Об одном методе перечисления всех неприводимых унитарных представлений группы $SL(2, C)$

Акио Орихара

Отдел Математики, Общеобразовательный Факультет, Токиский Университет

(Поступило, 15. Февраль. 1968)

В теории представлений компактных групп, основную роль играет кольцо функций, постоянных на классах сопряженных элементов.

Для полного описания неприводимых представлений, достаточно найти все гомоморфизмы этого кольца в поле комплексных чисел.

Нас интересует следующий вопрос. Какое кольцо может играть подобную роль в случае некомпактных групп?

В случае $G=SL(2, C)$, таким же является кольцо $\mathfrak{R}$, определенное в настоящей статье (см. § 1).

В § 2, доказывается, что каждое неприводимое унитарное представление порождает некоторый гомоморфизм зтого кольца в поле комплексных чисел, явный вид которого можно найти без труда.

Далее, в § 3, обсуждается связь этого гомоморфизма с характером данного представления.

Надо заметить, что это кольцо было рассмотрено еще в работе И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [1].

Метод, принятый в этой работе, основан на теореме Пэли-Винера на группе [6]. Автор намерен применять этот метод в более общих случаях.

§ 1

Обозначим через $\mathfrak{R}$ кольцо всех финитных бесконечно дифференцируемых функций на C^* (мультипликативная группа ненулевых комплексных чисел), удовлетворяющих следующим условиям:

$$\gamma(\lambda)=\gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad \int|\lambda-\lambda^{-1}|^2\gamma(\lambda)d\mu(\lambda)=0$$

где $d\mu$=инвариантная мера на C^* (Умножение определяется обычным свертком).

Положим

$$\tilde{\gamma}(\lambda)=|\lambda-\lambda^{-1}|^{-2}L\gamma(\lambda) \qquad \text{где} \qquad L=\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\bar{\lambda}\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}.$$

Как легко видеть, $\tilde{\gamma}(\lambda)=\tilde{\gamma}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ и соответствие $\gamma\to\tilde{\gamma}$ взаимно однозначно. Для элемента $g\in G$, представляемого в виде $g=g_0\begin{pmatrix}\lambda^{-1}, & 0\\ 0, & \lambda\end{pmatrix}g_0$, положим

$$\tilde{\gamma}(g)=\tilde{\gamma}(\lambda)\,.$$

Тогда мы получаем функцию $\tilde{\gamma}(g)$, определенную почти всюду на группе G. Эта функция локально суммируема.

В самом деле, для финитной функции $f(g)$, имеет место

$$\int\tilde{\gamma}(g)f(g)dg=\int L\gamma(\lambda)I_f(\lambda)d\mu \tag{1}$$

где

$$I_f(\lambda)=c\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\iint f(u^{-1}\delta\zeta u)dud\zeta\,, \qquad \delta=\begin{pmatrix}\lambda^{-1}, & 0\\ 0, & \lambda\end{pmatrix}$$

(см. [2] [3])

Ввиду финитности f, $I_f(\lambda)$ тоже финитна. Поэтому интеграл (1) существует.

Следовательно, для $f\in C_0^\infty(G)$ (пространство функций финитных бесконечно дифференцируемых на G), $\tilde{\gamma}*f$ является бесконечно дифференцируемой функцией.

Предложение 1. *$\tilde{\gamma}*f$ принадлежит $L^2(G)$, причем ее преобразование Фурье —— $\check{\gamma}(\chi)$ $K_f(z_1, z_2; \chi)$ где $K_f(z_1, z_2; \chi)$ преобразование Фурье функции f и*

$$\check{\gamma}(\chi)=\int\gamma(\lambda)\chi(\lambda)d\mu$$

($\chi(\lambda)$ —— *характер группы* C^*).

Доказательство. Для $h\in C_0^\infty(G)$, имеем

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\gamma}*f, h\rangle=\langle\tilde{\gamma}, h*f^*\rangle&=\int|\lambda-\lambda^{-1}|^2\,\tilde{\gamma}(\lambda)\overline{I_{h*f^*}(\lambda)}d\mu\\ &=\iint|\lambda-\lambda^{-1}|^2\,\tilde{\gamma}(\lambda)\chi(\lambda)d\mu\overline{\int I_{h*f^*}(\lambda)\chi(\lambda)d\mu}d\chi\\ &=\int\check{\gamma}(\chi)\int K_f(z_1, z_2; \chi)\overline{K_h(z_1, z_2; \chi)}dz_1dz_2\omega(\chi)d\chi\end{aligned}$$

($\omega(\chi)d\chi=$мера Планшереля).

