 & \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{n_1} & & & 0\\ C_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{r1} & \cdots & \cdots & E_n\end{pmatrix}$$

где $C_{pq},A_{pq}\in M_{n_pn_q}(\boldsymbol{R})$ и компоненты матрицы C_{pq}-многочлен ы от u_i $(1\leqq i\leqq n_1+$

$\cdots+n_q)$

2) В случае $i>n$ или $j>n$, легко получаемое соотношение

$$(dn)^{-1}\circ\varphi\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_x=H_i \qquad (1\leqq i\leqq 1)$$

показывает

$$g_{ij}=\delta_{ij}$$

Итак, получаем

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} {}^t(\alpha_{ik})(\alpha_{ik}) & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$$

Пусть

$$\begin{pmatrix} E_n & & 0 \\ & \ddots & \\ C_{pq} & & E_{n_r} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} E_n & & 0 \\ & \ddots & \\ D_{pq} & & E_{n_r} \end{pmatrix}$$

Поскольку D_{pq} определяется соотношением

$$(D_{p1},\cdots,D_{pp-1})\begin{pmatrix} E_{n_1} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ C_{p-11} & \cdots & E_{n_{p-1}} \end{pmatrix}=-(C_{p1},\cdots,C_{pp-1})$$

мы видим что компоненты D_{pq} являются многочленами от u_i $(1\leqq i\leqq n_1+\cdots+n_{p-1})$.

Положим $(\alpha_{ij})^{-1}=(\beta_{ij})$, $(g_{ij})^{-1}=(g^{ij})$. Из сказанного выше, β_{ik} многочлен от $u_1,\cdots,u_{i-1}$, коэффициенты которого аналитические функции от $v_j(1\leqq j\leqq 1)$.

Следовательно,

$$g^{ij}=\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}\beta_{jk}$$

не зависит от u_k $(k\geqq\max(i,j))$.

Ввиду того, что

$$d=\det(g_{ii})=\det(\alpha_{ij})^2=\exp\left(2Tr\sum_{i=1}^{1}v_iA_i\right)=e^{2\alpha v_1}$$

имеем

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{d}\,g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial v_1^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial v_1}+\sum_{\nu=2}^{1}\frac{\partial^2}{\partial v_2^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(g^{ij}\frac{\partial}{\partial u_j}\right)$$

Лэмма 4 *Пуств*

$$A=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_i}a^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

где $a_{ij}\in C^{\infty}$, $(a_{ij})>0$ *и* $a_{ij}=a_{ij}(x_1,\cdots,x_1)$ *при* $i,j\leqq 1$ *Тогда, для любого* $\varepsilon>0$, *существует такая* $\varphi\in C_0^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$, *что* $||\varphi||=1$ и $0\leqq(A\varphi,\varphi)<\varepsilon$

Доказательство. В случае $n=1$ лемма тривиальна, поскольку, по условию, a^{11} постоянная.

Пусть $m\leqq n$ и предположим что, для некоторого $\varphi_1\in C_0^{\infty}(\boldsymbol{R}^{m-1})$, выполняется

$$c_0=\int_{\boldsymbol{R}^{m-1}}\sum_{i,j=1}^{m}c^{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_1\frac{\partial}{\partial x_j}\bar{\varphi}_1dx_1\cdots dx_{m-1}<\frac{m-1}{n}\varepsilon \qquad (||\varphi_1||=1)$$

Полагая $\varphi=\varphi_1(x_1,\cdots,x_{m-1})\varphi_2(x_m)(\varphi_2\in C_0^{\infty}(\boldsymbol{R}))$, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{R}^m}\sum_{i,j=1}^{m}a^{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\frac{\partial}{\partial x_j}\bar{\varphi}dx_1\cdots dx_m\\
&\quad=||\varphi_2'||^2\int_{\boldsymbol{R}^{m-1}}a^{mm}|\varphi_1|^2dx_1\cdots dx_{m-1}\\
&\quad\quad+2Re\sum_{i=1}^{m-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\bar{\varphi}_2dx_m\int_{\boldsymbol{R}^{m-1}}a^{im}\bar{\varphi}_1\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_1dx_1\cdots dx_{m-1}\\
&\quad\quad+||\varphi_2||^2\int_{\boldsymbol{R}^{m-1}}\sum_{i,j=1}^{m-1}a^{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_1\frac{\partial}{\partial x_j}\bar{\varphi}_1dx_1\cdots dx_{m-1}\\
&\quad\leqq c_0||\varphi_2||^2+c_1||\varphi_2||\,||\varphi_2'||+c_2||\varphi_2'||^2
\end{aligned}$$

Выберем φ_2 так, чтобы

$$||\varphi_2||=1,\qquad c_1||\varphi_2'||+c_2||\varphi_2'||^2<\frac{\varepsilon}{n}$$

Тогда имеем

$$\int_{R^m}\sum_{i,j=1}^{m}a^{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\frac{\partial}{\partial x_j}\bar{\varphi}dx_1\cdots dx_m<\frac{m}{n}\varepsilon$$

Локазательство закончено индукцией по m.

