Sur Certains Groupes de Lie Résolubles II

Par Masahiko SAITÔ

Institut de Mathématique, Faculté de l'Education Générale,
Université de Tokyo

(Reçu le 1 Novembre 1957)

Cette note est une suite du mémoire précédent [6]. Nous avons considéré dans [6] les groupes de Lie résolubles simplement connexe G tel que tout élément de G se représente dans la forme $exp\ X$ où X est un élément de l'algèbre de Lie de G. Nous avons appelé un tel groupe *de type* (E) et obtenu une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe de Lie résoluble simplemeut connexe soit de type (E).

Nous obtiendrons une autre forme de la même condition dans le §1 de cette note. Nous allons voir qu'elle s'exprime par le fait que les valeurs propres de adX pour tout élément X de l'algèbre de Lie de G ne deviennent jamais purement imaginaires (Théorème 1).

Dans le §2 qui est la partie principale de cette note, nous considèrerons les groupes de Lie résolubles à racines réelles. Nous appellerons ainsi, d'après J. Dixmier [1], les groups de Lie résolubles connexes G, si les valeurs propres de adX pour tous les éléments X de l'algèbre de Lie de G sont toutes réelles. La famille de ces groupes est contenue dans la famille des groupes de Lie résolubles connexes de type (E) et contient celle des groupes nilpotents connexes. Nous verrons qu'un nombre des propriétés de ces derniers groupes s'étendent à nos groupes (voir A. I. Malcev [3] et Y. Matsushima [4]). Nous verrons aussi que quelques unes d'entre elles ne s'étendent qu'à nos groupes.

Nous ferons libre usage des notations et des résultats du mémoire précédent [6].

Je désire exprimer ici ma grande reconnaissance à Monsieur N. Iwahori pour ses suggestions utiles et son constant encouragement au cours de ce travail.

§1. Rappelons d'abord la définition des racines d'une algèbre de Lie résoluble donnée par J. Dixmier [1]. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble sur le corps des nombres complexes. Il existe une suite décroissante $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_n$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_n=\{0\}$, $dim\,\mathfrak{g}_{i-1}-dim\,\mathfrak{g}_i=1$. La représentation de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_{i-1}/\mathfrak{g}_i$ déduite de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ s'identifie à une forme linéaire ρ_i sur $\mathfrak{g}$ ($i=1, 2, \cdots, n$). Ces n formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ sont appelées les *racines* de $\mathfrak{g}$.

Soit maintenant $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble sur le corps des nombres réels R. Les *racines* de $\mathfrak{g}$ sont les restrictions à $\mathfrak{g}$ des racines de la complexifiée $\mathfrak{g}^c$ de $\mathfrak{g}$. Elles sont donc n formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ à valeurs complexes et les valeurs de $\rho_1, \cdots, \rho_n$ pour un élément X de $\mathfrak{g}$ sont les valeurs propres de adX.

Désormais le corps de base sera toujours supposé comme R.

Théorème 1. *Pour qu'une algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$ soit de type (E), il faut et il suffit qu'aucune racine de $\mathfrak{g}$ ne prenne de valeur purement imaginaire.*

Si une racine prend une valeur purement imaginaire, on peut choisir trois éléments L, A, B de $\mathfrak{g}$ différents de zéro tels que $[L, A]=B$ et $[L, B]=-A$. Donc $\mathfrak{g}$ contient une sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ou de classe $\mathfrak{D}$ par la Proposition 3 de [6] et par conséquent $\mathfrak{g}$ n'est pas de type (E) (Théorème 1 de [6]).

Si réciproquement $\mathfrak{g}$ n'est pas de type (E), il existe une sous-algèbre de classe $\mathfrak{C}$ ou de classs $\mathfrak{D}$, et il existe donc trois éléments L, A, B de $\mathfrak{g}$ différents de zéro tels que $[L, A]=B$ et $[L, B]=-A$. Alors la valeur pour L d'une racine est purement imaginaire, ce qui démontre le Théorème 1.

Remarque. On trouve une autre condition nécessrirae et suffisante dans [1] de J. Dixmier.