Следовательно, по формле Планшереля, получаем следующее:

$$||\tilde{\gamma}*f||^2=\int|\check{\gamma}(\chi)K_f(z_1, z_2; \chi)|^2\,dz_1dz_2\omega(\chi)d\chi\leqq\left(\int|\gamma(\lambda)|d\mu\right)^2||f||^2\,.$$

Этим доказано наше утверждение.

Лемма. *Положим*

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda)=\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\int f(z_1^{-1}\delta\zeta z_2)d\zeta\,.$$

Тогда, для любого целого n, выполняется неравенство:

$$|\varphi(z_1, z_2; \lambda)| \leqq c_n \frac{1}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} \left(|\lambda|^2 \frac{1+|z_2|^2}{1+|z_1|^2}\right)^{\frac{n}{2}}. \tag{2}$$

Доказательство. Положим $\mathrm{Sup}\,\|g\|^{2n}|f(g)|=c_n'$, где $\|g\|^2=\mathrm{Tr}\,g^*g$. Тогда, как легко видеть,

$$\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\int |f(u_1^{-1}\delta\zeta u_2)|\,d\zeta \leqq c_n'|\lambda|^2\int\left(|\lambda|^2+\frac{1}{|\lambda|^2}+\left|\frac{\zeta}{\lambda}\right|^2\right)^{-n} d\zeta$$

$$=cc_n'\frac{\pi}{n-1}\left(|\lambda|^2+\frac{1}{|\lambda|^2}\right)^{-n+1}. \tag{3}$$

С другой стороны, воспользуясь разложением

$$z=\zeta\delta u \qquad \text{где} \qquad \lambda=(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

получаем

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda)=\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\int f(u_1^{-1}\delta_1^{-1}\zeta_1^{-1}\delta\zeta\zeta_2\delta_2u_2)\,d\zeta$$

$$=|\lambda_2|^{-2}|\lambda_1|^{-2}\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta_1^{-1}\delta\delta_2)\int f(u_1^{-1}\delta_1^{-1}\delta\delta_2\zeta u_2)\,d\zeta. \tag{5}$$

Из (3), (4) и (5), следует неравенство (2).

Замечание. Каждому злементу X алгеблы Ли, сопоставим два дифференциальных операторов на группе:

$$Xf(g)=\frac{d}{dt}f(\exp(-tX)g)\Big|_{t=0} \qquad \tilde{X}f(g)=\frac{d}{dt}f(g\exp tX)\Big|_{t=0}.$$

Тогда, имеют место следующие соотношения.

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi_f(z_1, z_2; \lambda)=\varphi_{Xf}(z_1, z_2; \lambda), \qquad \frac{\partial}{\partial z_2}\varphi_f(z_1, z_2; \lambda)=\varphi_{\tilde{X}f}(z_1, z_2; \lambda)$$

$$\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\varphi_f(z_1, z_2; \lambda)=\varphi_{Af}(z_1, z_2; \lambda)$$

где

$$X=\begin{pmatrix}0, & 0\\ 1, & 0\end{pmatrix}, \qquad Y=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & 0\\ 0, & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \qquad A=Y+\tilde{Y}-2.$$

Далее, положим $f_{u_1,u_2}(g)=f(u_1gu_2)$ для $u_1, u_2 \in SU(2)$. Тогда, как легко видеть,

$$X(f_{u_1,u_2})=[(Adu_1X)f]_{u_1,u_2}, \qquad \tilde{X}(f_{u_1,u_2})=[(A\widetilde{du}_2X)f]_{x_1,u_2}.$$

Поэтому, если D——полином операторов $X, \tilde{X}, A$ (и комплексно сопряженных с ними), выполняется следующее

$$D\varphi_{f_{u_1,u_2}}(z_1, z_2; \lambda) \leqq c_n(f, D) \frac{1}{1+|z_1|^2} \frac{1}{1+|z_2|^2} \left(\frac{1+|z_2|^2}{1+|z_1|^2} |\lambda|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

($c_n(f, D)$ независимо от u_1, u_2).

Предложение 2. *$\tilde{\gamma} * f$ является суммируемой функцией, причем*

$$\|\tilde{\gamma} * f\|_{L_1} \leqq c(f) \operatorname*{Sup}_{|n| \leqq 4} \int |\lambda|^n |L\gamma(\lambda)| d\mu .$$

Доказательство. По формуле обращения (см. [6]),

$$f(g) = -\frac{1}{2\pi} \int \varphi''_{\lambda\bar{\lambda}} \left(z, \frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}; \beta z+\delta \right) dz.$$

Поэтому, для $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon^{-1}, & 0 \end{pmatrix}$, имеем

$$\tilde{\gamma} * f(u_1^{-1} \varepsilon u_2) = \tilde{\gamma} * f_{u_1, u_2}(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{2\pi^2} \int \psi_{u_1, u_2}(-\varepsilon z, \varepsilon z^{-1}; z) dz$$