Лемма 5 *Симметрический оператор* Δ *с областью определения* $C_0^{\infty}(M)$ *допускает самосопряженное замыкание*

Доказательство. Как легко видеть,

$$d\mu(x)=e^{\alpha v_1}dv_1\cdots dv_1du_1\cdots du_n$$

является правоинвариантной мерой на $G=AN$ (заметим, что $du_1\cdots du_n$ инвариантная мера на N).

Положим $\alpha(g, x)=\left(\dfrac{d\mu(gx)}{d\mu(x)}\right)^{\frac{1}{2}}$, то

$$\rho(g)f(x)=\alpha(g^{-1}, x)f(g^{-1}x), \qquad g\in L^2(G, \mu)$$

дает унитарное представление группы G.

Это индуцирует представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Так как

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_i} f(x) &= \frac{d}{dt} f(\exp v_1 H_1, \cdots, \exp (u_i+t)X_i \cdots)_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(an_i \exp tX_i(an_i)^{-1}an)_{t=0} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\rho(X_k)f(x)\end{aligned}$$

имеем

$$\rho(X_i)=-\sum_{k=1}^{n} \beta_{ki}\frac{\partial}{\partial u_k}$$

$\left(\text{для простоты мы запишем } \dfrac{\partial}{\partial u_i} \text{ вмеато } \phi\left(\dfrac{\partial}{\partial u_i}\right)\right)$.

Аналогичным образом, получаем

$$\begin{aligned}\rho(H_i) &= -\left(\frac{\partial}{\partial v_1}+\frac{\alpha}{2}\right), & i=1 \\ &= -\frac{\partial}{\partial v_i}, & i\geqq 2\end{aligned}$$

Пользуясь тем, что β_{ki} зависит только от $u_1, \cdots, u_{k-1}, v$, пмеем

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(X_i)^2=\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ki}\beta_{ji}\right)\frac{\partial}{\partial u_k} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u_j}$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{1} \rho(H_i)^2+\sum_{i=1}^{n} \rho(X_i)^2-\frac{\alpha_2}{4}=\Delta$$

Отсюда следует лемма по известной лемма Нельсона.

Согласно лемме 4 и формуле

$$\frac{d^2}{dt^2}+\alpha\frac{d}{dt}=e^{-(\alpha/2)t}\circ\left(\frac{d^2}{dt^2}-\frac{\alpha^2}{4}\right)\circ e^{(\alpha/2)t}$$

точная нижняя гиань спектра самосопряженного оператора $(-\bar{\Delta})$ равна $\dfrac{\alpha^2}{4}$.

§ 3. Предположим теперь, что кривизна M отлицательна. В этом случае, как показывает лемма 2, $l=\dim\mathfrak{A}$ равен единице.

Докажем что симметрическая часть S_1 эндоморфизма A_1 положительно определена. В самом деле, при $Y\in\mathfrak{Z}$ имеем

$$K^N(X, Y)=\langle L_X^N Y, L_X^N Y\rangle\geqq 0 \qquad \text{для всякого } X\in\mathfrak{N}$$

Следовательно, по лемма 2, имеет место

$$0\leqq K^N(X, Y)+\langle S_1X, Y\rangle^2<\langle S_1X, X\rangle\langle S_1Y, Y\rangle$$

и

$$0<\sum_{i=1}^{n}\langle S_1X_i, X_i\rangle\langle S_1Y, Y\rangle=\alpha\langle S_1Y, Y\rangle.$$

Отсюда следует $S_1>0$

Лемма 6. *Пусть $A=B+C\in M_n(R)$, $B={}^tB>0$, $C=-{}^tC$ и c—найменишее собственное значения матрицы B. Тогда вещественная часть собственного значения матрицы A не мениие чем c.*

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}x=Ax \tag{9}$$

Для произвольного решения этого уравнения, справедливо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x(t)|^2=(x', x)=(Bx, x)+(Cx, x)=(Bx, x)\geqq c(x, x).$$

Следовательно

$$\frac{d}{dt}(e^{-2ct}|x(t)|^2)\geqq 0$$

или

$$|x(t)|\geqq e^{ct}|x(0)| \qquad (t\geqq 0) \tag{10}$$

Пусть $\lambda=\mu+i\nu$ собственное значение A и $h+if(h, f\in\boldsymbol{R}^n)$ соответствущий ему собственный вектор. Можно считать $h\neq 0$.

