Sur Certains Groupes de Lie Résolubles

Par Masahiko SAITÔ

Institut de Mathématique, Faculté de l'Education Générale, Université de Tokyo
(Reçu le 30 Mars 1957)

On sait que tout élément d'un groupe de Lie nilpotent connexe est contenu dans un sous-groupe à un paramètre, et que le centre d'un tel groupe est toujours connexe (voir Y. Matsushima [3]). Nous appellerons un groupe de Lie connexe G *de type* (E), si tout élément de G est contenu dans un sous-groupe à un paramètre, et donnerons dans cette note, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe soit de type (E) (voir Théorème 1, § 3). Nous démontrerons que le centre d'un tel groupe est toujours connexe (Théorème 2, § 3).

Cette note se divise en quatre paragraphes.

Dans § 1, nous envisageons d'abord le problème de classification des algèbres de Lie résolubles non-nilpotentes sur un corps quelconque qui ont un idéal abélien de codimension 1. Puis, nous classifions les algèbres de Lie résolubles de dimension 3 sur le corps des nombres réels et les représentons par des algèbres de matrices, et en déduisons des propriétés des groupes de Lie simplement connexe de ces algèbres de Lie.

Dans § 2, nous considèrerons en particulier l'algèbre de Lie du groupe des motions d'un plan et une extension centrale de cette algèbre, que nous appellerons respectivement de classe $\mathfrak{C}$ et de classe $\mathfrak{D}$. Ces algèbres joueront des rôles importants dans cette note.

Nous démontrerons dans § 3 les Théorèmes 1 et 2, qui sont les résultats principaux de cette note.

§ 4 a un caractère d'appendice. Il concerne les algèbres de Lie résolubles en général. Nous démontrerons que le rang du groupe quotient du centre d'un groupe de Lie résoluble simplement connexe G par sa composante connexe est borné par la différence de la dimension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G et la dimension du plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ (Théorème 3).

Je désire exprimer ici ma reconnaissance à Monsieur N. Iwahori pour ses suggestions utiles et son constant encouragement au cours de ce travail.

Notations. Dans cet article nous entendons par un groupe de Lie simplement connexe toujours un groupe de Lie connexe et simplement connexe. Nous désignerons des groupes de Lie simplement connexes et leurs algèbres de Lie par des majuscules et par des caractères gothiques correspondants. Les représentations adjointes des groupes de Lie et des algèbres de Lie sont dénotées par Ad et par ad respectivement. Le corps des nombres réels est toujours désigné par R.

§1. Nous commencerons par démontrer la Proposition suivante:

Proposition 1. *Soient* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ *des algèbres de Lie résolubles non-nilpotentes de dimension* n *sur un corps* K, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ *des idéaux abéliens de dimension* n-1 *de* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, L_1, L_2 *des éléments de* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ *n'appartenant pas à* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ *et* $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ *les restrictions à* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ *de* adL_1, adL_2 *respectivement. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathfrak{g}_1$ *et* $\mathfrak{g}_2$ *soient isomorphes est qu'il existe un élément* α *de* K *différent de zéro tel que* $\alpha\tilde{L}_1$ *et* $\tilde{L}_2$ *ont les mêmes diviseurs élémentaires.*

En effet, supposons d'abord que $\mathfrak{g}_1$ est isomorphe avec $\mathfrak{g}_2$. Soit φ un isomorphisme de $\mathfrak{g}_1$ sur $\mathfrak{g}_2$. $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ étant les plus grands idéaux nilpotents de $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ respectivement, on a évidemment $\varphi(\mathfrak{a}_1)=\mathfrak{a}_2$, et il existe un élément α de K différent de zéro tel que $L_2\equiv\alpha\varphi(L_1)$ (mod $\mathfrak{a}_2$). Nous désignons par $\tilde{\varphi}$ la restriction de φ à $\mathfrak{a}_1$. Des relations $[L_2, \tilde{\varphi}(X)]=[\alpha\varphi(L_1), \tilde{\varphi}(X)]=\tilde{\varphi}([\alpha L_1, X])$, $(X\in\mathfrak{a}_1)$, il s'en suit $\tilde{L}_2\circ\tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}\circ\alpha\tilde{L}_1$. La matrice qui représente $\tilde{L}_1$ par rapport à une base $X_1, \cdots, X_{n-1}$ de $\mathfrak{a}_1$ est donc la même que celle qui représente $\tilde{L}_2$ par rapport à la base $\tilde{\varphi}(X_1), \cdots, \tilde{\varphi}(X_{n-1})$ de $\mathfrak{a}_2$. Par suite $\alpha\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ ont les mêmes diviseurs élémentaires.