где

$$\psi_{u_1, u_2}(z_1, z_2; \lambda) = \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_{\tilde{\gamma} * f_{u_1, u_2}} = \frac{1}{\lambda \bar{\lambda}} L(\varphi_{f_{u_1, u_2}} * \gamma) = \frac{1}{\lambda \bar{\lambda}} \varphi_{f_{u_1, u_2}}(z_1, z_2; \lambda) * (L\gamma)(\lambda) .$$

Из сказанного выше, следует оценка:

$$|D\psi_{u_1, u_2}(z_1, z_2; \lambda)| \leqq c_n(\gamma) \frac{1}{|\lambda|^2 (1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} \left(|\lambda|^2 \frac{1+|z_2|^2}{1+|z_1|^2} \right)^{\frac{n}{2}}$$

где

$$c_n(\gamma) = c_n(f, D) \int |\lambda|^{-n} |L\gamma(\lambda)| d\mu .$$

Положим

$$F_k(\varepsilon) = \int \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} \psi_{u_1, u_2}(-\varepsilon z, \varepsilon z^{-1}; z) dz \qquad \text{и} \quad F_0 = F ,$$

то для $\varepsilon > 0$, $F^{(k)}(\varepsilon) = F_k(\varepsilon)$ $(k = 0, 1, \cdots)$ т.е. $F \in C^\infty(0, 1]$.

Докажем что $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} F_k(\varepsilon) = F_k(0)$. Тогда, как легко видеть,

$$F \in C^\infty[0, 1] , \qquad F^{(k)}(0) = F_k(0) .$$

Так как,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(-\varepsilon z, \varepsilon z^{-1}; z) = \left\{ \left(-z \frac{\partial}{\partial z_1} + z^{-1} \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + \left(-\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \bar{z}^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right) \right\} \psi(-\varepsilon z, \varepsilon z; z)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + \left(\bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right) \right\} \varphi(-\varepsilon z, \varepsilon z; z)$$

нам достаточно доказать что

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\phi^{[k]}_{u_1,u_2}(-\varepsilon z,\varepsilon z^{-1};z)dz=\int\phi^{[k]}_{u_1,u_2}(0,0;z)dz$$

где

$$\left(-z\frac{\partial}{\partial z_1}+z^{-1}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^k\phi=\phi^{(k)}.$$

1) В силу (2), имеем

$$\left|\int_{|z|\geqq\frac{1}{\varepsilon}}\phi^{(k)}_{u_1,u_2}(-\varepsilon z,\varepsilon z^{-1};z)\,dz\right|\leqq\varepsilon^{-k}\int|D^k\phi_{u_1,u_2}|(-\varepsilon z,z\varepsilon^{-1};z)dz$$

$$\leqq\varepsilon^{-k}c_n(\gamma)\int_{|z|\geqq\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{|\lambda|^2(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}\left(|\lambda|^2\frac{1+|z_2|^2}{1+|z_1|^2}\right)^{\frac{n}{2}}\Bigg|_{\substack{\lambda=z\\ z_1=-\varepsilon z,\,z_2=\varepsilon z^{-1}}}dz$$

$$\leqq\varepsilon^{-k}c_n(\gamma)\int_{|z|\geqq\varepsilon^{-2}}\frac{1}{(1+|z|^2)^2}\left(\frac{1+\varepsilon^4|z|^2}{1+|z|^2}\right)^{-\frac{n}{2}-1}\varepsilon^n dz,$$

$$\int_{|z|\geqq\varepsilon^{-2}}=\pi\int_{\varepsilon^{-4}}^{\infty}\left(\frac{1+\varepsilon^4 r}{1+r}\right)^{-\frac{n}{2}-1}\frac{dr}{(1+r)^2}=\frac{2\pi}{n(1-\varepsilon^4)}\left\{1-\left(\frac{2}{1+\varepsilon^4}\right)^{-\frac{n}{2}}\right\}\varepsilon^{-2n}.$$

Поэтому,

$$\left|\int_{|z|\geqq\frac{1}{\varepsilon}}\right|\leqq c_n'(k,f,\gamma)\varepsilon^{-n-k}\to 0\qquad\text{если}\quad n\leqq -k-1. \tag{6}$$

2) Точно так же, как и в 1), можно доказать, что

$$\left|\int_{|z|\leqq\varepsilon}\right|\leqq c_n'(k,f,\gamma)\varepsilon^{n-k}\to 0\qquad\text{если}\quad n\geqq k+1. \tag{7}$$