Proposition 1. *Soient G un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type (E) et H un sous-groupe analytique de G. Alors le centralisateur $C(H)$ de H dans G est aussi un sous-groupe analytique de G.*

Par le Théorème 2 de [6], AdG est aussi simplement connexe et il existe donc pour tout élément x de $C(H)$ uniquement un élément adX de $ad\,\mathfrak{g}$ tel que $Adx=exp\ adX$. Posons

$$\mathfrak{k}=\{\, Y\in\mathfrak{g}\,;(adX)^i(Y)=0 \text{ pour uu certain } i\,\}\ ,$$

$$\mathfrak{k}'=\{\, Y\in\mathfrak{g}\,;(Adx-I)^i(Y)=0 \text{ pour un certain } i\,\}\ .$$

$\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}'$ sont des sous-espaces de $\mathfrak{g}$ et évidemment $\mathfrak{k}\subset\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{k}'$ et $X\in\mathfrak{k}$, où $\mathfrak{h}$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ correspondant à H. Par le Théorème précédent la multiplicité de la valeur propre 0 de adX et celle de la valeur propre 1 de Adx sont égaux. Donc on a $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}'$ et par suite $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{k}$. Puiqu'il est bien connu que $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ est stable sous l'opération adx. La restriction de adX (resp. Adx) à $\mathfrak{k}$ est un endomorphisme nilpotent (resp. unipotent) et par conséquent la restriction de adX à $\mathfrak{k}$ est représentée par un polynôme sans terme constant de la restriction de $Adx-I$ à $\mathfrak{k}$. Donc h est stable sous adX et $adX(\mathfrak{h})=\{0\}$, ce qui démontre la Proposition 1.

Proposition 2. *Soient G un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type (E) et H, K des sous-groupes analytiques de G. Alors l'intersection $H\cap K$ est aussi un sous-groupe analytique de G. Il existe donc pour tout sous-ensemble F de G le plus petit sous-groupe analytique de G contenant F.*

Soit x un élément de $H\cap K$. Il existe un seul élément X de $\mathfrak{g}$ tel que $exp\, X=x$. X appartient à $\mathfrak{h}$ et en même temps à $\mathfrak{k}$. $H\cap K$ est donc le sous-groupe analytique de G engendré par $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}$, ce qui démontre la Proposition 2.

Définition. *Nous appellerons une base $X_1, \cdots, X_n$ d'une algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$ canonique, si le sous-espace $\mathfrak{g}_i$ engendré par les éléments $X_{i+1}, \cdots, X_n$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et si $\mathfrak{g}_i$ est un idéal de g_{i-1} pour $1\leqq i\leqq n$.*

Rappelons qu'un sous-groupe F d'un groupe de Lie connexe G est dit *uniforme* si l'espace homogène $G/\bar{F}$ est compact, où $\bar{F}$ est l'adhérence de F dans G.

Proposition 3. *Soient G un groupe de Lie résoluble simplement connexe et $X_1, \cdots, X_n$ une base canonique de $\mathfrak{g}$. Si un sous-groupe F de G contient les éléments $exp\ X_i$ $(1\leqq i\leqq n)$, F est uniforme dans G.*

Tout élément de G est représenté d'une seule façon dans la forme

$$(exp\ t_1X_1)\cdots(exp\ t_nX_n) \qquad (t_i\in R,\ 1\leqq i\leqq n)\ .$$

Soit M le sous-ensemble de G formé des éléments de la forme

$$(exp\ t_1X_1)\cdots(exp\ t_nX_n) \qquad (0\leqq t_i\leqq 1)\ .$$

M est alors compact et on a $G=MF$. L'espace homogène $G/\bar{F}$ est l'image de M par une application continue et par suite compact. Donc F est uniforme dans G et la Proposition 3 est démontrée.

PROPOSITION 4. *Soient G un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type (E) et D un sous-groupe uniforme discret de G. Il existe alors une base canonique $X_1, \cdots, X_n$ de $\mathfrak{g}$ telle que les éléments $exp\ X_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ constituent un système libre de générateurs de D: c'est-à-dire: telle que tout élément de D est uniquement écrit dans la forme $(exp\ X_1)^{p_1} \cdots (exp\ X_n)^{p_n}$, où $p_1, \cdots, p_n$ sont des entiers.*

Soit N le plus grand sous-groupe invariant analytique nilpotent de G. Par le Théorème de G. D. Mostow [5, §5] DN/N et $D \cap N$ sont des sous-groupes uniformes discrets de G/N et de N respectivement.

