Случайный эллипсоид (II)

Акио Орихара

Отделение Математики, Общеобразовательный Факультет,
Токиский Университет

(Постпило в редакцию 19 февраля 1970г)

Эта статья служит дополнением к работе автора [1], в которой изучается асимтотическое поведение инвариантного диффузионного процесса на симметрическом пространстве неположительной кривизны.

Наша цель—доказать предложение в пункте 3, утверждающее сходимость $\tilde{k}_t$ (проекция на "сферу" траектрии процесса x_t).

1. Пусть на измеримом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ заданы Марковский процесс $\boldsymbol{X}=(x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, \boldsymbol{P}_x)$ с пространством элементарных событий Ω и взаимно однозначное измеримое преобразование γ.

$\boldsymbol{X}$ называется инвариантным относительно γ, если выполняются следующие условия

1) Для каждого $\omega \in \Omega$ $(\zeta(\omega)>0)$, существует $\omega' \in \Omega$, такое что

$$\gamma x_t(\omega)=x_t(\omega')$$

для всех $0 \leqq t < \zeta(\omega)=\zeta(\omega')$

2) $$P(t, x, \Gamma)=P(t, \gamma x, \gamma\Gamma)$$

для всех t, $x \in E$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$
(см. [2] гл 10 § 6).

Положим $\omega \in \theta_\gamma A$, если найдется $\omega' \in A$, для которого выполнено 1).

Тогда, для $A \in \bar{N}$ имеет место следующие утверждение ([2] гл 10 Теорема 10. 14)

$$\theta_\gamma A \in \bar{N} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{P}_{\gamma^{-1}x}(\theta_\gamma A)=\boldsymbol{P}_x(A)\,. \tag{1}$$

Пусть, теперь, E—однородное пространство группы Ли G и $\boldsymbol{X}$—диффузионный процесс на E.

Условимся говорить, что $\boldsymbol{X}$ является G-инвариантным, если $\boldsymbol{X}$ инвариантен относительно преобразования $x \to xg$ для каждого $g \in G$.

Тогда, производящий дифференциальный оператор процесса является G-ин вариантным эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка.

Пусть G—(некомпактная) связная полупростая группа Ли с конечным центром, K—ее максимальная компактная подгруппа, и E—однородное пространство G/K.

Картновское скалярное произведение на $\mathfrak{G}$ (алгебра Ли группы G) порождает инвариантную риманову метрику на E.

Оператор Лапласа—Бельтрамн определяемый этой метрикой мы обозначим через $\varDelta_E$.

Пространство E распадается в прямое произведение неприводимых симметрических пространств:

$$E=E_1\times\cdots\times E_p\,.$$

При этом, всякий инвариантный эллипический дифференциальный оператор $\varDelta$ на E имеет вид

$$\varDelta=c_1\varDelta_{E_1}+\cdots+c_p\varDelta_{E_p}+c$$

где $c, c_1, \cdots, c_p$ постоянные, а $c_k>0$ $(1\leqq k\leqq p)$.

(подробнее об этом, см. Ф. А. Березин: Операторы Лапласа на полупростых группах Ли, Тр. Моск. Матем. 0—ва, том 6, 1957).

Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\varDelta=\varDelta_E$.

В [1] было построено (необрывающий) диффузионный процесс с производящим дифференциальным оператором $\varDelta$.

(Для этого процесса справедливо 2). Переходя к эквивалентному процессу в случае необходимости, можно считать выполненным и условие 1).)

В следующем пункте, будет дано другая конструкция такого процесса, которая более полезна для нашей цели.

2. Пусть $\mathfrak{K}$—алгебра Ли группы K и $\mathfrak{P}$—ее ортогональное дополнение отоносительно картановского скалярного произведения.

Выберем максимальную коммутативную подалгебру $\mathfrak{A}$, содержащуюся в $\mathfrak{P}$ и введем в $\mathfrak{A}$ некоторое упорядочивание.

Обозначим через R систему корней отоносительно $\mathfrak{A}$ и через R_+ совокупность положительных корней.

Тогда, как известно, имеет место

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{A}+\sum_{\alpha\in R_+}\mathfrak{G}_\alpha$$

где $\mathfrak{G}_\alpha$—пространство собственных векторов преобразований ad H $(H\in\mathfrak{A})$ отвечающих корню $\alpha\in R$.

Напомним как строется инвариантная риманова метрика на однородном прост ранстве G/K, при чем K компактна.