3) Оценим $\phi^{(k)}(-\varepsilon z,\varepsilon z^{-1};z)$, когда $\varepsilon\leqq|z|\leqq\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Так как

$$|\phi^{(k)}(-\varepsilon z,\varepsilon z^{-1};z)|\leqq c\sum_{p+q=k}|z|^{p-q}|D_{p,q}\phi|,$$

$$\text{и}\ |D_{p,q}\phi(-\varepsilon z,\varepsilon z^{-1};z)|\leqq c_n\frac{1}{(1+|\varepsilon z^{-1}|^2)(1+|\varepsilon z|^2)}\left(\frac{1+|\varepsilon z^{-1}|^2}{1+|\varepsilon z|^2}\right)^{\frac{n}{2}}|z|^{n-2}$$

$$\leqq c_n'|z|^{n-2},$$

имеем

$$\left|\chi_{[\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}]}(z)\phi^{(k)}(-\varepsilon z,\varepsilon z^{-1};z)\right|\leqq c(k,f)\operatorname*{Sup}_{|n|\leqq k+1}\left\{\int|\lambda|^n|L\gamma(\lambda)|d\mu\right\}\eta(z) \tag{8}$$

где

$$\eta(z)=\begin{cases}|z|^{-3} & |z|\geqslant 1\\ |z|^{-1} & |z|\leqslant 1,\end{cases}\qquad D_{p,q}=\frac{\partial^p}{\partial z_1^p}\cdot\frac{\partial^q}{\partial z_2^q}$$

и χ_A характеристическая функция множества A.

Следовательно, имеет место

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int[\psi^{(k)}(-\varepsilon z, \varepsilon z^{-1}; z)-\psi^{(k)}(0, 0; z)]\chi_{[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]}(z)dz=0\,.$$

Таким образом, доказано

$$\frac{d^k}{d\varepsilon^k}F(\varepsilon)=\int\left\{\left(-z\frac{\partial}{\partial z_1}+z^{-1}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)+\left(-\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}+\bar{z}^{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right)\right\}^k\psi(-\varepsilon z, \varepsilon z^{-1}; z)dz \qquad (*)$$

$$(0\leqq\varepsilon\leqq 1)\,.$$

При этом, как видно из оценок (6), (7) и (8), имеет место

$$\operatorname*{Sup}_{0\leqq\varepsilon\leqq1}|F^{(k)}(\varepsilon)|\leqq c(k,f)\operatorname*{Sup}_{|n|\leqq k+1}\int|\lambda|^n|L\gamma(\lambda)|d\mu\,. \qquad (9)$$

Из (*), следует что

$$F(0)=F'(0)=0\,,$$

$$\text{и}\quad F''(0)=\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial\bar{z}_1}K(0, 0; 1, 1)+\frac{\partial^2}{\partial z_2\partial\bar{z}_2}K(0, 0; -1, -1)$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial\bar{z}_2}K(0, 0; 1, -1)+\frac{\partial^2}{\partial z_2\partial\bar{z}_1}K(0, 0; -1, 1) \qquad (10)$$

(см. [6], Гл 5) где

$$K(z_1, z_2; n_1, n_2)=\check{\gamma}(\chi)K_f(z_1, z_2; \chi)\,, \qquad \chi(\lambda)=\lambda^{n_1}\bar{\lambda}^{n_2}\,, \qquad f=f_{n_1, n_2}\,.$$

Как доказано в [6], Гл 5, для $f\in C_0^\infty(G)$, $K_f(z_1, z_2; n_1, n_2)$ удовлетворяет следующему соотношению,

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial\bar{z}_1}K_f(0, 0; 1, 1)+\frac{\partial^2}{\partial z_2\partial\bar{z}_2}K_f(0, 0; -1, -1)$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial\bar{z}_2}K_f(0, 0; 1, -1)+\frac{\partial^2}{\partial z_2\partial\bar{z}_1}K_f(0, 0; -1, 1)=0\,.$$

Далее, по определению кольца $\mathfrak{R}$, имеем

$$\check{\gamma}(1, 1)=\check{\gamma}(1, -1)=\check{\gamma}(-1, 1)=\check{\gamma}(-1, -1)\,.$$

Следовательно, из (10), вытекает, что $F''(0)=0$. Так как

$$F(\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_0^\varepsilon(t-\varepsilon)^2F^{(3)}(t)dt\,, \qquad \text{имеем} \qquad |F(\varepsilon)|\leqq\operatorname*{Sup}_{0\leqq\varepsilon\leqq1}|F^{(3)}(\varepsilon)|\cdot\varepsilon^3\,.$$

Поэтому, в силу (9), получена следующая оценка.

$$|\tilde{\gamma}*f|(u_1^{-1}\varepsilon u_2)\leqq c(f)\sup_{|n|\leqq 4}\int|\lambda|^n|L\gamma(\lambda)|d\mu\cdot\varepsilon^5.$$

Воспользуясь интегральным соотношением

$$\int f(g)dg=\int f(u_1\varepsilon u_2)|\varepsilon^2-\varepsilon^{-2}|^2\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}du_1du_2$$

мы получаем окончательный результат:

$$\|\tilde{\gamma}*f\|_{L_1}\leqq\left\{c(f)\int_0^1\varepsilon^4|\varepsilon^2-\varepsilon^{-2}|^2d\varepsilon\right\}\sup_{|n|\leqq 4}\int|\lambda|^n|L\gamma(\lambda)|d\mu.$$

Доказательство закончено.

