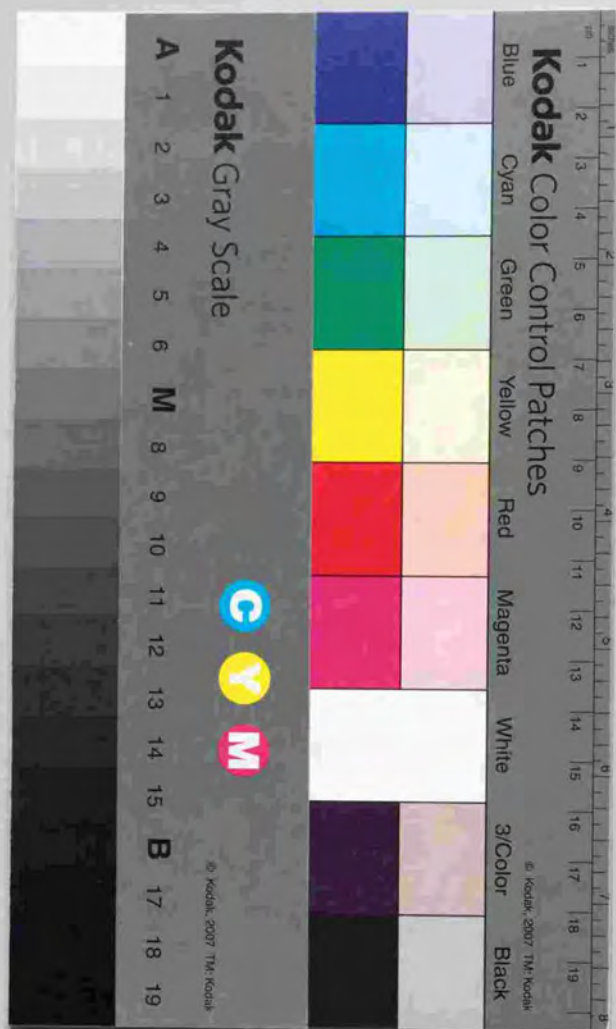


一般化等質性分析による  
質的データのための尺度構成法

土屋隆裕



一般化等質性分析による  
質的データのための尺度構成法

土屋 隆裕

## 目 次

目次	1
本論文の目的と構成	7
本論文の目的	7
本論文の構成	8
第1章 尺度構成法	11
1.1 尺度構成とは	11
1.1.1 尺度構成とは	11
1.1.2 尺度の分類	12
1.1.3 尺度構成法の要件	15
1.2 尺度構成法の種類	19
1.2.1 尺度構成法で扱うデータの分類	19
1.2.2 尺度構成法の分類	25
1.3 刺激に尺度値を与える方法	29
1.3.1 比較判断の法則	29
1.3.2 BTL モデル	31
1.3.3 MDS	32
1.4 個体に尺度値を与える方法	38
1.4.1 Likert 尺度	38
1.4.2 因子分析法	39
1.5 個体と刺激に尺度値を与える方法	42
1.5.1 尺度解析法	42
1.5.2 展開法	47
1.5.3 潜在構造分析	50



1.5.4	項目反応理論	52
1.6	尺度解析法・数量化Ⅲ類・対応分析法・双対尺度法・等質性分析	53
1.6.1	交互平均法	55
1.6.2	分散分析アプローチ	56
1.6.3	主成分分析アプローチ	61
1.6.4	3つの方法の関係	63
1.7	尺度化法の性質と一次元尺度構成	66
1.8	まとめ	74
<b>第2章</b>	<b>一般化等質性分析と尺度構成法</b>	<b>79</b>
2.1	等質性分析とは	79
2.2	等質性分析と多変量解析	81
2.2.1	回帰分析	81
2.2.2	正準判別分析	82
2.2.3	主成分分析	83
2.2.4	正準相関分析	85
2.3	一般化等質性分析の提案	87
<b>第3章</b>	<b>項目選択による一次元尺度構成法</b>	<b>91</b>
3.1	本章の目的	91
3.2	項目選択による一次元尺度構成法	95
3.2.1	方法	95
3.2.2	計算方法	98
3.3	数値例	100
3.3.1	人工データ2	100
3.3.2	人工データ1	103
3.3.3	数学能力検定試験データ	106

3.3.4	循環系機能評価データ	112
3.3.5	循環器系危険因子データ	115
3.3.6	EPPS性格検査データ	118
3.4	まとめ	125
<b>第4章</b>	<b>項目パタンの分類による尺度構成法</b>	<b>129</b>
4.1	本章の目的	129
4.2	項目パタンの分類による尺度構成法	132
4.3	計算方法	136
4.4	適合度指標	139
4.5	数値例	140
4.5.1	人工データ1・3	140
4.5.2	人工データ4	144
4.5.3	人工データ5・6	149
4.5.4	SD法データ	151
4.5.5	Kendallデータ	155
4.5.6	「日本人の国民性」データ	162
4.5	まとめ	168
<b>第5章</b>	<b>3相データのための 項目パタンの分類による尺度構成法</b>	<b>173</b>
5.1	本章の目的	173
5.1.1	3相データ	173
5.1.2	2相データに変換する方法	174
5.1.3	尺度得点に対する制約	175
5.2	デザイン行列を用いる方法	177
5.2.1	目的	177



5.2.2 最小化の基準	181
5.2.3 計算方法	182
5.2.4 数値例	182
5.3 ランク制約を用いる方法	185
5.3.1 目的	185
5.3.2 最小化の基準	188
5.3.3 計算方法	189
5.3.4 数値例	190
5.4 評定者の分類を伴う方法	196
5.4.1 目的	196
5.4.2 最小化の基準	200
5.4.3 計算方法	201
5.4.4 数値例	203
5.5 まとめ	205
<b>第6章 2つの項目群における項目パタンの分類法</b>	<b>209</b>
6.1 本章の目的	209
6.2 2つの項目群における項目パタンの分類法	211
6.3 計算方法	215
6.4 適合度の指標	217
6.5 数値例	218
6.5.1 人工データ 7	218
6.5.2 人工データ 8	223
6.5.3 Russett データ	225
6.5.4 絵画印象データ	227
6.6 まとめ	232

<b>第7章 結論と今後の展望</b>	<b>237</b>
文献	243
付記	259

1773

1774

1775

1776 1777 1778

1779

1780

1781 1782

1783 1784

1785

1786

1787

1788

1789

1790

1791 1792 1793

1794 1795

1796 1797 1798

1799 1800 1801 1802

1803 1804 1805 1806

1807 1808 1809 1810

1811 1812 1813 1814

1815 1816 1817

1818 1819

1820

1821

1822 1823

1824 1825

1826

1827

## 本論文の目的と構成

### 本論文の目的

測定という行為は、対象のある性質に対し、何らかの規則に従って数値を付与することである(池田, 1980)。数値を付与することによって、その性質に関する客観的な議論が可能となる。このことは、心理学・教育学の分野における測定についても当然当てはまることである。しかし、心理・教育測定には次のような2つの特徴がある。1つは、測定対象となる心理的特性が「学力」や「性格」等しばしば抽象的な概念であり、数値を付与する規則があらかじめ存在しない、という点である。そこで、テストや質問紙調査などにより得られたデータを基に、調べようとする心理的特性にいかにな値を付与するか、換言すれば、心理学的尺度の構成法が重要な研究課題の1つとなる(Guilford, 1954; Torgerson, 1958; Gulliksen & Messick, 1960; 田中, 1961; Mokken, 1971; van der Ven, 1980; McIver & Carmines, 1981; Dunn-Rankin, 1983)。もう1つは、データが、間隔尺度や比尺度ではなく、名義尺度や順序尺度により質的変数として得られることが多い、という点である(柳井・繁樹・前川・市川, 1990)。したがって厳密に言えば、変数間の積率相関係数に基づく多変量データ解析の手法を尺度構成に用いることはできない。そのため、積率相関係数に基づかない手法を開発する必要がある。

そこで本論文では、数量化Ⅲ類や等質性分析をその特別な場合として含む一般化等質性分析という新たな手法を提案する。この手法を用いることにより、一次元性を持つ質的項目の組をいくつか選び出し、複数の一次元尺度を構成することができる。各一次元尺度の解釈は容易であり、測定の対象となる概念や特性が明確となる。また従来の方法に比べ信頼性の高い尺度が構成できる。さらに、計算法も比較的容易であり、実用性が高いという優れた特徴も持つ。



## 本論文の構成

本論文の構成は以下のとおりである。

### 第1章 尺度構成法

この章では、まず尺度構成法とは何かということを説明する。特に、広義の一次元尺度と狭義の一次元尺度という概念の区別が重要となる。さらに、この観点から従来の尺度構成法について説明し、それらの多くが広義の一次元尺度であることを述べる。さらに、一般化等質性分析の基礎となる尺度解析法や数量化Ⅲ類・等質性分析も広義の一次元尺度構成法であり、狭義の一次元尺度が構成できないことを示す。

### 第2章 一般化等質性分析と尺度構成法

この章では、等質性分析についてさらに説明を加え、いくつかの多変量解析法が等質性分析の特別な場合として表せることを示す。次に、一般化等質性分析を提案する。そして一般化等質性分析のパラメタの値を変えることで、広義の一次元尺度と狭義の一次元尺度がともに構成できることを述べる。

### 第3章 項目選択による一次元尺度構成法

この章では、質的な項目群の中から一次元性を持つ項目を選択し、尺度構成を行う方法について述べる。項目反応理論を適用する前処理等で、一次元性を持つ項目選択が必要となる。既存の方法である数量化Ⅲ類は、必ずしも項目の選択に適した方法とは言えない。このことを人工例を使って示した後、項目の選択により適した方法を提案する。そして医学データや学力テストデータに適用することで、従来の方法では得られなかった知見が得られることを示す。

### 第4章 項目パタンの分類による尺度構成法

この章では、質的な項目をいくつかの群に分類し、各群においてそれぞれ一次元尺度を構成する方法を述べる。この目的のためには、因子分析法が用いられることが多い。しかしここでは、数量化Ⅲ類あるいは等質性分析にファジィ  $c$ -means クラスタ法の考え方を取り入れることで、項目の分類と数量化を同時に行う方法を提案する。ここで提案する方法により、数量化Ⅲ類で得られるもの以上の知見が得られることを、実際のデータに適用して実証する。また実例により、因子分析法が使えないデータにも適用可能であることを示す。

### 第5章 3相データのための項目パタンの分類による尺度構成法

この章では、樹木画に対する印象をSD法で調べたデータを数値例としながら、第4章で提案した尺度構成法を3相データの場合に拡張することを試みる。すなわち、項目を一次元性を持ついくつかの群に分類すると同時に、尺度得点に制約を課すことで、他の2つの相の構造を明らかにしようとする。その結果、3相データを2相データとして扱ったのでは得られない情報が得られることを示す。

### 第6章 2つの項目群における項目パタンの分類法

尺度構成という目的からはやや外れるが、一次元性を持つ項目を見出すという考え方を質的な変数群が2つの場合に拡張する。そして、2つの質的な項目群において、どの項目とどの項目が関連しているかを探る。この目的のためには、通常、正準相関分析が用いられることが多い。この章では、第4章で提案した方法を拡張することで、正準相関分析に比べより解釈の容易な方法を提案し、正準相関分析が適用できないデータの分析例を示す。

### 第7章 結論と今後の展望

最後にこの章では、本論文の結論と今後の展望を述べる。





## 第 1 章

# 尺度構成法

本章では、従来の尺度構成法について説明する。特に、広義の一次元尺度と狭義の一次元尺度という観点から、それらを概観する。まず 1.1 節では、尺度構成法とは何かということやその意義について説明する。1.2 節では、尺度構成法で扱うデータについて整理し、4 つの観点から従来の尺度構成法を分類する。1.3 節から 1.5 節では、分類された尺度構成法について簡単に説明する。さらに 1.6 節では、尺度解析法や数量化Ⅲ類について説明を加え、1.7 節ではそれらが広義の一次元尺度構成法であることを例示する。

### 1.1 尺度構成とは

#### 1.1.1 尺度構成とは

心理学的な現象に対し、科学的・客観的な議論を行うには、それらを何らかの形で記述することで、他の研究者と共有したり、従来の知識や他の現象との様々な形での比較を行う必要がある。そのためには、対象となる現象をモデル化し、現象に対して数値を付与することが重要である。なぜなら、数値は客観的で明確な順序を持っているため、1 つの直線上に並べることができ、それらの間で比較が行えるからである。一方、文学的な表現によって現象を記述しても、現象間の比較を行うことは難しい。例えば、「学力」という概念を記述するために、「個体 1 の学力は低くはなく、個体 2 の学力はやや高い」としたのでは、個体 1 と個体 2 の比較は行えない。「個体 1 の学力は 70 であり、個体 2 のそれは 60 である」と表現すれば、「個体 1の方が個体 2 に比べて学力が高い」といった比較が可能である。対象となる現象をモデル化し、何らかの規則に従って数値を付与する行為は測定と呼ばれる。換言すれば、測定とは、対象となる現象に対し比較のために順序を与えることである。

測定にも 2 つの種類がある。すなわち、直接測定と間接測定である(池田, 1980)。直接測定は文字通り対象となる現象を直接測定する場合である。例えば、物理学の分野での重さ



の測定等である。間接測定は、対象を直接測定できない場合に、それと関連すると考えられる現象を直接測定することで、目的とする現象を測定したものとみなす場合である。例えば、抽象的な概念である「学力」を直接測ることはできないため、目的とする学力と関連があると思われるテストを実施し、正答した項目数を数えることで、学力を測定したと考える。

心理学における測定の特徴の1つは、それが間接測定であることが多い、という点である。なぜなら、測定対象となる特性が抽象的な構成概念であったり、しばしば明確に定義されていないためである。さらには、どのような特性があるのか、といったことすら分かっていないこともある。間接測定では、直接測定により得られた数値を基に、研究対象である現象に対し数値を付与しなければならない。しかし、その規則はあらかじめ存在するわけではない。例えば、学力の測定では、全てのテスト項目を同等に扱うのではなく、ある特定の項目に正答すればより大きな数値を与える、ということもあり得る。一方、直接測定では数値を与える規則は明確に定まっている。例えば、重さを測定するためには「はかり」という道具が用いられる。「はかり」に物理学的対象を載せ、「はかり」が示す数値をその対象の重さとすればよい。そして数値に基づいて、対象を1つの直線上に並べることができる。直接測定においても間接測定においても、測定のための道具あるいは数値を付与する規則は尺度と呼ばれる。また、尺度に基づいて与えられる数値は尺度値と呼ばれる。本論文ではさらに、直接測定のための尺度を直接尺度、間接測定のためのそれを間接尺度と呼ぶこととする。心理学の分野では、多くの場合、目的とする対象を測定する間接尺度はあらかじめ存在しない。そこで、直接尺度を基に間接尺度を構成することが、心理学の研究の第一歩として重要な課題となる。本論文では、対象を直接測定できない場合に、直接尺度を基に間接尺度を構成することを、尺度構成と呼ぶ。

### 1.1.2 尺度の分類

先に、現象の記述のために数値を用いる理由として、明確な順序があるという数値の性質を述べた。他にも数値にはいくつかの性質がある。それらを挙げると、

1. 順序を持つ
2. 数値間の差も順序を持つ
3. 原点を持つ

となる (Torgerson, 1958)。尺度値が利用する数値の性質によって、尺度をいくつかの種類に分類することができる。

最もよく用いられる分類は、Stevens (1946) の分類法である。すなわち、名義尺度 (nominal

scale)、順序尺度 (ordinal scale)、間隔尺度 (interval scale)、比尺度 (ratio scale) の4つに分類する。名義尺度は上記のどの性質も用いない。したがって、名義尺度によって与えられる尺度値は個体間の区別をするラベルとしての役割だけを持つ。例えば、男性に対しては1を与え、女性に対しては2を与える場合である。順序尺度は第1の性質だけを利用する。順序尺度によって与えられる尺度値は、その順序だけが重要であり、数値間の差には意味がない。間隔尺度は、第1の性質に加え第2の性質も用いる。そのため、間隔尺度によって与えられた尺度値からは、平均や分散を求めることができる。間隔尺度の例としてしばしば挙げられるのは、温度である。0°C と 20°C の間の差は、20°C と 30°C の2倍である、といった比較を行うことができる。しかし原点には意味がない。0°C は温度がないことを表すわけではない。比尺度は、上記の3つの性質全てを利用するものである。比尺度において0という尺度値は対象となる特性を持っていないということを意味する。例えば前節で述べた「重さ」は、比尺度の例である。

Stevens の分類は現在最も広く用いられているが、分類法は必ずしもそれだけではない。Guttman (1978) は、順序づけを行うことが尺度の本質であるため、順序を持たない名義尺度は尺度ではない、と述べている。Torgerson (1958) も、測定において順序づけは常に必要であるとしている。そのため、数値の第2と第3の性質を組み合わせることで、順序尺度 (ordinal scale)、原点を持った順序尺度 (ordinal scale with natural origin)、間隔尺度 (interval scale)、比尺度 (ratio scale) の4つに尺度を分類している。Mosteller & Tukey (1977) は数値の分類として、ranks(順序だけが意味を持つ)、counted fractions(0以上1以下の分数)、counts(自然数)、amounts(非負の実数)、balances(実数)を挙げている<sup>1</sup>。Mosteller & Tukey の分類においても、順序を持たない数値というのは想定されていない。さらに Velleman & Wilkinson (1993) は、Stevens 流の分類法はデータ解析において弊害を生むと主張している。

本論文のとりうる立場は以下のようなものである。すなわち、間接尺度においては少なくとも順序が必要であると考え、冒頭で述べたように対象の順序づけを行うことが測定の本質であり、順序づけのない測定を行う意義はないからである。したがって、順序尺度、間隔尺度、比尺度の3つに分類する。一方、尺度構成の基礎となる直接測定においては、順序づけの行われぬ測定もあり得る。例えば、好きな食べ物を挙げてもらう、といった場合である。厳密に言えば、それは測定ではない。しかし、心理測定においては間接測定こそが本質的な測定であり、そのために直接測定と間接測定という概念を導入し二つの測定を区別しているのである。そこで、直接尺度においてはStevensの4つの分類を用いる。

<sup>1</sup>他に grades も挙げているが、A,B,Cといった順序を持ったラベルを表し、数値ではない



尺度の分類について考えることには、以下のような意味がある。尺度構成とは、直接尺度から間接尺度を構成することである、と定義した。直接尺度から間接尺度への変換を行う際には、直接尺度値と間接尺度値がなるべく矛盾しない方が望ましい。直接尺度において尺度値が持つ性質は、間接尺度値においても保持されている方がよい、ということである。例えば、直接尺度が順序尺度であるならば、数値の順序に意味がある。そこで、間接尺度値においても、その順序が保たれているべきである。直接尺度において個体1、個体2、個体3の順に大きな尺度値を与えられているならば、間接尺度においても個体1、個体2、個体3の順に大きな尺度値を与えられなければならない。仮に、間接尺度においては個体2、個体3、個体1の順に大きな尺度値を与える、といった直接尺度値と矛盾する変換を行うのであれば、その間接尺度が何を測定しているのかがあいまいとなる。直接尺度値のどの性質を保ったまま間接尺度を構成すべきか、ということを考えるときに、尺度の分類が役に立つ (FIGURE 1.1)。名義尺度では、数値をどのように変換してもよい。しかし構成される間接尺度には名義尺度



FIGURE 1.1 直接尺度から間接尺度への尺度水準の変換

は存在しないため、何らかの方法により順序づけを行う必要がある。順序尺度では、順序に意味があるため、順序を保った変換ならばよい。例えば、1,2,3という尺度値を、1,10,100と変換してもよい。間隔尺度では、数値間の差の順序も保たなければならない。1,2,4,7という尺度値を、3,5,9,15と変換することは構わないが、1,2,3,4と変換することはできない。元の尺度値を  $x$  とすれば、 $ax+b$  というアフィン変換しかできないということである。比尺度では、原点も保つ必要がある。元の尺度値を  $x$  とすれば、 $ax$  という変換だけが可能である。

尺度構成を行うときには、直接尺度値に対してどのような変換が可能であるのか、を考慮

することが必要である。例えば、直接尺度が順序尺度ならば、順序さえ保たれていればどのような変換を行ってもよい。しかし、それを間隔尺度と見なし、数値間の順序をも保つように変換してしまうと、柔軟性に欠け、重要な情報を見逃してしまう可能性もある。逆に、直接尺度が間隔尺度であるにもかかわらず、数値の順序だけを保つ変換を行えば、直接尺度と間接尺度の間で矛盾が生じ、適切な尺度が構成されたとはいえなくなる。心理学の分野では、直接尺度が名義尺度や順序尺度であることが多い。一般に、名義尺度あるいは順序尺度により得られたデータを質的データ (カテゴリーカルデータ、離散データ)、間隔尺度あるいは比尺度により得られたデータを量的データ (計量データ、連続データ) と呼ぶ。心理学的尺度構成法の特徴は、質的データに基づき、その順序を保ったまま、あるいは何らかの方法で順序を見出し、間接尺度上で新たな順序づけを行うことである、と言える。

### 1.1.3 尺度構成法の要件

間接測定においては、目的とする現象を直接測定できないため、構成した間接尺度が目的とする現象を適切に測定できているのか、という懸念が生じる。これは妥当性の問題と言われる。尺度の妥当性を高めるために、尺度構成法を考えるときには考慮すべき点がいくつか存在する。以下では、「学力」の測定を例として、それらの点を挙げる。

まず、1つの間接尺度を構成するために、1つの直接尺度を用いるのか、あるいは複数の直接尺度を用いるのか、という点である。1つの直接尺度を用いる場合の利点は、直接尺度と矛盾しないよう間接尺度を構成できる、ということである。なぜなら、直接尺度値に許される変換を施した結果をそのまま間接尺度値とすればよいからである。各個体に対して「正答」ならば1、「誤答」ならば0という尺度値を与える学力テストの項目は、順序尺度の水準にある直接尺度と見なせる。すなわち、ある1つのテスト項目の結果だけを用いても、1つの直線上の例えば1または0の位置に各個体を置くことで、1の位置に置かれた個体は0の位置に置かれた個体よりも学力が高い、といった比較をすることができる。逆に、1つの直接尺度から1つの間接尺度を構成する場合の問題点は3つある。一つ目は、目的とする「学力」を測るのはその項目だけではない、という点である。用いた項目は「学力」の一部の面を測るに過ぎない。その項目から構成した間接尺度が「学力」を測っている、というのは言い過ぎであろう。これは内容的妥当性の問題と呼ばれる。二つ目は、1の位置に置かれた個体間での比較はできない、という点である。したがって、各個体の「学力」について十分な情報が得られない。これは測定の精度あるいは弁別力の問題である。三つ目は、本来は学力の高い個体が、たまたま何らかの理由により「誤答」となった可能性やその逆の可能性があ



るかもしれない、という点である。これは信頼性の問題と言われる。

一方、複数の直接尺度から1つの間接尺度を構成する場合には、これらの問題に対処することができる。すなわち、目的とする「学力」の諸側面を十分にカバーするだけの数の項目を用意することで、内容的妥当性を高めることができる。また、複数の直接尺度を用いることで測定の精度も上げることができる。例えば、1番目の項目に「正答」であった個体のうち、2番目の項目に「正答」であれば2、「誤答」であれば1という尺度値を与えることで、個体間の差異がより細かく表現される。さらに、学力の高い個体がたまたまある1つの項目に「誤答」であったとしても、項目数が多ければ、間接尺度値へのその項目の影響は軽減される。古典的テスト理論の枠組みでも、項目数を増やすことで信頼性が高まることが示されている。以上のことから、現実の尺度構成では、1つの間接尺度を構成するために複数の直接尺度を用意することが多い。