Пусть T_{x_0}—касательное пространство точки x_0, где x_0—точка, стациона рной подгруппой которой является K.

Мы имеем линейное представление группы X на T_{x_0}.

Поскольку К компактна, это представление унитарно, т.е. существует на T_x К—инвариантное скалярное произведение (X, Y).

Пусть $x=x_0g$ пропзвольная точка пространства E. На T_x (касательное пространство точки x) определим скалярное нроизведение, полагая

$$(X, Y)_x=(\dot{g}X^{-1}, \dot{g}Y^{-1})$$

где мы обозначим через $\dot{g}$ линейное отображение пространства T_x на T_{xg}

определенное g.

Правая часть не зависит от выбора g, потому что из $x_0g=x_0g'$ следует $g'=kg$ $(k\in K)$ и, по определению, имеем

$$(\dot{k}X, \dot{k}Y)=(X, Y).$$

Очевидно имеет место

$$(X, Y)_x=(\dot{g}X, \dot{g}Y)_{xg}.$$

Таким, образом, получена инвариантная метрика на E.

Пусть N и A подгруппа, отвечающие подалгебрам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}=\sum_{\alpha\in R_+}\mathfrak{G}_\alpha$.

Так как $G=KAN$ и $K\cap AN=\{e\}$, можно отожествить E с многообразием AN Тогда, линейное пространство $\mathfrak{A}+\mathfrak{N}$ касательное пространство точки x_0.

В этом случае K действует на T_{x_0}, так

$$X\to\pi^{-1}\circ\mathrm{Ad}\,k\circ\pi(X)$$

где $\pi(X)=\dfrac{1}{2}(X-\theta(X))$ и через θ обозначена инволюция алгебры определенная по формуле

$$\theta(x+Y)=X-Y \qquad (X\in\mathfrak{K},\ Y\in\mathfrak{P}).$$

При этом, скалярное произведение (на T_{x_0})

$$(X, Y)=(\pi(X), \pi(Y))_1$$

K—инвариантно. ($(X, Y)_1$—картановское скалярное произведение на $\mathfrak{P}$).

Поэтому, по выше изложенному способу, можно построить инвариантную риманову метрику на E.

Нумеруем все положительные корни, так $\alpha^{(1)}<\alpha^{(2)}<\cdots<\alpha^{(s)}$ и выберем произвольный ортонормированный базис пространства $\mathfrak{G}_{\alpha^{(i)}}$

$$X_1^{(i)}, \cdots, X_{n_i}^{(i)}$$

(n_i-кратность корня $\alpha^{(i)}$).

Для $k\leqq n=\sum_{i=1}^{s}n_i$, положим

$$X_k=X_j^{(i)} \qquad \text{если} \quad k=n_1+\cdots+n_{i-1}+j.$$

Далее, обозначим через $\{H_1, \cdots, H_P\}$ такой базис алгебры $\mathfrak{A}$, что

$$\alpha_i(H_j)=\delta_{ij}$$

где $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_P\}$-система простых корней.

Тогда, отображение

$$\varphi(v_1, \cdots, v_P, u_1, \cdots, u_n)=\exp v_1H_1\cdots\exp v_PH_P\exp u_1X\exp u_nX_n$$

является диффеоморфизмом пространства $\boldsymbol{R}^{p+n}$ на AN.

Нам нужно явный вид метрики в этой координатной системе.

Положим

$$g_{\lambda\mu}(x)=\left(\dot\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u_\lambda}\right)_x, \dot\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\right)_x\right)_{\varphi(x)=\mathrm{an}}=\left((\dot{\mathrm{an}})^{-1}\circ\dot\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u_\lambda}\right)_x, (\dot{\mathrm{an}})^{-1}\circ\dot\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\right)_x\right), \cdots.$$

По определению, имеет место

$$(\dot{\mathrm{an}})^{-1}\circ\dot\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u_\lambda}\right)_x f=\frac{d}{dt}f(\varphi(v_1, \cdots, u_1, \cdots, u_\lambda+t, \cdots, u_n)(\mathrm{an})^{-1})_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}f(\mathrm{an}_\lambda \exp tX_\lambda n_\lambda^{-1}a^{-1})_{t=0}$$

где

$$a=\exp\sum_{i=1}^{p}v_iH_i=\exp H, \qquad n_\lambda=\exp u_1X_1\cdots\exp u_{\lambda-1}X_{\lambda-1}.$$