§ 2

Теорема. *Пусть (T_g, H) — неприводимое унитарное представление. Оно индуцирует непрерывный гомоморфизм кольцо $\mathfrak{R}$ в поле комплексных чисел.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{D}$ подпространство

$$\{x=T_fx_0;\ f\in C_0^\infty(G)\}\qquad(x_0\ \text{фиксировано}).$$

Из неприводимости представления, легко следует, что $\mathfrak{D}$ — плотное подпространство.

Докажем, что если $T_fx_0=0$, то $T_{\tilde{\gamma}*f}x_0=0$ для $\gamma\in\mathfrak{R}$ (напомним, что $\tilde{\gamma}*f\in L_1$). Действительно, для $h\in C_0^\infty(G)$ имеет место

$$h*(\tilde{\gamma}*f)=(h*\tilde{\gamma})*f$$

поскольку обе части обладают преобразованиями Фурье равными $\check{\gamma}(\chi)K_{h*f}(z_1, z_2; \chi)$.

Следовательно, имеем

$$(T_{\tilde{\gamma}*f}x_0, T_hx_0)=(T_{h^**(\tilde{\gamma}*f)}x_0, x_0)=(T_{(\tilde{\gamma}^**h)^**f}x_0, x_0)=(T_fx_0, T_{\tilde{\gamma}^**h}x_0)=0. \tag{1}$$

Так как $\mathfrak{D}$ плотно, мы заключаем, что $T_{\tilde{\gamma}*f}x_0=0$.

В силу доказанного, можно определить оператор T_γ с областию оределения $\mathfrak{D}$ так,

$$T_\gamma x=T_{\tilde{\gamma}*f}x_0\qquad\text{если}\qquad x=T_fx_0\in\mathfrak{D}.$$

При этом, как видно из (1), имеет место

$$T_{\gamma^*}\subset T_\gamma^*. \tag{2}$$

Если $f, h\in C_0^\infty(G)$, $\gamma, \gamma_1\in\mathfrak{R}$, то $(\tilde{\gamma}*f)*(\tilde{\gamma}_1*h)=f*(\widetilde{\gamma\cdot\gamma_1}*h)$, ибо, преобразование Фурье обеих частей — $\check{\gamma}(\chi)\check{\gamma}_1(\chi)K_{f*h}(z_1, z_2; \chi)$.

Поэтому, для $x, y\in\mathfrak{D}$, имеем

$$(T_\gamma x, T_{\gamma_1}y)=(x_0, T_{(\tilde{\gamma}*f)^**(\tilde{\gamma}_1*h)}x_0)=(T_fx_0, T_{(\widetilde{\gamma^*\cdot\gamma_1}*h)}x_0)=(x, T_{\gamma^*\cdot\gamma_1}y).$$

Отсюда вытекает, что

$$T_{\gamma}^{*}T_{\gamma_1}=T_{\gamma^{*}\cdot\gamma_1}\,. \tag{3}$$

Из (2), непосредственно следует, что T_{γ} является симметричным оператором, если $\gamma=\gamma^{*}$.

Докажем, что $\overline{T}_{\gamma}$ (замыкание оператора T_{γ}) является самосопряжнным оператором.

Из того, что $T_g\mathfrak{D}\subset\mathfrak{D}$ и $\tilde{\gamma}(g^{-1}g_0g)=\tilde{\gamma}(g)$, следует что $T_gT_{\gamma}\subset T_{\gamma}T_g$.

Поэтому, имеем

$$T_gT_{\gamma}^{*}\subset T_{\gamma}^{*}T_g\,.$$

С другой стороны, подпространство $\{x;\, T_{\gamma}^{*}x=\pm ix\}$ замукнуто и инвариантно, но не совпадает с H. Поэтому, в силу неприволимости, оно должно быть $\{0\}$.

По известной теореме Фон Неймана, заключено, что $\overline{T}_{\gamma}$ самосопряжен.