尺度構成法で考慮すべき次の点として、それでは、複数の直接尺度間に齟齬や矛盾がある場合には、どのように対処すべきか、という点が挙げられる。人間の行動はしばしば一貫性に欠ける。また用意した直接尺度のなかには、目的とする現象を測定しているとは見なせないものも含まれているかもしれない。そのため、全ての直接尺度との整合性を保ったまま、現象を1つの直線上に並べることは不可能であることが多い。例えば、学力テストの項目1では個体Aは正答し、個体Bは誤答であったが、項目2では個体Aが誤答し、個体Bは正答であった、という場合である。個体Aと個体Bのどちらに高い尺度値を与えるべきであろうか。別の例は、ある個体が、刺激Aよりは刺激Bを好み、刺激Bよりは刺激Cを好むが、刺激Cよりは刺激Aを好む、となった場合である。その個体が好む順に刺激を並べることは難しい。

この問題に対する対処の仕方を、次元の扱いと確率の扱いという2つの観点から整理することによって、次節で述べる具体的な尺度構成法を特徴づけることができる。

第1の観点は、次元の扱いである。その扱いに関して3つの立場がある。

第1の立場は、矛盾があったとしても、全ての直接尺度を基に唯1つの直線上に現象を並べるべきである、というものである。なぜなら、用意した直接尺度は全て、内容的妥当性を高めるために必要不可欠だからである。大学の入学試験として、英語と数学のテストを実施した場合を考えよう。英語のテストの結果だけによって受験者を並べたのでは、高い尺度値を与えられた受験者が数学のテスト項目に「誤答」し、低い尺度値を与えられた受験者が「正答」する、といった矛盾が生じ得る。同様の矛盾は、数学のテスト結果だけによって受験者を並べた場合にも起こり得る。しかし入学選抜を行うためには、矛盾がなるべく少なくな

るよう何とかして受験者を1つの直線上に並べなければならない。この立場から構成された尺度を、本論文では広義の一次元尺度と呼ぶ。広義の一次元尺度では、直接尺度と間接尺度の間の矛盾が無視できないほど大きい場合がある。そのため、測定している概念が明確にならないことがある。構成された間接尺度が、現象のどのような側面・特性に基づいてそれらを並べているのか、ということを探る試みは、尺度の解釈と呼ばれる。尺度の解釈は、現象がどのように並べられたか、ということを基に行われる。直接尺度上での順序と間接尺度上での順序が矛盾する広義の一次元尺度では、解釈が難しいことが多い。しかし、例えば入学後の成績と関連が高くなるように尺度値が与えられること(予測的妥当性が高いと言われる)が重要なとき等には、広義の一次元尺度構成が行われる。

第2の立場は、矛盾の少ない直接尺度だけを選び出して、1つの直線上に現象を並べるべきである、というものである。例えば、直接尺度が間隔尺度の水準にあるときには、直接尺度間の整合性は積率相関係数によって表される。そこで、お互いに相関係数の高い直接尺度だけを選択して間接尺度を構成する。また、順序尺度の水準にある直接尺度間の整合性は、順序の一致の程度で示される。そこで、例えば順序を保ったまま尺度値を変換し、変換された尺度値間の相関係数が高い直接尺度だけを選択する。矛盾を少なくし、直接尺度と間接尺度との整合性を高めるということは、間接尺度上での順序が直接尺度上での順序とほぼ一致するということである。したがって、間接尺度上での現象の並び順の意味を解釈することが容易であり、測定している概念を明確にすることができる。さらに、構成された間接尺度は現象の理解に役立つであろう。入学試験の例では、英語と数学のテストを分け、受験者をテストごとに1つの直線上に並べることになる。「学力」にも、「英語の学力」と「数学の学力」という2つの下位概念があることが明らかになる等、より緻密な知識が得られていく。この立場では、1人の受験者に対して2つの尺度値が与えられる。入学選抜を行うために2つの尺度値をどう扱うか、ということは尺度構成とは別の問題である。この立場から構成された尺度を、本論文では狭義の一次元尺度と呼ぶ。以後、単に一次元尺度と述べた場合には、本論文では狭義の一次元尺度を指す。

第3の立場は、直線という一次元上に並べようとするために矛盾が生じるのであるから、直線の拡張である平面や3次元空間といった多次元上に並べれば矛盾を少なくできる、というものである。先に述べた矛盾した3つの刺激の選好では、例えばFIGURE 1.2に示すように2次元平面上に3つの刺激を配置する。そして、刺激Aと刺激Bの比較、刺激Bと刺激Cの比較では方向1の方向にある刺激を好むが、刺激Aと刺激Cの比較では方向2の方向



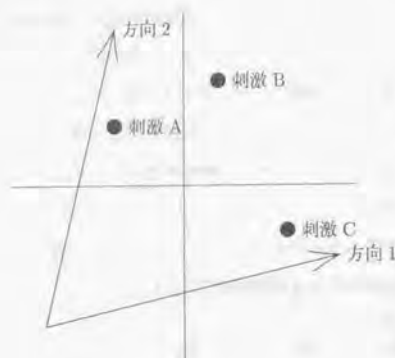


FIGURE 1.2 3つの刺激の2次元配置

にある刺激を好む、といった説明をすることで、その矛盾を解決しようとする<sup>2</sup>。この立場から構成された尺度を、本論文では多次元尺度と呼ぶ。多次元尺度では、現象に対して1つの数値ではなく、複数の数値が与えられる。注意すべきなのは、複数の数値を一つ一つバラして解釈すべきではない、ということである。一次元上に並べることが不可能であったために、多次元上に並べたのであるから、多次元上での位置が重要である。多次元尺度値の解釈の方法は、それぞれの尺度構成法に依存するため、次節で述べることにする。

矛盾に対処する第2の観点は、確率の扱いである。個々の人間にしる人間の集団にしる。その反応は常に一定とは限らず確率的に変動するものであるから、確率分布を想定することによりある程度の矛盾は説明できる、というのが1つの立場である。例えば、矛盾する3つの刺激の選好例では、刺激Cより刺激Aを好むという判断が下されることは確率的に非常に稀なことであり、刺激Aより刺激Cの方が好まれる確率が高い、ということになれば、1つの直線上に、C、B、Aの順に刺激を並べることができる。また矛盾を説明するためだけでなく、得られたデータから母集団の推測を行うために確率分布が導入されることもある。以上の立場に立つ尺度構成法を、本論文では確率的な尺度構成法と呼ぶ。確率的方法では、整合性の高さは尤度の大きさによって評価される。一方、確率分布を導入せず、主として最小二乗により直接尺度と間接尺度との矛盾を小さくしようとする立場を、本論文では記述的な尺度構成法と呼ぶ。記述的な方法では、整合性の高さは残差二乗和の小ささによって表され

<sup>2</sup>wandering ベクトルモデル (De Soete & Carroll, 1983) はその1つの例である。

る。どちらの立場にも一長一短がある。確率的な尺度構成法では、仮定した確率分布が妥当なものならば、尺度値の精度等多くの情報を得ることができる。しかし、分布の仮定が妥当なものであるという確実な保証はなく、計算も複雑になりがちである。記述的な尺度構成法では、分布に対する無理な仮定を置く必要がなく、確率的方法に比べて計算もやや単純である。しかし、母集団の推測を行えないなど、確率的方法に比べ得られる情報が少ない。したがって、どちらの立場が常に優れているといったことは言えない。

## 1.2 尺度構成法の種類

### 1.2.1 尺度構成で扱うデータの分類

具体的な尺度構成法について述べる前に、尺度構成で扱われる主な質的データについて整理しておく。心理学的な尺度構成の基となるデータは、個体に対して何らかの刺激を与え、その結果引き起こされた反応として得られることが多い。データの形式や刺激の種類等によって、尺度構成で扱うデータをいくつかの種類に分類することができる。データの形式は、それを用いる方法と密接に関連している。そのため、なぜそのような形でデータを収集するのか、といった説明なしにデータの分類を述べることは片手落ちではあるが、整理のためにあえて以下にまとめる。

データを分類する1つの観点は、相と元である (アラビ・キャロル・デサルボ, 1990)。相 (mode) とはデータを並べたとき各次元となるものの種類を指す。例えば、個体や刺激あるいは時間や条件といったものである。これに対し、元 (way) とは並べられたデータの次元の数を指す。後に述べる類似性データは、刺激という1つの相が2つの元について得られたデータである。各データは、その相と元の数によって、 $m$  相  $w$  元データと呼ぶことができる。ただし、定義から明らかなように  $m \leq w$  である。

本論文では、第3章・第4章・第6章において、個体 × 刺激という2相2元データを扱う。また第5章では、個体 × SD 項目 × 刺激という3相3元データへの拡張を試みる。

2元データは、Coombs (1964) によれば、個体と刺激との関係により4種類に分類することができる。すなわち、選好データ (preferential choice data)、単刺激データ (single stimulus data)、刺激比較データ (stimulus comparison data)、類似性データ (similarities data) である。これらをまとめたのが、TABLE 1.1 である。

選好データは、2つ以上の刺激を同時に呈示し、各個体が何らかの基準に基づいてそれらと比較したデータである。例えば、2つの車種を比較し、どちらの車種を購入したいか選ばせる場合である。2つの刺激を対にして取り出し、比較させたデータを対比較データ (paired



TABLE 1.1 2元データの分類

・選好データ
一対比較データ
順位データ
pick $k(\text{any})/n$ データ
分類データ
・単刺激データ (反応型データ)
自由反応型データ
アイテムカテゴリ型データ
系列カテゴリデータ
・刺激比較データ (優越データ)
一対比較データ
・類似性データ
一対比較データ

comparison data) と呼ぶ。また、10 の車種を購入したい順に並べさせることもある。全ての刺激を順に並べさせたデータを順位データあるいはランキングデータ (ranking data, rank-order data) と呼ぶ。10 の車種のなかから購入したい3つの車種を選ばせる場合もある。 $n$  個の刺激から  $k$  個あるいは好きなだけ刺激を選ばせたデータは、pick  $k/n$  データあるいは pick any/ $n$  データと呼ばれる。分類データ (sorting data) は、例えば10 の車種を3つのグループに分類するなど、刺激をあらかじめ定められた数のグループに分類させたデータである。等現間隔法 (method of equal-appearing intervals) (Thurstone, 1929; Thurstone & Chave, 1929) は分類データを得るための1つの方法である。ただし、グループには順序があり、評定者はグループ間の心理的な距離が等しくなるよう教示される。

単刺激データは、刺激間の比較を行わず、一度に1つの刺激だけに対して何らかの反応をさせるデータである。そのため、反応型データ (response-pattern data) とも呼ばれる。自由反応型データは、個体が刺激に反応したか否かを調べたデータである。例えば、学力テストにおいて各項目に対する正答を、刺激に対する反応と見なせば自由反応型データが得られる。また、反応の種類をいくつか用意しておき、どれか1つを選ばせたデータを、アイテムカテゴリ型データあるいは多肢選択データ (multiple-choice data) と呼ぶ。例えば、「非常にそう思う」から「全くそう思わない」まで5段階の反応の種類を用意し、各刺激に対する意

見を求める場合である。用意する反応の種類のことをカテゴリ (category) と呼ぶ。本論文では、カテゴリは、刺激ごとに多くとも1つまでしか選ぶことができない、と定義する。特に、カテゴリに順序があり、全ての刺激に対して同じカテゴリを用いるときには、系列カテゴリデータあるいは系列範疇データ (successive categories data) と呼ぶ場合もある。

選好データと単刺激データは、どちらも個体  $\times$  刺激といった形の2相2元データである。これら2種類のデータをあわせて、プロファイルデータ (profile data) と呼ぶことがある。一方、刺激比較データと類似性データは、刺激  $\times$  刺激という形の単相2元データとなる。

刺激比較データは、2つ以上の刺激を呈示し、何らかの基準に基づいて刺激の優劣を比較したデータである。そのため、優越データ (dominance data) とも呼ばれる。例えば、スポーツにおける勝敗の結果等である。また、選好データと同じく一対比較によっても得られる。選好データとの違いは、選好データはどの個体が判断したのかという情報を保持しているのに対し、刺激比較データでは全ての個体の反応がまとめられ、各個体の情報は保持されていない、という点である。

類似性データは、刺激間の類似性あるいは非類似性を判断したデータである。例えば、ある刺激  $a$  に似ているのは、刺激  $b$  であるか、刺激  $c$  であるかを判断させた場合である。類似性を判断する観点は指示しないことが多い。むしろデータに基づいて、どのような観点があるのかを探ることになる。

注意しなければならないのは、先に述べたように、データの形式はそのデータに対する尺度構成法の考え方と密接に関連しているという点である。外見上は同じ形式のデータでも、用いる尺度構成法によって該当する分類は変わってくる。そのため、上記の4分類は厳密なものではない。例えば、pick any/ $n$  データでも  $n$  個の刺激を比較したという手続きを尺度構成を行う際に利用しなければ、 $n$  個の刺激それぞれに対する自由反応型データと見なすことになる。自由反応型データは、反応の有無をそれぞれカテゴリと見なせば、カテゴリ数が2つであるアイテムカテゴリ型データと考えることもできる。

本論文で提案する尺度構成法は、単刺激データをターゲットとする。その理由は、質問紙調査等により単刺激データが得られる場合が非常に多いこと、刺激の数が増えるとデータ収集が困難になる刺激比較データや類似性データに比べ、プロファイルデータでは容易に刺激の数を増やせること、一部の選好データは何らかの変換を施すことで単刺激データと見なすことができること、が挙げられる。一対比較データを単刺激データに変換する1つの例は第3章で示される。なお単刺激データでは、刺激のことを項目と呼ぶことが多いため、本論文でも項目という用語を用いる。

単刺激データは、例えば以下のような質問紙調査やテストによって得られる。

例1 #2.3d あなたは、自分の家庭に満足していますか、それとも不満がありますか？

満足 やや満足 やや不満 不満 その他 D.K.<sup>3</sup>

(統計数理研究所「日本人の国民性」第9次全国調査より)

例2 #1.9 つぎにあげたもののうち、お宅にはどれとどれがありますか、あるものを全部あげてください？

乗用車 冷蔵庫 パソコン 応接セット 宅地 家屋 別荘 コンパクトディスク 電話 ビデオレコーダ その他 D.K.

(統計数理研究所「日本人の国民性」第9次全国調査より)

例3 (2)  $57 \times 19 = 57 \times 20 - 0$

(数検協会 1995年数学能力検定試験 A3 グレードより)

例1はアイテムカテゴリ型データの例であり、「満足」から「D.K.」までがカテゴリとなる。「その他」と「D.K.」をカテゴリから除けば系列カテゴリデータとも考えられ、この項目は順序尺度の水準にある。例2は、pick any/n データとも考えられるし、自由反応型データとも考えられる。個体が「乗用車」や「冷蔵庫」といった刺激間の比較をしたわけではなく、所有しているものを選んだだけである、といった考え方をすれば、自由反応型データであるが、必要性の高いものから順に購入したはずである、といった考え方をすれば、pick any/n データとなる。注意しなければならないのは、「乗用車」や「冷蔵庫」はカテゴリではなく、刺激あるいは項目である、という点である。なぜなら、先に定義したように、1つの項目の中でカテゴリは多くとも1つしか選べないからである。「所有物の多さ」を測ることが目的ならば、「持っている」>「持っていない」という順序を考え、各項目を順序尺度と見なしても構わない。しかし、より豊かな結果を得るためには、順序を考えず各項目を名義尺度として扱うべきであろう。例3では、「正答」を反応と考えれば自由反応型データであり、この項目は順序尺度の水準にある。一方、「正答」「誤答」「無回答」という3つのカテゴリを考えればアイテムカテゴリ型データとなる。「誤答」と「無回答」の間の順序が明確ではないため、順序尺度と考えるよりも、名義尺度として扱う方が無難である。

データは、行を個体、列を項目あるいはカテゴリとした形にまとめられる。TABLE 1.2はその例である。表中の「1」は個体がある項目あるいはカテゴリに反応したことを、「0」は

<sup>3</sup>D.K. は Don't Know の略

TABLE 1.2 データの例

個体	「家庭に満足か」						乗用車	冷蔵庫
	満足	やや満足	やや不満	不満	その他	D.K.		
1	0	1	0	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	1	1
8	0	0	1	0	0	0	0	1
9	0	0	0	1	0	0	0	0
⋮								

反応しなかったことを表す。このようなデータ形式は行列の形で表現することができる。すなわち、

$N$  : 個体数 ( $n = 1, \dots, N$ )

$I$  : 項目数 ( $i = 1, \dots, I$ )

$C_i$  : 項目  $i$  のカテゴリ数 ( $c_i = 1, \dots, C_i$ )

とすれば、項目  $i$  に対するデータ行列  $X_i (N \times C_i)$  は例えば、

$$X_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

といった形になる。1行目の (0 1 0 0 0 0) は、個体1が項目  $i$  のカテゴリ2を選択したとすることを表す。1と0を要素とするこのような行列をダミー変数行列と呼ぶ。自由反応型データでは、 $C_i = 1$  とすればよい。全ての要素が1であるベクトルを  $\mathbf{1}$  とすれば、 $C_i \times 1$  ベクトル  $X_i' \mathbf{1}_N$  は、各カテゴリあるいは項目に反応した個体数を並べたものとなる。またアイテムカテゴリ型データでは、

$$X_i \mathbf{1}_{C_i} = \mathbf{1}_N$$

が成り立つ。



なお、個体がカテゴリに反応する「程度」を考慮して、データ行列をコード化しようとする考えもある。例えば、例1の項目において「やや満足」というカテゴリに対する反応でも、「満足」と言ってもよい程度の「やや満足」と、「不満」とも「満足」とも言えない「やや満足」とでは、反応の程度が異なる。そこで、(0 1 0 0 0 0)というコード化の代わりに、例えば「満足」に近い「やや満足」ならば(0.4 0.6 0 0 0 0)とし、「やや不満」とも言える「やや満足」ならば(0 0.5 0.5 0 0 0)とするのである。1と0から成るコード化は、crisp (カチカチとした)コード化と呼ばれるのに対し、程度を考慮したコード化は、fuzzy (あいまいな)コード化あるいは probability コード化と呼ばれる (van Rijckevorsel, 1988; Martin, 1988)。和多田・田中・浅居 (1982; 1983) や van Rijckevorsel (1988) は、fuzzy コード化を用いて、後の節で述べる数量化Ⅰ類、数量化Ⅱ類、数量化Ⅲ類といった方法を行うことを提案している。fuzzy コード化は興味深い方法であるが、一般には crisp コード化されたデータを得ることが多いと思われるため、本論文では fuzzy コード化については考慮しない。なお、第2章で提案する手法は、fuzzy コード化されたデータに対しても拡張が容易であると思われる。

$C_i \times C_j$  行列  $X_i'X_j$  ( $i \neq j$ ) は、項目  $i$  と項目  $j$  のクロス表 (cross-classified table) あるいは分割表 (contingency table) と呼ばれる。TABLE 1.3 はその例である。分割表の  $(c_i, c_j)$

TABLE 1.3 分割表の例

		家庭に満足か					
		満足	やや満足	やや不満	不満	その他	D.K.
社会に満足か	満足	68	8	2	0	0	1
	やや満足	340	227	24	2	1	0
	やや不満	221	247	59	4	0	2
	不満	59	51	17	2	5	0
	その他	0	2	1	0	18	1
	D.K.	1	0	3	0	1	22

要素は、項目  $i$  のカテゴリ  $c_i$  と項目  $j$  のカテゴリ  $c_j$  を同時に選んだ個体の数となる。したがって、全ての要素の値の和は  $N$  となる。

$N \times \sum_{i=1}^I C_i$  行列  $D = (X_1 \cdots X_I)$  を、各項目のダミー変数行列を横に並べた行列とす

る。このとき、

$$D'D = \begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & \cdots & X_1'X_I \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & \cdots & X_2'X_I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_I'X_1 & X_I'X_2 & \cdots & X_I'X_I \end{pmatrix}$$

はクロス表を並べた行列となる。 $D'D$  はバート表 (Burt's table) と呼ばれることがある。

### 1.2.2 尺度構成法の分類

1.1.3 節で述べた尺度構成法の要件と、1.2.1 節で述べたデータの種類のによって、尺度構成法を分類することができる。分類のための第1の観点は、何に対して尺度値を与えるか、という点である (Torgerson, 1958)。個体に尺度値を与える方法 (Subject-centered approach)、刺激に尺度値を与える方法 (Stimulus-centered approach)、個体と刺激に尺度値を与える方法 (response approach)、という3つに分類される。第2の観点は、確率を扱うか、という点である。記述的な方法、確率的な方法、という2つに分類される。以上をまとめたのが、TABLE 1.4 である。

TABLE 1.4 尺度構成法の分類 I

	記述的	確率的
個体に 尺度値	Likert 尺度 因子分析	
刺激に 尺度値	MDS	比較判断の法則 BTL モデル 確率的 MDS
個体と刺激に 尺度値	尺度解析法 展開法	潜在構造分析 項目反応理論

記述的な方法と確率的な方法との違いについては、1.1.3 節で述べたとおりである。

個体に尺度値を与える方法では、個体の位置だけが定められる。刺激の位置はあらかじめ分かっているものと見なされる。当然ながら、この方法はプロファイルデータだけに適用でき、刺激比較データや類似性データには適用できない。刺激に尺度値を与える方法では、逆に、刺激の位置だけが定められる。刺激比較データや類似性データに対して適用されることが多い。プロファイルデータに対して適用する場合には、個体は単なる繰り返しと見なされる。個体と刺激に尺度値を与える方法では、個体と刺激の両方の位置が定められる。この方

法は、プロファイルデータに対して適用される。

TABLE 1.4 では、以上の2つの観点に基づいて、いくつかの具体的な尺度構成法を分類した。個々の尺度構成法については次節以降で簡単に述べる。

尺度構成法を分類する第3の観点は、次元の扱いである。広義・狭義を含めた一次元尺度、多次元尺度、という2つに分類される。第4の観点は、尺度値の組をいくつ与えるか、という点である。単数、複数、という2つに分類される。以上をまとめたのが、TABLE 1.5 である。

TABLE 1.5 尺度構成法の分類2

	単数	複数
一次元	狭義の一次元尺度 広義の一次元尺度	複数の一次元尺度
多次元	単数の多次元尺度	複数の多次元尺度

単数の一次元尺度では個体あるいは刺激に対して、 $x$  という1つの数値が与えられる。また、単数の多次元尺度では、 $(x_1, x_2, \dots)$  という数値の組が1つだけ与えられる。一方複数の一次元尺度では、個体あるいは刺激に対して、 $x, y, z, \dots$  という複数の数値が与えられる。そして複数の多次元尺度では、 $(x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots), (z_1, z_2, \dots)$  という数値の組が複数個与えられる。