Puisque G/N est abélien, il existe une base canonique $X_1^*, \cdots, X_r^*$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ telle que les éléments $exp\ X_i^*$ $(1 \leqq i \leqq r)$ constituent un système libre de générateurs de DN/N. Soit φ l'homomorphisme canonique de G sur G/N. Il existe au moins un élément x_i de D tel que $\varphi(x_i) = exp\ X_i^*$ $(1 \leqq i \leqq r)$. Soit X_i l'élément de $\mathfrak{g}$ tel que $x_i = exp\ X_i$.

De l'autre côté, il existe une base canonique $X_{r+1}, \cdots, X_n$ de $\mathfrak{n}$ telle que les éléments $exp\ X_i$ $(r+1 \leqq i \leqq n)$ constituent un système libre de générateurs de $D \cap N$ 'daprès le Théorème 1 de Y. Matsushima [4]. Alors les éléments $X_1, \cdots, X_n$ constituent une base canonique de $\mathfrak{g}$ et les éléments $exp\ X_1, \cdots, exp\ X_n$ constituent un système libre de générateurs de D, ce qui démontre la Proposition 4.

§2. Nous appellerons pour simplicité un groupe de Lie résoluble connexe G et son algebre de Lie $\mathfrak{g}$ *à racines réelles,* si toutes les racines de $\mathfrak{g}$ ne prennent que de valeurs réelles. Une algèbre de Lie résoluble à racines réelles est de type (E) d'après le Théorème 1 (voir aussi le Théorème 3 et son Corollaire de J. Dixmier [1]).

PROPOSITION 5. *Soient G un groupe de Lie résoluble connexe à racines réelles et $\mathfrak{h}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{h}$ est stable sous l'opération Adx pour un élément x de G, $\mathfrak{h}$ est aussi stable sous l'éopration adX où X est un un élément quelconque de $\mathfrak{g}$ tel que $x = exp\ X$. Réciproquement un groupe de Lie résoluble* *connexe est à racines réelles, si tout sous-espace* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *a la propriété ci-dessus.*

Soit d'abord $\mathfrak{g}$ à racines réelles. Tous les éléments de $ad\mathfrak{g}$ sont alors simultanément représentés par des matrices triangulaires par rapport à une base canonique convenable de $\mathfrak{g}$. Soit $\tilde{K}$ l'ensemble des matrices inversibles triangulaires qui transforment $\mathfrak{h}$ en lui-même. $\tilde{K}$ est alors un groupe algébrique linéaire et l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{k}}$ de $\tilde{K}$ est formée des matrices triangulaires qui transforment $\mathfrak{h}$ en lui-même. Supposons que $\mathfrak{h}$ soit stable sous Adx pour un élément x de G. Adx appartient à $\tilde{K}$. Par le Théorème de G. D. Mostow [5, § 3] il existe un élément Y de $\tilde{\mathfrak{k}}$ tel que $exp\ Y=Adx$. De l'autre côté $exp\ X=Adx$. On a alors $Y=adX$, puisque Y et adX sont tous deux triangulaires, et donc $\mathfrak{h}$ est stable sous adX, ce qui démontre la première partie de la Proposition 5.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ ne soit pas à racines réelles. Il existe alors trois éléments L, A, B de $\mathfrak{g}$ différents de zéro tels que $[L, A]=aA+B$, $[L, B]=-A+aB$, où a est un nombre réel. Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de dimension 1 engendrée par l'élément A. $\mathfrak{h}$ est alors stable sous l'opération $Ad\ (exp\pi L)$, tandis que $\mathfrak{h}$ n'est pas stable sous l'opération $ad\pi L$. La Proposition 5 est donc démontrée.

Corollaire. *Soient G un groupe de Lie résoluble connexe à racines réelles et H un sous-groupe analytique de G. Alors le normalisateur $N(H)$ de H dans G est aussi un sous-groupe analytique de G.*

Soit x un élément de $N(H)$. Puisque Adx transforme $\mathfrak{h}$ en lui-même, adX transforme $\mathfrak{h}$ en lui-même où X est un élément quelconque de $\mathfrak{g}$ tel que $x=exp\ X$. X appartient alors au normalisateur $N(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et donc $N(H)$ est un sous-groupe analytique de G correspondant à $\mathfrak{h}$, ce qui démontre le Corollaire.