Следовательно, оператор $\overline{T}_{\gamma}=T_{\gamma}^{*}$, коммутирующий с неприводимым представлением T_g, представляется в виде $\overline{T}_{\gamma}=\alpha(\gamma)I$, где I единичный оператор, а $\alpha(\gamma)$ вещественное число.

Когда $\gamma=\gamma_1+\sqrt{-1}\,\gamma_2$ $(\gamma_1=\gamma_1^{*},\, \gamma_2=\gamma_2^{*})$, положим

$$\alpha(\gamma)=\alpha(\gamma_1)+\sqrt{-1}\,\alpha(\gamma_2)\,.$$

Тогла, имеем также,

$$\overline{T}_{\gamma}=\alpha(\gamma)I$$

(Заметим, что $\alpha(\gamma^{*})=\overline{\alpha(\gamma)}$.)

Из (3), сразу следует, что $\alpha(\gamma_1\cdot\gamma_2)=\alpha(\gamma_1)\alpha(\gamma_2)$, то есть $\alpha(\gamma)$ является гомоморфизмом кольца $\mathfrak{R}$ в поле комплексных чисел.

Докажем теперь непрерывность (относительно обычной топологиии пространства C_0^{*}) этого гомоморфизма.

Пусть γ_n стремится к 0. Воспользуясь оценкой

$$\|\tilde{\gamma}*f\|_{L_1}\leqq c(f)\,\operatorname*{Sup}_{|n|\leqq 4}\int_{|\lambda|^n}|L\gamma(\lambda)|d\mu$$

имеем $\|\tilde{\gamma}_n*f\|_{L_1}\to 0$.

Поскольку

$$\|T_{\tilde{\gamma}_n*f}\|\leqq\|\tilde{\gamma}_n*f\|_{L_1}\,,\qquad \alpha(\gamma_n)T_fx_0=T_{\tilde{\gamma}_n*f}x_0\to 0$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы приведем следующие известные леммы.

Лемма (М. А. Наймарк [3]) *Пусть* $\mathfrak{R}$ *кольцо, и пусть* $\alpha(\gamma)\not\equiv 0$, $\tilde{\alpha}(\gamma)$, $\alpha_i(\gamma)$, $(1\leq i\leq m)$ *гомоморфизм* $\mathfrak{R}$ *в поле комплексных чисел.*

Обозначим через $\mathfrak{R}_0$ *подкольцо* $\{\gamma\in\mathfrak{R};\ \alpha_i(\gamma)=0,\ 1\leqq i\leqq m\}$.

Тогда, если $\alpha=\tilde{\alpha}$ *на* $\mathfrak{R}_0$, *то, во всяком кольце* $\mathfrak{R}$, *либо* $\alpha=\tilde{\alpha}$, *либо* $\alpha=\alpha_j$, *при некотором* j.

Лемма (М. А. Наймарк [3]) *Обозначим через* $\mathfrak{R}$ *кольцо*

$$\left\{\gamma\in C_0^\infty(\boldsymbol{C}^*)\,;\quad \gamma(\lambda^{-1})=\gamma(\lambda)\,,\quad \int\gamma(\lambda)\chi_i(\lambda)d\mu=0\quad (1\leqq i\leqq m)\right\}$$

(χ_i —— *характер группы* $\boldsymbol{C}^*$.)

Пусть $\alpha(\gamma)$ *непрерывный гомоморфизм* $\mathfrak{R}$. *Тогда,* $\alpha(\gamma)$ *представляется в виде*

$$\alpha(\gamma)=\int\gamma(\lambda)\chi(\lambda)d\mu \qquad (\chi(\lambda)=\lambda^{n_1}\bar{\lambda}^{n_2},\, n_1-n_2\in z)\,.$$

На основании этих двух лемм, мы приходим к следующему результату: (В нашем случае, $\chi_1(\lambda)=\lambda\bar{\lambda}$, $\chi_2(\lambda)=\lambda\bar{\lambda}^{-1}$)

$$\alpha(\gamma)=\int\gamma(\lambda)\chi(\lambda)d\mu\,.$$

При этом, поскольку $\alpha(\gamma^*)=\overline{\alpha(\gamma)}$, возможно два случая:

1) $n_1=-n_2$, 2) $n_1=n_2=$вещественное число.