単数の多次元尺度と複数の一次元尺度との違いは、以下のとおりである。1.1.3 節で述べたように、多次元尺度は、一次元直線上に個体あるいは刺激を矛盾することなく並べることが不可能な場合に、多次元空間上にそれらを配置しようとするものである。すなわち、多次元空間上での位置  $(x_1, x_2, \dots)$  が重要となる。解釈を行う際には、 $x_1$  や  $x_2$  といったそれぞれの座標値に分解するのではなく、 $(x_1, x_2, \dots)$  という組み合わせのまま解釈を行うことが基本である。仮に  $x_1$  という座標値だけを取り出して解釈を行えたとしても、それはたまたまであり、各座標値の解釈ができるよう意図的に尺度値が与えられたわけではない。一方、複数の一次元尺度では、一次元直線上に個体あるいは刺激が並べられる。しかしその直線は1つではないということである。それぞれの一次元直線上での位置  $x$  や  $y$  が与えられるが、それらは組として解釈する必要はなく、個々に解釈することができる。

単数の多次元尺度と複数の一次元尺度との違いは、本論文の根幹を成し、第2章以降で

非常に重要となる。そのため、具体例によってこの違いをさらに説明しておく。色を定量的に表現するための代表的な方法として、CMY 表色系<sup>4</sup>とマンセル表色系がある(高木・下田, 1991)。CMY 表色系は複数の一次元尺度の例、マンセル表色系は単数の多次元尺度の例と見なせる。FIGURE 1.3 はそれぞれ、ある1つの色刺激  $K$  を各表色系により表したものである。

CMY 表色系では、C(cyan)とM(magenta)とY(yellow)という3原色を用いて色を表す。すなわち、ある色刺激  $K$  は  $K = cC + mM + yY$  によって表される。 $c, m, y$  は3刺激値と呼ばれ、これらの値が変化することによって色刺激  $K$  が変化する。例えば、 $y$  の値を大きくし、 $c, m$  の値を0とすれば、 $K$  は黄になる。 $y$  の値は、 $c, m$  の値にかかわらず、色刺激  $K$  に含まれる黄の割合である、と解釈することができる。FIGURE 1.3 ではある色刺激  $K$  に含まれる C, M, Y の割合  $c, m, y$  を○によって示してある。このように、CMY 表色系は3つの独立した一次元尺度値により色を表すものと言える。

一方、マンセル表色系では、色相(色の違い)、彩度(あざやかさ)、明度(色の明るさ)によって色を表現する。まず、R(赤)、Y(黄)、G(緑)、B(青)、P(紫)の5つを基本色相とし、2次元平面上に円を5等分するように配置する。さらに隣あった色相の間に、YR, GY, BG, PB, RP という中間色相を設ける。これら10の色相は、FIGURE 1.3(b)において、頭に5のついた5Rや5YRとして表されている。さらに隣り合った色相の間を10等分し、全部で100の色相に分解する。次に、円の中心からの距離によって彩度を表現する。円の中心から離れるほど彩度は高くなる。このような色相環は、各明度ごとに作成できるため、それらを明度の低いものから順に積み重ねることによって色立体が構成される。色刺激  $C$  はこの色立体の中の点  $(x_1, x_2, v)$  として表現される。明度を固定したとき、色は色相環の上で2次元平面上の点  $(x_1, x_2)$  として表される。例えば、FIGURE 1.3(h)の横軸と縦軸の座標を用いて、色刺激○の位置を指定することができる。しかし、 $x_1$  や  $x_2$  といった座標値を個々に取り出して解釈することはできない。重要なのは、円周上のどの位置にあるかということと、原点からどの程度離れているかということだからである。 $(x_1, x_2)$  という組み合わせが意味を持ち、 $x_2$  を考慮せずに  $x_1$  を解釈することは無意味である。もちろん、明度  $v$  は  $(x_1, x_2)$  の値にかかわらず、色の明るさの割合を表すものである、と解釈できる。したがって正確には、マンセル表色系は1つの2次元尺度と1つの一次元尺度の例である、と言うべきであろう。

なお、マンセル表色系上の色を表現するのに直交座標ではなく、極座標  $(h, c, v)$  を用いることもできる。ただし、 $h$  は横軸との角度、 $c$  は原点からの距離である。 $h, c, v$  は他の座標値

<sup>4</sup>RGB 表色系も代表的であるが、CMY は RGB の補色であり、減法混色を用いる印刷ではこちらの方が一般的であるため CMY 表色系を用いた。



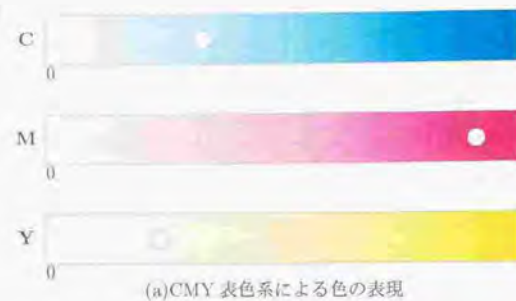


FIGURE 1.3 2つの表色系による色の表現

## 1.3. 刺激に尺度値を与える方法

の値にかかわらず、それぞれ色相、彩度、明度を表す。したがって、極座標を用いれば3つの一次元尺度と言える。注意すべきなのは、1つの $r$ 次元尺度を常に $r$ 個の一次元尺度に変換できるわけではない、という点である。マンセル表色系ではたまたまそれが可能であった、ということである。

何度も述べるように、多次元尺度は、全ての直接尺度と矛盾なく、1つの直線上に個体や刺激を並べることが不可能な場合に導入されたものである。したがって、広義の一次元尺度を拡張したものと言える。広義の一次元尺度は、全ての直接尺度との矛盾がなるべく少なくなるよう、1つの直線上に並べようとするものだからである。一方、複数の一次元尺度では、各一次元尺度がいくつかの直接尺度と矛盾しても構わない。そのような一次元尺度を複数用意することで、どの直接尺度もどれか1つの一次元尺度と矛盾しなければよいからである。したがって、複数の一次元尺度とは狭義の一次元尺度を拡張したものと言える。

TABLE 1.4 に挙げた尺度構成法は、そのほとんどが広義の一次元尺度構成法あるいは多次元尺度構成法と考えられる。狭義の一次元尺度や複数の一次元尺度を構成する試みはいくつかあるが、問題点がないわけではない。本論文の主要な貢献は、TABLE 1.5 に示す全ての尺度に対応した新たな方法を提案することである。しかし、その前に TABLE 1.4 に挙げた従来の尺度構成法について簡単に述べ、それらの多くが広義の一次元尺度や多次元尺度の構成法であることを説明しておく。また、本論文で提案する手法の基礎となる尺度解析法については、さらに詳しく説明を加える。なお尺度構成法の文献のいくつかは、西里 (1977; 1978) にまとめられている。

## 1.3 刺激に尺度値を与える方法

## 1.3.1 比較判断の法則

1.1.1 節で、物理学の対象の重さを測るためには、「はかり」という尺度を用いればよいと述べた。仮に「はかり」が手に入らないとしたら、どのようにして物理学の対象に順序をつけられようか。まず、対象1と対象2を取り上げ、どちらが重いかを比較する。次に対象2と対象3を取り上げ、やはりどちらが重いかを比較する。このようにして全ての対象の組を取り上げ、どちらが重いかを比較すれば、対象を重い順に並べることができる。

同様にして、心理学の対象あるいは刺激を1つの直線上に並べるためには、2つの刺激を順に取り上げる。そして、どちらが目的の属性をより多く持っているか、を判断すればよい。Thurstone (1927a) は、個体が刺激 ( $S$ ) を呈示されると、ある連続体上でそれに対する

反応 ( $R$ ) が生じる、と考えた、 $S \rightarrow R$  のことを弁別過程 (discriminal process) と呼び、反応が生じる連続体のことを心理学的連続体 (psychological continuum) と呼ぶ。ただし、その時々状況や個体の状態等によって、常に同じ弁別過程が起きるわけではなく、連続体上でバラツキが生じる。このバラツキを弁別のちらばり (discriminal dispersion) と呼び、最も頻繁に生じる弁別過程を最頻弁別過程 (modal discriminational process) と呼ぶ。刺激  $S_1$  と刺激  $S_2$  を比較する、ということは、それぞれの刺激に対して弁別過程が生じ、その差を判断する、ということになる。刺激  $i$  に対する弁別過程が心理学的連続体上で平均  $\mu_i$ 、分散  $\sigma_i^2$  の正規分布に従うと仮定すれば、刺激  $i$  と刺激  $j$  の弁別過程の差  $d_{ij}$  は、平均  $\mu_i - \mu_j$ 、分散  $\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2r_{ij}\sigma_i\sigma_j$  の正規分布に従う。 $r_{ij}$  は2つの弁別過程間の相関である。 $d_{ij} > 0$  ならば刺激  $i$  の方が目的の属性をより多く持つという判断が生じ、 $d_{ij} < 0$  ならばその逆の判断が生じる。以上が比較判断の法則と呼ばれるものである (Thurstone, 1927b)。Thurstone はさらに、 $\sigma_i$  や  $r_{ij}$  におく制約の種類によって、case I から case V まで5つの場合を考えている。

実際に比較判断の法則により  $\mu_i$  を求める手続きは以下のとおりである。簡単のため、 $r_{ij} = 0$ 、 $\sigma_i = \sigma_j$  とする case V を考える。まず刺激比較データを基に、刺激  $i$  が刺激  $j$  に優越した割合  $p_{ij}$  を求める。 $\Phi(z)$  を正規累積分布関数として、 $p_{ij} = \Phi(z_{ij})$  となる  $z_{ij}$  を求める。 $z_{ij}$  は  $\mu_i$  と  $\mu_j$  の間の距離であり、全ての  $z_{ij}$  との矛盾が最も少なくなるよう、 $\mu_i (i = 1, \dots, I)$  を求めることになる。1つの方法は、 $\mu_i = \sum_j z_{ij} / I$  とすることである。Mosteller (1951) は、この解が、 $z_{ij}$  と  $\mu_i - \mu_j$  との差の最小二乗解に一致することを示している。

比較判断の法則を用いるためには、 $I(I-1)/2$  組の刺激対について判断を下さなければならず、評定者への負担が大きい。そこで、系列カテゴリ法 (method of successive categories/intervals) (Edwards & Thurstone, 1952) や後で述べる等現間隔法といった、1つの刺激に対して1回だけ判断を下せばよい方法が考えられた。系列カテゴリ法の基礎となるカテゴリ判断の法則は、以下のとおりである。まず心理学的連続体がいくつかの排反カテゴリに分かれていると仮定する。また、弁別過程はこの連続体上で正規分布をなす。刺激が呈示されれば、弁別過程が生じ、その結果あるカテゴリ内の値をとれば、そのカテゴリに応じた反応が生じるというものである。系列カテゴリデータを基に、カテゴリの境界値と各刺激の弁別過程の平均  $\mu_i$ 、分散  $\sigma_i^2$  を求めることが目的となる。その後、多次元の連続体を考える方法 (Messick, 1956) や比較判断の法則と組み合わせた方法 (Sjöberg, 1967) 等が提案されている。

比較判断の法則やカテゴリ判断の法則では、個体差は弁別のちらばりととらえられ、刺激に対してのみ尺度値  $\mu_i$  を与える方法である。また弁別過程は確率的に変動するために、

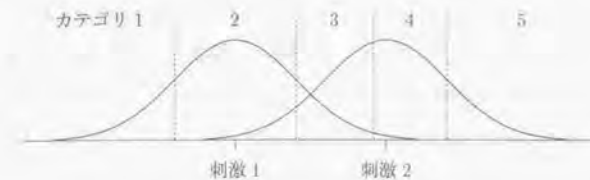


FIGURE 1.4 カテゴリ判断の法則

$S_1 > S_2$  という判断と  $S_2 < S_1$  という判断の両方が生じると仮定している。したがって確率的方法と言える。さらに、 $z_{ij}$  と  $\mu_i - \mu_j$  との間の矛盾がなるべく小さくなるよう、全ての刺激が1つの心理学的連続体上に配置されるため、広義の一次元尺度構成法と見なせる。距離を基にしているため、構成された間接尺度は間隔尺度の水準にある。

比較判断の法則やカテゴリ判断の法則をそのまま用いた尺度構成は、現在ではほとんど使われることはないが、それらの考え方は他の多くの尺度構成法に大きな影響を与えている。

### 1.3.2 BTL モデル

刺激比較データを基に、刺激に尺度値を与える別の方法は、BTL (Bradley-Terry-Luce) モデルである (Bradley & Terry, 1952; Luce, 1961)。BTL モデルでは、刺激の持つ属性の大きさや強さによって、各刺激を1つの連続体上に位置づける。この位置を  $\pi_i (\geq 0)$  とする。刺激  $i$  の方が、刺激  $j$  に比べて、目的とする属性を多く持つ、という判断がなされる確率は、次式で与えられると考える。

$$p_{ij} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j}$$

刺激  $i$  と刺激  $j$  との比較を  $N$  回繰り返したとき、刺激  $i$  が選ばれた回数  $B_{ij}$  は二項分布に従う。

$$\text{Prob}(B_{ij} = b_{ij}) = \binom{N}{b_{ij}} \left( \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} \right)^{b_{ij}} \left( \frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j} \right)^{N-b_{ij}}$$

そこで、最尤推定等により各  $\pi_i$  を求めればよい。BTL モデルの特徴は、尤度が簡単に求まるため、 $\pi_i = \pi_j$  であるか、 $\pi_i > \pi_j > \pi_k$  であるか、といった仮説の検証が行えることである (竹内, 1980)。また適用できるデータは、どちらかの刺激を選ぶ、という型の反応だけに限らない。Rao & Kupper (1967) は判断にタイがある場合のモデルについて論じている。Tutz (1986) は、刺激の比較判断の際に順序カテゴリへの反応を求める方法を提案している。



BTLモデルにおいても、各個体の判断は繰り返しの1回と見なされ、刺激のみに尺度値  $\pi_i$  が与えられる。また、 $N$  回の繰り返しの中での判断のパラッキを確率的な変動ととらえる確率的方法である。さらに、全てのデータを基に、刺激を1つの連続体上に位置づけようとする広義の一次元尺度の構成法である。

### 1.3.3 MDS

類似性データに基づく手法は、MDS (MultiDimensional Scaling) である (Torgerson, 1958; Kruskal & Wish, 1978; 高根, 1980; 齋藤, 1980; Cox & Cox, 1994)。しばしば多次元尺度 (構成) 法と訳されるが、本論文では、より広い別の意味で多次元尺度という語を用いている。混乱を避けるために、この節で述べる手法は MDS と呼ぶこととする。

MDS は、刺激  $i$  と刺激  $j$  の間の非類似性を、2つの刺激間の距離と見なすことで、各刺激を位置づけようとする方法である。類似性の高い刺激どうしは近く、類似性の低い刺激どうしは遠くに配置することで、刺激を順に並べることができよう。比較判断の法則においても、 $\mu_i$  と  $\mu_j$  の間の距離をまず求め、そこから各  $\mu_i$  を定めた。しかし多くの場合、刺激間の非類似性全てと整合性を保つよう、刺激を1つの直線上に並べことは不可能である。そこで  $R$  次元空間を考え、非類似性と  $R$  次元空間上での距離とが一致するよう、各刺激を配置する。したがって、MDS は明らかに多次元尺度法であり、刺激のみに尺度値を与える方法である。非類似性データが量的データである場合の方法は計量的 MDS、質的データである場合の方法は非計量的 MDS と呼ばれる。また現実のデータでは、多次元空間を考えたとしても、全ての非類似性 (距離) データと完全に整合性を保つような配置は得られない。そこで、 $R$  次元空間上での刺激の位置あるいは刺激間の距離が確率的に変動する、と考え矛盾を説明しようとする方法もある。これは確率的 MDS と呼ばれる。以下では、これらを順に説明する。

#### 計量的 MDS

よく知られているように、計量的 MDS は Young & Householder (1938) の定理に基礎を置く。これは刺激間の距離と刺激の配置との関係を表現したものである。 $R$  次元空間上における  $I$  個の刺激の位置を表す  $I \times R$  行列を  $X = (x_1 \cdots x_I)'$  とする。刺激  $i$  と刺激  $j$  の間の距離の二乗は、 $d_{ij} = \|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2x_i'x_j$  となる。そこで、この  $d_{ij}$  を要素とする  $I \times I$  行列  $D$  は、

$$D = \text{diag}(XX')11' + 11'\text{diag}(XX') - 2XX'$$

### 1.3. 刺激に尺度値を与える方法

と表せる。そこで、逆に  $D$  が与えられたとき、 $Q = I - 1(1'1)^{-1}1'$  とし、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}QDQ &= -\frac{1}{2}Q\text{diag}(XX')11'Q - \frac{1}{2}Q11'\text{diag}(XX')Q + QXX'Q \\ &= QXX'Q \end{aligned} \quad (1.1)$$

という変換を行えば、原点に対する不定性はあるとしても、刺激の位置の積の形が得られる。

現実のデータでは、(1.1) 式の関係が完全に成り立つことはまずない。そこで Torgerson (1952) では、データに対して Young & Householder 変換を施したものと、刺激の配置  $X$  から求められる  $XX'$  との差を最小にするよう、 $X$  を求めることを提案した。

$$S(X) = \left\| -\frac{1}{2}QDQ - XX' \right\|^2 \quad (1.2)$$

これは、直接尺度値 (あるいはそれを  $Q$  によって変換したもの) と間接尺度値 (あるいはその積) との矛盾が最も小さくなるよう、間接尺度値を定める基準と解釈できる。Gower (1966) は、(1.2) 式の解として、 $-1/2QDQ$  の固有ベクトルに固有値の平方根を乗じたものを用いる方法を主座標分析 (principal coordinate analysis) と呼んでいる。

以上の方法は、単相2元の類似性データを基にした方法である。 $N$  人の個体ごとに類似性データが得られた場合でも、それらを統合し、個人間の差は考慮されない。一方、観点 (points of view) モデル (Tucker & Messick, 1963; Cliff, 1968; Meulman & Verboon, 1993) は、類似性判断が似た個体をグルーピングし、各グループごとに刺激の配置を求める方法である。また、Horan (1969) は、個人間の差を、共通刺激空間が歪められるために生じたと考える方法を提案した。すなわち、刺激  $i$  と刺激  $j$  の間の距離  $d_{ijn}$  を、個体ごとに異なる  $R \times R$  対角行列  $W_n$  を用いて、 $d_{ijn} = \|W_n^{1/2}(x_i - x_j)\|^2$  とした。これは、 $d_{ijn}$  を  $i, j$  要素とする行列  $D_n$  に対して Young & Householder 変換を施した行列の要素を  $d_{ijn}^*$  とすれば、 $d_{ijn}^* = \sum_r w_{nr} x_{ir} x_{jr}$  と表されることを意味する。Horan モデルが成り立つ必要十分条件は、Schönmeyer (1972) によって与えられている。計量的な Horan モデルの解法あるいはプログラムは、Carroll & Chang (1970) によって開発され、INDSCAL と呼ばれる。INDSCAL は正準分解という方法によって  $W_n$  と  $X$  を求めるため、CANDECOMP (CANonical DECOMPosition) モデルとも呼ばれる。Horan モデルでは、刺激の位置を表す  $X$  の他に、個体ごとに  $W_n$  が得られる。しかし、 $W_n$  は  $R$  次元空間上での個体の位置を表す尺度値ではなく、 $X$  を歪めるための係数である。すなわち Horan モデルは、各刺激に対して個体ごとに異なる尺度値を与える方法と言える。また Horan モデルの特徴として、 $W_n$  を対角行列とすることで、 $R$  次元空間の基底が一意に定まることが挙げられる。この軸の意味はしばしば解釈することができ



る (キャロル, 1976). その理由の1つは, 1つの直線上に刺激を並べることができ, かつその並び順が同じである個体を  $W_{ij}$  という係数によって選び出しているためであると考えられる. 選び出された個体のデータだけに基けば, 刺激間の距離と矛盾することなく, 全ての刺激を1つの軸上に並べられるために, 解釈が行えると考えられるのである. したがって, Horan モデルは積極的に複数の一次元尺度を構成するわけではないが, そのような機能も合わせ持った多次元尺度構成法と位置づけられる.

刺激の位置に制約を課した方法として, ADCLUS (Additive CLUStering) (Shepard & Arabie, 1979) や MAPCLUS (MAThematical Programming CLUStering) (Arabie & Carroll, 1980) は, 類似性データを  $d_{ij} = \sum_r w_{ir} x_{ir} x_{jr}$  と分解する. ただし,  $x_{ir}$  は1または0という値だけをとる. さらに, INDCLUS (Individual Differences CLUStering) (Carroll & Arabie, 1983) は Horan モデルの考え方を用いて,  $d_{ijn} = \sum_r w_{nr} x_{ir} x_{jr}$  と分解する. 類似性データが非対称な場合についても, いくつか研究がなされている. DEDICOM (DEcomposition into DIrectional COMPONENTs) (Harshman, Green, Wind & Lundy, 1982; Kiers & Takane, 1993) は, 類似性行列の要素  $d_{ij}$  を  $d_{ij} \approx \sum_k \sum_l a_{ik} T_{kl} a_{jl}$  と分解しようとする方法である. また, GIPSCAL (Generalized Inner Product multidimensional SCALing) (Chino, 1978; 1990) は, 歪称行列  $A$  を用いて,  $d_{ij} \approx x_i' A x_j + x_j' A x_i$  と表現する方法である. Chino & Shiraiwa (1993) は, この他の手法を含め, 非対称類似性データの MDS を統一的に説明している.

### 非計量的 MDS

非計量的 MDS は, 刺激間の類似性が順序尺度の水準で得られている場合の方法である. その試みは, Shepard (1962) に始まり, Kruskal (1964a, 1964b) が単調回帰という方法を導入することで, 現実に適用可能となった. Kruskal の方法によるプログラムは, MDSCAL と呼ばれる. さらに, ALSCAL (Alternating Least-squares SCALing) (Takane, Young, de Leeuw, 1977) では, データの尺度水準を問わなくなり, Horan モデルへの適用も可能となった. Torgerson の方法では, データ (直接尺度値) と布置から求められた距離 (間接尺度値) との差 (矛盾) を最小化するように, 布置が求められた. データが順序尺度の水準で得られていても, その考え方は変わらない. ただし, 順序尺度では順序さえ保たれていれば, 数値をどのように変換しても構わない. 布置から求められる距離との差を考えるときに, 順序を保つ範囲内で非類似性を変換して良いということである. すなわち, 刺激  $i$  と刺激  $j$  間の非類似性データ  $s_{ij}$  を, その尺度の水準が許す範囲内で変換したもの (の二乗) を  $\delta(s_{ij})$ , 刺激の布

置  $X$  から求められた距離 (の二乗) を  $d_{ij}$  とすれば,

$$SS(\delta, X) = \sum_{i \neq j} (\delta(s_{ij}) - d_{ij})^2 \quad (1.3)$$

を最小とするよう, データの変換  $\delta$  および刺激の布置  $X$  を求めればよい. ただし, (1.3) 式では  $d_{ij}$  の大きさが不定なので,  $\sum_i d_{ij}$  等によって (1.3) 式を基準化したストレス (stress) と呼ばれる量を最小化する. 具体的な手続きとしては, まず  $\delta(s_{ij})$  を固定してストレスを最小化する  $X$  あるいは  $d_{ij}$  を求める. これには, SMACOF (Scaling by MAjorizing a COmplicated Function) (de Leeuw, 1977; de Leeuw & Heiser, 1980; Heiser, 1991) といった方法が用いられる. 次に  $d_{ij}$  を固定して,  $s_{ij}$  と  $\delta(s_{ij})$  が単調な関係にあり, かつストレスを最小化する  $\delta(s_{ij})$  を, 単調回帰 (monotone regression) によりを求める. このような繰り返し計算により最小二乗基準を最小化する方法は, 交互最小二乗法 (alternating least-squares method) と呼ばれる.