Supposons réciproquement que $\alpha\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ ont les mêmes diviseurs élémentaires. Alors, on peut prendre des bases convenables $X_1, \cdots, X_{n-1}$ de $\mathfrak{a}_1$ et $Y_1, \cdots, Y_{n-1}$ de $\mathfrak{a}_2$, de sorte que les matrices représentant $\alpha\tilde{L}_1$ par rapport à $X_1, \cdots, X_{n-1}$ et $\tilde{L}_2$ par rapport à $Y_1, \cdots, Y_{n-1}$ sont identiques. En définissant une application φ de $\mathfrak{g}_1$ sur $\mathfrak{g}_2$ par les formules $\varphi(\alpha L_1)=L_2$ et $\varphi(X_i)=Y_i$ $(1\leq i\leq n-1)$, on obtient un isomorphisme φ de $\mathfrak{g}_1$ sur $\mathfrak{g}_2$. La Proposition 1 est donc démontrée.

Considérons en particulier le cas $n=3$. Pour que $\alpha\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ aient les mêmes diviseurs élémentaires, il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite:

i) $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ sont représentés par la même matrice scalaire*)

ii) Ni $\tilde{L}_1$ ni $\tilde{L}_2$ n'est scalaire*) et $Tr(\alpha\tilde{L}_1)=Tr(\tilde{L}_2)$, $det(\alpha\tilde{L}_1)=det(\tilde{L}_2)$.

*) Nous appellerons *scalaire* une matrice qui est une matrice unité multipliée par une constante. Des transformations linéaires qui se représentent par des matrices scalaires s'appelleront scalaires.

En utilisant ce résultat, on peut énumérer les classes (au point de vue de l'isomorphisme) des algèbres de Lie résolubles de dimension 3 sur le corps des nombres réels. On désigne par $\mathfrak{g}'$ l'algèbre dérivée d'une telle algèbre $\mathfrak{g}$.

(1) $\dim \mathfrak{g}' = 0$. $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne. Il y a une seule classe de telles algèbres.

(2) $\dim \mathfrak{g}' = 1$. Il y a deux classes. L'une est celle des produits directs des algèbres de dimension 1 et des algèbres non-abéliennes de dimension 2. (Il est à remarquer que des algèbres non-abéliennes de dimension 2 constituent une seule classe.) L'autre est celle des algèbres nilpotentes non-abéliennes. (De telles algèbres constituent aussi une seule classe.)

(3) $\dim \mathfrak{g}' = 2$. $\mathfrak{g}$ n'étant pas nilpotente et $\mathfrak{g}'$ étant abélienne, on peut utiliser la Proposition 1. Dans ce cas, $\tilde{L}$ est inversible; car dans le cas contraire $\mathfrak{g}'$ serait de dimension 1. Quatre cas arrivent selon la nature de $\tilde{L}$.

(3.1) $\tilde{L}$ est scalaire Les $\mathfrak{g}$ avec cette propriété forment une seule classe.

(3.2) $\tilde{L}$ n'est pas scalaire et $(Tr\ \tilde{L})^2/det\ \tilde{L}=\alpha\neq 0$. Les classes ds ces $\mathfrak{g}$ coïncident en même temps que les valeurs de α.

(3.3) $Tr\ \tilde{L}=0$, $det\ \tilde{L}>0$. Ces $\mathfrak{g}$ forment une seule classe que nous notons par $\mathfrak{C}$. Cette classe va jouer un rôle important dans la suite.

(3.4) $Tr\ \tilde{L}=0$, $det\ \tilde{L}<0$. Ces $\mathfrak{g}$ forment encore une seule classe.