Следовательно, имеем

$$(\dot{\mathrm{an}})^{-1}\circ\dot\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u_\lambda}\right)_x=(\mathrm{Ad}\, a\, \mathrm{Ad}\, n_\lambda)X_\lambda. \tag{2}$$

Имея в виду, что $\mathrm{ad}\, X$ нильпотентно для $X\in\mathfrak{N}$ и что подпространство натянутое элемментами X_μ $(\mu\geqq\lambda)$ является идеалом алгебры $\mathfrak{N}$, правую часть соотношения (2) можно прдставить в виде

$$\sum_{\mu\geqq\lambda}e^{\alpha^\mu(H)}c_\mu^{(\lambda)}(u)X_\mu$$

где

$$\alpha^\mu=\alpha^{(i)} \qquad \text{при} \quad n_1+\cdots+n_{i-1}<\mu\leqq n_1+\cdots+n_i.$$

$c_\lambda^{(\lambda)}=1$, $c_\mu^{(\lambda)}$-многочлен относительно $u_1, \cdots, u_{\lambda-1}$.

Подобным образом, имеем

$$(\dot{\mathrm{an}})^{-1}\circ\dot\varphi\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_x=H_i.$$

Из этого и легко проверяемых соотношений

$$(\mathfrak{G}_\alpha, \mathfrak{G}_\beta)=0 \qquad \text{при} \quad \alpha\neq\beta$$

$$(\mathfrak{G}_\alpha, \mathfrak{A})=0$$

следует что

$$g_{ij}(x)=(H_i, H_j)$$

$$g_{i\lambda}(x)=0$$

$$g_{\lambda\mu}(x)=\sum_{\nu\geqq\max(\lambda,\mu)}e^{2\alpha^\nu(H)}c_\nu^{(\lambda)}c_\nu^{(\mu)}(u)$$

Перепысивая это в матричной форме, полуаем

$$(g_{\lambda\mu})=\begin{pmatrix}1 & & c_{\mu}^{(\lambda)}\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left.\begin{matrix}e^{2\alpha_1(H)} & \\ & \ddots\end{matrix}\right\}n_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \left.\begin{matrix}e^{2\alpha_s(H)} & \\ & \ddots\end{matrix}\right\}n_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & c_{\mu}^{(\lambda)}\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}^{t}.$$

Поэтому, имеет место

$$(g^{\lambda\mu})=(g_{\lambda\mu})^{-1}={}^{t}\begin{pmatrix}1 & & d_{\mu}^{(\lambda)}\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-2\alpha_1(H)} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-2\alpha_s(H)}\ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & d_{\mu}^{(\lambda)}\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} \tag{3}$$

где

$$\begin{pmatrix}1 & & d_{\mu}^{(\lambda)}\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & c_{\mu}^{(\lambda)}\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}^{-1}. \tag{4}$$

Из (4) следует что $d_{\mu}^{(\lambda)}$ является многочленом относительно $c_{(\mu')}^{(\lambda')}$, $\lambda'<\mu'\leqq\mu$ и, следовательно, многочленом относительно $u_1, \cdots, u_{\mu-1}$.

По доказанному выше, мы получаем явный вид оператора Лапласа Бельтрами

$$\Delta=\sum_{i,j=1}^{p}(\alpha_i, \alpha_j)\frac{\partial^2}{\partial v_i\partial v_j}+\sum_{k=1}^{p}2(\alpha_k, \rho)\frac{\partial}{\partial v_k}+\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}g^{\lambda\mu}\frac{\partial^2}{\partial u_\lambda\partial u_\mu}+\sum_{\lambda=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial g^{\lambda\mu}}{\partial u^{\mu}}\right)\frac{\partial}{\partial u_\lambda}$$

где

$$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+}\alpha.$$

В эту сумму каждый корень входит столько раз какова его кратность. Заметим что

$$g^{\lambda\mu}=\sum_{\nu\leqq\min(\lambda,\mu)}e^{-2\alpha^{\nu}(H)}d_{\lambda}^{(\nu)}d_{\mu}^{(\nu)}$$

не зависит от u_ν ($\nu\geqq\max(\lambda, \mu)$).

Поэтому

$$r_\lambda(u, v)=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial g^{\lambda\mu}}{\partial u_\mu}$$

имеен следующий вид

$$r_1(u, v)=0, \qquad r_\lambda(u, v)=\sum_{\nu=1}^{\lambda-1}e^{-2\alpha^{\nu}(H)}q_\nu(u) \qquad (\lambda\geqq2)$$

где q_ν—многочлен относительно $u_1, \cdots, u_{\lambda-1}$.