Guttman (1968) の SSA (Smallest Space Analysis) も, MDSCAL と基本的に同じ考え方に基づくが,  $\delta(s_{ij})$  を求める際に単調回帰ではなく順位写像 (rank image) を用いている点異なる. 順位写像とは, 全ての  $s_{ij}$  の中で例えば  $s_{12}$  が最も小さいとき,  $d_{ij}$  の中で最も小さい値を  $\delta(s_{12})$  とする方法である. 順位写像を用いると,  $SS$  を単調に最小化しない, という問題点が指摘されており (高根, 1980), これを改良した多くのプログラムが開発されている (リンゴー, 1976; Borg & Lingoes, 1987). SSA の1つの特徴は, その結果を解釈するためにしばしばファセット理論 (facet theory) が導入される点である (Borg, 1981; Borg & Lingoes, 1987). ファセットとは, 項目を構成する要因あるいは因子のことである. 例えば, TABLE 1.3 の2つの質問項目は,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Facet A} \\ a_1 = \text{家庭} \\ a_2 = \text{社会} \end{array} \right\} \text{に満足か} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Facet R} \\ r_1 = \text{満足} \\ r_2 = \text{やや満足} \\ r_3 = \text{やや不満} \\ r_4 = \text{不満} \\ r_5 = \text{その他} \\ r_6 = \text{D.K.} \end{array} \right\}$$

となる. 質問項目を構成するファセットは1つとは限らない. ファセットの要素の組み合わせ (structuple と呼ばれる) により質問項目が構成される. SSA は, 項目への反応パタンの類似性行列に対して適用される. その結果得られた項目の布置を解釈するために, 再びファセットが利用されるのである. 例えば, 共通のファセット要素  $a_r$  を持つ項目が占める領域



の境界が、同心円状に配置されているならば、原点からの距離という構造が解釈を行う上で重要となる。この構造は simplex (circular order of complexity) と呼ばれる。また、それらが放射状に配置されている構造は, circumplex (circular order of complexity) と呼ばれる。simplex と circumplex をあわせて radex (radial expansion of complexity) と呼ぶ。マンセル表色系の一部を示した FIGURE 1.3(b) は, radex の例である。さらに3次元以上の空間における radex は spherex と呼ばれる。領域の境界が、項目を配置した空間の直交基底と直交している場合は, multiplex と呼ばれ、特に2次元空間では duplex と呼ばれる。multiplex では各座標値の解釈が可能となる。spherex と1次元の multiplex をあわせて cylindrex と呼ぶ。CMY 表色系は multiplex の例であり、マンセル表色系は cylindrex の例である。radex

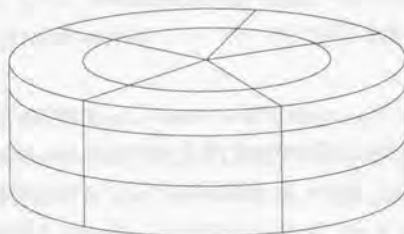


FIGURE 1.5 cylindrex の例

論は元来、後で述べる Thurstone の因子分析法に対する別の考え方として提案されたものである (Guttman, 1954; Guttman, 1955; デガマン, 1976)。radex 論を用いることで、因子分析よりも少ない次元でデータを表現することが可能であると Guttman (1978) は主張している。座標値ではなく領域の形に重点を置く考え方は、多次元尺度においては、多次元空間上での位置が重要である、という本論文の考え方をさらに推し進めたものと言える。

最小次元解析 (Minimum Dimension Analysis, MDA) (Hayashi, 1974) は、刺激間の類似性が順序のあるグループで得られている場合の方法である。刺激の数が多いときには、刺激間の類似性に対して順序をつけることは困難であるため、5段階評定等を用いる方が現実的であろう。MDA では、同じ評定値を付された刺激対を1つのグループと見なし、グループ間の順序が保たれるよう刺激の布置を求める。MDA の特徴は、刺激を布置する次元数をあらかじめ設定せず、まず次元数を1として刺激の布置を求め、残差が大きい場合には残差を基に次元2を求める、という手続きを繰り返す点である。したがって、低次元解と高次元解

との比較が容易となる。

数量化Ⅳ類 (Hayashi, 1952) も、類似性の高い刺激どうしを近くに配置しようとする方法である。刺激  $i$  と刺激  $j$  の類似性を  $c_{ij}$  とすると、 $c_{ij}$  が大きい場合には、刺激  $i$  の位置  $x_i$  と刺激  $j$  の位置  $x_j$  を近づけなければならない。そこで、

$$Q(X) = \sum_{i \neq j} c_{ij} (x_i - x_j)^2$$

を最小化すればよい。数量化Ⅳ類の考え方は、3つの刺激間の類似性が与えられた場合 ( $c_{ijk}$  型数量化) に拡張されている (Hayashi, 1972)。

### 確率的 MDS

確率的 MDS では、刺激の位置  $x_i$  あるいは刺激間の距離  $d_{ij}$  に対して確率分布を仮定する。

Zinnes & MacKay (1983) と MacKay & Zinnes (1986) の PROSCAL では、刺激の位置  $x_i$  に対して、平均  $\mu_i$ 、分散  $\sigma_i^2 I$  の  $R$  変量正規分布を仮定する。これは、比較判断の法則の考え方の  $R$  次元への拡張と言える。刺激  $i$  と刺激  $j$  間の距離の二乗は、自由度  $R$ 、非心度  $\|\mu_i - \mu_j\|^2 / (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)$  の非心  $\chi^2$  分布に従う。これを利用して、 $\mu_i$  と  $\sigma_i^2$  の最尤推定を行う。ただし、非心  $\chi^2$  分布の密度関数は非常に複雑なので、近似を利用している。PROSCAL は、分散共分散行列を  $\sigma_i^2 I$  としているため、 $R$  次元空間の基底が一意に定まらない。そこで土屋 (1994b) や Tsuchiya (1996b) では、分散共分散行列を  $\text{Diag}(\sigma_{i1}^2, \dots, \sigma_{iR}^2)$  とすることで基底を一意に定める方法を提案している。また、極座標変換と EM アルゴリズム (Dempster, Laird & Rubin, 1977) を利用することで、非心  $\chi^2$  分布の密度計算を回避している。

一方、Ramsay (1977, 1978, 1980, 1982) の MULTISCALE では、距離に対して対数正規分布を仮定する。対数正規分布の密度関数は、計算が容易であるため、最尤法によって刺激の位置を決めることができる。さらに、DeSarbo, Howard & Jedidi (1991) は、個体  $i$  のデータが混合多変量正規分布に従うと仮定して、個体の分類と MDS を行う方法 (MULTICLUS) を提案している。

以上の方法は、計量的 MDS への確率的な考え方の導入と言える。これに対し、Takane (1978a; 1978b) の方法は、確率的な非計量的 MDS と言える。この方法は、(非)類似性データが一対比較あるいは順序カテゴリによって得られている場合に、先に述べた比較判断の法則やカテゴリ判断の法則を利用するものである。例えば、 $C$  個のカテゴリの境界値を  $-\infty = b_{ij0} \leq b_{ij1} \leq \dots \leq b_{ijC} = \infty$  とする。また、刺激の弁別過程の代わりに、刺激  $i$  と刺



刺激  $j$  との距離  $d_{ij}$  が正規分布あるいは対数正規分布に従うと仮定する。このとき、刺激  $i$  と刺激  $j$  の非類似性がカテゴリ  $c$  である確率は、 $\Phi(z)$  を正規累積分布関数として、

$$\text{Prob}(s_{ij} = c) = \Phi(b_{ijc}) - \Phi(b_{ij(c-1)})$$

によって与えられる。このことを利用して、カテゴリの境界値  $b_{ijc}$  や刺激の布置  $X$  を求めるのである。

## 1.4 個体に尺度値を与える方法

### 1.4.1 Likert 尺度

単刺激データを基に、個体のみに尺度値を与える代表的な手法は、Likert (1932) の方法である。これは、等現間隔法を用いた Thurstone (1929) の態度測定の手続きを簡略化し、その欠点を補うために導入されたものである。等現間隔法を用いて個体に尺度値を与えるためには、二段階の手続きを踏む。まず 1.2.1 節で触れたように、 $N$  人の評定者に、 $I$  個の刺激を  $C$  個の等間隔順序を持つグループに分類してもらう。 $c$  番目のグループに分類された刺激の尺度値を  $c$  とし、 $N$  人の平均や中央値を各刺激に与える尺度値とする。また、四分偏差等により  $N$  人の間のバラツキの大きい刺激は排除する。次に残った刺激がある個体に呈示し、反応した刺激の尺度値平均等をその個体の尺度値とするのである。この方法は、第一段階の手続きは評定者への負担が大きい、刺激の尺度値を算出する個体とそれを適用する個体が異なる、狭義の一次元尺度が構成できない、といった難点を持つ (高木, 1955)。

そこで Likert は、まず各刺激に順序のある反応カテゴリを用意し、単刺激データを得た。以下に示すのは、その例である。

20. 合衆国は世界で最も強力な陸海空軍を持つべきである。

非常に賛成 (1) 賛成 (2) 分らない (3) 反対 (4) 非常に反対 (5)

23. 我が国はいかなる状況においても、二度と宣戦布告すべきではない。

非常に賛成 (5) 賛成 (4) 分らない (3) 反対 (2) 非常に反対 (1)

そして各反応カテゴリに何らかの数値を与え、ある個体が反応したカテゴリの数値を、全ての刺激にわたって平均することでその個体の尺度値とした。カテゴリに与える数値として Likert は、反応頻度を考慮した  $\sigma$  値と、括弧の中に示すような 1, 2, 3, 4, 5 といった整数値を候補に挙げているが、両者の間にはほとんど差がないと述べている。さらに、項目分析 (池田, 1971) を行って不適切な項目を排除する。具体的には、 $N$  人の項目  $i$  におけるカテゴリ値を並べたベクトルを  $x_i$  とし、 $m = \sum_i x_i$  を個体に与える仮の尺度値とする (評定加算法 (method of

summated ratings) と呼ばれる)。  $m$  と各  $x_i$  との相関係数を求め、それが極端に低い項目  $i$  は不適当と判断する。項目分析を行うという考え方は、等現間隔法と比較して、Likert 法の利点の 1 つである。項目分析を行うことは、狭義の一次元尺度を構成する試みと言えるからである。ただし第 3 章で見ると、必ずしもこの手続きは妥当なものとは言えない。またカテゴリ値として 1, 2, 3 といった値を用いる場合、順序尺度の水準にある項目を間隔尺度として扱うことになる (林, 1993a)。このため、Likert 法は個体のみに尺度値を与える方法となり、刺激に対して尺度値は与えられない。しかし、非常に簡便であることが Likert 法の魅力であり、現在でも盛んに用いられている。

### 1.4.2 因子分析法

Likert 法では、 $m = \sum_i x_i$  とする代わりに、項目ごとに重み付けを変えて  $m = \sum_i a_i x_i$  を個体に与える尺度値とすることも可能である。多変量解析法の 1 つである主成分分析法は、項目の重み  $\{a_i\}$  を見出すための 1 つの方法である。また因子分析法 (Thurstone, 1947; 三好, 1962; ローリー・マックスウェル 1970; 芝, 1979; 柳井・繁樹・前川・市川, 1990) も、そのような方法の 1 つと位置づけられる。

主成分分析では、項目の重みづけ和である主成分という新たな変数の分散を最大とするよう、各項目への重みを求める。これは、尺度構成の観点から以下のように言い換えることができる。簡単のため、項目が 2 つの場合を考える。各項目が本論文で言う直接尺度である。個体に与えられた 2 つの直接尺度値を基に、個体の散布図を描けば、例えば FIGURE 1.6(a) が得られる。各直接尺度における個体間の順序をなるべく保存するよう新たに個体を順序づけることが、本論文で言う尺度構成である。そのような順序づけは、明らかに各個体を直線 A 上に射影することによって得られる。この直線 A が主成分である。FIGURE 1.6(b) は 2 つの直接尺度値の間で個体の順序に矛盾がある場合である。例えば、項目 1 で最も小さな値をとる個体は、項目 2 では 2 番目に大きな値をとる。このとき直線 A 上に射影した個体の順序は、2 つの直接尺度上の個体の順序のどちらも大きく矛盾している。そこで、第 2 主成分と呼ばれる直線 B も用いて、2 次元平面上に個体を位置づけるのである。以上のことから、主成分分析法は広義の一次元尺度あるいは多次元尺度の構成法であることが分かる。第 2 章では、等質性分析という観点からこのことをさらに説明する。

主成分分析では、個体を行、項目を列にとった  $N \times I$  データ行列を  $X$  とすれば、

$$X = FA'$$

と分解することになる。 $F'F = NI$  を満たす  $N \times R$  行列  $F$  は個体の尺度値 (主成分得点)



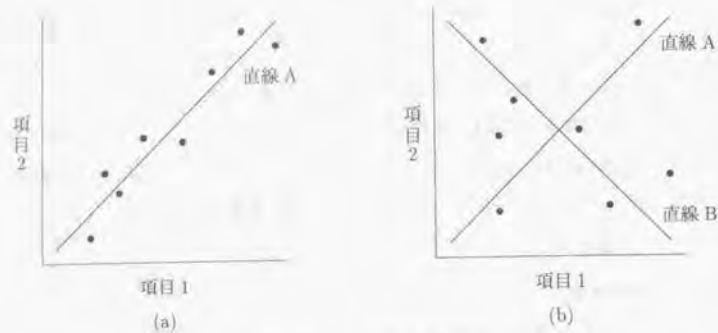


FIGURE 1.6 2項目の主成分

を並べたものであり、 $I \times R$  行列  $A$  は、項目の重み (主成分負荷) を並べたものとなる。注意すべきなのは、 $A$  は項目あるいは刺激に与えられる尺度値ではない、という点である。それらは、後に述べる項目反応理論の文脈で言えば識別力を表しているのであり、心理学的連続体上での刺激の位置を表しているわけではない (Torgerson, 1958)。

相関係数行列の構造分析を目的に提案された因子分析法 (Thurstone, 1947) は、基本的には主成分分析と同じような手法と言える。相違点は、独自因子と呼ばれる  $U$  を用いて、

$$X = FA' + UD$$

と分解する点である。 $F$  は因子得点、 $A$  は因子負荷、 $D^2$  は独自性と呼ばれる、 $F$  の列間に主成分分析のような直交性を仮定するものを直交解、仮定しないものを斜交解と呼ぶ。独自性が小さければ、因子分析モデルは主成分分析モデルに一致することから分かるように、因子分析法も広義の一次元尺度あるいは多次元尺度の構成法である。ただし、主成分分析では第1主成分得点の分散を最大にするという目的があったのに対し、因子分析法では因子得点  $F$  に関してそのような制約はない。したがって、正規直交行列  $T$  を用いて  $FA' = FTT'A' = F^*A''$  と因子得点を回転することで別の直交解や斜交解が得られる (Harris & Kaiser, 1964)。そこでまずデータに対して因子分析モデルを当てはめ、次に何らかの基準に従って回転を行うことになる。Thurstone (1947) は、回転の基準として単純構造 (simple structure) という概念を示した。単純構造とは、各因子が一部の項目に対してのみ高い因子負荷を示すものを言う。言い換えれば、単純構造とは一部のお互いに相関の高い項目のみから因子が構成されること

を意味する。これは、複数の一次元尺度を構成するための基準と考えられる。すなわち単純構造への因子の回転とは、多次元尺度を複数の一次元尺度に変換する試みである。単純構造の基準として、直交解ではヴァリマックス基準 (Kaiser, 1958)、斜交解ではプロマックス基準 (Hendrickson & White, 1964) 等がしばしば用いられる。

以上述べた主成分分析や因子分析は、各項目が間隔尺度の水準で得られている場合の方法である。計量的 MDS に対して非計量的 MDS が発展したように、非計量的な主成分分析や因子分析が提案されている。まず、Lingoes & Guttman (1967) は、相関係数行列を単調性を保つように変換し、主成分分析モデルを当てはめる方法を提案した。しかし、相関係数行列における単調性は、元の尺度値  $X$  における単調性を意味しない。そこで Kruskal & Shepard (1974) は、元の尺度値を単調変換し、主成分分析モデルを当てはめた。単調変換とモデルの当てはめのためには、最急降下法が使用されている。PRINCIPALS (Young, Takane & de Leeuw, 1978) は、尺度値変換とモデルの当てはめの交互最小二乗法を用いることで、より容易な計算法を示している。さらに Takane, Young & de Leeuw (1979) は、主成分分析モデルではなく、独自性を含んだ因子分析モデルを当てはめる方法 (FACTALS) を提案している。

ところで、直接尺度から間接尺度を構成するという本論文の尺度構成の立場から見れば、相関係数行列あるいは共分散行列の構造分析法である因子分析法を、複数の一次元尺度構成法として利用するには2つの難点がある。第1は、因子負荷が求まったとしても、尺度値である因子得点が一意に求まらない (芝, 1979)、という点である。したがって厳密に言えば、個体に尺度値を与える方法には分類できない。さらに重要な第2の問題点は、まずデータに因子分析モデルを当てはめ、次に単純構造への回転を行うという二段階の分析を行う点である。単純構造を求める基準は、データに対して因子分析モデルを当てはめる際には考慮されていない。そのため、二次の分析に必要な情報が、一次の分析によって取り除かれている可能性がある。この問題は、非計量的因子分析法を複数の一次元尺度構成法として用いようとするとき、さらに深刻になる。狭義の一次元尺度を求めるためには、間接尺度値である因子得点と整合性の高い一部の項目だけを選び出すと同時に、整合性が最も高くなるよう各項目の尺度値を変換する必要がある。非計量的因子分析では、因子分析モデルを当てはめるために最も適切な変換がなされるが、それが各因子得点との整合性を高める変換であるという保証はない。因子分析モデルを当てはめる段階に単純構造という基準が組み込まれていないため、このような問題点が生じるのである。第3章や第4章では、人工データによってこのことを例示する。これに対して Kiers (1991a) は、直交解であるコーティマックス基準 (Neuhaeus & Wrigley, 1954) を最大化するよう各項目の尺度値を変換する方法 (IDIOMIX) を提案してい



る。ただし、その方法を斜交解にまで拡張することは難しいと思われる。

以上の難点を抱えてはいるものの、因子分析法は、TABLE 1.4 の中で、複数の一次元尺度構成法を狙った唯一の方法と言ってもよい。尾見・川野 (1994) は、心理学関係の雑誌に掲載された 256 論文を調べ、因子分析は 46 論文で用いられていることを報告している。一方、1.6 節で説明する数量化Ⅲ類や双対尺度法は 6 論文に過ぎない。これら全ての論文において、因子分析や数量化Ⅲ類が尺度構成に利用されたとは限らないが、因子分析法が他の尺度構成法に比べ頻繁に利用されることは明らかであろう。

## 1.5 個体と刺激に尺度値を与える方法

### 1.5.1 尺度解析法

単刺激データにおいて、個体とカテゴリの両方に尺度値を与える第 1 の方法は尺度解析法 (Guttman, 1941; 1944; 1950a; 1950b) である。その考え方は、テストの項目分析に用いる S-P (Student-Problem) 表 (佐藤・竹谷・藤田・永岡, 1973; 佐藤, 1975; 1985) にも取り入れられている。そこで、まず S-P 表について説明する。

項目が唯一つの学力特性を測定しているということは、ある個体が正答した項目に対し、それより能力の高い個体は必ず正答するということである。また、ある項目に正答した個体は、それより難易度の低い項目には必ず正答するということであるともいえる。ある個体の能力が別の個体の能力よりも高いといった比較は、尺度構成を行い個体に尺度得点を与えてはじめて行えることである。そこで、とりあえず正答数の多い個体を能力の高い個体、正答者数の多い項目を難易度の低い項目と見なす。そして、各テスト項目が  $C_i = 1 (i = 1, \dots, J)$  の自由反応型データであると考え、正答数の多い個体から少ない個体へ、正答者数の多い項目から少ない項目へ、データ行列  $D = (X_1 \dots X_J)$  の行と列を並べ替える。並べ替えたデータ行列  $D$  が、TABLE 1.6 のように、左上三角部分に 1 が集まれば、項目は同じ特性を測っていると言える。なぜなら、上の行の個体ほど能力の高い個体と考えれば、能力の高い個体は、それより能力の低い個体が正答した項目に正答しているからである。そこで、この形からの逸脱によって一次元性を持たない項目を見出すことができる。さらに、不適切な項目を取り除いた S-P 表の上の行から下の行に向かって順に個体に尺度得点を与えればよい。TABLE 1.6 では、例えば個体 1 の尺度得点を 8、個体 2 の尺度得点を 7、としていけば、正答数が尺度得点となる。ここで与えられる尺度得点は、順序のみが問題となる順序尺度の水準にある。また、S-P 表の右の列から左の列に向かって順に項目に難易度を付けることができる。TABLE 1.6 では、例えば項目 8 の難易度を 8、項目 7 の難易度を 7 としていけばよい。水野・

TABLE 1.6 完全な一次元性を示す S-P 表の例

n	項目							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	0
3	1	1	1	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	1	0	0	0
5	1	1	1	1	0	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0	0	0
7	1	1	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0

續 (1973) は、以上の考え方を耐久消費財の府県別所有率データに対して応用し、府県と耐久消費財との同時順序化を試みている。さらに完全な単調パターンからのデータのずれを調べることで、耐久消費財の所有に関する地域特性を考察している。

スケログラム分析 (scalogram analysis) (Guttman, 1950a) は、一般のアイテムカテゴリ型データをターゲットとしている。例えば、4 項目から成るテストにおいて、各項目の評価値が◎、○、×である場合、TABLE 1.7 のようなデータが得られたとする。ただし、見やすさのため 0 は省略してある。このデータの列を並べ替えると、TABLE 1.8 が得られる。個体について見ると、TABLE 1.8 の上の行に位置する個体は、それより下の行に位置する個体が○であった項目には◎または○、◎であった項目には◎となっている。すなわち、×に比べて○の方が、○に比べて◎の方が難易度の高いカテゴリであり、TABLE 1.8 の上の方に位置する個体ほど能力が高い、と考えれば、能力の高い個体ほど難易度の高いカテゴリに反応している、という説明が成り立つ。したがって、TABLE 1.8 の 4 項目は同じ特性を測っていると言うことができる。一般に、ダミー変数行列の行と列を並べ替え、TABLE 1.8 のような形に対角部分に 1 が集まれば、そのデータは完全尺度構造を持つと言う。また、TABLE 1.8 の形のものをパラレログラム型 (parallelogram pattern) と呼ぶ。TABLE 1.6 のデータについても、各項目が 1 と 0 という 2 つのカテゴリを持つアイテムカテゴリ型データであると見なせば、パラレログラム型が得られる。なお、Coombs (1964) は、pick any(k)/n データに対するスケログラム分析をパラレログラム分析と呼んでいる。

仮に、全ての項目が完全尺度構造を持つならば、行の並び順に従って個体に尺度得点を与えていけばよい。しかし現実のデータは、必ずしも完全尺度構造を持たず、パラレログラ



TABLE 1.7 4つのカテゴリを持つデータ例

項目	1	2	3	4
カテゴリ	◎ ○ △ ×	◎ ○ △ ×	◎ ○ △ ×	◎ ○ △ ×
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1
13	1	1	1	1