Les structures des algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ (et des groupes de Lie correspondants) à dimensions 1 et 2 et de celles à dimensions 3 dans les cas (1), (2) étant bien connues, étudions-les maintenant dans le cas (3), en représentant $\mathfrak{g}$ (et les groupes correspondants) par des matrices. Considérons donc la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$:

$$ad\ \mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{x} & t\tilde{L} \end{pmatrix};\ \mathfrak{x}\in R^2,\ t\in R\right\},$$

ou $\tilde{L}$ est représenté en forme de matrice et R^2 désigne l'espace des vecteurs à 2 dimensions aux coefficients réels. Nous écrivons désormais $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{x} & t\tilde{L} \end{pmatrix}$. On voit immédiatement que le centre de $\mathfrak{g}$ est $\{0\}$, et par suite la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est fidèle. Nous l'identifions donc avec $\mathfrak{g}$, et écrivons $\mathfrak{g}=\{X\}$. Nous avons

$$exp\ X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(t\tilde{L})\mathfrak{x} & exp\ t\tilde{L} \end{pmatrix},$$

où f est une fonction entière;

$$f(z)=\begin{cases} 1 & (z=0) \\ \dfrac{e^z-1}{z} & (z\neq 0). \end{cases}$$

Posons

$$(*)\qquad G^*=\left\{x=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \mathfrak{b} & exp\,t\tilde{L}\end{pmatrix};\ \mathfrak{b}\in R^2,\ t\in R\right\}.$$

Alors il est clair que G^* est connexe, et l'algèbre de Lie de G^* n'est autre que $\mathfrak{g}$. Examinons maintenant si G^* est simplement connexe et si G^* coïncide avec $\{exp\ X;\ X\in\mathfrak{g}\}$. Supposons d'abord que $\mathfrak{g}$ n'est pas de classe $\mathfrak{C}$. Alors les valeurs propres λ, μ de $\tilde{L}$ ne sont pas purement imaginaires. Donc pour $t\neq 0$, $exp\,t\tilde{L}$ n'est pas la matrice unité et il s'en suit sans peine que G^* est simplement connexe. Nous pouvons donc écrire G au lieu de G^* en conformité avec notre convention sur notations, ce que nous allons faire désormais. Puisque les valeurs propres de $f(t\tilde{L})$ sont $f(t\lambda)$ et $f(t\mu)$, ils sont différents de zéro. $f(t\tilde{L})$ est donc une matrice inversible. Soit maintenant x un élément de G. Alors t est déterminé par x et l'équation linéaire $f(t\tilde{L})\mathfrak{x}=\mathfrak{b}$ admet une solution unique $\mathfrak{x}$. Donc il existe un seul élément X de $\mathfrak{g}$ tel que $x=exp\,X$, ce qui montre la Proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Soit G un groupe de Lie résoluble simplement connexe, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de dimension au plus 3 et n'appartient pas à la classe $\mathfrak{C}$. Alors pour tout élément x de G il existe uniquement un élément X de $\mathfrak{g}$ tel que l'on ait $x=exp\,X$.*

Considérons maintenant une algèbre $\mathfrak{g}$ de classe $\mathfrak{C}$. Puisque dans ce cas les valeurs propres λ, μ de $\tilde{L}$ sont purement imaginaires, $(*)$ montre que G^* est alors le groupe des motions d'un plan. Ce groupe G^* n'est pas simplement connexe. Nous désignons donc par G le groupe de recouvrement universel de G^*. Nous allons faire remarquer quelques propriétés particulières de $\mathfrak{g}$ et G.

a) *$\mathfrak{g}$ admet un seul idéal propre, qui est de dimension* 2. En effet, il s'en suit du fait que λ, μ sont purement imaginaire, qu'on peut prendre une base L, A, B de $\mathfrak{g}$, de telle sorte qu'on ait $[L, A]=B$, $[L, B]=-A$, $[A, B]=0$. On en déduit *a*) immédiatement.

b) *$\{exp\ X;\ X\in\mathfrak{g}\}$ ne coïncide pas avec G; il en forme une partie propre.* G se représente fidèlement comme suit par des matrices de degré 5:

$$(**)\qquad G=\left\{x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \mathfrak{b} & exp\,t\tilde{L} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & t & 1\end{pmatrix};\ \mathfrak{b}\in R^2,\ t\in R\right\}.$$