Построим диффузионный процесс с производящим дифференциальным оператром Δ.

Пусть $X=(x_t, \infty, N_t^0, \boldsymbol{P}_x)-n+p$ мерный винеровский процесс.

Положим

$$v_{t,i}=\sum_{i=1}^{p}\tilde{a}^{ij}(\xi_{t,j}-\xi_{0,j})+2(\alpha_i, \rho)t+v_{0,i} \qquad (1\leqq i\leqq p)$$

где $x_t=(\xi_{t,1}, \cdots, \xi_{t,p}, \eta_{t,1}, \cdots, \eta_{t,n})$-траектрия процесса X и ${}^t(\tilde{a}^{ii})(\tilde{a}^{ij})=2((\alpha_i, \alpha_j))$.

Покажем, что существуют непрерывные на $[0, \infty]$ аддитивные функционалы

$$u_{t,\lambda}(\lambda=1, \cdots, n) \qquad \text{от} \quad X,$$

такие что

$$u_{t,\lambda}=\sqrt{2}\sum_{\mu=1}^{\lambda}\int_0^t e^{-\alpha^\mu(H_s)}d_\mu^{(\lambda)}(u_{s,1}, \cdots, u_{s,\lambda-1})d\eta_{s,\mu}+\int_0^t r_\lambda(u_{s,1}, \cdots, u_{s,\lambda-1}, v_s)ds+u_{0,\lambda}$$

где

$$H_s=\sum_{i=1}^{p}v_{s,i}H_i$$

Проведем доказателство по индукции.

Имеем

$$u_{t,1}=\sqrt{2}\int_0^t e^{-\alpha^{(1)}(H_s)}d\eta_{s,1}. \tag{5}$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\xi_{t,i}}{t}=0 \qquad (\text{п. н. } P_x),$$

для $0<\delta<2(\alpha^{(1)}, \rho)$, найдется такое $T=T(\omega)$, что имеет место

$$e^{-\alpha^{(1)}(H_t)}=ce^{-[\sum_j(\alpha^{(1)},\alpha_j)\xi_{t,j}+2(\alpha^{(1)},\rho)t]}\leqq e^{-\delta t} \qquad \text{при} \quad t\geqq T(\omega).$$

Из этого видно что

$$\int_0^\infty(e^{-\alpha^{(1)}(H_t)})^2dt<\infty \qquad (\text{п. н. } \boldsymbol{P}_x).$$

Поэтому, по формуле (5), можно определить непрерывный на $[0, \infty]$ функционал ([2] гл 7 Теорема 7. 1).

Предположим, теперь, что $u_{t,1}, \cdots, u_{t,\lambda-1}$ уже посстроены.

Поскольку $u_{t,\mu}$ $(\mu\leqq\lambda-1)$ непрерывны на $[0, \infty]$, они ограниченны (п. н. $\boldsymbol{P}_x$).

По той же причине, как выше, имеем

$$\sum_\mu\int_0^\infty|e^{-\alpha^\mu(H_t)}d_\mu^{(\lambda)}(u_{t,1}, \cdots, u_{t,\lambda-1})|^2dt<\infty,$$

$$(\text{п. н. } \boldsymbol{P}_x)$$

$$\int_0^\infty|r_\lambda(u_{t,1}, \cdots, u_{t,\lambda-1}, v_t)|dt<\infty.$$

Таким, образом, определяется и $u_{t,\lambda}$.

Как показыает теория стохастических интегральных уравнений, в силу (3),

$$x_t=(v_{t,1}, \cdots, v_{t,p}, u_{t,1}, \cdots, u_{t,n})$$

служит траектрией диффузионного процесса с производящим дифференциальным оператом Δ.

По сказанному выше, имеет место

$$\lim_{t\to\infty}\frac{v_{t,i}}{t}=2(\alpha_i, \rho)\,, \qquad i=1, \cdots, p \quad (\text{п. н. } \boldsymbol{P}_x)$$

и u_t имеет предел при $t\to\infty$:

$$\lim_{t\to\infty} u_t=u_\infty \qquad (\text{п. н. } \boldsymbol{P}_x)\,.$$

В итоге, доказано следующее утверждение.

Предложение. *Пусть* $\boldsymbol{X}=(x_t, \infty, \mathscr{M}_t, \boldsymbol{P}_x)$*-диффузионный процесс на* E *с производящим дифференциальным оператором* Δ.