Очевидно $x(t)=e^{tA}h$ решение уравнения (9).

Подставляя в (10)

$$x(t)=\operatorname{Re} e^{tA}(h+if)=\operatorname{Re} e^{t\lambda}(h+if)=e^{t\mu}(\cos\nu t\cdot h-\sin\nu t\cdot f)$$

получаем $0<|x(0)|\leqq e^{(\mu-c)t}(|h|+|f|)$

Значит, $e^{(c-\mu)t}$ должна быть ограниченным на $[0, \infty)$, что возможно только при $c\leqq\mu$. Лемма доказана.

Пусть $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ различные собственные значения A_1. Согласно предыдущей лемме, $\min_{1\leqq i\leqq r} \operatorname{Re}\lambda_i > 0$.

Как легко видеть $\exp tA = (a_{ij}(t))$ имеет форму

$$a_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{r} e^{\lambda_i t} P_k(t), \qquad P_k \in \boldsymbol{C}[X]$$

а β принимает вид

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(u_1, \cdots, u_{i-1}) a_{kj}(-v)$$

где b_{ik}—многочлен от $u_1, \cdots u_{i-1}$.

Рассмотрим диффузионный процесс на M с производящим оператором Δ.

Это получается как решение стохастического дифференциального уравнения

$$dv_t = \sqrt{2}\, d\zeta_t + \alpha dt \tag{11}$$

$$du_{i,t} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} d\xi_t^k + r_i dt \qquad (1 \leqq i \leqq n) \tag{12}$$

где $(\zeta_t, \xi_{1,t}, \cdots, \xi_{n,t})$ $(n+1)$ мерный винеровский процесс, а

$$r_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_k} \qquad \text{не зависит от } u_j (i \leqq j).$$

Из (11) получаем

$$v_t = v_0 + \sqrt{2}\, \zeta_t + \alpha t.$$

Пользуясь этим и индукцией по i, можно утверждать что

$$\int_0^t \beta_{ik}(u_{1,s}, \cdots, u_{i-1,s}) d\xi_s^k$$

и

$$\int_0^t r_i(u_1, s, \cdots, u_{i-1,s}) ds$$

являются непрерывными на $[0, \infty]$ аддитивными функционалами от винеровкого процесса (с.м. Е.Б. Дынкин, Марковские процессы теорема 7.1).

Этим обеспечено существования единственного решения уравнения (11)~(12).

Таким образом мы получаем диффузионный процесс $(x_t, \infty, \mu_t, \boldsymbol{P}_x)$ на M.

При этом

$$\boldsymbol{P}_x\left(\lim_{t\to\infty} \frac{v_t}{t} = \alpha\right) = \boldsymbol{P}_x\left(\lim_{t\to\infty} \frac{u_t}{t} = 0\right) = 1 \tag{13}$$

Лемма 7. *Пусть*

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{1} dv_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du_i du_j$$

риманова мдтрика на $\boldsymbol{R}^{n+1}$, причем g_{ij} многочлен от u (для фиксированного v). Тогда имддт место

$$|v| \leqq s \leqq |v| + c(+|u|)^k$$

где s—расстояние точки $P=(u,v)$ от $Q(0,0)$ и $c, k>0$—постоянные зависящие от g.

Локазательство. Пусть $C(t)=(u(t), v(t))$, $0 \leqq t \leqq 1$, кусочно гладкая кривая соединяющая P и Q. Обозначим через $s(C)$ ее длину. По определению

$$s(C)=\int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^{1} \dot{v}_i(t)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \dot{u}_i(t) \dot{u}_j(t)\, dt} \geqq \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dot{v}_i(t)^2}\, dt$$

и правая часть достигает минимума $|v|$ при $v(t)=tv$ $(0 \leqq t \leqq 1)$.

Из этого следует

$$s = \operatorname*{Inf}_C s(C) \geqq |v|$$

Теперь возьмем за C кривую

$$u(t)=\begin{cases} tu, & 0 \leqq t \leqq 1 \\ u, & 1 \leqq t \leqq 2 \end{cases}, \qquad v(t)=\begin{cases} 0, & 0 \leqq t \leqq 1 \\ (t-1)v, & 1 \leqq t \leqq 2 \end{cases}$$

Тогда имеем

$$s \leqq s(C)=\int_0^1 \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g(0, tu) u_i u_j}\, dt + |v| = I(u) + |v|$$

и

$$I(u)^2 \leqq \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 g(0, tu) dt\, u_i u_j$$

По условию, правая часть—многочлен от u, так что лемма доказана.