Remarque. $N(H)$ est fermé dans G d'après le Lemme 1 de M. Gotô [2].

Proposition 6. *Soient G un groupe de Lie résoluble connexe à racines réelles et F un sous-groupe de G. Alors le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les éléments X de $\mathfrak{g}$ tels que $exp\ X$ appartient à F est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Si en particulier G est simplement connexe, le sous-groupe analytique de G correspondant à cette sous-algèbre est le plus petit sous-groupe analytique de G*

contenant F.

Soit $\mathfrak{h}$ le sous-espace engendré par les éléments X de $\mathfrak{g}$ tels que $exp\ X \in F$. Soient encore x, y des éléments de F et $x = exp\ X$, $y = exp\ Y$. On a alors $exp\ Adx(Y) = xyx^{-1} \in F$. Donc on a $Adx(Y) \in \mathfrak{h}$. Puisque Y est arbitraire, on a $Adx(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Alors $adX(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ par la Proposition précédente. Puisque x est aussi arbitraire, on a $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ et par conséquent $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre. Si G est simplement connexe, il existe un seul élément X dans $\mathfrak{g}$ tel que $x = exp\ X$, et il est évident que $\mathfrak{h}$ engendre dans G le plus petit sous-groupe analytique contenant F. La Proposition 6 est donc démontrée.

Nous dirons d'après G. D. Mostow [5] qu'un sous-groupe F d'un group de Lie connexe G est *ample (full)* dans G, s'il n'existe aucun sous-groupe analytique propre de G contenant F.

Proposition 7. *Soit G un groupe de Lie résoluble simplement connexe à racines réelles. Si F est un sous-groupe ample dans G, $[F, F]$ est ample dans $[G, G]$.*

Soit H le plus petit sous-groupe analytique de G contenant $[F, F]$. Soient $x \in F$, $y \in [F, F]$ et $x = exp\ X$, $y = exp\ Y$. On a alors $exp\ Adx(Y) = xyx^{-1} \in [F, F]$ et donc $Adx(Y) \in \mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{h}$ est le sous-espace engendré par les éléments Y tels que $exp\ Y \in [F, F]$, on a $Adx(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Donc $adX(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ par la Proposition 5. Puisque F est ample dans G, tout élément de $\mathfrak{g}$ est une combinaison linéaire des éléments X tels que $exp\ X \in F$. Par conséquent on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, de sorte que $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Soient maintenant x, y des éléments de F et $x = exp\ X$, $y = exp\ Y$. La relation $xyx^{-1} \equiv Y\ (mod\ H)$ signifie $exp\ Adx(Y) \equiv exp\ Y (mod\ H)$, et il s'ensuit $Adx(Y) \equiv Y\ (mod\ \mathfrak{h})$. On a alors la relation $Ad\varphi(x)(\dot{\varphi}(Y)) = \dot{\varphi}(Y)$, en désignant par φ et $\dot{\varphi}$ les homomorphismes canoniques de G sur G/H et de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ respectivement. Puisque G/H est aussi simplement connexe, cela entraîne $ad\dot{\varphi}(X)(\dot{\varphi}(Y)) = 0$ par la Proposition 1; c'est-à-dire, $\dot{\varphi}([X, Y]) = 0$ et donc $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. On a alors $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, puisque F est ample dans G. Il est évident que $\mathfrak{h} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, car $[G, G]$ est un sous-groupe analytique contenant $[F, F]$. Par suite $\mathfrak{h} = [g, g]$ et la Proposition 7 est démontrée.

Proposition 8. *Soit G un groupe de Lie résoluble connexe à racines réelles.*

Alors tout sous-groupe ample dans G est en même temps uniforme dans G.

Nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que G soit simplement connexe. Soit F un sous-groupe ample dans G. Nous allons démontrer par récurrence sur la longueur de la série dérivée de $\mathfrak{g}$ qu'il existe une base canonique $X_1, \cdots, X_n$ de $\mathfrak{g}$ telle que l'on ait $exp\ X_i \in F$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Si $[F, F] = \{e\}$, G est abélien par la Proposition précédente et par suite l'énoncé est évident. Supposons donc $[F, F] \neq \{e\}$. Alors on a $\{e\} \subsetneqq [G, G] \subsetneqq G$. Soit φ l'homomorphisme canonique de G sur $G/[G, G]$. Puisque $\varphi(G)$ est abélien et $\varphi(F)$ est ample dans $\varphi(G)$, il existe une base canonique $X_1^*, \cdots, X_r^*$ de $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ telle que $exp\ X_i^* \in \varphi(F)$ $(1 \leqq i \leqq r)$. Il existe alors au moins un élément X_i de F tel que $\varphi(x_i) = exp\ X_i^*$ $(1 \leqq i \leqq r)$. Soit X_i l'élément de $\mathfrak{g}$ tel que $exp\ X_i = x_i$. D'autre part $[F, F]$ est ample dans $[G, G]$ d'après la Proposition précédente, de sorte qu'il existe par l'hypothèse de récurrence une base canonique $X_{r+1}, \cdots X_n$ de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ telle que $exp\ X_i \in [F, F]$. Ainsi les éléments $X_1, \cdots, X_n$ constituent une base canonique de $\mathfrak{g}$ et $exp\ X_i \in F$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Alors la Proportion 3 montre que F est uniforme dans G, ce qui démontre la Proposition 8.

Théorème 2. *Soient G un groupe de Lie résoluble connexe à racines réelles et F un sous-groupe fermé de G. Alors il existe un sous-ensemble E de G homéomorphe à un espace euclidien et un sous-groupe analytique H de G coutenant F comme un sous-groupe uniforme, de telle sorte que l'espace homogène G/F soit homéomorphe au produit direct de E et de l'espace homogène compact H/F.*

Nous démontrerons d'abord le Théorème pour les groupes simplement connexe par récurrence sur la dimension n de $\mathfrak{g}$. Soit H le plus petit sous-groupe analytique de G contenant F. F est alors uniforme dans H d'après la Proposition précédente. Or, il existe une base canonique $X_1, \cdots, X_n$ de $\mathfrak{g}$ dont une partie $X_{i_1}, \cdots, X_{i_h}$ constitue une base canonique de $\mathfrak{h}$ et une autre partie $X_{p+1}, \cdots, X_n$ constitue une base canonique de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. S'il existe un indice i tel que $i \leqq p$ et $X_i \notin \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ est contenu dans l'idéal propre $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$ engendré par les éléments $X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n$. G est alors le produit semi-direct de $\{exp\ tX_i\,;\ t \in R\}$ et du sous-groupe analytique G_1 correspondant à $\mathfrak{g}_1$. Donc G/F est homéomorphe au produit direct de

$\{exp\, tX_i\,;\ t \in R\}$ et de G_1/F. La conclusion se déduit de l'hypothèse de récurrence.

Soit maintenant $X_i \in \mathfrak{h}$ pour $1 \leqq i \leqq p$. Tout élément de G se représente uniquement dans la forme $x\,(exp\ t_pX_p) \cdots (exp\ t_1X_1)$ où $x \in [G, G]$ et $t_i \in R$ $(1 \leqq i \leqq p)$. Puisque $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotent, il a une base canonique $Y_n, \cdots, Y_{p+1}$ telle qu'une partie $Y_r, \cdots, Y_{p+1}$ constitue une base canonique de $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ d'après le Lemme 4 de Y. Matsushima [4]. Ainsi tout élément de G et de H est représenté uniquement dans la forme

$$(exp\ t_nY_n) \cdots (exp\ t_{r+1}Y_{r+1})(exp\ t_rY_r) \cdots (exp\ t_{p+1}Y_{p+1})(exp\ t_pX_p) \cdots (exp\ t_1X_1)$$

et

$$(exp\ t_rY_r) \cdots (exp\ t_{p+1}Y_{p+1})(exp\ t_pX_p) \cdots (exp\ t_1X_1)$$

respectivement. Soit E l'ensemble des éléments de la forme

$$(exp\ t_nY_n) \cdots (exp\ t_{r+1}Y_{r+1})\ .$$

E est homéomorphe à un espace euclidien, puisque cette représentation est unique. On a alors $G=EH$, $E \cap H=\{e\}$ de sorte que G/F est homéomorphe au produit direct de E et de H/F. Notre assertion est donc démontrée.