Тогда, траекторию x_t *можно представить в виде*

$$x_t=x_0 a_t n_t \qquad (a_t\in A,\ n_t\in N)$$

(x_0—"*начало координат*", *а не отправной пункт траектрии процесса*).

Причем имеют место

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log a_t}{t}=2\rho \qquad (\text{п. н. } \boldsymbol{P}_x)$$

$$\lim_{t\to\infty} n_t=n_\infty\in N \qquad (\text{п. н. } \boldsymbol{P}_x)$$

(*будем отожествлять* ρ *и такой вектор* $H_\rho\in\mathfrak{A}$, *что* $(H_\rho, H)=\rho(H)$ *для всех* $H\in\mathfrak{A}$).

3. Как и выше, пусть E—симметрическое пространство.

Известно, что существует пространство $\bar{E}$ со следующими свойствами.

1) $\bar{E}$ является компактным метрическим пространством, содердящим E в качестве плотного открытого подмножества.

2) G действует на $\bar{E}$ как непрерывная группа, т.е. отображение пространства $G\times\bar{E}$ на $\bar{E}$; $(g, x)\to xg$ непрерывно.

3) Геодезическая пространства E, то есть, кривая $\gamma(t)=x_0(\exp tX)g$ имеет предел в $\bar{E}$ при $t\to\infty$ и из $\lim x_0(\exp tX)=\lim x_0(\exp tY)$ $(\|X\|=\|Y\|=1)$, следует $X=Y$.

4) Пусть $a(t)$—некоторая кривая в группе A.

Предпожим, что для некоторого $H\in\mathfrak{A}$, имеет место

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log a(t)}{\|\log a(t)\|}=\frac{H}{\|H\|} \qquad \text{и} \qquad \lim_{t\to\infty} a(t)=\infty\,.$$

Тогда, при $t\to\infty$, $x_0\ a(t)$ имеет тот же предел, что $\gamma(t)=x_0(\exp tH)$.

Из 2), 4) и предложения в конце пункта 2, мы видим что для всякого $x\in E$, существует предел:

$$x_\infty=\lim_{t\to\infty} x_t \qquad (\text{п. н. } \boldsymbol{P}_x)\,. \tag{6}$$

Требуется найти распределение вероятностей случайной величины x_∞.

Пусть $\gamma(t)=x_0(\exp tH)$—геодезическая общего положения, т.е. такая, что $\alpha(H)\neq 0$ для каждого $\alpha\in R_+$ и положим $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma(t)=\gamma_\infty$.

Обозначим через Ξ орбиту группы G, проходящую через точку γ_∞.

(Ξ называется остовом пространства E. Вообще говоря, остов не единствен, но они изоморфны друг другам как однородные пространства.)

Известно [4], что на Ξ транзитивно действует стационарная подгруппа K_x любой точки $x\in E$.

Поскольку процесс X G—инвариантен, из (1) вытекает что

$$\boldsymbol{P}_x(x_\infty\in\Gamma)=\boldsymbol{P}_x(x_\infty\in\Gamma k)\,, \qquad k\in K_x\,.$$

Знатит,

$$\mu(x,\Gamma)=\boldsymbol{P}_x(x_\infty\in\Gamma)$$

является K_x-инвариантная вероятностная мера на Ξ.

Пусть $d\xi-K=K_{x_0}$-инвариантная мера на Ξ, такая что $\int_\Xi d\xi=1$.

Тогда $\mu(x,d\xi)$ обсолютно непрерывна по $d\xi$ и имеет место Ξ

$$\mu(x,\Gamma)=\int_\Gamma p(x,\xi)^{2\rho}d\xi$$

где

$$p(x,\xi)=a \qquad \text{при} \quad \xi=\gamma_\infty k,\ xk^{-1}=x_0an_-\ \ (k\in K,\ n_-\in N_-)$$

(N_-—подгруппа, отвечающий подаргчбре $\mathfrak{N}_-=\sum\limits_{\alpha\in R_+}\mathfrak{G}_{-\alpha}$).

Положим

$$A=\{H\in\mathfrak{A}\,;\ \alpha(H)>0,\ \forall\,\alpha\in R_+\}$$

$$M=\{k\in K\,;\ (\operatorname{Ad} k)H=H,\ \forall\,H\in\mathfrak{A}\}\,.$$

Тогда, отображение определенное но формуле

$$\tau(k,H)=x_0(\exp H)k$$

индуцирует диффеоморфизм пространства $M\backslash K\times A$ в E.