Теперь мы в состоянии завершить доказательство искомого результата.

Обозначим через $r(x)$ расстояние x от e. Из (13) и лдммы 7 непосредственно следует

$$(*) \qquad \boldsymbol{P}_x\left(\lim_t \frac{r(x_t)}{t} = \alpha\right) = 1 \qquad (\forall x \in M).$$

§ 4. Автору пока неизвестно, верно ли последняя формула (*) для произвольного однородного риманова пространства неположительной кривизны.

Ниже мы разберем некоторые частные случаи.

Поскольку однородное риманово пространство неположителной кривизны изометрично произведению плоского тора и односвязного пространства (теорема Вольфа), мы можем считать M односвязным. Тогда, как показывает рассуждение в § 3, для установления (*) достаточно доказать, что вещественная часть собственного значения A_1 положительна.

1° *Слуай, когда $\mathfrak{N}$ абелева*

В данном случае, как и в лемме 3, имеем

$$0 \geqq \sum_{i=1}^{n} K(X_i, X) = \sum_{\nu=1}^{l} \langle S_\nu X, S_\nu X \rangle - \alpha \langle S_1 X, X \rangle$$

Отсюда видно, что $\langle S_1 X, X \rangle \geqq 0$ и $\langle S_1 X, X \rangle = 0$ влечет за собой $S_\nu X = 0$ ($\nu = 1, \cdots, 1$). Положим $\mathfrak{N}_0 = \{X \in \mathfrak{N}; S_1 X = 0\}$. Тогда $S_1 | \mathfrak{N}_0^\perp > 0$.

Докажем что $\mathfrak{N}_0$ и $\mathfrak{N}_0^\perp$ A_ν инвариантны и $A_\nu | \mathfrak{N}_0$ кососимметричны ($\nu = 1, \cdots, 1$).

Подставляя в $S_1^2 + [S_1, K_1] \geqq 0$ (демма 2, 2)) выражения

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underbrace{0}_{\mathfrak{N}_0} & \underbrace{S_0}_{\mathfrak{N}_0^\perp} \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \underbrace{K_{13}}_{\mathfrak{N}_0} & \underbrace{K_{14}}_{\mathfrak{N}_0^\perp} \end{pmatrix}$$

получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & -K_{12} S_0 \\ S_0 K_{13} & * \end{pmatrix} \geqq 0,$$

что возможно только в случае $K_{12} S_0 = 0$, т..е. $-K_{12} = {}^t K_{13} = 0$

Итак имеем

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ \underbrace{0}_{\mathfrak{N}_0} & \underbrace{A_{22}}_{\mathfrak{N}_0^\perp} \end{pmatrix},$$

причем ${}^t A_{11} = -A_{11}$

Пусть, для фиксированного $\nu \geqq 2$, $\widehat{\mathfrak{N}}_0 = \{X \in \mathfrak{N}; S_\nu X = 0\} \supset \mathfrak{N}_0$.

Как и выше, $\widehat{\mathfrak{N}}_0 - A_\nu$ инвариантно и $\hat{A}_\nu = A_\nu | \widehat{\mathfrak{N}}_0$—кососимметричен.

Полагая

$$\hat{A}_\nu = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \underbrace{C_3}_{\mathfrak{N}_0} & \underbrace{C_4}_{\widehat{\mathfrak{N}}_0 \ominus \mathfrak{N}_0} \end{pmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} B & * \\ \underbrace{*}_{\widehat{\mathfrak{N}} \ominus \mathfrak{N}_0} & \underbrace{*}_{\widehat{\mathfrak{N}}_0^\perp} \end{pmatrix}$$

соотношение $[H_1, H_\nu] = 0$ приводит к равенству

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

что означает $A_{11} C_2 = C_2 B$ и $B C_3 = C_3 A_{11}$, а последнее равносильно $A_{11} C_2 = -C_2 {}^t B$

Стало быть, $C_2(B + {}^t B) = 0$ т.е. $C_2 = -{}^t C_3 = 0$, потому что $B + {}^t B > 0$. В итоге получаем

$$A_\iota=\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \qquad {}^tC_1=-C_1$$
$$\qquad \underbrace{}_{\mathfrak{N}_0} \ \underbrace{}_{\mathfrak{N}_0^\perp}$$

что и требовалось доказать.