TABLE 1.8 完全尺度構造を示すデータ例

項目	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
カテゴリ	◎	◎	◎	◎	○	○	○	○	△	△	△	△	×	×	×	×
1	1	1	1	1												
2		1	1	1	1											
3			1	1	1	1										
4				1	1	1	1									
5					1	1	1	1								
6						1	1	1	1							
7							1	1	1	1						
8								1	1	1	1					
9									1	1	1	1				
10										1	1	1	1			
11											1	1	1	1		
12												1	1	1	1	
13													1	1	1	1

ム型からのずれが生じる。ずれの程度をどのように評価するか、ずれがあるときにどのように並びかえを行うべきか、ということが問題となる。ずれの程度を示す指標の1つとして再現性係数 CR (Coefficient of Reproducibility) がある。再現性という用語は、Guttman のスケログラム分析の目的が、個体の尺度値を知ればその個体の反応パターンが再現できるようにすることであったことに由来する。例えば、TABLE 1.6 において個体4が項目5に対して誤答し、個体5が項目5に対して正答すれば、TABLE 1.6 中のエラーの数は1となる。全ての反応数に対するエラーの割合を1から減じたものがCRである。またエラー数の下限は、項目ごとに1あるいは0に対する反応頻度の多い方<sup>5</sup>を全ての項目に対して足したもののなので、これに対するエラーの割合を1から減じたものは、尺度化可能性係数 CS (Coefficient of Scalability) と呼ばれる。Guttman (1950a) は、完全尺度構造と見なすには、CRが.90以上であることが必要であると述べている。CRが.85以下のものは準尺度 (quasi-scale) と呼ばれる。CRは、同じデータでも個体やカテゴリの並び順によって値が変わる。コーネル法 (Cornell technique) は、これを最大にするよう個体とカテゴリを並べ替える方法である。また、内的整合性を高めるよう個体とカテゴリに尺度値を与え、この値の順に個体とカテゴリを並べ替える方法もある (Guttman, 1941)。本論文では、特に後者の方法を尺度解析法と呼ぶ<sup>6</sup>。尺度解析法の詳細は1.6節で述べる。尺度解析法により与えられる尺度値は、間隔尺度の水準にある (岩坪, 1987)。S-P 表の説明で述べたように、並べ替えの結果与えられる尺度値は順序さえ保たれていればよい。それを間隔尺度に制限できる理論的根拠の1つは、尺度の信頼性という観点から与えられる。すなわち、尺度解析法により求められた尺度値は、信頼性の指標である  $\alpha$  係数 (Cronbach, 1951) を最大にするものである、ということが Lord (1958) によって示されている。

尺度解析法は、全ての項目を基に、パラレログラム型になるべく近づくようダミー変数行列の行と列を並べ替え、個体とカテゴリに尺度値を与える方法である。したがって、広義の一次元尺度構成法と言える。1.7節ではその理由をさらに述べる。また、確率分布を導入しない記述的な方法と言える。

CRが低く、全ての項目が同一の特性を測っていないことが知られたときには、お互いに矛盾のない一部の個体や項目だけを選び出し、狭義の一次元尺度を構成することが考えられる。そのための1つの方法は多重スケログラム分析 (Multiple Scalogram Analysis, MSA) (Lingoes, 1963) である。MSAでは、まず正反応率が最も高い項目を起点とし、次にその項

<sup>5</sup>例えば、項目1なら8、項目7なら7

<sup>6</sup>Guttman(1950a)の言う尺度解析法はスケログラム分析を含んだより広い意味のものである。

目との矛盾が最も少ない項目を選ぶ。選んだ項目とそれまでに選ばれた項目との適合性が低くなければ、さらに別の項目を選び出す。という手続きを繰り返すことにより、順序性を持つ項目を選び出すと同時に、一次元尺度を構成する。さらに、選ばれなかった項目を用いて以上の手続きを再び行うことで、複数の一次元尺度が構成される。ただし、項目選択の基準や適合性の判定基準が複雑な上に必ずしも適切ではなく(水野, 1974)、再現性の高い尺度を構成できないことがある、という批判もある。

MSAでは、1つの項目が1つの一次元尺度構成のみに用いられるが、1つの項目が複数の一次元尺度構成に寄与する方法も考えられる。竹谷(1982)は、それらの方法を総称して項目関連構造化法と呼んでいる。その中には、POSA (Partial Order Scalogram Analysis) (Coombs, 1964; 林・鮑戸, 1976; Shye, 1985)、水野(1974)の方法、IRS (Item Relational Structure analysis) (竹谷, 1979a; 1979b; 1991)、意味構造分析法(SS分析法)(竹谷, 1987; 1991)といったものがある。これらの方法はネットワーク型のグラフによって項目間の関連を表現し、項目の順序を見出そうとする点に特徴がある。POSAでは、 $I$ 個の項目に対する反応パターンの1つ1つをプロフィールと呼ぶ。そして、partial order diagramと呼ばれるプロフィールの相互関係を表す図を用いて、一次元性を持つプロフィールの組み合わせを選び出そうとする。別の言い方をすれば、完全尺度構造が現れるような一部の個体あるいは項目を見出す方法である。FIGURE 1.7は、4項目(各2カテゴリ)のdiagramの例である。2121と



FIGURE 1.7 partial order diagram の例

いったものがプロフィールである。上から下に向かって線で結ばれたプロフィールの組が完全尺度構造をなす。林(1976)は、1.6節で説明する数量化Ⅲ類により、partial order diagramが描けると述べている。POSAには、項目やカテゴリの数が多いときにはプロフィールの数も増えるため、diagramを描くことが困難になる、一次元性をなすプロフィールの組み合わせ

せを選ぶ明確な指針がないため、結果があいまいになる、といった問題点もある。一方、水野の方法やIRS、SS分析法では、プロフィールではなく項目を、順序をなすよう連結した図を用いる。したがって、項目をたどることにより順序を持った項目群が選出され、狭義の一次元尺度が構成できる。水野の方法とIRSとの相違は、どの項目を連結するかといった項目選択基準であり、それら2つの方法とSS分析法との相違は、2値データか多値データかという点である。FIGURE 1.8は、10項目のIRSグラフの例である。円で囲まれた数字が項目

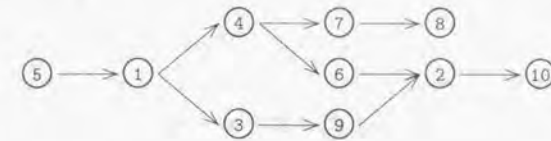


FIGURE 1.8 単純なIRSグラフの例

番号を表す。例えば、 $5 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ という5つの項目をこの順序で並べることで、狭義の一次元尺度が構成できることになる。IRSは、項目数が多い場合にも適用できる、項目間の順序構造が図として表現され理解しやすい、といった特徴を持つ。反面、IRSでは2値データしか解析できない、SS分析では順序尺度を扱うことができない、といった限界もある。

### 1.5.2 展開法

展開法(unfolding)は、選好データにおいて、個体と刺激に対し尺度値を与える方法である(Coombs, 1950)。展開法では、個体と刺激を並べる直線のことを $J$ 尺度( $J$  scale)と呼ぶ。また、個体に与えられる尺度値を理想点(ideal point)と呼ぶ。そして、理想点からの距離が近い刺激ほど選好度が高いと考える。展開法という名前は、ある個人の選好順に刺激を並べた $I$ 尺度( $I$  scale)を、理想点の位置で左右に展開することで $J$ 尺度が得られることに由来する。本論文の用語を用いれば、 $I$ 尺度は直接尺度、 $J$ 尺度は間接尺度と見なせる。展開法は、Bennett & Hays(1960)により、多次元に拡張された。すなわち、 $R$ 次元空間上に個体と刺激との位置を定め、個体と刺激との距離に近いほど、個体はその刺激に対する選好度が高い、と見なすのである。Coombs(1960)やCoombs & Kao(1960)は、展開法は因子分析に比べ1つ少ない次元でデータを表現できると述べている。

個体数を $N$ 、刺激数を $I$ とすれば、展開法は、 $(N+I) \times (N+I)$ 類似性行列の中の、



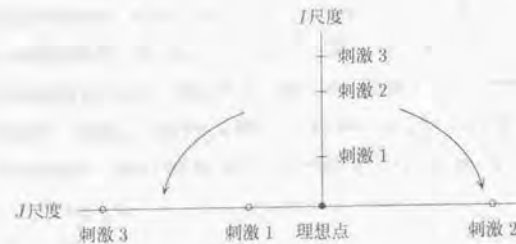


FIGURE 1.9 展開法

$N \times I$  小行列に対する MDS と見なすこともできる。そのため、ALSCAL といった MDS の汎



FIGURE 1.10 MDS と展開法の関係

用的なプログラムにより計算することができる。これに対し、展開法に特化した方法も研究されている。Poole (1984) は一次元の展開法の効率的な計算方法を示し、Greenacre & Browne (1986) は多次元展開法の計算方法を示している。3 相 3 元データへ拡張した方法としては、DeSarbo & Carroll (1985) は、Horan モデルと同じような重み付き多次元展開法とその計算方法を提案し、Jedidi & DeSarbo (1991) はさらに誤差分布として正規分布を仮定したモデルを示している。

Zinnes & Griggs (1974) は、理想点と刺激点が多変量正規分布に従う、という仮定の下で、確率的な多次元展開法を提案している。理想点  $x_n$  と刺激点  $y_i$  の間の距離の二乗  $d_{ni}^2$  は

非心  $\chi^2$  分布に従うため、距離の二乗の比  $d_{ni}^2/d_{nj}^2$  は二重非心  $F$  分布 (doubly noncentral  $F$ ) に従う。この分布は正規分布で近似できることを利用し、最尤推定を行う。一方、De Soete, Carroll & DeSarbo (1986) は、理想点のみが正規分布に従うという wandering ideal point モデルを提案している。さらに De Soete & Heiser (1993) は、個体がいくつかの潜在的なグループに分かれ、グループ内では共通の理想点を持つ、というモデルを提案している。また、Andrich (1988) は、個体  $n$  が刺激  $i$  を好む確率  $p_{ni}$  を、 $p_{ni} = (1 + \exp(d_{ni}^2))^{-1}$  とする方法を示し、Hoijtink (1990) は、 $p_{ni} = (1 + d_{ni}^2)^{-1}$  とする方法 (PARELLA) を示している。

理想点という考え方は非常に魅力的であり、他のモデルと組み合わせた方法が提案されている。Schönemann & Wang (1972), Wang, Schönemann & Rusk (1975) では、BTL モデルと展開法を組み合わせたモデルを提案している。すなわち、個体  $n$  が刺激  $j$  よりも刺激  $i$  を好む確率  $p_{nij}$  は、理想点と刺激点との距離の二乗  $d_{ni}^2$  を用いて、

$$p_{nij} = \frac{\exp(-d_{ni}^2)}{\exp(-d_{ni}^2) + \exp(-d_{nj}^2)}$$

とするのである。理想点判別分析法 (ideal point discriminant analysis) (Takane, Bozdogan & Shibayama, 1987; Takane, 1987; 高根, 1990) はこのモデルをさらに発展させたものと見なせる。理想点判別分析法では、個体の理想点を説明変数の線形和として表現する。さらに個体が好む刺激の代わりに、個体が属するグループが与えられていると考え、個体の理想点とグループの重心との距離を最小にするのである。

MDS と同様に、展開法は明らかに多次元尺度の構成法である。ただし MDS と異なり、刺激だけではなく個体に対しても理想点という尺度値が与えられる。

刺激のみに多次元尺度値が与えられる方法ではあるが、展開法と関連ある方法としてしばしば言及されるのが、ベクトルモデルである (Tucker, 1960; Bechtel, Tucker & Chang, 1971)。ベクトルモデルでは、展開法と同じく各刺激は、 $R$  次元空間上に配置を持つ。しかし、各個体の選好は理想点ではなく、ベクトルによって表され、ベクトルの方向にある刺激ほど選好度が高いことを意味する。先に示した FIGURE 1.2 はその例である。各ベクトル上に射影された刺激が正規分布に従うならば、各ベクトル上で比較判断の法則を考えていることと同等である。したがってベクトルモデルは比較判断の法則を拡張したものと考えることができる。また、ベクトルモデルは、ベクトルの先の方向に理想点を置いた展開法の特別な場合と考えることもできる (キャロル, 1976)。Coombs, Greenberg & Zinnes (1961) は理想点が刺激点よりも外側にあるときには、展開法は比較判断の法則になることを述べている。またベクトルと  $R$  次元空間の直交基底が一致するものは、数量化 VI 類と呼ばれる (林, 1993b)。

van der Laus (1992) は、選好データとともに刺激のいくつかの属性を評定したデータも得られている場合に、選好データから得られるベクトルと属性評定データから得られるベクトルを一致させることにより、選好判断に影響する属性を探る nested ベクトルモデルを提案している。

### 1.5.3 潜在構造分析

Guttman のスケログラム分析は、得られた反応パターンに重点を置く方法である。これに対し、反応が生じる潜在的な過程を積極的に説明しようとしたのが潜在構造分析 (latent structure analysis) (Lazarsfeld, 1950a; 1950b; 1954) である。潜在構造分析では、尺度値  $x$  の個体が刺激  $i$  に反応する確率  $f_i(x)$  を考える。 $f_i(x)$  はトレースライン (trace line) と呼ばれる。 $g(x)$  を個体の分布に関する密度関数とすれば、刺激  $i$  に反応する個体の割合  $p_i$  は、

$$p_i = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)g(x)dx$$

によって与えられる。ここで、尺度値  $x$  を固定したとき、個体が刺激  $i$  と刺激  $j$  に反応する確率が独立であると仮定する。これは、局所独立の仮定と呼ばれる。刺激に対する反応が、尺度値が表す特性以外の要因にも規定されているとすれば、尺度値を固定しても反応確率は独立にならない。すなわちこの仮定は、全ての刺激が共通の特性だけを測定している、ということ并要求するものである。言い換えれば、一次元性を仮定していることになる。潜在構造分析を適用するためには、一次元性を持つ刺激を選び出しておく必要があるということである。局所独立の仮定が満たされるとき、2つの刺激に同時に反応する人の割合  $p_{ij}$  は、次式によって与えられる。

$$p_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)f_j(x)g(x)dx$$

このことを利用して、個体の尺度値や  $g$ 、 $f_i$  等の推定を行うのである。

潜在構造分析は、個体と刺激に尺度値を与える確率的な尺度構成法である。刺激の尺度値とは、例えば  $f_i(x_0) = 1/2$  となる  $x_0$  など、トレースラインの位置のことである。また、局所独立の仮定を必要とするため、一次元性を持つ刺激をあらかじめ選び出しておかなければならない。したがって構成された尺度は狭義の一次元尺度と言える。ただし、潜在構造分析自体に刺激を選び出す機能がある、というわけではない。

潜在構造分析の考え方は非常に一般的なものであり、 $f_i$  や  $g$  の形を特定することで様々なモデルが生まれる。 $g$  が連続分布のときには、

線形モデル:  $f_i(x) = a_i + b_ix$

### 1.5. 個体と刺激に尺度値を与える方法

潜在距離モデル:  $f_i(x) = \begin{cases} a_i - b_i & x \leq x_i \text{ のとき} \\ a_i + b_i & x > x_i \text{ のとき} \end{cases}$

正規累積モデル:  $f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(u-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\} du$

といったモデルが考えられている。FIGURE 1.11 は各モデルのトレースラインの例である。

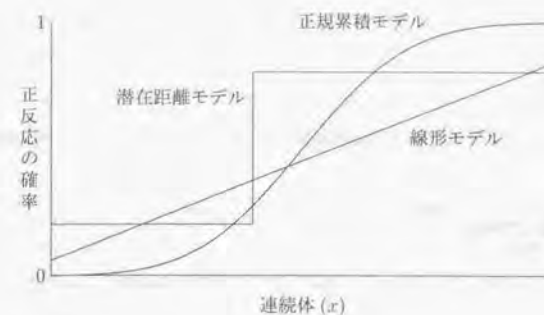


FIGURE 1.11 トレースラインの例

潜在距離モデルにおいて、 $a_i = b_i = 1/2$  としたものが、スケログラム分析である。

$g$  が離散分布のときには、潜在クラス分析 (latent class analysis) と呼ばれる。Haertel (1990) は、潜在クラス分析と正規累積モデルの結果を比較検討している。潜在構造分析の中では潜在クラス分析が最も発展している。例えば、Everitt (1984) や Bartholomew (1987) は潜在構造分析と潜在クラス分析を同義語として扱っているほどである。潜在クラス分析では、個体が潜在クラスと呼ばれる集団に潜在的に分かれており、潜在クラスによって項目への反応確率が異なる、と考える。各潜在クラスが項目に反応する確率が求められると同時に、個体が各潜在クラスに属する確率も求められる。したがって、何らかのモデルを構成する際に、個体をグルーピングしたいときに利用される。例えば、Böckenholt & Böckenholt (1991) や De Soete & Heiser (1993), Winsberg & De Soete (1993), 土屋 (1994a) は、潜在クラス分析に MDS、展開法あるいはベクトルモデルを組み込んだ手法を提案している。

Lazarsfeld (1950a; 1950b) は、カテゴリーカルな反応を考えているが、量的な反応も含めて潜在構造分析の考え方は一般化することができる。すなわち、トレースライン  $f_i(x)$  の代わりに、尺度値  $x$  が与えられたときに  $y$  という反応が生じる確率密度関数  $f_i(y|x)$  を用いる。



多次元に拡張したより一般的な形で表せば、反応の分布は、

$$\phi(y) = \int_x f(y|x)g(x)dx \quad (1.4)$$

となる。(1.4)式は潜在構造モデルではなく、潜在変数モデルと呼ばれることが多い(Bartholomew, 1983)。 $g(x)$ が離散分布のときには、潜在プロファイル分析(latent profile analysis)と呼ばれる。また、 $g(x)$ が正規分布で、 $f(y|x)$ を平均  $E(y|x) = Ax$ の正規分布とすれば、確率的な因子分析モデルとなる(Jöreskog, 1967; Jöreskog & Lawley, 1968)。さらに、カテゴリ判断の法則の考え方をを用いて、 $y$ がいくつかのカテゴリに分かれると考えれば、カテゴリカルな因子分析となる。この解法は、Christofferson (1975; 1977) や Muthén (1978) によって与えられている。1因子モデルは正規累積モデルと同等であることは、Takane & de Leeuw (1987) によって示されている。

#### 1.5.4 項目反応理論

テスト理論の分野においても、潜在構造分析における正規累積モデルと同じようなモデルが提案されている。この方法は、項目反応理論と呼ばれ(Hambleton, 1985; 芝, 1991; Baker, 1992)、Lord (1952) に基礎を置く。この理論では、潜在構造分析における  $x$  は潜在特性と呼ばれ、記号としてしばしば  $\theta$  が使われる。トレースライン  $f_i$  は項目特性曲線(item characteristic curve)と呼ばれる。項目特性曲線として正規累積モデルを仮定すると、 $f_i$  が積分を含んだ形となり、計算がやっかいとなるため、これと同じような形の曲線を持つロジスティックモデル(Maxwell, 1959; Lord & Novick, 1968) が使われることが多い。ロジスティック関数は次式で与えられる。

$$f_i(\theta) = \frac{1}{1 + \exp\{-Da_i(\theta - b_i)\}}$$

$a_i$  は識別力と呼ばれる。 $a_i$  が大きくなるほど曲線の勾配は急になる。そのため、 $\theta > b_i$  ならばその項目に反応し、 $\theta < b_i$  ならば反応しない、という傾向がはっきりする。 $b_i$  は困難度と呼ばれ、曲線の位置を表す。 $b_i$  が大きいほど曲線は右へ移動し、 $\theta$  が十分に大きいときだけ、その項目に反応する確率が高くなる。したがって、 $\theta$  は個体に与えられる尺度値、 $b_i$  は刺激である項目に与えられる尺度値と言える。 $a_i$  が全ての項目について等しいモデルは、ラッシュモデル(Rasch model) (Rasch, 1961; ラッシュ, 1985; Fischer & Molenaar, 1995) と呼ばれる。Fischer (1973; 1983; 1995) はラッシュモデルにおいて困難度に線形制約を課す方法を示している。 $a_i$  と  $b_i$  の周辺最尤推定法については、Bock & Aitkin (1981) によって与えられている。Bock & Lieberman (1970) は、正規累積モデルの解法を与えている。また、各

項目に反応したか否かだけでなく、順序カテゴリへの反応を認める段階反応モデル(graded response model) (Samejima, 1969) や、各項目が名義尺度の水準にある場合の名義反応モデル(nominal response model) (Bock, 1972) も提案されている。

項目反応理論の1つの特徴は、一部の項目が重複していれば複数のテストパッチリの間で共通の尺度値を与えることができる点である。これは等化(equating)と呼ばれる(Kolen & Brennan, 1995)。また、次に呈示する項目を、その時点までの反応から得られた  $\theta$  の推定値を基に決めていく、という適応形のデータ収集を行うことで、被検者の負担を減らすと同時に精度の高い測定を行える、という特徴も持つ。

#### 1.6 尺度解析法・数量化Ⅲ類・双対尺度法・対応分析法・等質性分析

以上説明してきたように、TABLE 1.4 の尺度構成法の多くは、広義の一次元尺度あるいは多次元尺度の構成法である。本論文では、狭義の一次元尺度構成法を提案する。その基礎としては、尺度解析法を用いる。その理由は3つある。第1は、単刺激データに対する手法である、という点である。1.2.1節で述べたように、単刺激データが得られる場面は非常に多い。また刺激比較データ等と比べ、被検者への負担が軽くなる。第2は、個体と刺激の両方に尺度値を与えられる、という点である。これは、質的データを質的データとして扱える、ということ意味する。Likert 尺度では、質的データを量的データと見なさなければならない。そのような仮定をあらかじめ置かないことで、柔軟なアプローチをとることができる。第3は、記述的な方法である、という点である。提案する方法は、尤度の計算が不要であり計算法が非常に単純である。そのため実用性に優れている。また、確率分布や局所独立性といった仮定を必要としないため、探索的な方法として役立つ。

以上の理由から、本論文で提案する手法は、尺度解析法を基礎とする。前節では、その方法を詳細に述べなかったため、ここで説明を加えておく。

尺度解析法は、尺度構成を目的として開発された手法である。ところが、質的データの解析を目的として開発された手法の中には、尺度解析法と基本的には全く同じ数式化がなされる手法がある(Hill, 1974; Tenenhaus & Young, 1985; Gower, 1990)。それらの手法は、分析の目的や始めの定式化・結果の基準化の方法は異なるが、同等な数式を解くことに帰着する。TABLE 1.9 にはいくつかの代表的な手法を挙げた。本章では、これらの手法を総称して尺度化法と呼ぶこととする。

TABLE 1.9 の尺度化法は、2つの観点から分類される。まず、ダミー変数行列  $D =$



TABLE 1.9 尺度化法の分類

	ダミー変数行列	分割表
交互平均法	Richardson & Kuder(1933)	Fisher(1940)
分散分析アプローチ 相関係数最大化 相関比最大化	尺度解析法 数量化Ⅲ類	Maung(1941) 双対尺度法
主成分分析 アプローチ	等質性分析	対応分析