Пример 1. Рассмотрим случай представления основной серии D_χ. Тогда,

$$H=L^2(Z)\,,\qquad T_f\varphi(z)=\int K_f(z,z';\chi)\varphi(z')dz'\,.$$

Поэтому, в силу предложения 1, имеем

$$T_{\tilde{\gamma}*f}\varphi(z)=\check{\gamma}(\chi)\int K_f(z,z';\chi)\varphi(z')dz'\,.$$

Отсюла следует, что

$$\alpha(\gamma)=\check{\gamma}(\chi)\,.$$

Пример 2. Для единичного прелставления, гомоморфизм $\alpha(\gamma)$ определяется по следующей формуле,

$$\int\tilde{\gamma}*f(g)dg=\int f(g)dg\cdot\alpha(\gamma)\qquad\text{где}\qquad f\in C_0^\infty(G)\,,\qquad \int f(g)dg\neq 0\,,$$

$$\int\tilde{\gamma}*f(g)dg=\int|\lambda-\lambda^{-1}|^2 I_{\tilde{\gamma}*f}(\lambda)d\mu=\int(\lambda\bar{\lambda}-\lambda\bar{\lambda}^{-1}-\lambda^{-1}\bar{\lambda}+\lambda^{-1}\bar{\lambda}^{-1})\gamma*I_f(\lambda)d\mu$$

$$=\check{\gamma}(1,1)\int\lambda\bar{\lambda}I_f(\lambda)d\mu-\check{\gamma}(1,-1)\int\lambda\bar{\lambda}^{-1}I_f(\lambda)d\mu-\check{\gamma}(-1,1)\int\lambda^{-1}\bar{\lambda}I_f(\lambda)d\mu$$

$$+\check{\gamma}(-1,-1)\int\lambda^{-1}\bar{\lambda}^{-1}I_f(\lambda)d\mu\,.$$

Так как $\check{\gamma}(1,1)=\check{\gamma}(-1,1)=\check{\gamma}(1,-1)=\check{\gamma}(-1,-1)$ имеем

$$\int \tilde{\gamma}*f(g)dg=\check{\gamma}(1,1)\int|\lambda-\lambda^{-1}|^2 I_f(\lambda)d\mu=\int f(g)dg\cdot\check{\gamma}(1,1)\,.$$

Следовательно,

$$\alpha(\gamma)=\int\gamma(\lambda)\lambda\bar{\lambda}d\mu\,.$$

§ 3

В этом параграфе, мы увидим, как относится гомоморфизм $\alpha(\gamma)$ к характеру данного представления.

Обозначим через π характер представления.

По определению характера, для $f\in C_0^\infty(G)$ и $\gamma\in\mathfrak{R}$, имеем

$$\pi(\tilde{\gamma}*f)=T_r(T_{\tilde{\gamma}*f})=\alpha(\gamma)T_r(T_f)=\alpha(\gamma)\pi(f)\,.$$

(Об основных свойствах характеров комплексных полупростых групп Ли, см. [5]).

Переписывая это, получаем

$$\begin{aligned}\int\pi(\lambda)I_{\tilde{\gamma}*f}(\lambda)|\lambda-\lambda^{-1}|^2d\mu&=\int\pi(\lambda)\gamma(\lambda)*I_f(\lambda)|\lambda-\lambda^{-1}|^2d\mu\\&=\int\frac{1}{|\lambda-\lambda^{-1}|^2}(|\lambda-\lambda^{-1}|\pi(\lambda))*\gamma(\lambda)\cdot I_f(\lambda)|\lambda-\lambda^{-1}|^2d\mu\\&=\int\alpha(\gamma)\pi(\lambda)I_f(\lambda)|\lambda-\lambda^{-1}|^2d\mu\,.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(|\lambda-\lambda^{-1}|^2\pi(\lambda))*\gamma(\lambda)=\alpha(\gamma)|\lambda-\lambda^{-1}|^2\pi(\lambda)\,.$$

При $\lambda\to1$, имеем

$$\int|\lambda-\lambda^{-1}|^2\pi(\lambda)\gamma(\lambda)d\mu=c\alpha(\gamma)\,.$$

где c — постоянная.

Заметим, что если $f\in C_0^\infty(G)$

$$\int f(g)dg=0\,,\qquad\text{то}\qquad I_f\in\mathfrak{R}\,.$$

Подставляя $\gamma=I_f$ в этом равенстве, получаем

$$\pi(f)=\int|\lambda-\lambda^{-1}|^2\pi(\lambda)I_f(\lambda)d\mu=c\alpha(I_f)\,.\tag{1}$$

Пусть $\varDelta$ оператор Лапласа на G. Тогда, как известно,

$$\pi(\varDelta f)=\lambda(\varDelta)\pi(f)\,.$$

Обозначим через $\mathring{\varDelta}$ радиальную часть оператора $\varDelta$. Так как

$$I_f(\lambda)=|\lambda-\lambda^{-1}|^2\int_{G/D}\lambda(g^{-1}\delta g)d\tilde{g}\,,$$

$$\mathring{\varDelta}=|\lambda-\lambda^{-1}|^{-2}\circ\frac{\partial^2}{\partial t^2}\circ|\lambda-\lambda^{-1}|^2-1\qquad(\lambda=e^t)$$