Основываясь на этом, легко вмдеть, что в данном случае метрический тензор имеет вид

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} E_l & 0 \\ 0 & * \end{matrix}}^{\mathfrak{A}+\mathfrak{N}_0^\perp} & \overbrace{0}^{\mathfrak{N}_0} \\ 0 & E_{n_0} \end{pmatrix}$$

Значит, M неометрично произведенню $\boldsymbol{R}_0^n$ ($n_0=\dim\mathfrak{N}_0$) и однородного пространства M_1 соответствующего подалгебре $\mathfrak{A}+\mathfrak{N}_0^\perp$.

Таким образом получается редукция к случаю $S_1>0$. И в нашем случае справедливо (*).

2° *Случай, когда* $\dim\mathfrak{A}=1$

Сначала выделим из M евклидов сомножитель. На основании

$$\langle S_1X, X\rangle\langle S_1Y, Y\rangle \geqq K^N(X, Y)+\langle S_1X, Y\rangle^2 \tag{14}$$

можно доказать, что $\mathfrak{G}$ разлагается в ортогональную сумму

$$\mathfrak{G}=(\mathfrak{A}+\mathfrak{Z}_0^\perp)\oplus\mathfrak{Z}_0$$

где $$\mathfrak{Z}_0=\{Y\in\mathfrak{Z}\,;\, S_1Y=0\}$$

и сомножитель соответствующий $\mathfrak{Z}_0$ плоский (см. доказательство леммы 3 и 1°). Итак, можно предполагать, что $\langle S_1Y, Y\rangle>0$ при $Y\in\mathfrak{Z}$.

Тогда, по (14), имеет место $\langle S_1X, X\rangle\geqq 0, X\in\mathfrak{N}$.

Докажем что, при $X\in\mathfrak{N}^{(i)}=\mathfrak{N}_{i-1}\ominus\mathfrak{N}_i$, $\langle S_1X, X\rangle>0$, откуда следует положительность вещественной части собственного значения эндоморфизма, индуцированного A_1 на $\mathfrak{N}_{i-1}/\mathfrak{N}_i$.

Пусть $X\in\mathfrak{N}^{(i)}$. По определению имеем

$$\langle L_X^N X, Y\rangle=-\langle X, [X, Y]\rangle=0$$

поскольку $[X, Y]\in\mathfrak{N}_i$ для всякого $Y\in\mathfrak{N}$. Значит, имеем $L_X^N X=0$.

Заметим далее, что если $L_X^N X=0$ и $[X, Y]=0$, то $K^N(X, Y)=\langle L_X^N Y, L_X^N Y\rangle\geqq 0$.

Пусть теперь $\langle S_1X, X\rangle=0$. Тогда, по (14), имеем $K^N(X, Y)\leqq 0$.

Следовательно, предполагая $[X, \mathfrak{N}_k]=0$, $k>i$, имеем $L_X^N Y=0$, $\forall\ Y\in\mathfrak{N}_k$, так что

$$\begin{aligned} 0&=2\langle L_X Y, Z\rangle=-\langle X, [Y, Z]\rangle-\langle Y, [X, Z]\rangle \\ &=-\langle Y, [X, Z]\rangle \qquad (Y\in\mathfrak{N}_k, Z\in\mathfrak{N}) \end{aligned} \tag{15}$$

(заметим что $[Z, Y]\in\mathfrak{N}_{k+1}$).

Отсюда вытекает $[X, \mathfrak{N}_{k-1}]\subset\mathfrak{N}_k\cap\mathfrak{N}_k^\perp=0$

С другой стороны, имеет место $[X, \mathfrak{N}_{r-1}]=0$, потому что $\mathfrak{N}_{r-1}\subset\mathfrak{Z}$ и индукция по k доказывает $[X, \mathfrak{N}_i]=0$.

Но, тогда снова из (15) получается $[X, \mathfrak{N}]\subset\mathfrak{N}_i\cap\mathfrak{N}_i^\perp=0$, т.е. $X\in\mathfrak{Z}$ вопреки предположению.

3° *Случай симметрического пространства*

В этом случае, $H_1=cH_\rho(c>0)$, где $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}$ (полусумма всех положительных корней) и H_ρ—такой вектор, что $\langle H_\rho, H\rangle=\rho(H)$ $\forall H\in\mathfrak{A}$.

Поэтому, из того, что $\langle\rho,\alpha\rangle>0$, следует $A_1>0$.

Следует отметить, что в случае симметрического пространства имеется более подробный результат (см. например [2]).

Литература

[1] Д. В. Алексеевский, Однородные римановы пространства отрицательной кривизны, *Матем сб.*, **96** (138), 93-117 (1975).

[2] A. Orihara, Supplement to the paper "On random ellipsoid (II)", *Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo*, **20** (1970).