$\mathfrak{g}$ admet, comme algèbre de Lie de G, une représentation fidèle de degré 5:

$$\left\{X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{x} & t\tilde{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} ; \ \mathfrak{x}\in R^2,\ t\in R\right\}.$$

On a alors

$$exp\, X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ f(t\tilde{L})\mathfrak{x} & exp\, t\tilde{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Or, la base L, A, B de $\mathfrak{g}$ étant prise comme tout à l'heure, les valeurs propres de $\tilde{L}$ sont $\pm\sqrt{-1}$, et par conséquent, $f(t\tilde{L})$ se réduit à la matrice zéro pour $t=2\pi k$, où k est un entier différent de 0. Il en résulte que si x est un élément de G avec $\mathfrak{b}\neq 0$, $t=2\pi k$, $k=\pm 1, \pm 2, \cdots$, il n'existe aucun élément X de $\mathfrak{g}$ tel que l'on ait $x=exp\, X$.

c) Le centre de G est l'ensemble des éléments $x=exp\ 2\pi kL$ *où k est un entier*. On le constate immédiatement de (**).

Remarque. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble de dimension au plus 3 et n'est pas de classe $\mathfrak{C}$, le centre de G est connexe. Surtout dans le cas des algèbres non-abéliennes de dimension 2 et des algèbres du cas (3) qui ne sont pas de classe $\mathfrak{C}$, le centre de G se réduit à l'élément unité de G. On vérifie tout ceci aisément par un calcul simple.

§ 2. Nous supposerons désormais que le corps de base est celui des nombres réels.

Considérons une classe des algèbres de Lie résolubles de dimension 4 dont la structure est donnée par les formules suivantes par rapport à une base L, A, B, C: $[L, A]=B$, $[L, B]=-A$, $[A, B]=C$, $[L, C]=[A, C]=[B, C]=0$. Nous désignons cette classe par $\mathfrak{D}$. Une algèbre de classe $\mathfrak{D}$ est une extension centrale d'une algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ayant le noyau abélien de dimension 1. Une algèbre de cette classe admet deux et deux seuls idéaux propres, l'un de dimension 3 et l'autre de dimension 1.

Proposition 3. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble. Supposons que* $\mathfrak{g}$ *contient trois éléments* L, A, B *différents de zéro tels que* $[L, A]=B$ *et* $[L, B]=-A$. *Alors* $\mathfrak{g}$ *contient une sous-algèbre de classe* $\mathfrak{C}$ *ou de classe* $\mathfrak{D}$.

Posons $A_1=A$, $B_1=B$ et $C_1=[A, B]$. Nous définissons comme suit des éléments A_i, B_i, C_i par récurrence; $A_i=[A_{i-1}, C_{i-1}]$, $B_i=[B_{i-1}, C_{i-1}]$, $C_i=[A_i, B_i]$. Par l'identité de Jacobi, on a des relations $[L, A_i]=B_i$, $[L, B_i]=-A_i$, $[L, C_i]=0$. Soit $\mathfrak{D}^i(\mathfrak{g})$ la i-ième algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$. Alors $A_i, B_i \in D^i(\mathfrak{g})$ et $C_i \in D^{i+1}(\mathfrak{g})$. $\mathfrak{g}$ étant résoluble, il éxiste un entier positif k tel que $C_k=0$ et $C_i \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq k-1$. Si $A_k \neq 0$, trois éléments L, A_k, B_k engendrent une sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$. Si $A_k=0$, quatre éléments L, A_{k-1}, B_{k-1}, C_{k-1} engendrent une sous-algèbre de classe $\mathfrak{D}$. La Proposition 3 est donc démontrée.

