Добавление к работе "Случайный Эллипсоид (II)"

Акио Орихара

Отделение Математики, Общеобразовательный Факультет,
Токийский Университет

(Поступило в редакцию 10 сенинбря 1970 г)

В этой заметке будет доказано, что Теорема в [1] является следствием Предложения в [2].

Пусть X—симметрическое пространство (неположительной кривизны) $K\diagdown G$. Как принято, X отождествляется с $\exp\mathfrak{P}\subset G$. Тогда всякий елемент $x\in X$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} x&=k^{-1}(\exp H)k \\ x&=n^*(\exp\tilde{H})n \end{aligned} \tag{1}$$

$$(k\in K,\ n\in N,\ \tilde{H}\in\mathfrak{A},\ H\in\bar{A})$$

причем n, $\tilde{H}$, H однозначно определяются по x. (Об обозначениях см. [2])

Предложение. *Пусть x_t—(непрерывная) кривая в X. Если существуют пределы*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{H}_t}{t}=H_0\in A$$

$$\lim_{t\to\infty} n_t=n_0\in N$$

то имеет место

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H_t}{t}=H_0$$

Доказательство. Пусть (ρ, V)—неприводимое представление алгбры Ли $\mathfrak{G}$.

Как известно, при надлежащем выборе скалярного произведения на V, $\rho(\mathfrak{K})$ являютоя косоэрмитовыми, а $\rho(\mathfrak{P})$—зрмитовыми.

Ввиду коммутативности алгебры $\mathfrak{A}$, имеем

$$V=\sum_{\lambda}\oplus V_\lambda$$

где $V_\lambda=\{\xi\in V;\ \rho(H)\xi=\lambda(H)\xi,\ H\in\mathfrak{A}\}$ (λ называется o-весом представления). Обозначим через λ_ρ старший o-вес.

В силу неприводимости представления, каждый o-вес имеет вид

$$\lambda=\lambda_\rho-\sum_i m_i\alpha_i$$

где α_i—простые корни, m_i—неотрицательные целые числа.

Выберем какой нибудь базис пространства V_λ. Обединяя их, полчаем базис пространства V, в котором $\rho(X)(X\in\mathfrak{N})$ представляет собой верхно-треугольню матрицу с диагональяьными элементами 0. (заметим что для $X\in\mathfrak{G}_\alpha$, $\rho(X)\,V_\lambda\subset(V_{\lambda+\alpha})$

Представлению алгебры $\mathfrak{G}$, отвечает проективное представление группы G. (и предсталение пространстранства X в $SU(n)\diagdown SL(n, C)$). Из (1) следует

$$\begin{aligned}\rho(x)&=\rho(k)^{-1}\exp\rho(H)\rho(k)\\&=\overline{\rho(n)}^{t}\exp\rho(\tilde{H})\rho(n)\end{aligned}$$

Положим $\rho(n_t)=(n_{ij}(t))$, $\exp\rho(\tilde{H}_t)=(\tilde{a}_i(t))$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\sum_\lambda n_\lambda\exp\lambda(H_t)&=Tr\rho(x)=Tr\,\overline{n(t)}^{t}\tilde{a}(t)n(t)\\&=\sum_{i,j}\tilde{a}_i(t)|n_{ij}(t)|^2\end{aligned}\tag{2}$$

где n_λ—кратность ρ-веса λ.

Так как $H_t\in\bar{A}$ означает $\alpha(H_t)\geqq0$ $(\alpha\in R_+)$, выполняется неравенство

$$\lambda(H_t)\leqq\lambda_\rho(H_t)$$

С другой стороны, для $\alpha\in R_+$,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha(H_t)}{t}=\alpha(H_0)>0$$

Поэтому можно найти такое положительное число t_0, что

$$\alpha(\tilde{H}_t)>0\qquad\text{для}\quad t>t_0,\ \alpha\in R_+$$

Следовательно имеет место

$$\lambda(\tilde{H}_t)\leqq\lambda_\rho(\tilde{H}_t)\qquad\text{для}\quad t>t_0$$

Из сказанного и (2) вытекает следующие неравенства

$$\begin{aligned}&\exp\lambda_\rho(H_t)\leqq\exp\lambda_\rho(\tilde{H}_t)(\sum_{i,j}|n_{ij}(t)|^2)\qquad(t>t_0)\\&\exp\lambda_\rho(\tilde{H}_t)\leqq d\exp\lambda_\rho(H_t)\end{aligned}$$

где $d=\dim V$.

Из этого следует

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_\rho(H_t)}{t}\leqq\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\lambda_\rho(\tilde{H}_t)}{t}+\lim_t\frac{1}{t}\log(\sum_{i,j}|n_{ij}(t)|^2)$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\lambda_\rho(H_t)}{t}\geqq\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_\rho(\tilde{H}_t)}{t}$$

Поскольку существует предел $\lim\limits_{t\leftarrow\infty}n_t$, имеем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(\sum_{i,j}|n_{ij}(t)|^2)=0$$

Поэтому имеет меет место

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_\rho(H_t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_\rho(\tilde{H}_t)}{t}=\lambda_\rho(H_0)$$

Так как множество $\{\lambda_\rho;\ \rho$—неприводимое представление$\}$ порождает $\mathfrak{A}^*$ (линейное пространство сопряженное к $\mathfrak{A}$), имеем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H_t}{t}=H_0$$

Литература

[1] A. Orihara, On random ellipsoid, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, (1970).

[2] A. Orihara, On random ellipsoid, (II), Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, **20** (1970).