Supposons ensuite que G ne soit pas nécessairement simplement connexe. Soient $\tilde{G}$ le groupe de revêtement universel de G et φ la projection canonique de $\tilde{G}$ sur G. L'image réciproque $\tilde{F}=\varphi^{-1}(F)$ est un sous-groupe fermé de $\tilde{G}$. Donc il existe un sous-ensemble $\tilde{E}$ de $\tilde{G}$ homéomorphe à un espace euclidien et un sous-groupe analytique $\tilde{H}$ de $\tilde{G}$ contenant $\tilde{F}$ comme un sous-groupe uniforme, de telle sorte que l'espace homogène $\tilde{G}/\tilde{F}$ soit homéomorphe au produit direct de $\tilde{E}$ et de l'espace homogène compact $\tilde{H}/\tilde{F}$. Puisque le noyau de φ est contenu dans $\tilde{F}$, $H=\varphi(\tilde{H})$ est un sous-groupe analytique de G et les espaces $\tilde{G}/\tilde{F}$, $\tilde{H}/\tilde{F}$ et $\tilde{E}$ sont homéomorphes respectivement à G/F, H/F et $\varphi(\tilde{E})$. Ainsi G/F est homéomorphe à $\varphi(\tilde{E}) \times H/F$, ce qui démontre le Théorème 2.

Remarque. On peut aussi obtenir ce Théorème suivant la méthode et les résultats de G. D. Mostow [5].

Nous allons démontrer ci-dessous la réciproque du Théorème 2.

Théorème 3. *Un groupe de Lie résoluble connexe G est à racines réelles, si tout sous-groupe fermé F de G est uniforme dans un sous-groupe analytique de G.*

Supposons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G n'est pas à racines réelles. Nous considérons séparément le cas 1) $\mathfrak{g}$ est de type (E) et la cas 2) $\mathfrak{g}$ n'est pas de type (E).

1) $\mathfrak{g}$ est de type (E). Il existe trois éléments L, A, B de $\mathfrak{g}$ différents de zéro tels que $[L, A]=aA+B$, $[L, B]=-A+aB$ $(a\neq 0)$. Les éléments de G de la forme $(exp\ k\pi L)$ $(exp\ tA)$ où k est un entier et t est réel constituent un sous-groupe fermé F de G. Soit H un sous-groupe analytique minimal de G contenant F. Puisque l'algèbre de Lie de H est de type (E), il existe un élément L' de $\mathfrak{h}$ tel que $exp\ \pi L'=exp\ \pi L$. Par le Théorème 2 de [6] le centre du groupe de revêtement universel de G est connexe, de sorte qu'il existe un élément central X de $\mathfrak{g}$ tel que $\pi L'=\pi L+X$. Donc $\mathfrak{h}$ contient les éléments A et B. L'élément A (resp. B) engendre dans H un sous-groupe à un paramètre fermé non-compact d'après le Théorème 2 de [6]. Il est alors évident que F n'est pas uniforme dans H.

2) $\mathfrak{g}$ n'est pas de type (E). $\mathfrak{g}$ contient une sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de classe $\mathfrak{C}$ ou de classe $\mathfrak{D}$ d'après le Théorème 1 de [6]. Il existe donc trois éléments L, A, B de $\mathfrak{k}$ différents de zéro tels que $[L, A]=B$ et $[L, B]=-A$. Les éléments de G de la forme $(exp\ k\pi L)$ $(exp\ tA)$ où k est un entier et t est réel constituent un sous-groupe fermé dans le sous-groupe analytique K de G correspondant à $\mathfrak{k}$. K est alors le plus petit sous-groupe analytique de G contenant F. Sinon, tout sous-groupe analytique minimal H de G contenant F est au plus de dimension 2 et par conséquent de type (E). Il existe donc un élément L' dans $\mathfrak{h}$ tel que $exp\ \pi L'=exp\ \pi L$. Les éléments L', A et $[L', A]$ sont linéairement indépendants, ce qui est absurde. Il est évident que F n'est pas uniforme dans K, ce qui achève la démonstration du Théorème 3.