Proposition 4. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ des algèbres de Lie résolubles et φ un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$. Si $\mathfrak{g}^*$ contient une sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ou de classe $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{g}$ aussi contient une sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ou de classe $\mathfrak{D}$.*

Il y a trois éléments L^*, A^*, B^* dans $\mathfrak{g}^*$ tels que $[L^*, A^*]=B^*$ et $[L^*, B^*]=-A^*$. Soient L, A', B' des éléments de $\mathfrak{g}$ tels que $\varphi(L)=L^*$, $\varphi(A')=A^*$, $\varphi(B')=B^*$, $\mathfrak{n}$ le noyau de l'homomorphisme φ et $D_1, \cdots, D_m$ une base de $\mathfrak{n}$. On a alors les relations

$$[L, A']=B'+\sum_{i=1}^{m} a_i D_i,\ [L, B']=-A'+\sum_{i=1}^{m} b_i D_i,\ [L, D_i]=\sum_{j=1}^{m} c_{ji} D_j.$$

où a_i, b_i, c_{ij} sont des nombres réels. On pose la matrice de degré m $C=(c_{ij})$ et la matrice de degré $2m$

$$\gamma=\begin{pmatrix} C & -I \\ I & C \end{pmatrix},\ (I \text{ signifie la matrice unité de degré } m).$$

Si γ est inversible, on peut trouver des nombres x_i, y_i $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que l'on ait $[L, A]=B$, $[L, B]=-A$ pour $A=A'+\sum_{i=1}^{m} x_i D_i$, $B=B'+\sum_{i=1}^{m} y_i D_i$. Dans ce cas $\mathfrak{g}$ contient une sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ou de classe $\mathfrak{D}$ par la Proposition 3.

Si $det\ \gamma=0$, la matrice C admet au moins une valeur propre $\sqrt{-1}$ par la formule $det\ \gamma = det\ (C+\sqrt{-1}I)\ det\ (C-\sqrt{-1}I)$. C étant la matrice représantant l'opération de adL dans $\mathfrak{n}$, adL admet un sous-espace introverti de dimension 2 et nous avons les relations $[L, D]=E$, $[L, E]=-D$ pour une base convenable D, E de ce sous-espace. Alors la Proposition 3 montre qu'il y a une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de classe $\mathfrak{C}$ ou de classe $\mathfrak{D}$, ce qui démontre la Proposition 4.

Remarque. En fait toute extension d'une algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ayant le noyau de dimension 1 est ou bien iessentielle ou bien de classe $\mathfrak{D}$. Toute extension d'une algèbre de classe $\mathfrak{D}$ ayant le noyau de dimension 1 est inessentielle.

§ 3. Définition. *Un groupe de Lie connexe G est dit de type (E), si pour tout élément x de G il existe un élément X de $\mathfrak{g}$ tel que $x=\exp X$. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite de type (E), si le groupe simplement connexe dont $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie est de type (E).*

Remarquons tout de suite que, si un groupe G est de type (E), les groupes quotients de G par les sous-groupes invariants fermés de G sont aussi de type (E). Cela résulte de la commutativité du diagramme:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & G^* \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "exp"] \arrow[r, "\dot{\varphi}"] & \mathfrak{g}^* \arrow[u, "exp"'] \end{tikzcd}$$

Dans tout ce qui va suivre, nous faisons constamment usage de trois faits suivants, d'ailleurs connus, en dehors de la remarque précédente:

(i) Un idéal minimal d'une algèbre de Lie résoluble sur R est abélien et de dimension au plus 2. Cela résulte du Théorème de Lie qui affirme qu'un idéal minimal d'une algèbre de Lie résoluble sur le corps des nombres complexes est de dimension 1 (voir par exemple la démonstration du Lemme 3, § 5 de G. D. Mostow [4]).

(ii) Les sous-groupes analytiques d'un groupe de Lie résoluble simplement connexe sont fermés et simplement connexes (voir la Proposition 1 de C. Chevalley [1]).

(iii) Les groupes quotients d'un groupe de Lie simplement connexe par les sous-groupes invariants fermés connexes sont aussi simplement connexes (voir par exemple le Lemme 3.14 de K. Iwasawa [2]).

Théorème 1. *Pour qu'un groupe de Lie résoluble simplement connexe G soit de type (E), il faut et il suffit que son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ne contienne aucune sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ni de classe $\mathfrak{D}$. S'il en est ainsi, l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ sur G est biunivoque.*

Soient $\mathfrak{a}$ un idéal minimal de $\mathfrak{g}$, A le sous-groupe analytique de G engendré par $\mathfrak{a}$ et φ, $\dot{\varphi}$ les homomorphismes canoniques de G, $\mathfrak{g}$ sur G/A, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ respectivement.