Пусть E'—его образ. В [1] доказано, что, для каждого $x\in E$,

$$\boldsymbol{P}_x(x_t\in E',\ t>0)=1$$

и при представлении $x_t=x_0(\exp H_t)k_t$, имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H_t}{t} = 2\rho. \tag{7}$$

Докажем, что существует предел в M/K: $\lim\limits_{t\to\infty} \tilde{k}_t = k$.

(для $k \in K$, обозначим через k смежный класс по M, содердящий k).

Предположим что наидется две сходящейся подпоследовательности $\{k_{t_n}\}$, $\{k_{t'_n}\}$:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{k}_{t_n} = k_1, \qquad \lim_{t\to\infty} \tilde{k}_{t_n} = \tilde{k}_2.$$

Неограничвая общности, можно считать что последовательности $\{k_{t_n}\}$, $\{k_{t'_n}\}$ тоже сходятся (k_{t_n}—любой представитель смежного класса $\tilde{k}_{t_n}$).

Тогда, из (2), (4), (6) и (7), следует

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_{t_n} = x_0 (\exp H_{t_n}) k_{t_n} = \xi_0 k_1$$
$$= x_0 (\exp H_{t'_n}) k_{t'_n} = \xi_0 k_2,$$

где

$$\xi_0 = \lim x_0 (\exp tH_0) \left(H_0 = \frac{\rho}{\|\rho\|} \right).$$

Следовательно, имеем $\mathrm{Ad}\,(k_1^{-1} k_2) H_0 = H_0$.

Поскольку $H_0 \in A$,

$$k_1^{-1} k_2 \in M \qquad \text{т.е.} \quad \tilde{k}_1 = k_2.$$

Этим доказано существование предела $\tilde{k}_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} \tilde{k}_t$.

Очевидно имеем

$$\boldsymbol{P}_x(\tilde{k}_\infty \in \tilde{\Gamma}) = \mu(x, \Gamma) \qquad (\Gamma = \xi_0 \tilde{\Gamma}).$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Предложение. *При $t \to \infty$, $\tilde{k}_t$ сходится (п. н. $\boldsymbol{P}_x$). Мера $\boldsymbol{P}_x(\tilde{k}_\infty \in \tilde{\Gamma})$ представляется в следующем виде:*

$$\boldsymbol{P}_x(k_\infty \in \tilde{\Gamma}) = \int_\Gamma p(x, \xi)^{2\rho} d\xi. \tag{*}$$

Замечание 1. (*) впервые было доказано Е. Б. Дынкиным в случае пространства всех положительно определенных эрмитовых матриц n-го порядка с определителем 1. В [3] он построил границу Мартина этого пространства, с помощью которой он получил этот результат (*).

Построение границы Мартина общих симметрических пространств неположительной кривизны было сделано Ф. И. Карпелевичем [4]. Используя его результат, также можно доказать (*).

Замечание 2. Орбита группы N (проходящая через ξ_0) Ξ' является подмножеством с полной μ_x-мерой.

Распредедение вероятностей случайной величины n_∞—сужение меры μ_x на E'. Например, в случае Ловачевского пространства, имеем

$$d\mu_x(u) = \frac{du}{(b+b^{-1}\,||u-u_0||^2)^n} \qquad (x=(v_0, u_0),\ b=e^{-v_0})$$

$$u_{\infty,\lambda} = u_{0,\lambda} + \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-v_t}d\eta_{t,\lambda} = u_{0,\lambda} + \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-v_0-\sqrt{2}\,\xi_t-nt}d\eta_{t,\lambda} \qquad (\lambda=1, \cdots, n)$$

В этом случае, соотношение (*) равносильно следующему:

$$\int_{C[0,\infty)} e^{-\lambda\int_0^\infty e^{2(\sqrt{2}x(t)+nt)}dt}\, d_w x = 2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} K_{\frac{n}{2}}(\lambda)\,, \qquad (\lambda>0)\,.$$

Где $d_w x$—мера Винера в пространстве функций $x(t)$, непрерывных на $[0, \infty)$ и удовлетворяющих условию $x(0)=0$.

Литература

[1] A. Orihara, On random ellipsoid, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo (1970).

[2] Дынкин, Е. Б., Марковские процессы, Москва, 1933.

[3] Дынкин, Е. Б., Броуновское движение в некоторых симметрических пространствах и неотрицательные собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами, Известия АН СССР **30** (1966).

[4] Карпелевич, Ф. И., Геометрия геодезических и собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами на симметрических пространствах, Труды Моск. Матем. Оба, **14** (1965).