(см. [2], [5]), имеем

$$I_{\varDelta f}(\lambda)=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1\right)I_f(\lambda)\,.$$

Следовательно,

$$\lambda(\varDelta)\pi(f)=c\alpha(I_{\varDelta f})=c\int\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1\right)I_f(\lambda)\lambda^{n_1}\bar{\lambda}^{n_2}d\mu=c(n_1^2-1)\alpha(I_f)\,. \tag{2}$$

Из (1) и (2), получеео $\lambda(\varDelta)=n_1^2-1$. Аналогично, $\lambda(\bar{\varDelta})=n_2^2-1$. ($\bar{\varDelta}$-оператор, комплексно сопряженный с $\varDelta$).

Следовательно, при $n_1\neq\pm1$ или $n_2\neq1$, имеем

$$\pi(f)=\frac{1}{\lambda(\varDelta)}\pi(\varDelta f)=c\frac{1}{\lambda(\varDelta)}\alpha(I_{\varDelta f})=c\alpha(I_f)$$

$\left(\text{Заметим, что } \int\varDelta f(g)dg=0\right)$.

В силу того, что $\pi(f^*)=\overline{\pi(f)}$ и $\pi(f^**f)\geqq0$, $\alpha(I_{f^**f})$ должен быть знакоопределенным.

Случай 1. $n_1=n_2=\rho$ (вещественное число).

Для $f(g)$, что $f(gu)=f(g)$, положим $h=f^**f$. Поскольку $h(ugu)=h(g)$, имеем

$$\alpha(I_{f^**f})=\int|\lambda|^{2\rho}\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\int h(\delta\zeta)d\zeta=\langle\varphi_\rho,f^**f\rangle$$

где φ_ρ зональная сферическая функция, которая определяется по формуле:

$$\varphi_\rho\begin{pmatrix}e^{t/2}, & 0\\ 0, & e^{t/2}\end{pmatrix}=\frac{1}{\rho}\frac{sh\rho t}{sht}\,.$$

Очевидно, при $\rho>1$, φ_ρ неограниченная функция.

Поэтому не может случиться, что $\rho>1$.

При $0\leq\rho<1$, имеем

$$\alpha(I_{f^**f})=\int|\check{K}(w_1,w_2;n_1,n_2)|^2|w_1|^{2\rho}|w_2|^{-2\rho}dw_1dw_2\geqq0$$

($\check{K}(w_1,w_2;\chi)$ преобразование фурье $K(z_1,z_2;\chi)$).

В этом случае, характер совпадает до постоянного с характером представления дополнительной серии $\frac{|\lambda|^{2\rho}+|\lambda|^{-2\rho}}{|\lambda-\lambda^{-1}|^2}$.

Представление зквивалентно с $D_{\rho,\rho}$.

Случай 2.

$$-n_1=\bar{n}_2 \qquad (n_1 \neq \pm 1).$$

В этом случае,

$$a(I_{f^* * f})=\int |K(z_1, z_2; n_1, n_2)|^2 dz_1 dz_2 \geqq 0 .$$

Представление эквивалентно с предгтавлением основной серии D_{n_1,n_2}.

Рассмотрим теперь случай, когда $n_1=\pm 1$ или $n_2=\pm 1$. В этом случае, как следует из (1), имеет место

$$\pi(\lambda)=c_1 \frac{\lambda\bar{\lambda}^{-1}+\lambda^{-1}\bar{\lambda}}{|\lambda-\lambda^{-1}|^2}+c_2 .$$

Ввиду неприводимости, можем заключить, что

$$\pi(\lambda)=1 \qquad \text{(единичное представление)}$$

или

$$\pi(\lambda)=\frac{\lambda\bar{\lambda}^{-1}+\lambda^{-1}\bar{\lambda}}{|\lambda-\lambda^{-1}|^2} \qquad \text{(представление основной серии } D_{1,-1}).$$

Литература

[1] Гельфанд, И. М. и Наймарк, М. А., Унитарные представления группы Лоренца, *Известия АН СССР*, **11** (1947).

[2] Гельфанд, И. М. и Наймарк, М. А., Унитарные представления класоических групп, *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **6** (1950).

[3] Наймарк, М. А., Линейные представления группы Лоренца, *Физматгиз*, 1958.

[4] Березин, Ф. А. и Гельфанд, И. М., Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях, *Труды Моск. Матем. об-ва*, **5** (1956).

[5] Березин, Ф. А., Операторы Лапляса на полупростых группах Ли, *Труды Моск. Матем. об-ва*, **6** (1957).

[6] Гельфанд, И. М., Граев, М. И. и Виленкин, Н. Я., Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, *Физматгиз*, 1962.