Supposons d'abord que G soit de type (E). Nous démontrerons par récurrence sur la dimension n de $\mathfrak{g}$, que $\mathfrak{g}$ ne contient aucune sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ni de classe $\mathfrak{D}$, et en même temps que l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ sur G est biunivoque. Si $n=1$, l'assertion est évidente. Supposons qu'elle est vraie pour les groupes de dimension $<n$. Nous démontrons d'abord que

$\mathfrak{g}$ ne contient aucune sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ni de classe $\mathfrak{D}$. Supposons que $\mathfrak{g}$ contienne une telle sous-algèbre $\mathfrak{h}$. On a immédiatement $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$; car dans le cas contraire on aurait $\mathfrak{h} \cong \dot{\varphi}(\mathfrak{h})$, ce qui est absurde par l'hypothèse de récurrence, comme $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est de type (E). Nous considérons quatre cas séparément.

(a) $\mathfrak{h}$ est de classe $\mathfrak{C}$ et $dim\ \mathfrak{a}=1$. On doit avoir $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$, ce qui est impossible puisque $\mathfrak{h}$ ne contient aucun idéal de dimension 1.

(b) $\mathfrak{h}$ est de classe $\mathfrak{C}$ et $dim\ \mathfrak{a}=2$. Par la même raison on a $dim\,(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}) \neq 1$, donc $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$. Soit x un élément arbitraire du sous-groupe analytique H de G engendré par $\mathfrak{h}$. En vertu de l'hypothèse sur G, il existe un élément X de $\mathfrak{h}$ tel que $x=exp\,X$. H/A étant de dimension 1, il existe unique élément Y^* de $\dot{\varphi}(\mathfrak{h})$ tel que $\varphi(x)=exp\ Y^*$. De l'autre côté, on a $\varphi(x)=exp\ \dot{\varphi}(X)$. Par l'hypothèse de récurrence, on a $\dot{\varphi}(X)=Y^* \in \dot{\varphi}(\mathfrak{h})$. Puisque $\mathfrak{h}$ contient $\mathfrak{a}$, on a $X \in \mathfrak{h}$, contrairement à l'hypothese que $\mathfrak{h}$ est de classe $\mathfrak{C}$ et par suite n'est pas de type (E).

(c) $\mathfrak{h}$ est de classe $\mathfrak{D}$ et $dim\,\mathfrak{a}=1$. On doit avoir $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$, ce qui est absurde puisque $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est de type (E) et $\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ est de classe $\mathfrak{C}$.

(d) $\mathfrak{h}$ est de classe $\mathfrak{D}$ et $dim\,\mathfrak{a}=2$. Puisque $\mathfrak{h}$ ne contient aucun idéal de dimension 2, on a $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{h}$ et $dim\,\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}=1$. Alors $\dot{\varphi}(\mathfrak{h})$ est de classe $\mathfrak{C}$, contrairement à l'hypothèse de récurrence.

Ainsi nous avons établi que $\mathfrak{g}$ ne contient aucune sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ni de classe $\mathfrak{D}$.

Ensuite nous démontrerons que l'application exponentielle est biunivoque. Supposons $x=exp\,X=exp\ Y$ où $x \in G$ et $X, Y \in \mathfrak{g}$. Par l'hypothèse de récurrence, on a $\dot{\varphi}(X)=\dot{\varphi}(Y)$ et donc $X-Y \in \mathfrak{a}$. Soient $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre engendrée par X et les éléments de $\mathfrak{a}$, et H le sous-groupe analytique de G engendré par $\mathfrak{h}$. On a $x \in H$, X, $Y \in \mathfrak{h}$ et $dim\,\mathfrak{h} \leqq 3$. Nous avons déjà démontré que $\mathfrak{g}$ ne contient aucune sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$, et par conséquent $\mathfrak{h}$ n'est pas de classe $\mathfrak{C}$. Donc on a $X=Y$ par la Proposition 2, ce qui démontre notre assertion.