$(X_1 \cdots X_I)$  に対する手法か、分割表  $X_1'X_2$  に対する手法か、という点である。目的を達成する手段として、交互平均法を用いるか、分散分析アプローチを用いるか、主成分分析アプローチを用いるか、という点からも分類される。ただし、この分類は厳密なものではない。基本的には、全ての手法が同じデータに対して同等の結果を与えるからである。例えば、双対尺度法は分類データや系列カテゴリデータ等様々なデータ形式への応用も考えられており (Nishisato & Arri, 1975; Nishisato, 1984; Nishisato & Sheu, 1984)、TABLE 1.9 の全ての手法を統合した方法とらえた方が適切かもしれない。また、パート表を基に数量化Ⅲ類を行うこともできるし、等質性分析の解法として交互平均法を用いることも可能である。それぞれの手法の基礎となった考え方に従ってあえて分類すれば、TABLE 1.9 のようになる、ということである。また、目的を達成する手段として他にも、正準相関最大化によるもの、同時線形回帰によるもの、等が挙げられる。それらも、最終的には同等の結果に達するため、ここでは割愛した。

以下では、TABLE 1.9 の手法を概観するが、その前にもう一度記号を整理しておく。

$N$  : 個体数 ( $n = 1, \dots, N$ )

$I$  : 項目数 ( $i = 1, \dots, I$ )

$C_i$  : 項目  $i$  のカテゴリ数 ( $c_i = 1, \dots, C_i$ )

$X_i$  : 項目  $i$  のダミー変数行列 ( $N \times C_i$ )

$A_i = \text{Diag}(X_i'1)$  : 個体  $n$  が項目  $i$  の任意のカテゴリに反応すれば 1,

そうでなければ 0 を  $nn$  要素とする対角行列 ( $N \times N$ )

$\Gamma_i = \text{Diag}(X_i'1)$  : 項目  $i$  の各カテゴリに反応した個体数を

対角要素とする対角行列 ( $C_i \times C_i$ )

$D = (X_1 \cdots X_I)$  :  $X_1$  から  $X_I$  を横に並べた行列 ( $N \times \sum C_i$ )

$D_{obs} = \sum_{i=1}^I A_i$  :  $I$  個の項目のうち個体  $n$  が

反応した項目数を  $nn$  要素とする対角行列 ( $N \times N$ )

$D_{cat} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Gamma_I \end{pmatrix}$  : 各カテゴリに反応した個体数を

対角要素とする対角行列 ( $\sum C_i \times \sum C_i$ )

$F_{ij} = X_i'X_j$  : 項目  $i$  と項目  $j$  の分割表

$m, M$  : 個体に与える尺度値を要素とするベクトル ( $N \times 1$ )

あるいは行列 ( $N \times R$ )

$w_i, W_i$  : 項目  $i$  の各カテゴリに与える尺度値を

要素とするベクトル ( $C_i \times 1$ ) あるいは行列 ( $C_i \times R$ )

$w, W$  :  $w_i$  あるいは  $W_i$  を縦に並べたベクトル、行列

また記号が繁雑になるのを避けるため、 $F_{12}$  を  $F$  と表すこともある。また、 $1'F1 = N$  である。

### 1.6.1 交互平均法

西里 (1979) によれば、TABLE 1.9 の尺度化法の始まりとなったのは、Richardson & Kuder(1933) である。セールスマンの能力評価を行う尺度を作成するために、以下の方法がとられた。まず 7 段階の等現間隔法により、132 の評価項目に暫定的な尺度値を与える。次に各セールスマンごとに、反応した評価項目の尺度値の合計を求め、そのセールスマンの尺度得点とする。各評価項目ごとに、その評価項目に反応したセールスマンの尺度得点の平均を求め、新たな尺度値とする。さらに、各評価項目ごとに、反応したセールスマンの尺度得点の標準偏差を求め、標準偏差が大きい項目は除くことで、尺度の信頼性を上げることができた、と述べている。Richardson & Kuder の論文では、数式が全く用いられていないが、以上の方法をより一般的に表せば、次のように書けるであろう。

——交互平均法 1——

Step 0:  $w$  を定める。

Step 1:  $m = D_{obs}^{-1}Dw$  により  $m$  を求める。



Step 2:  $w = D_{cat}^{-1} D' m$  により  $w$  を求める。

Step 3: 収束していなければ Step 1 へ戻る。

すなわち、 $w$  の平均により、個体に与える尺度値  $m$  を求め、 $m$  の平均により、カテゴリに与える尺度値  $w$  を求める。この手続きを繰り返すことで、 $m$  と  $w$  を求めるこの方法は、交互平均法 (the method of reciprocal averages) と呼ばれる。

尺度化法の始まりとしてしばしば引用される Fisher(1940) も交互平均法を用いている。ただし、分析の対象となったデータは分割表の形  $F$  で与えられた。一方の項目は児童の目の色 (4 カテゴリ) であり、もう一方の項目は髪の色 (5 カテゴリ) である。髪の色のカテゴリ間の差別を最大にするためには、目の色の各カテゴリにどのような得点を与えればよいか、というのが問題であった。そのために Fisher が用いた方法は次のように要約することができる。

——交互平均法 2——

Step 0:  $w_2$  を定める。

Step 1:  $w_1 = F_1^{-1} F' w_2$  により  $w_1$  を求める。

Step 2:  $w_2 = F_2^{-1} F' w_1$  により  $w_2$  を求める。

Step 3: 収束していなければ Step 1 へ戻る。

2つの方法を見比べれば、 $D$  を  $F$  で置き換える等、対応する行列を置き換えることで、第1の方法は第2の方法と形式的に一致することが分かる。さらに、項目数  $I$  が2のときには、 $D = (X_1 \ X_2)$  に対する交互平均法1で得られる  $w$  と、 $F = X_1' X_2$  に対する交互平均法2で得られる  $w_1, w_2$  は一致する。この事実については、全ての手法の説明の後に詳しく述べる。

### 1.6.2 分散分析アプローチ

ダミー変数行列に対して分散分析アプローチをとるのは、尺度解析法と数量化Ⅲ類である。

Guttman (1941; 1950b) の尺度解析法では、内的整合性を高めるように個体に尺度値を与えようとした。簡単のために、アイテムカテゴリ型データで説明する。ある個体が項目  $i$  においてカテゴリ  $c_i$  に反応したとき、 $w_{ic_i}$  という尺度値を与えるとすると、これを全ての項目について行えば、各個体ごとに、 $I$  個の尺度値が与えられる。それら  $I$  個の尺度値は全て

同一の個体に対する尺度値であるため、その分散はなるべく小さい方がよい。これが内的整合性の原理と呼ばれるものである。そこで、 $N \cdot I$  個の尺度値の平均を  $\bar{m}$  とし、個体  $n$  の  $I$  個の尺度値の平均を  $m_n$  とする。個体を水準と見なした分散分析にならって、 $N \cdot I$  個の尺度値の  $\bar{m}$  からの変動を、個体内変動と個体間変動に分解する。

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I (x_{ni} - \bar{m})^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I (x_{ni} - m_n)^2 + I \sum_{n=1}^N (m_n - \bar{m})^2 \quad (1.5)$$

$$m_n = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I x_{ni}$$

$$\bar{m} = \frac{1}{NI} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I x_{ni}$$

ただし、 $x_{ni}$  は項目  $i$  において個体  $n$  に与えられた尺度値を表す。(1.5) 式の左辺は全変動を

TABLE 1.10 ダミー変数行列に対する分散分析アプローチ

個体	項目				平均
	1	2	...	$I$	
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1I}$	$m_1$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2I}$	$m_2$
3	$x_{31}$	$x_{32}$	...	$x_{3I}$	$m_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$N$	$x_{N1}$	$x_{N2}$	...	$x_{NI}$	$m_N$
平均					$\bar{m}$

表し、右辺の第1項は個体内変動を、第2項は個体間変動を意味する。個体内での尺度値の分散を小さくするためには、全変動に対する個体間変動を大きくすればよい。尺度値の原点には不定性があるので、 $\bar{m} = 0$  とすれば、

$$\eta_1^2 = \frac{I \sum_{n=1}^N m_n^2}{\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I x_{ni}^2}$$

を最大化すればよいことになる。これは相関比の二乗の最大化と考えることができる。行列を用いて表現すれば、次式の  $\eta_1^2$  を  $NI \bar{m} = 1' D w = 0$  という条件の下で最大化することになる。

$$\eta_1^2 = \frac{I^{-1} w' D' D w}{w' D_{cat} w}$$

$m_n$  を並べたベクトル  $m$  は、

$$m = \frac{1}{I} D w$$

となる。自由反応型データも含めたより一般的な形で表すと、

$$\eta_1^2 = \frac{w' D' D_{obs}^{-1} D w}{w' D_{cat} w}$$

の最大化により  $w$  を求め、

$$m = D_{obs}^{-1} D w$$

により  $m$  を求めればよい。以上をまとめると、

——相関比最大化1——

Step 1:  $D' D_{obs}^{-1} D w = \eta_1^2 D_{cat} w$  を解き  $w$  を求める。

Step 2:  $m = D_{obs}^{-1} D w$  により  $m$  を求める。

となる。得られた  $\eta_1^2$  は相関比の二乗に一致する。

数量化Ⅲ類(林, 1956)は、項目に対する反応パタンの似た個体を見出すと同時に、反応のされ方の似た項目のまとまりも見出すことを目的とした手法である<sup>7</sup>。そのためには、ダミー変数行列  $D$  の行を、反応パタンの似た行どうしが近くなるよう並べ替える。また、列に関しても同様の並べ替えを行う。その結果、ダミー変数行列の対角部分に1が多く集まることになる。逆に言えば、対角部分に1が集まるよう、ダミー変数行列の行と列を並べ替えればよい。このことは、ダミー変数行列の要素である1を2次元平面上の点と見なし、ダミー変数行列を2次元平面上の散布図そのものと見なしたとき、散布図の相関係数が最も高くなるように点の位置を定める、ということに相当する。そこで、個体  $n$  が項目  $i$  のカテゴリ  $c_i$  に反応しているとき、 $(m_{ni}, w_{ic_i})$  を2次元平面上の点の位置とする。ただし、2次元平面の原点は不定なので、 $1' D_{obs} m = 0$ 、 $1' D_{cat} w = 0$  という制約条件をおく。このとき、散布図の相関係数は、

$$\rho_1 = \frac{m' D w}{\sqrt{m' D_{obs} m} \sqrt{w' D_{cat} w}}$$

となる。これを最大とする  $m, w$  は、

$$D w = \rho_1 D_{obs} m$$

$$D' m = \rho_1 D_{cat} w$$

を解くことによって得られる。 $\rho_1$  は最大化された相関係数に一致する。Guttman (1941) も相関比  $\eta_1$  最大化は相関係数  $\rho_1$  最大化に一致することを述べている。尺度解析法と数量化Ⅲ類

<sup>7</sup> 数量化法の歴史は、林 (1993b) や森本 (1996) に詳しい。

の違いをあえて述べるならば、尺度解析法はアイテムカテゴリ型データを基にし、数量化Ⅲ類は自由反応型データを基にしていた、となるであろう。

以上をまとめると、

——相関係数最大化1——

Step 1:  $D' D_{obs}^{-1} D w = \rho_1^2 D_{cat} w$  を解き  $w$  を求める。

Step 2:  $m = \frac{1}{\rho_1} D_{obs}^{-1} D w$  により  $m$  を求める。

または、

Step 1:  $D D_{cat}^{-1} D' m = \rho_1^2 D_{obs} m$  を解き  $m$  を求める。

Step 2:  $w = \frac{1}{\rho_1} D_{cat}^{-1} D' m$  により  $w$  を求める。

となる。得られた  $\rho_1^2$  は最大化された相関係数に一致する。

一方、分割表に対して分散分析アプローチをとるのは、Maung (1941) の方法や双対尺度法である。

Maung は Fisher と同じく<sup>8</sup>、目の色と髪の色に関する分割表を用いた。目的は、髪の色のカテゴリ間の弁別を最大にするために、目の色の各カテゴリに数値を与えることである。仮に、目の色のカテゴリ  $c_2$  に与える数量を  $w_{2c_2}$  とすれば、全体の変動は、

$$\sum_{c_1=1}^{C_1} \sum_{c_2=1}^{C_2} f_{c_1 c_2} (w_{2c_2} - \bar{x})^2 = \sum_{c_1=1}^{C_1} \sum_{c_2=1}^{C_2} f_{c_1 c_2} (w_{2c_2} - w_{1c_1})^2 + C_2 \sum_{c_1=1}^{C_1} (w_{1c_1} - \bar{x})^2 \quad (1.6)$$

と分解される。ただし、 $f_{c_1 c_2}$  は分割表  $F$  の  $(c_1, c_2)$  要素、 $\bar{x}$  は全体平均である。

$$\bar{x} = \frac{1}{\sum_{c_1=1}^{C_1} \sum_{c_2=1}^{C_2} f_{c_1 c_2}} \sum_{c_1=1}^{C_1} \sum_{c_2=1}^{C_2} f_{c_1 c_2} w_{2c_2}$$

また、 $w_{1c_1}$  は髪の色のカテゴリ  $c_1$  の平均である。

$$w_{1c_1} = \frac{1}{\sum_{c_2=1}^{C_2} f_{c_1 c_2}} \sum_{c_2=1}^{C_2} f_{c_1 c_2} w_{2c_2}$$

<sup>8</sup> 本来のデータの出典は Maung である。



このとき、(1.6)式の右辺の第1項は髪の色のカテゴリ内変動、第2項はカテゴリ間変動を表す。髪の色のカテゴリ間の弁別を最大にするためには、第2項のカテゴリ間変動を最大とすればよい。 $\bar{x} = 0$ という制約をおけば、全体変動に対するカテゴリ間変動は、

$$\eta_2^2 = \frac{w_2' F' \Gamma_1^{-1} F w_2}{w_2' \Gamma_2 w_2}$$

と表される。したがって、 $\eta_2^2$ を  $N\bar{x} = 1' F w_2 = 0$  という制約の下で最大化すればよい。 $w_{1c_1}$ と並べたベクトルは  $w_1 = \Gamma_1^{-1} F w_2$  と書けるので、以上をまとめると、

——相関比最大化2——

Step 1:  $F' \Gamma_1^{-1} F w_2 = \eta_2^2 \Gamma_2 w_2$  を解き  $w_2$  を求める。

Step 2:  $w_1 = \Gamma_1^{-1} F w_2$  により  $w_1$  を求める。

となる。得られた  $\eta_2^2$  は相関比の二乗に一致する。

また、Maung (1941) は分割表に対する相関係数最大化の方法についても述べている。すなわち、目の色と髪の色各カテゴリにどのような数値を与えれば、目の色と髪の色との間の相関係数が最大になるか、という問題を示している。目の色のカテゴリ  $c_1$  に  $w_{1c_1}$ 、髪の色のカテゴリ  $c_2$  に  $w_{2c_2}$  という数値を与えたとき、相関係数は次式で与えられる。

$$\rho_2 = \frac{\sum_{c_1=1}^{C_1} \sum_{c_2=1}^{C_2} f_{c_1 c_2} w_{1c_1} w_{2c_2} - N \bar{y} \bar{x}}{\sqrt{\sum_{c_1=1}^{C_1} \sum_{c_2=1}^{C_2} f_{c_1 c_2} w_{1c_1}^2 - N \bar{y}^2} \sqrt{\sum_{c_1=1}^{C_1} \sum_{c_2=1}^{C_2} f_{c_1 c_2} w_{2c_2}^2 - N \bar{x}^2}}$$

ただし、

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{c_1=1}^{C_1} \sum_{c_2=1}^{C_2} f_{c_1 c_2} w_{2c_2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{c_1=1}^{C_1} \sum_{c_2=1}^{C_2} f_{c_1 c_2} w_{1c_1}$$

である。カテゴリに与える数値の原点は不定なので、 $\bar{x} = 0$ 、 $\bar{y} = 0$  という制約をおくと、 $\rho_2$  は行列を用いて、

$$\rho_2 = \frac{w_1' F w_2}{\sqrt{w_1' \Gamma_1 w_1} \sqrt{w_2' \Gamma_2 w_2}}$$

と表される。これを  $N\bar{x} = 1' F w_2 = 0$ 、 $N\bar{y} = 1' F' w_1 = 0$  という制約の下で最大とする解は次式を解くことで求められる。

$$\begin{aligned} F w_2 &= \rho_2 \Gamma_1 w_1 \\ F' w_1 &= \rho_2 \Gamma_2 w_2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

上式は分割表の行と列の対称性を意味し、双対尺度法 (西里, 1982) の基礎となっている。

以上をまとめると、

——相関係数最大化2——

Step 1:  $F' \Gamma_1^{-1} F w_2 = \rho_2^2 \Gamma_2 w_2$  を解き  $w_2$  を求める。

Step 2:  $w_1 = \frac{1}{\rho_2} \Gamma_1^{-1} F w_2$  により  $w_1$  を求める。

または、

Step 1:  $F \Gamma_2^{-1} F' w_1 = \rho_2^2 \Gamma_1 w_1$  を解き  $w_1$  を求める。

Step 2:  $w_2 = \frac{1}{\rho_2} \Gamma_2^{-1} F' w_1$  により  $w_2$  を求める。

となる。得られた  $\rho_2^2$  は相関係数の二乗に一致する。

### 1.6.3 主成分分析アプローチ

等質性分析 (Gifi, 1990) は、主成分分析等をその特殊な場合として持つ非常に一般的な方法である (詳しくは後の節で述べる)。等質性分析の考え方によれば、主成分分析は以下の値を、 $\|m\| = N$ 、 $1'm = 0$  という制約条件の下で最小化することになる。

$$S = \sum_{i=1}^I \|a_i x_i - m\|^2$$

ただし、 $x_i$  は標準化された変数  $i$  のデータベクトルである。また、 $\|A\|^2 = \text{tr } A' A$  である。質的データの場合には、 $x_i$  をダミー変数行列  $X_i$  で置き換えればよい。ただし、自由反応型データでは、その項目に反応していない個体もいるので、

$$S = \sum_{i=1}^I \|A_i (X_i w_i - m)\|^2 \quad (1.8)$$

を最小化する。(1.8) 式を  $w_i$  で偏微分すれば、

$$w_i = (X_i' X_i)^{-1} X_i' m$$

が得られる。これを (1.8) 式に代入し、 $\sum \|A_i m\| = \sum \|A_i 1\|$ 、 $\sum 1' A_i m = 0$  という制約条件を考慮すれば、次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^I X_i (X_i' X_i)^{-1} X_i' m = \lambda_1^2 \sum_{i=1}^I A_i m$$

以上をまとめると、

## ——主成分分析アプローチ1——

Step 1:  $DD_{cat}^{-1}D'm = \lambda_1^2 D_{obs}m$  を解き  $m$  を求める.

Step 2:  $w = D_{cat}^{-1}D'm$  により  $w$  を求める.

となる.  $S$  と  $\lambda_1$  の間には,  $S = (1 - \lambda_1^2)1'D1$  という関係がある.

分割表に対して主成分分析アプローチをとる方法は, 対応分析である (Benzécri, 1973; Greenacre, 1984; Benzécri, 1992; 大隅・ルバール・モリノウ・ワーウィック・馬場, 1994).

主成分分析では, 変数の線形和により新たな合成変数をつくり, その合成変数の分散を最大化する. そこで, 分割表  $F = (f_1 \cdots f_{G_2})$  の各列をそれぞれ変数と考える. ただし, 列の間で周辺度数  $\gamma_{2c_2}$  は異なるため, そのままでは周辺度数の大きな列が大きな重みを与えられてしまうことになる. そこで,  $f_{c_2}$  を  $\gamma_{2c_2}$  で除する. 対応分析では,  $\gamma_{2c_2}^{-1}f_{c_2}$  を列プロフィールと呼ぶ. 列プロフィールの線形和によりつくられた合成変数は,  $F\Gamma_2^{-1}a$  となる.  $1'F\Gamma_2^{-1}a = 0$  という制約をおけば,  $F$  の行についても周辺度数が異なることを考慮して, 合成変数の重みつき分散は次式で与えられる.

$$\lambda_2^2 = a' \Gamma_2^{-1} F' \Gamma_1^{-1} F \Gamma_2^{-1} a$$

$a$  に制約を課さなければ, この値の最大値は求められないので,  $a' \Gamma_2^{-1} a = 1$  という制約条件を課す. このとき  $a$  は,

$$\Gamma_2^{-1} F' \Gamma_1^{-1} F \Gamma_2^{-1} a = \lambda_2^2 \Gamma_2^{-1} a$$

を解くことにより求まる. 対応分析では,  $a$  は主軸と呼び,  $a$  からつくられた  $\Gamma_2^{-1}a = w_2$  を成分と呼ぶ. 成分を求めるためには,

$$\Gamma_2^{-1} F' \Gamma_1^{-1} F w_2 = \lambda_2^2 w_2$$

を解けばよい. なお, 上式の両辺に左から  $\Gamma_1^{-1}F$  を乗じると,

$$\Gamma_1^{-1} F \Gamma_2^{-1} F' \Gamma_1^{-1} F w_2 = \lambda_2^2 \Gamma_1^{-1} F w_2$$

となる.  $w_1 = \Gamma_1^{-1} F w_2$  とおけば, 次式が得られる.

$$\Gamma_1^{-1} F \Gamma_2^{-1} F' w_1 = \lambda_2^2 w_1$$

これは明らかに, 列プロフィールの代わりに,  $F$  を行の周辺度数で除した行プロフィールを用いて, 主成分分析アプローチをとった場合に得られる式であり, 行と列の双対性を示すものである.

以上をまとめると,

## ——主成分分析アプローチ2——

Step 1:  $\Gamma_1^{-1} F \Gamma_2^{-1} F' w_1 = \lambda_2^2 w_1$  を解き  $w_1$  を求める.

Step 2:  $w_2 = \Gamma_2^{-1} F' w_1$  により  $w_2$  を求める.

## 1.6.4 3つの方法の関係

ここでは, 以上述べた3つの方法の同等性を示す. まずダミー変数行列に対する手法が基本的に等しいことを示そう.

交互平均法1においてStep1とStep2を繰り返すということは, Step0の $w$ を $w^{(0)}$ と表せば,

$$\begin{aligned} w &= \prod (D_{cat}^{-1} D' D_{obs}^{-1} D) w^{(0)} \\ &= D_{cat}^{-1/2} \prod (D_{cat}^{-1/2} D' D_{obs}^{-1} D D_{cat}^{-1/2}) D_{cat}^{1/2} w^{(0)} \end{aligned}$$

となる. したがって乗べき法 (Golub & Van Loan, 1989) により,  $D_{cat}^{-1/2} D' D_{obs}^{-1} D D_{cat}^{-1/2}$  の固有ベクトルを求め, それを  $D_{cat}^{1/2} w$  としていることになる. すなわち交互平均法1は,

$$D' D_{obs}^{-1} D w = \theta_1^2 D_{cat} w$$

を解くことで  $w$  を求めることと同値である. 相関比最大化1と見比べれば, 明らかに同じ方法であることが分かる. さらに,  $1/\rho_1$  という係数を無視すれば, 相関比最大化1は相関係数最大化1と等しく, 相関係数最大化1は主成分分析アプローチ1と等しい. したがって, ダミー変数行列に対する手法は全て同等であることが分かる. また,  $\theta_1 = \eta_1 = \rho_1 = \lambda_1$  である.

次に分割表に対する手法が全て等しいことを示す. 交互平均法1と同様に考えれば, 交互平均法2は,

$$F' \Gamma_1^{-1} F w_2 = \theta_2^2 \Gamma_2 w_2$$

を解いて  $w_2$  を求めることと同値である. したがって相関比最大化2と等しい.  $1/\rho_2$  という係数を無視すれば, 相関比最大化2は相関係数最大化2と等しく, 相関係数最大化2は主成分分析アプローチ2と等しい. したがって, 分割表に対する手法も全て同等であり,  $\theta_2 = \eta_2 = \rho_2 = \lambda_2$  である.