Théorème 4. *Soit M un espace homogène compact où opère à gauche transitivement un groupe de Lie résoluble connexe à racines réelles. M se représente alors dans la forme G/D, où G est un groupe de Lie résoluble simplement connexe à racines réelles et D est un sous-groupe uniforme discret de G.*

Soient G' un groupe de Lie résoluble connexe à racines réelles opérant sur M et D' le sous-groupe d'isotropie de G'. Alors M se représente dans la forme G'/D'. Soient $\tilde{G}'$ le groupe de revêtement universel de G' et $\tilde{D}'$ l'image réciproque de D' par la projection canonique de $\tilde{G}'$ sur G'. Soit encore $\tilde{D}'^0$ la composante connexe de $\tilde{D}'$. Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}'$ de $\tilde{D}'^0$ est transformée en lui-même par l'opération Adx où $x \in \tilde{D}'$. Par la Proposition 5, $\mathfrak{d}'$ est aussi transformée en lui-même par adX où $x=exp\ X$. Puisque $\tilde{D}'$ est uniforme dans $\tilde{G}'$, $\mathfrak{d}'$ est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ de $\tilde{G}'$. On a ainsi $G'/D' \simeq \tilde{G}'/\tilde{D}' \simeq G/D$ (homéomorphe), où $G=\tilde{G}'/D'^0$ est simplement connexe et $D=\tilde{D}'/\tilde{D}'^0$ est un sous-groupe uniforme discret de G. Le Théorème 4 est donc démontré.

Lemme. *Soient G, G' des groupes de Lie résolubles simplement connexes de type (E) et ψ, ψ' des homomorphismes de G dans G'. Si ψ et ψ' ont les mêmes effets sur un sous-groupe uniforme discret D de G, ils sont égaux.*

Il existe par la Proposition 4 une base canonique $X_1, \cdots, X_n$ de $\mathfrak{g}$ telle que $exp\ X_i \in D$. Désignons par $\dot{\psi}$, $\dot{\psi}'$ les différentielles de ψ, ψ' respectivement. Alors $exp\ \dot{\psi}(X_i)=\psi(exp\ X_i)=\psi'(exp\ X_i)=exp\ \dot{\psi}'(X_i)$. Puisque G' est simplement connexe et de type (E), $\dot{\psi}(X_i)=\dot{\psi}'(X_i)$. On a donc $\psi=\psi'$, ce qui démontre le Lemme.

Théorème 5. *Soient G, G' des groupes de Lie résolubles simplement connexes à racines réelles et D un sous-groupe uniforme discret de G. Alors tout homomorphisme φ de D sur un sous-groupe discret D' de G' s'étend uniquement à un homomorphisme ψ de G dans G'. Si en particulier D' est uniforme dans G', ψ est surjectif. Si φ est injectif, ψ l'est aussi.*

Nous considérons d'abord deux cas spéciaux et ensuite considèrerons le cas général .

i) Le cas $D'=\{e\}$. Soit $\psi(x)=e$ pour tout $x \in G$. Par le Lemme précédent ψ est l'unique homomorphisme de G dans G' qui étend φ.

ii) Le cas injectif. Soit H' le plus petit sous-groupe analytique de G' contenant D'. Nous démontrons qu'il existe un seul isomorphisme ψ de G sur H' qui étend φ. Soit $X_1, \cdots, X_n$ une base canonique de $\mathfrak{g}$ telle que les éléments $exp\ X_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ constituent un système libre de générateurs de D.

Soit $x_i = exp\ X_i$ et soient $\varphi(x_i) = y_i$ et $y_i = exp\ Y_i$, $Y_i \in \mathfrak{h}'$. Nous définissons une application linéaire f de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}'$ par les relations $f(X_i) = Y_i (1 \leqq i \leqq n)$ et démontrons que f est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}'$. Soit $\mathfrak{g}_i$ (resp. $\mathfrak{h}'_i$) le sous-espace de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}'$) engendré par les éléments $X_{i+1}, \cdots, X_n$ (resp. $Y_{i+1}, \cdots, Y_n$). $\mathfrak{g}_i$ est alors une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et un idéal de $\mathfrak{g}_{i-1}$. Nous démontrons par récurrence sur i que $\mathfrak{h}'_i$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{h}'$ et contient $\mathfrak{h}'_{i+1}$ comme un idéal et que la restriction f_i de f à $\mathfrak{g}_i$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}_i$ sur $\mathfrak{h}'_i$. Pour $i = n$, l'assertion est évidente. Supposons qu'elle soit vraie pour i. Pour $j > i$, nous avons

$$x_i x_j x_i^{-1} = x_{i+1}^{p_{i+1}} \cdots x_n^{p_n} \quad (p_{i+1}, \cdots, p_n \text{ sont des entiers})$$

et donc

$$y_i y_j y_i^{-1} = y_{i+1}^{p_{i+1}} \cdots y_n^{p_n}.$$

Posons

$$Adx_i(X_j) = t_{i+1} X_{i+1} + \cdots + t_n X_n \quad (t_{i+1}, \cdots, t_n \in R).$$