Supposons réciproquement que $\mathfrak{g}$ ne contienne aucune sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ni de classe $\mathfrak{D}$. Nous démontrons que $\mathfrak{g}$ est de type (E) par récurrence sur n. Si $n=1$, l'énoncé est évident. Supposons qu'il est vrai pour les algèbres de dimension $<n$. $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ne contient alors aucune sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ni de classe $\mathfrak{D}$; car si elle contenait une telle sous-algèbre, $\mathfrak{g}$ aussi contiendrait une telle sous-algèbre par la Proposition 4, ce qui est absurde. Soit x un élément quelconque de G. Par l'hypothèse de récurrence il existe un élément X^* de $\dot{\varphi}(\mathfrak{g})$ tel que $\varphi(x)=exp\,X^*$. Soit X' un élément de $\mathfrak{g}$ tel que $X^*=\dot{\varphi}(X')$. On a alors $x^{-1}\,exp\,X' \in A$. Soient $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par X' et les éléments de $\mathfrak{a}$, et H le sous-groupe analytique de G engendré par $\mathfrak{h}$. $\mathfrak{h}$ est de dimension au plus 3 et n'est pas de classe $\mathfrak{C}$ par

l'hypothèse sur $\mathfrak{g}$. Donc elle est de type (E), et il existe un élément X de $\mathfrak{h}$ tel que $x=exp\,X$, et par conséquent $\mathfrak{g}$ est de type (E). Le Théorème 1 est donc démontré.

On a immédiatement le Corollaire suivant:

Corollaire. *Toute sous-algèbre d'une algèbre de Lie résoluble de type (E) est aussi de type (E).*

Théorème 2. *Si G est un groupe de Lie résoluble simplemennt connexe de type (E), le centre Z de G est connexe.*

Nous suivons la méthode utilisée dans la section III de C. Chevalley [1]. Soit x un élément de Z. On a $x=expX$ où $X\in\mathfrak{g}$. Soit H le sous-groupe à un paramètre de G engendré par X. Puisque $exp\,X$ est central, le groupe AdH est compact et donc la représentation adjointe de X dans $\mathfrak{g}$ est semi-simple. On a une décomposition suivante de $\mathfrak{g}$ en somme directe de sous-espaces introvertis simples par adX:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}_1+\cdots+\mathfrak{a}_r+\mathfrak{a}_{r+1}+\cdots+\mathfrak{a}_s.$$

Soient $dim\,\mathfrak{a}_i=1$ pour $1\leqq i\leqq r$ et $dim\,\mathfrak{a}_i=2$ pour $r+1\leqq i\leqq s$. Soit λ_i une valeur propre de l'opération de adX dans $\mathfrak{a}_i$. λ_i est de la forme $2\pi k_i\sqrt{-1}$ où k_i est un entier. Pour $i\leqq r$ on a $k_i=0$ et pour $i<r$ on a $k_i\neq 0$. Donc $[X, \mathfrak{a}_i]=0$ pour $i\leqq r$, et pour $i>r$ on peut trouver une base A_i, B_i de $\mathfrak{a}_i$ telle que $[X, A_i]=2\pi k_i B_i$, $[X, B_i]=-2\pi k_i A_i$. Si $s>r$, on voit en appliquant la Proposition 3 aux trois éléments X, A_i, B_i $(i>r)$ de $\mathfrak{g}$, que $\mathfrak{g}$ contiendrait une sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ou de classe $\mathfrak{D}$, ce qui est impossible par le Théorème 1. On a donc $s=r$. Par suite X appartient au centre de $\mathfrak{g}$, et $x=exp\,X$ appartient à la composante connexe de Z, ce qui démontre le Théorème 2.