さらに, ダミー変数行列  $D = (X_1 \ X_2)$  に対する手法と分割表  $F = X_1' X_2$  に対する手法が等しいことを示そう. 分割表を求めるには, アイテムカテゴリ型データである必要があ



るため、 $D_{obs} = 2I$  としてよい。相関比最大化1のStep 1によれば、アイテムカテゴリ型データにおいて解くべき式は、

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} (X_1 \ X_2) w = \eta_1^2 D_{cat} w$$

となる。 $X_1' X_1 = \Gamma_1$ ,  $X_2' X_2 = \Gamma_2$ であることを考慮すれば、

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & F \\ F' & \Gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 2\eta_1^2 \begin{pmatrix} \Gamma_1 & O \\ O & \Gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

が得られる。これは、以下のように書き直せる。

$$F w_2 = (2\eta_1^2 - 1) \Gamma_1 w_1$$

$$F' w_1 = (2\eta_1^2 - 1) \Gamma_2 w_2$$

以上の式は、 $2\eta_1^2 - 1 = \rho_2$  とすれば、分割表における相関係数最大化2の(1.6)式と同等である。したがって、TABLE 1.9 に示す手法は全て同等なものであると言える。

ところで上の議論では、相関係数最大化のStep 2における  $1/\rho_1$  や  $1/\rho_2$  を無視している。この係数の扱いに関してはいくつかの立場があるので、それらを以下にまとめる。ダミー変数行列における  $D, D_{obs}, D_{cat}$  はそれぞれ分割表における  $F, \Gamma_1, \Gamma_2$  の特殊な場合と見なせばよい。まず、どの立場においても、次式を満たす固有値  $\lambda^2$ 、ノルムが  $\sqrt{N}$  である固有ベクトル  $p$  を求める。

$$\Gamma_1^{-1/2} F \Gamma_2^{-1} F' \Gamma_1^{-1/2} p = \lambda^2 p \quad (1.9)$$

数量化Ⅲ類や双対尺度法、大隅・ルバール・モリノウ・ワーウィック・馬場(1994)の対応分析では、

$$w_1 = \Gamma_1^{-1/2} p, \quad w_2 = \frac{1}{\lambda} \Gamma_2^{-1} F' w_1 \quad (1.10)$$

により  $w_1, w_2$  を求める。一方、等質性分析や Carroll, Green and Schaffer (1986, 1987) の言う対応分析では、

$$w_1 = \Gamma_1^{-1/2} p, \quad w_2 = \Gamma_2^{-1} F' w_1 \quad (1.11)$$

となる。Carroll らは、 $w_1$  と  $w_2$  を同一の次元上にプロットし、比較を行うためには、

$$w_1 = \sqrt{\lambda + 1} \Gamma_1^{-1/2} p, \quad w_2 = \frac{1}{\lambda} \Gamma_2^{-1} F' w_1 \quad (1.12)$$

とすべきである、と主張している。これに対し、Greenacre (1989) は、プロットは、

$$w_1 = \lambda \Gamma_1^{-1/2} p, \quad w_2 = \frac{1}{\lambda} \Gamma_2^{-1} F' w_1 \quad (1.13)$$

によって行うべきである、と述べている。なお、行と列の対称性が得られるのは、(1.10)式と(1.13)式である。このように、TABLE 1.9 に示す手法は、(1.9)式を解くところまでは全く同一であり、その後の結果の基準の仕方や結果の見方などに若干の違いがある。

ここで、尺度化法の数学的な性質について、いくつか説明を加えておく。

まず(1.9)式は、 $p = \Gamma_1^{1/2} \mathbf{1}$  のとき最大固有値  $\lambda^2 = 1$  をとる。これは、 $F \mathbf{1} = \Gamma_1 \mathbf{1}$ ,  $F' \mathbf{1} = \Gamma_2 \mathbf{1}$  であることに注意すれば、

$$\Gamma_1^{-1/2} F \Gamma_2^{-1} F' \Gamma_1^{-1/2} \mathbf{1} = \Gamma_1^{-1/2} F \Gamma_2^{-1} F' \mathbf{1} = \Gamma_1^{-1/2} \mathbf{1} = \lambda^2 \Gamma_1^{1/2} \mathbf{1}$$

となることから分かる。また、 $\lambda^2$  は最大化された相関比あるいは相関係数の二乗なのでその最大値は1である。このとき、 $w_1 = \mathbf{1}$  となるが、 $\mathbf{1}' \Gamma_1 w_1 = 0$  という制約条件を課している。この解は不適切である。したがって、2番目に大きい固有値とそれに対応する固有ベクトルを採用することになる。第2固有ベクトルは第1固有ベクトル  $\Gamma_1^{1/2} \mathbf{1}$  に直交するよう求められるため、 $w_1' \Gamma_1 \mathbf{1} = p' \Gamma_1^{-1/2} \Gamma_1 \mathbf{1} = p' \Gamma_1^{1/2} \mathbf{1} = 0$  が必ず成り立つ。これによって構成された  $w_1$  を第I軸と呼べば、3番目、4番目に大きい固有値に対応する固有ベクトルから、第II軸、第III軸が構成できる。

次に、不適切な解も含め、(1.9)式を満たす固有ベクトルを横に並べた  $C_1 \times R$  行列を  $P$ 、対応する固有値を対角要素とする  $R \times R$  対角行列を  $A^2$  とする。(1.9)式より、 $P$  と  $A^2$  は、 $\Gamma_1^{-1/2} F \Gamma_2^{-1} F' \Gamma_1^{-1/2}$  の特異値分解によって得られることが分かる。

$$\Gamma_1^{-1/2} F \Gamma_2^{-1} F' \Gamma_1^{-1/2} = \frac{1}{N} P A Q' \quad (1.14)$$

そして、(1.10)式では、

$$W_1 = \Gamma_1^{-1/2} P, \quad W_2 = \Gamma_2^{-1/2} Q$$

によって各軸を求め、(1.11)式では、

$$W_1 = \Gamma_1^{-1/2} P, \quad W_2 = \Gamma_2^{-1/2} Q A$$

によって各軸を求めていることになる。(1.10)式による  $W_1, W_2$  を用いれば、(1.14)式より、

$$F = \frac{1}{N} \Gamma_1^{1/2} P A Q' \Gamma_2^{1/2} = \frac{1}{N} \Gamma_1 W_1 A W_2' \Gamma_2$$

が得られる。要素ごとに表せば次式となる。

$$f_{c_1 c_2} = \frac{\gamma_{1c_1} \gamma_{2c_2}}{N} \left( \sum_{r=1}^R \lambda_r w_{1c_1,r} w_{2c_2,r} \right) = \frac{\gamma_{1c_1} \gamma_{2c_2}}{N} \left( 1 + \sum_{r=2}^R \lambda_r w_{1c_1,r} w_{2c_2,r} \right) \quad (1.15)$$

これは解から元のデータを復元するための式であり、フィッシャーの等式と呼ばれる (Lancaster, 1969)。 $\gamma_{1c_1}\gamma_{2c_2}/N$  は、分割表の行と列が独立である場合の期待度数である。したがって尺度化法は、行と列のいわば交互作用をとらえようとする方法であると言える。

このことは別の観点からも示される。分割表の連関の程度を表す指標として  $\chi^2$  値がある。 $\chi^2$  値は、(1.14) 式を用いれば次のように変形される。

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{c_1, c_2} \frac{\left( \frac{f_{c_1 c_2}}{N} - \frac{\gamma_{1c_1}\gamma_{2c_2}}{N} \right)^2}{\frac{\gamma_{1c_1}\gamma_{2c_2}}{N}} = N \sum_{c_1, c_2} \frac{f_{c_1 c_2}^2}{\gamma_{1c_1}\gamma_{2c_2}} = N \\ &= N \text{tr} \mathbf{F}_1^{-1/2} \mathbf{F} \mathbf{F}_2^{-1} \mathbf{F}' \mathbf{F}_1^{-1/2} = N \\ &= N \text{tr} \mathbf{A}^2 = N = N \sum_{r=2}^R \lambda_r^2\end{aligned}\quad (1.16)$$

すなわち、行と列の連関の指標である  $\chi^2$  値を、相関比あるいは相関係数の二乗の和に分解していることになる。

Gilula & Haberman (1986; 1988) は、 $f_{c_1 c_2}$  が多項分布に従うという仮定の下で、(1.15) 式の  $w_{1c_1}, w_{2c_2}$  を最尤推定する方法を提案している。また (1.15) 式との関連において吉澤 (1975) は、岩坪 (1974) の3次相関係数最大化の数量化法が、3重分割表における交互作用をとらえようとする方法であることを示し、 $\chi^2$  値によって当てはまりを検定することを提案している。さらに吉澤 (1976) は、その考え方を一般の多重分割表に対して拡張している。

## 1.7 尺度化法の性質と一次元尺度構成

1.5.1 節では、尺度解析法は広義の一次元尺度構成法あるいは単数の多次元尺度構成法である、と述べた。ここでは、その理由について説明を加える。ただし前節までで、尺度解析法と等質性分析が同等であることが示された。そこで、以下では尺度解析法の代わりに主として等質性分析を用いて話をすすめる。

等質性分析では、以下の値を最小化することにより  $m$  と  $w$  が求められる。

$$S = \sum_{i=1}^I \|A_i(X_i w_i - m)\|^2 \quad (1.17)$$

$X_i$  は項目  $i$  のダミー変数行列であるが、これは  $N$  人の個体に対する直接尺度値を並べたもの、と見なすことができる。そして  $X_i w_i$  は、その直接尺度の水準によって許される変換を施したもの、と見ることができる。例えば、項目  $i$  が順序尺度の水準にある直接尺度ならば、 $w_i$  の要素間に  $w_{i1} \leq w_{i2} \leq \dots \leq w_{iC_i}$  といった制約を課すことで、 $X_i w_i$  は順序を保ったまま変換された直接尺度値となる。 $m$  は  $N$  人の個体に対する間接尺度値を並べたもので

ある。 $\|A_i(X_i w_i - m)\|^2$  を最小にする、ということは、直接尺度値と間接尺度値の間の違いや矛盾がなるべく少なくなるよう、直接尺度値を変換すると同時に、間接尺度値を求めようとするのであると解釈できる。仮に項目が1つ、すなわち直接尺度が1つだけの場合には、 $w_i$  はその尺度水準で許されるどのような変換を用いてもよい。そして、間接尺度値  $m$  は変換された直接尺度値  $X_i w_i$  そのものとすればよい。項目が複数の場合、等質性分析では変換された直接尺度値  $X_i w_i$  と間接尺度値  $m$  との間の矛盾を、全ての直接尺度あるいは項目 ( $i=1, \dots, I$ ) にわたって小さくしようとする。いくつかの直接尺度の間に矛盾がある場合でも、(1.17) 式では全ての項目を対等に扱っており、矛盾のない直接尺度だけを選び出すといった機能は持っていない。以上のことから、(1.17) 式により構成された  $m$  は広義の一次元尺度であると言える。

1.6.3 節で述べたように、 $S = (1 - \lambda_1^2) \mathbf{1}' \mathbf{D} \mathbf{1}$  という関係があり、 $\lambda_1$  は数量化Ⅲ類における最大化された相関係数に一致する。したがって、 $S$  は  $0 \leq S \leq \mathbf{1}' \mathbf{D} \mathbf{1}$  という範囲の値をとる。(1.17) 式において最小化された  $S$  の値が0に近いときには、構成された間接尺度は、全ての直接尺度と矛盾が小さいということを意味する。逆に、 $\mathbf{1}' \mathbf{D} \mathbf{1}$  に近いときには、ある変換された直接尺度  $X_i w_i$  と間接尺度値  $m$  との間には大きな矛盾がある、ということになる。(1.17) 式の  $S$  が大きいとき、それを小さくする1つの方法は、ベクトル  $w_i$  や  $m$  の代わりに行列  $W_i$  や  $M$  を用いることである。

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i=1}^I \|A_i(X_i W_i - M)\|^2 \\ &= \sum_{r=1}^R \sum_{i=1}^I \|A_i(X_i w_{ir} - m_r)\|^2\end{aligned}\quad (1.18)$$

ただし、 $M$  に対して  $\sum M' A_i M = \sum \mathbf{1}' A_i \mathbf{1}$ 、 $\sum M' A_i \mathbf{1} = 0$  といった制約を課す。この  $S$  を最小化するためには、まず (1.17) 式により  $w_{i1}$ 、 $m_1$  を求め、次に  $\sum m'_1 A_i m_2 = 0$  という制約の下で、(1.17) 式により  $w_{i2}$ 、 $m_2$  を求めていけばよい。求められた解は、順に第Ⅰ軸、第Ⅱ軸、... となる。 $X_i W_i$  は  $i$  番目の直接尺度に基づき、 $R$  次元空間上に個体をプロットしたものと考えることができる。一方、 $M$  は間接尺度値によって  $R$  次元空間上に個体を配置したものである。(1.18) 式を最小化することとは、 $R$  次元空間上に個体を配置することで、直接尺度と間接尺度との矛盾を小さくしようとするのである、と言える。すなわち、(1.18) 式により求められた  $M$  は単数の  $R$  次元尺度である。各次元の座標  $m_r$  は順次求められていくが、それらを狭義の一次元尺度と見なし解釈を行うことはできない。なぜなら、



ある正規直交行列  $T$  を用いて、 $W_i$  と  $M$  を変換しても、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I \|A_i(X_i W_i T - M T)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^I \text{tr}(X_i W_i - M)' A_i (X_i W_i - M) T T' \\ &= S \end{aligned} \quad (1.19)$$

というように、 $W_i$  と  $M$  には回転に対する不定性があるためである。個々の軸の数値よりも、 $R$  次元空間上にプロットされたカテゴリや個体が、どのような布置を描くのが重要となる。例えば、磯山 (1993) は数量化Ⅲ類の結果を3次元表示し、それを様々な角度から眺めながら項目や個体の構造を探る方法を、多くの例題を使いながら述べている。

尺度解析法や等質性分析を含めた尺度化法が、広義の一次元尺度構成法あるいは単数の多次元尺度構成法である、ということ、人工データによってさらに例示しよう。

第1章のTABLE 1.7 に示した完全尺度構造を持つデータに対し、数量化Ⅲ類を行った結果がTABLE 1.11 である。個体に与えられた数量  $m$  を見ると、上の行から下の行に向かっ

TABLE 1.11 完全尺度構造を持つデータに対する数量化Ⅲ類の結果

項目	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
カテゴリ	◎	◎	◎	◎	○	○	○	○	△	△	△	△	×	×	×	×
個体	1.43	1.42	1.35	1.25	1.05	0.80	0.50	0.17	0.17	0.50	0.80	1.05	1.35	1.42	1.48	1.48
1	1.43	1	1	1	1											
2	1.31		1	1	1	1										
3	1.15			1	1	1	1									
4	0.93				1	1	1	1								
5	0.65					1	1	1	1							
6	0.34						1	1	1	1						
7	0.00							1	1	1	1					
8	-0.34								1	1	1	1				
9	-0.65									1	1	1	1			
10	-0.93										1	1	1	1		
11	-1.15											1	1	1	1	
12	-1.31												1	1	1	1
13	-1.43													1	1	1

て値が小さくなっている。この値に基づいて個体を並べ替えれば、望んだ通りの並び順が得

られる、ということになる。カテゴリに与えられた数量  $w$  は、左から右に向かって値が大きくなっているため、カテゴリについても同様のことが言える。すなわち、狭義の一次元性を持つデータに対しては、適切な一次元尺度が構成できたことになる。

次に、複数の一次元性を持つデータに対して尺度化法を行った結果を示す。データはTABLE 1.12 に示す人工データ1である。個体数  $N$  は13であり、8項目はそれぞれ4カテゴリを

TABLE 1.12 人工データ1

n	項目							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	2	1	1	1
2	2	1	1	1	2	2	2	1
3	2	2	1	1	3	3	2	2
4	2	2	2	1	2	2	1	1
5	2	2	2	2	3	3	3	3
6	3	2	2	2	2	2	2	2
7	3	3	2	2	1	1	1	1
8	3	3	3	2	3	2	2	2
9	3	3	3	3	4	4	4	3
10	4	3	3	3	4	4	3	3
11	4	4	3	3	3	3	3	2
12	4	4	4	3	4	4	4	4
13	4	4	4	4	4	3	3	3

持つ、表中の数字は選択されたカテゴリを表す。項目1から項目4を取り出し、ダミー変数表示した後、カテゴリについて並べかえを行うとTABLE 1.13 が得られ、これら4項目が完全尺度構造を持つことが分かる。ただし、見やすさのため、表中で0は省略してある。また、項目5から項目8についてもダミー変数表示した後、個体とカテゴリについて並べかえを行うとTABLE 1.14 が得られ、これら4項目もやはり完全尺度構造を持つことが分かる。しかし、TABLE 1.13 とTABLE 1.14 では、個体の並び順が異なるため、2つの項目群が同じ次元にあるとは言えない。すなわち、TABLE 1.12 のデータは、2つの一次元構造を持ったデータと言える。

人工データに対して数量化Ⅲ類を行った結果がTABLE 1.15 である。個体に与えられた数量に基づいて並べ替えた個体の順序は、TABLE 1.13 とTABLE 1.14 のどちらの並び順とも一致しない。カテゴリに与えられた数量は、どの項目についても絶対値が大きく、狭義の一次元性を持つ項目だけを選び出してはいるとは言えない。このことは、数量化Ⅲ類が広義

TABLE 1.13 人工データ1 (項目1から項目4)

	1	2	3	4	項目
n	1	1	1	1	カテゴリ
1	1	1	1	1	
2		1	1	1	
3			1	1	
4				1	
5				1	
6				1	
7				1	
8				1	
9				1	
10				1	
11				1	
12				1	
13				1	

TABLE 1.14 人工データ1 (項目5から項目8)

	5	6	7	8	項目
n	1	1	1	1	カテゴリ
7	1	1	1	1	
1		1	1	1	
4			1	1	
2				1	
6				1	
8				1	
3				1	
11				1	
5				1	
13				1	
10				1	
9				1	
12				1	

TABLE 1.15 人工データ1に対する数量化Ⅲ類の結果

項目	1	2	8	5	7	6	4	3	6	5	1	7	3	2	4	8	1	5	2	6	3	7	8	4	1	2	6	5	4	7	3	8
カテゴリ	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
個体	1.52	1.20	1.41	1.19	1.17	1.16	1.16	0.81	0.85	0.80	0.72	0.70	0.66	0.43	0.18	0.16	0.00	0.35	0.40	0.77	0.88	0.94	1.26	1.33	1.36	1.39	1.42	1.44	1.59	1.76		
1	1.38	1	1	1	1	1	1	1																								
2	1.17		1	1	1		1	1	1		1	1																				
4	1.07			1	1	1	1	1		1	1	1																				
7	0.73			1	1			1		1	1	1	1	1																		
6	0.68			1				1		1	1	1	1	1	1																	
3	0.59					1	1			1	1	1	1	1	1	1																
8	0.17							1		1		1	1	1	1	1	1					1										
5	0.05									1	1	1	1			1	1	1	1													
11	-0.80														1	1	1	1	1	1	1		1	1	1							
9	-1.02															1	1	1	1	1	1	1				1	1	1				
10	-1.15																			1	1	1	1	1	1	1						
13	-1.29																				1	1	1	1	1	1	1	1				
12	-1.59																								1	1	1	1	1	1		



の一次元尺度構成法であり、全ての項目を用いて間接尺度を構成しようとしている、ということを示している。

それでは、第Ⅱ軸や第Ⅲ軸の結果はどうなるであろうか。参考のために、完全尺度構造を持った TABLE 1.7 の結果を FIGURE 1.12, FIGURE 1.13 に示す。このデータに限らず、一般に、完全尺度構造を持つデータに対し、第Ⅰ軸と第Ⅱ軸を用いてカテゴリをプロットすると、放物線が描かれることが解析的に知られている(岩坪, 1987)。この現象は、Horseshoe 効果あるいは Guttman 効果と呼ばれ (Greenacre, 1984), Guttman (1950b) はこの形状を intensity と名付けている。また、第Ⅰ軸と第Ⅲ軸を用いて図を描けば、3 次曲線が得られることが知られており、Guttman は closure と呼んでいる。真に完全尺度構造を持つデータに対しては、このように第Ⅱ軸以降を求める必要性はない。しかし現実のデータでは、一次元性を持つことが知られている場合でも、真に完全尺度構造を満たすことは少ない。複数の軸を求めることは、放物線や 3 次曲線に沿ってカテゴリの順序をより明確にする、という意味を持つ。水田・馬場 (1993) はカテゴリの布置に Principal Curves を当てはめることで順序を見出しやすくする方法を提案している。

2 つの一次元構造を持つ TABLE 1.12 のデータに対し、数量化Ⅲ類を適用し、第Ⅰ軸と第Ⅱ軸の数量を使ってカテゴリをプロットしたものを FIGURE 1.14 に示す。FIGURE 1.14 では、32 のカテゴリが 1 つの放物線上にあるように見え、8 項目の間の区別はつかない。また、第Ⅰ軸に沿って項目 1 から項目 4 のカテゴリが並び、第Ⅱ軸に沿って項目 5 から項目 8 のカテゴリが並び、といったこともない。したがって、2 つの軸を求めても 2 つの一次元尺度を構成することは不可能である。その上、この図だけに基づけば、8 つの項目全てが一次元性をなす、という誤った解釈を導くことになる。数量化Ⅲ類では、重要なデータ構造が第Ⅰ軸から順に現れるわけではない、という指摘は大津 (1988; 1992; 1996) や丘本 (1992a) によってなされている。

FIGURE 1.15 は第Ⅰ軸と第Ⅲ軸の結果を示したものである。FIGURE 1.15 ではカテゴリの布置に 2 つの系列があることが読みとれ、各系列がそれぞれの項目群に対応することが分かる。

人工データ 1 は個体数が 13 であるため、第  $13 - 1 = 12$  軸まで求めることができる。TABLE 1.16 と TABLE 1.17 は、それぞれカテゴリと個体に与える数量を第 12 軸まで示したものである。ただし、カテゴリ 12 とは、項目 1 のカテゴリ 2 を意味する。TABLE 1.16 では、項目 1 から項目 4 に対する数量の絶対値が大きく、他の項目に対する数量が小さい軸、あるいは項目 5 から項目 8 に対する数量の絶対値が大きく、残りの項目に対する数量が小さ