Soit ψ_i l'isomorphisme de G_i sur H'_i dont la différentielle est f_i. On a alors

$$expAdy_i(Y_j) = y_i y_j y_i^{-1} = \psi_i(expAdx_i(X_j)) = exp\ f_i(Adx_i(X_j))$$
$$= exp(t_{i+1} Y_{i+1} + \cdots + t_n Y_n),$$

d'où

$$Ady_i(Y_j) = t_{i+1} Y_{i+1} + \cdots + t_n Y_n.$$

Donc $\mathfrak{h}_i'$ est stable sous l'opération Ady_i, de sorte que $\mathfrak{h}'_i$ est aussi stable sous l'opération adY_i. Il en résulte que $\mathfrak{h}'_{i-1}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{h}'$ et contient $\mathfrak{h}'_i$ comme un idéal. Puisque les éléments $Y_{i+1}, \cdots, Y_n$ sont linéairement indépendants par l'hypothèse de récurrence, la matrie représentant la restriction de Adx_i à $\mathfrak{g}_i$ par rapport à la base $X_{i+1}, \cdots, X_n$ est la même que la matrice représentant la restriction de Ady_j à $\mathfrak{h}'_i$ par rapport à la base $Y_{i+1}, \cdots, Y_n$. Par conséquent la matrice représentant la restriction de adX_i à $\mathfrak{g}_i$ par rapport à la base $X_{i+1}, \cdots, X_n$ et la matrice représentant la restriction de adY_i à $\mathfrak{h}'_i$ par rapport à la base $Y_{i+1}, \cdots.\ Y_n$ sont les mêmes, car les valeurs propres de ces matrices sont toutes réelles. Donc f_{i-1} est un homomorphisme de $\mathfrak{g}_{i-1}$ sur $\mathfrak{h}'_{i-1}$. Le sous-groupe H'_{i-1} engendré dans H' par $\mathfrak{h}'_{i-1}$ contient un sous-groupe discret de rang $n-i+1$, de sorte que f_{i-1} est un isomorphisme, ce qui démontre notre assertion.

iii) Le cas général. Soient F le noyau de φ et K le plus petit sous-groupe analytique de G contenant F. F est alors un sous-groupe uniforme discret de K. On connaît que la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$ correspondant à K est un idéal de $\mathfrak{g}$ par la même méthode que celle de la démonstration de la Proposition 7. L'espace DK/D est compact puisqu'il est l'image d'un espace compact $K/D\cap K$ par une application continue. Donc DK est fermé dans G et DK/K est un sous-groupe uniforme discret dans G/K. Soit χ la projection canonique de G sur G/K. On peut alors définir par la façon naturelle une application $\bar{\varphi}$ bien-définie de DK/D dans D' telle que $\bar{\varphi}\circ\chi=\varphi$. $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme de DK/K sur D'. D'après la considération du cas ii), il existe uniquement un isomorphisme $\bar{\psi}$ de G/K sur H' qui étend $\bar{\varphi}$. Nous définissons un homomorphisme ψ de G sur H' par la relation $\psi=\bar{\psi}\circ\chi$. Il est évident que la restriction de ψ à D est égale à φ, ce qui achève la démonstration du Théorème 5.

Bibliographie

[1] J. Dixmier, L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles, *Bull. Soc. Math. France*, 85 113–121 (1957).

[2] M. Gotô, Faithful representations of Lie groups I, *Mathematica Japonicae*, 1, 107–119 (1948).

[3] A. I. Malcev, On a classe of homogenous spaces, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Ser. Mat.* 13, 9–32 (1949) (en russe): *AMS Translation* No. 39 (1951).

[4] Y. Matsushima, On the discrete subgroups and homogeneous spaces of nilpotent Lie groups, *Nagoya Math. J.*, 2, 95–110 (1951).

[5] G. D. Mostow, Factor spaces of solvable groups, *Ann. of Math.*, 60, 1–27 (1954).

[6] M. Saitô, Sur certains groupes de Lie résolubles, Ce journal, ce volume, 1–11 (1957).