Remarque. La réciproque du Théorème 2 n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie résoluble de dimension 4 dont la structure est donnée par les relations ci-dessous par rapport à une base L, A, B, C: $[L, A]=B$, $[L, B]=-A$, $[A, B]=0$, $[L, C]=C$, $[A, C]=[B, C]=0$.
$\mathfrak{g}$ n'est pas de type (E) puisque les trois éléments L, A, B engendrent une sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$. Soit G le groupe simplement connexe ayant $\mathfrak{g}$ comme l'algèbre de Lie. Le centre de G se réduit à l'unité $\{e\}$ de G. En effet, soient $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{h}$ les sous-espaces de $\mathfrak{g}$ engendrés par $\{A, B\}$, $\{C\}$, et $\{L, C\}$ respectivement. Alors $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ sont des idéaux et $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Soient M, N, H les sous-groupes analytiques de G engendrés par $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{h}$, et φ, ψ, $\dot{\psi}$ les homomorphismes canoniques de G, G, $\mathfrak{g}$ sur G/M, G/N, $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ respectivement. Soit maintenant x un élément central de G. $\varphi(x)$ est alors un élément central de G/M. Mais G/M étant de dimension 2 et non-abélien, $\varphi(x)$ n'est autre que l'élément unité de G/M. Donc on a $x \in M$. De l'autre côté $\psi(x)$ est un élément central de G/N. Mais $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ étant de classe $\mathfrak{C}$, $\psi(x)$ est de la forme $exp\ 2\pi k\dot{\psi}(L)$ où k est un entier, et donc $x \in H$. Puisque $\mathfrak{h} \frown \mathfrak{m} = \{0\}$ entraîne $H \frown M = \{e\}$, on a $x=e$. Donc le centre de G se réduit à l'élément unité.

§ 4. Soient G un groupe de Lie résoluble simplement connexe, Z le centre de G et Z^0 la composante connexe de Z. Z/Z^0 est alors un sous-groupe central discret du groupe de Lie résoluble simplement connexe G/Z^0. Il est donc un groupe abélien sans torsion de rang au plus $dim\, G/Z^0$ (voir le Théorème 1 de C. Chevalley [1]). Plus précisément on a le Théorème suivant.

Théorème 3. *Utilisant les notations ci-dessus, soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. On a alors l'inégalité suivante ;*

$$0 \leqq rang\, Z/Z^0 \leqq dim\, \mathfrak{g} - dim\, \mathfrak{n}.$$

Soit N le sous-groupe analytique de G engendré par $\mathfrak{n}$. Nous démontrons d'abord qu'un élément x de Z tel que $x \notin Z^0$ n'appartient pas à N. Supposons que $x \in N$. N étant nilpotent, il existe un élément X de $\mathfrak{n}$ tel que $x = exp\, X$. Puisque x est central dans N et le centre de N est connexe (voir Y. Matsushima [3]), X appartient au centre de $\mathfrak{n}$. Mais par l'hypothèse, X n'appartient pas au centre de $\mathfrak{g}$. Donc la représentation adjointe de X dans $\mathfrak{g}$ admet au moins un sous-espace introverti simple de dimension 2. Par rapport à une base convenable A, B, on a $[X, A] = 2\pi kB$, $[X, B] = -2\pi kA$ où k est un entier différent de zéro. En vertu de ces relations, A et B appartiennent à l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}'$ étant contenue dans $\mathfrak{n}$, on a A, $B \in \mathfrak{n}$. C'est absurde puisque X est central dans $\mathfrak{n}$, ce qui démontre notre assertion.

On peut aisément montré qu'il existe un sous-groupe discret D de Z tel que Z soit décomposé en produit direct de D et Z^0. Puisque $D \frown Z^0 = \{e\}$, on a $D \frown N = \{e\}$, et donc DN/N est isomorphe à D comme groupe abstrait. Par la même méthode que dans la démonstration du Théorème 1 de C. Chevalley [1], on peut montrer que DN/N est un sous-groupe discret du groupe G/N. Donc DN/N est un groupe abélien sans torsion de rang au plus $dim\, G/N$. Donc $rang\, Z/Z^0 \leqq dim\, \mathfrak{g} - dim\, \mathfrak{n}$, ce qui achève la démonstration du Théorème 3.

Bibliographie

[1] C. Chevalley, On the topological structures of solvable groups, *Ann. of Math.*, **42**, 668-675 (1941).
[2] K. Iwasawa, On some types of topological groups, *Ann. of Math.*, **50**, 507-558 (1949).
[3] Y. Matsushima, On the discrete subgroups and homogeneous spaces of nilpotent Lie groups, *Nagoya Math. J.*, **2**, 95-110 (1951).
[4] G. D. Mostow, Factor spaces of solvable groups, *Ann. of Math.*, **60**, 1-27 (1954).