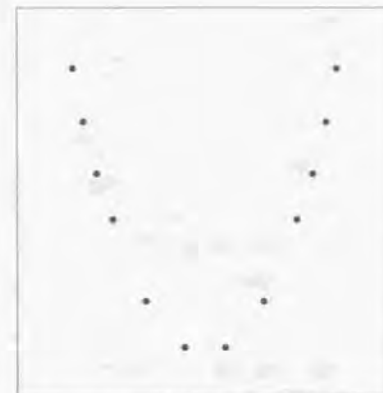


FIGURE 1.12 TABLE 1.2 に対する数量化Ⅲ類 (第Ⅰ軸対第Ⅱ軸) の結果

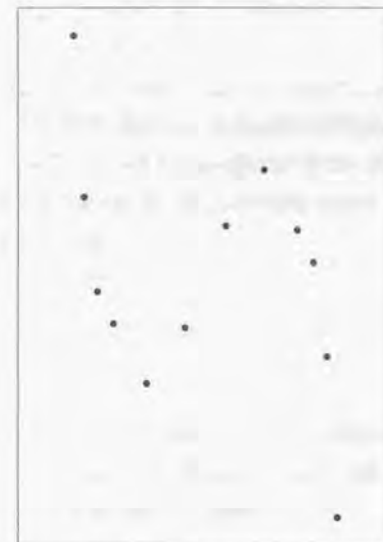


FIGURE 1.13 TABLE 1.2 に対する数量化Ⅲ類 (第Ⅰ軸対第Ⅲ軸) の結果



FIGURE 1.14 人工データ1に対する数量化Ⅲ類  
(第Ⅰ軸対第Ⅱ軸)の結果

い軸は見当たらない。さらに TABLE 1.17 では、TABLE 1.13 や TABLE 1.14 に示す個体の並び順に従って数量が与えられている軸はない。したがって人工データ1の場合には、各軸の座標値を個々に調べたのでは、2つの尺度は構成できないことになる。むしろ、2つの一次元構造を持つ、というデータ構造を知るためには、第Ⅰ軸と第Ⅲ軸を用いた2次元空間上での位置が重要である。以上のことから、尺度化法が単数の多次元尺度構成法であることが例示されたと言えよう。

## 1.8 まとめ

本章では、従来の尺度構成法のいくつかを概観し、それらのほとんどが広義の一次元尺度あるいは多次元尺度の構成法であることを説明した。広義の一次元尺度とは、全ての直接尺度との矛盾をなるべく少なくするよう構成された間接尺度のことである。多次元尺度とは、広義の一次元尺度では直接尺度間の矛盾を説明しきれないときに、直線の拡張としての多次元空間上に個体や刺激を位置づけるものである。したがって、各次元の座標値ではなく多次元空間上での位置が重要になる。これに対して、狭義の一次元尺度とは、矛盾の少ない直接



FIGURE 1.15 人工データ1に対する数量化Ⅲ類  
(第Ⅰ軸対第Ⅲ軸)の結果

尺度だけを選び出して構成された尺度のことである。次章以降では、従来の手法では不可能である狭義の一次元尺度の構成法を提案する。この新たな手法は、単刺激データ(反応型データ)を基にし、尺度解析法と関連がある。そこで、尺度解析法・数量化Ⅲ類・等質性分析について説明し、それらの同等性を示した。さらに、それらの手法が広義の一次元尺度あるいは多次元尺度の構成法であり、狭義の一次元尺度の構成には適していないことを人工データを用いて例示した。



TABLE 1.16 カテゴリに与える数量 (人工データ1)

カテゴリ	軸											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	-1.52	3.09	0.65	0.31	-2.68	1.27	0.49	-0.61	5.59	-0.42	0.56	1.96
12	-0.80	-0.57	1.10	-0.19	0.57	-1.63	0.92	0.86	-1.31	0.45	0.92	0.20
13	-0.16	-0.59	-1.89	-0.30	0.26	0.71	-1.02	0.68	0.73	-0.79	0.42	-1.38
14	1.33	0.38	0.63	0.42	-0.16	0.60	-0.03	-1.40	-0.82	0.44	-1.48	0.69
21	-1.41	1.94	1.06	-0.87	-1.31	0.31	-1.06	0.29	0.16	3.06	0.72	-1.75
22	-0.66	-1.18	0.54	0.13	1.20	-1.20	0.94	-0.03	1.27	-1.18	-1.26	0.33
23	0.35	-0.10	-1.90	-0.24	-1.04	-0.33	-0.55	0.72	-0.93	-0.17	0.17	1.61
24	1.36	0.40	1.10	0.73	0.65	1.83	0.19	-1.11	-0.56	-0.25	0.98	-1.42
31	-1.16	0.81	1.34	-0.90	-1.07	0.44	0.27	2.00	-0.35	0.20	-1.39	-0.40
32	-0.70	-0.64	-0.77	1.17	1.50	-1.00	0.54	-0.90	0.64	0.34	-0.41	-0.70
33	0.77	-0.54	-0.81	-0.94	-1.81	0.01	-0.22	-1.13	-0.48	-0.51	1.14	0.25
34	1.59	1.14	1.17	0.88	2.23	1.34	-1.05	1.06	0.20	0.04	0.63	1.50
41	-1.16	0.66	1.10	-0.62	-0.15	-0.50	0.33	0.34	-0.86	-1.36	0.00	0.72
42	-0.45	-1.17	-1.23	0.73	0.59	-0.16	0.36	1.24	2.08	0.36	0.56	0.56
43	1.26	0.42	-0.37	-0.96	-0.56	-0.23	1.06	-1.14	-0.36	-0.09	-0.60	-1.33
44	1.42	0.36	2.01	3.39	0.48	0.56	-4.90	1.77	-0.07	-2.54	0.96	0.20
51	-0.81	0.71	-3.39	3.21	0.61	1.47	1.36	1.94	-3.89	0.56	-2.21	-1.81
52	-1.19	0.61	0.44	-0.57	0.64	-0.41	-1.04	-1.62	0.74	0.03	-0.56	-1.09
53	0.00	-1.56	0.51	-0.01	-0.98	0.83	1.53	0.47	0.09	0.36	1.88	1.01
54	1.39	0.77	-0.11	-0.22	0.19	-0.79	-0.84	0.67	0.14	-0.52	-0.77	0.53
61	-1.17	1.90	-1.37	1.76	-1.04	1.37	0.92	0.67	0.85	0.07	-0.82	0.07
62	-0.85	-0.64	-0.08	-1.04	1.04	0.04	-1.74	-1.37	-0.65	0.37	1.11	0.70
63	0.40	-0.99	1.38	1.22	-0.59	0.21	0.89	0.82	0.07	-0.51	0.31	-1.21
64	1.39	0.91	-0.82	-1.42	0.09	-1.24	0.52	0.30	0.21	0.15	-1.35	0.64
71	-1.17	1.34	-0.78	1.25	0.17	-0.19	0.79	-1.11	-0.23	-1.96	0.84	1.40
72	-0.72	-1.05	0.29	-1.33	0.25	1.04	-1.13	1.15	-0.40	0.50	-1.34	0.25
73	0.88	-0.56	0.71	1.33	-1.10	-0.74	-0.02	-1.11	0.02	1.49	-0.49	-0.03
74	1.44	1.22	-0.83	-1.86	1.44	-0.31	1.11	1.59	1.11	-1.02	2.40	-2.55
81	-1.20	1.20	-0.22	0.42	0.14	-0.30	-0.06	-0.53	-1.49	0.16	0.85	-0.31
82	-0.18	-1.52	0.17	-0.71	-0.39	1.90	0.18	-0.51	0.40	-1.34	-1.14	-0.19
83	0.91	-0.16	-0.03	0.70	-0.75	-2.13	-0.83	0.96	0.97	0.53	0.21	-0.20
84	1.76	1.91	0.32	-1.63	3.98	2.12	2.80	0.35	0.46	2.62	0.31	2.79
固有値	0.819	0.467	0.426	0.312	0.247	0.196	0.168	0.117	0.099	0.065	0.045	0.039

TABLE 1.17 個体に与える数量 (人工データ1)

個体	軸											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-1.38	2.11	0.42	0.17	-1.33	0.56	0.20	-0.21	1.76	-0.11	0.12	0.38
2	-1.17	0.54	0.96	-1.14	0.03	-0.29	-1.07	0.41	-1.66	1.67	0.19	-1.07
3	-0.59	-0.99	1.23	-0.54	-0.29	0.31	1.20	1.86	-0.43	-1.41	-1.19	0.45
4	-1.07	0.14	0.25	0.12	1.29	-1.47	0.21	-1.60	-0.75	-1.54	0.88	0.80
5	-0.05	-1.25	0.42	1.14	0.11	-1.43	1.17	0.52	1.19	1.74	0.90	-0.02
6	-0.68	-1.13	-0.49	-0.43	1.28	0.47	-1.04	-0.82	1.58	0.00	-1.66	-0.97
7	-0.73	0.49	-2.21	1.79	0.30	0.65	0.56	0.67	-1.22	0.14	-0.47	-0.36
8	-0.17	-1.31	-0.95	-0.86	-0.52	1.35	-0.95	0.13	0.00	0.24	1.54	1.79
9	1.02	0.35	-1.29	-1.17	-0.55	-1.22	-0.23	0.96	0.55	-1.19	0.95	-1.55
10	1.15	0.21	-0.52	-0.30	-1.29	-1.37	-0.28	-0.78	-0.50	0.63	-1.88	1.38
11	0.80	-0.72	0.64	0.24	-1.24	1.24	1.09	-1.86	-0.65	-0.21	0.35	-1.42
12	1.59	1.31	0.21	-0.91	1.98	0.94	1.15	0.12	0.15	0.67	0.07	0.55
13	1.29	0.25	1.31	1.89	0.24	0.25	-2.01	0.61	-0.02	-0.65	0.20	0.04
固有値	0.819	0.467	0.426	0.312	0.247	0.196	0.168	0.117	0.099	0.065	0.045	0.039





## 第2章

### 一般化等質性分析と尺度構成法

第1章では、尺度構成法の考え方や、尺度構成法で扱うデータの概略を説明した。そして、従来提案されていた多くの尺度構成法が、広義の一次元尺度あるいは単数の多次元尺度の構成法であることを述べた。実用的な狭義の一次元尺度あるいは複数の一次元尺度の構成法は、ほとんどない、と言ってよい。しかし現実には、狭義の一次元尺度や複数の一次元尺度が必要な場面も多い。それらを構成することで、測定の対象となる概念が明確になるからである。また、広義の一次元尺度や多次元尺度は解釈が難しいことが多いが、狭義の一次元尺度は解釈が容易であり、扱いやすいという利点を持つ。そこで、単数の多次元尺度構成法の結果を利用し、複数の一次元尺度を構成する、ということが行われてきた。因子分析法における因子の単純構造への回転が、その代表的な例である。しかし二次分析が危険をはらんだものであることは、既に述べたとおりである。したがって、狭義の一次元尺度や複数の一次元尺度の構成法が求められていると言える。

本章では、TABLE 1.5 に示す全ての尺度に対応した、新たな尺度構成法を提案する。この新しい方法は、TABLE 1.4 の分類に従えば、記述的な方法であり、個体と刺激に尺度値を与える方法である。そしてその特別な場合として、TABLE 2.1 の尺度化法を含む。

実際に、新たな尺度構成法を提案する前に、等質性分析についてさらに説明を加えておく。先に述べたように、尺度化法あるいは等質性分析は特殊な場合となるため、その性質を述べておくことが重要だからである。

#### 2.1 等質性分析とは

等質性分析は、主としてオランダで発展した手法である。その考え方は、必ずしも質的データに限らず、一般の多変量データに対しても適用できる。特別な場合として、主成分分析、回帰分析、正準判別分析、正準相関分析、数量化Ⅰ類、数量化Ⅱ類、数量化Ⅲ類といった

いくつかの多変量解析の手法を含む非常に一般的な手法である。

等質性分析の基本的な評価関数は次式のように表される。

$$S(\{W_i\}, M) = \sum_{i=1}^I \|A_i(X_i W_i - M)\|^2 \quad (2.1)$$

$X_i$  は  $N \times C_i$  行列であり、必ずしもダミー変数行列でなくともよい。したがって、 $C_i$  はカテゴリ数に限る必要はない。 $A_i$  はあらかじめ与えられる計量行列であり、 $X_i$  の行に並んだ個体に対して、何らかの重みづけを行いたいときに用いられる。多くの場合  $A_i = I$  となる。 $C_i \times R$  行列  $W_i$  と  $N \times R$  行列  $M$  は、 $S$  を最小化することにより求められる。制約がなければ、明らかに  $S=0$  が最小値となるため、 $W_i$  や  $M$  に対し、何らかの制約が課せられる。

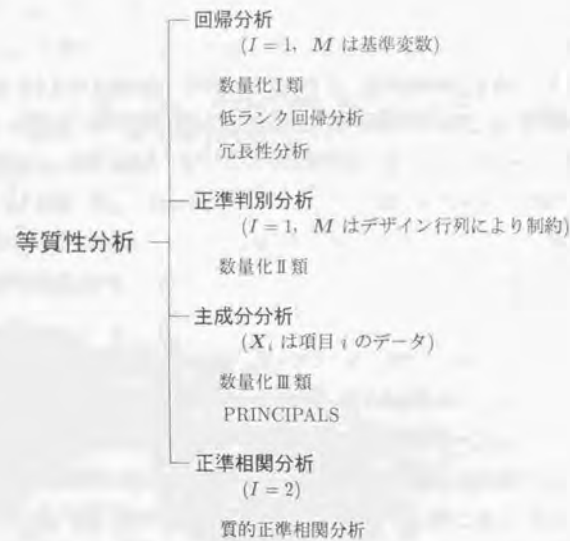


FIGURE 2.1 等質性分析と多変量解析

等質性分析の意味は以下のとおりである。データ  $X_i$  によって張られる空間の  $R$  次元部分空間  $S_i$  の基底は、 $X_i W_i$  によって得られる。部分空間  $S_1, \dots, S_I$  が全て等しい状態は、完全に等質である、と呼ばれる。完全に等質であるときの部分空間の基底は、 $X_1 W_1 = \dots =$

$X_I W_I = M$  と表すことができる。現実のデータでは、完全に等質な状態が得られることはほとんどないが、なるべく等質な状態に近づけることが目的である。そこで、各部分空間の基底  $X_i W_i$  と  $M$  との差を最小化するのである。何を、なぜ、等質な状態に近づけるのか、ということは、データと分析の目的により異なるため、一般的なことは言えない。次節では、データと目的を特定することで、等質性分析が回帰分析、正準判別分析、主成分分析、正準相関分析と同等であることを説明する。なお、等質性分析と多変量解析との関係については、de Leeuw(1984) や Gifi(1990) に詳しい。

## 2.2 等質性分析と多変量解析

### 2.2.1 回帰分析

まず、 $M$  は基準変数として既に与えられている場合を考える。 $I=1$  とし、 $C$  個の説明変数から成るデータを  $X$  と見なす。ただし、1つの説明変数は全ての要素が1であるとすると、このとき等質性分析は、最小二乗法を用いた(多変量)回帰分析となる。

$$S(W) = \|XW - M\|^2 \quad (2.2)$$

$W$  は回帰係数あるいは回帰行列であり、 $W = (X'X)^{-1}X'M$  により求まる。 $R=1$  のとき、

$$r^2 = 1 - \frac{\min S}{m'(I - 1(I'1)^{-1}1)m}$$

は決定係数、あるいは重相関係数の二乗となる。また、 $R=1$  とし、 $X$  をダミー変数行列とすれば、数量化I類となる。 $X$  がアイテムカテゴリ型データのダミー変数行列のときには、 $X'X$  の逆行列が求まらないので、ムーアペンローズ逆行列を用いればよい(岩坪, 1987)。 $R>1$  のときには、(2.2) 式の回帰係数  $W$  に対し、 $C \times T$  行列  $A$ 、 $R \times T$  行列  $B$  を用いて  $W = AB'$  というランク制約が課せられることもある。ただし、 $T < \min(C, R)$  である。

$$S(A, B) = \|XAB' - M\|^2 \quad (2.3)$$

これは低ランク回帰分析(reduced-rank regression)(Izenman, 1975)と呼ばれる手法である。また、(2.3) 式は冗長性分析(redundancy analysis)(van den Wollenberg, 1977)の基準であるとも言える。冗長性分析とは、 $M$  が与えられたときの  $X$  の冗長性係数  $R^{-1} \text{tr} A' X' M' M X A$  を最大とする  $A$  を求める手法である。(2.3) 式を  $B$  に関して最小化すれば、

$$B = (A' X' X A)^{-1} A' X' M$$



となる。これを(2.3)式に代入し、 $A'X'XA = NI$ という制約条件を課せば、

$$S(A) = \text{tr} M'M - N^{-1} \text{tr} A'X'MM'XA$$

が得られ、冗長性分析に一致する。 $X$ と $M$ がダミー変数行列であれば、質的データに対する冗長性分析 (Israëls, 1984; Israëls, 1987; van der Burg & de Leeuw, 1990) となる。

## 2.2.2 正準判別分析

回帰分析の特殊な場合として、基準変数として個体のグループがあらかじめ与えられている場合を考える。 $G$ 個のグループがあるとき、グループを表す $N \times G$ デザイン行列を $F$ とする。 $F$ の各要素 $f_{ng}$ は、個体 $n$ がグループ $g$ に属するとき1、そうでなければ0という値をとる。このとき、次式は正準判別分析となる。

$$S(W, M) = \|XW - FM\|^2 \quad (2.4)$$

このことは、以下のように示される。正準判別分析は、グループ内変動を最も小さくする合成変数 $XW$ を見出す方法である。ただし、合成変数の平均は0 ( $1'XW = 0$ ) という制約をおく。各グループの合成変数の平均は、 $(F'F)^{-1}F'XW$ によって表されるので、グループ内変動は、 $\text{tr} W'X'F(F'F)^{-1}F'XW$ となる。合成変数の全体変動は、 $\text{tr} W'X'XW$ である。 $W'X'XW = NI$ という条件の下で、グループ内変動を最大にする $W$ は、

$$X'F(F'F)^{-1}F'XW = X'XW\Delta$$

を解くことによって求まる。一方、(2.4)式の $S(W, M)$ を $M$ について最小化すれば、 $M = (F'F)^{-1}F'XW$ となる。これは各グループの合成変数の平均である。これを(2.4)式に代入すれば、次式が得られる。

$$S(W) = \text{tr} W'X'XW - \text{tr} W'X'F(F'F)^{-1}F'XW$$

これを最小にする $W$ は明らかに正準判別分析で得られるものと同じである。具体的には、

$$(X'X)^{-1/2}X'F(F'F)^{-1}F'X(X'X)^{-1/2}V = V\Delta$$

を満たす固有ベクトル $V$ を求め、 $W = (X'X)^{-1/2}V$ とすればよい。等質性分析の考え方を基にした(2.4)式に従えば、正準判別分析とは、各個体の合成変数の値とその個体が属するグループの平均との差を最小にする方法である、ということが直ちに理解できる。

また、 $X$ としてダミー変数行列を用いれば、(2.4)式は数量化Ⅱ類 (Hayashi, 1950; 1952) となる。ただし、アイテムカテゴリ型データの場合には、ランク落ちした $X'X$ の逆行列は求まらないので、各項目からカテゴリを抜いたり、ムーアペンローズ逆行列を用いる、といった工夫が必要である。

$W'X'XW = NI$ という条件の下で(2.4)式を最小化したとき、 $W$ 、 $M$ のある列ベクトル $w_r$ 、 $m_r$ により求められた

$$\eta^2 = 1 - \|Xw_r - Fm_r\|^2 = w_r'X'F(F'F)^{-1}F'Xw_r = m_r'F'Fm_r$$

は相関比の二乗と呼ばれる。

## 2.2.3 主成分分析

次に、等質性分析の基本式(2.1)において、 $C_i = 1$ とした場合を考える。このとき、次式は主成分分析となる。

$$S(\{w_i\}, M) = \sum_{i=1}^I \|x_i w_i' - M\|^2 \quad (2.5)$$

このことは、以下のように示される。主成分分析の導出法はいくつかあるが、ここでは合成変数と元の変数との共分散の二乗和の最大化として考える。合成変数は、 $D = (x_1 \cdots x_I)$ として、 $M = DV$ と表される。各変数 $x_i$ を平均0、分散1に基準化しておけば、合成変数と元の変数との共分散(の $N$ 倍)を並べたものは、 $W = D'M$ となるので、共分散の二乗和は、 $\text{tr} W'W = \text{tr} M'DD'M$ で与えられる。合成変数の分散が1 ( $M'M = NI$ )という制約条件の下で、これを最大化する $M$ は次式を解くことで得られる。

$$DD'M = M\Delta$$

一方、(2.5)式を $w_i$ について最小化すれば、 $w_i = N^{-1}M'x_i$ となる。これを(2.5)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} S(M) &= \sum_{i=1}^I \|N^{-1}x_i x_i' M - M\|^2 \\ &= I \text{tr} M'M - \frac{1}{N} \text{tr} M'DD'M \end{aligned}$$

が得られる。 $M'M = NI$ という制約の下でこれを最小にする解は、明らかに主成分分析により求められる $M$ と同一である。したがって、(2.5)式は主成分分析と言える。主成分分析では、合成変数のことを主成分と呼ぶ。注意すべきことは、 $w_i$ は主成分をつくる時の重み

係数ではなく、主成分と元の変数との相関係数 (の  $N$  倍) である、という点である。  $(1/N)w_i$  は主成分負荷と呼ばれる。  $M$  の列ベクトルである、ある主成分  $m_r$  を用いた値

$$\frac{1}{N}m'_{r'}DD'm = I - \frac{\sum_{i=1}^I \|w_{ir'}x_i - m_r\|^2}{N}$$

はその主成分の寄与と呼ばれる。

(2.5) 式に従えば、主成分分析は、間隔尺度の水準で得られた直接尺度を元にした広義の一次元尺度構成法、あるいは単数の多次元尺度構成法であることが直ちに理解できる。すなわち、 $x_i$  を各個体に対する第  $i$  番目の直接尺度値を並べたものと考え、間隔尺度に対して許される変換はアフィン変換であるが、 $x_i$  は平均が 0 となるよう既に基準化されているので、 $w_{ir}x_i$  という変換だけを考える。変換された直接尺度値  $w_{ir}x_i$  と間接尺度値  $m_r$  との整合性を高めるには、その差をなるべく小さくすればよい。(2.5) 式は、全ての直接尺度にわたってその差を小さくしようとするものであり、広義の一次元尺度の構成法あるいは単数の多次元尺度構成法と言える。

直接尺度が名義尺度や順序尺度の水準にあるときには、データをダミー変数行列  $X_i$  によって表し、変換された直接尺度値を  $X_iW_i$  とすればよい。

$$S(\{W_i\}, M) = \sum_{i=1}^I \|X_iW_i - M\|^2 \quad (2.6)$$

これが、数量化Ⅲ類を含む尺度法であることは第1章で述べたとおりである。 $W_i$  と  $M$  のある列ベクトル  $w_{ir}$  と  $m_r$  を用いた量

$$\rho_1^2 = 1 - \frac{1}{NI} \sum_{i=1}^I \|X_iw_{ir} - m_r\|^2$$

は数量化Ⅲ類において最大化される相関係数の二乗に一致する。(2.6) 式に従えば、数量化Ⅲ類を含む尺度法の意味は以下のとおりである。まず、 $R$  次元空間上に  $N$  人の個体がそれぞれ位置  $m_n$  を持つと考える。また、同じ空間上に  $\sum_i C_i$  個のカテゴリもそれぞれ位置  $w_{ic_i}$  を持つと考える。そして、個体  $n$  がカテゴリ  $c_i$  に反応したときには、 $m_n$  と  $w_{ic_i}$  の間の距離  $d_{n,ic_i}$  を考え、全ての反応に対応する距離 (の二乗) の和を最小としよう、個体とカテゴリの位置を同時に求めるのである (岸野, 1992)。(2.6) 式は個体とカテゴリの間の距離に注目した基準であるため、個体やカテゴリの相対的な位置のみが重要である。ということからも、尺度法が単数の多次元尺度構成法であることがうなずけよう。

(2.6) 式において、 $C_i \times R$  行列  $W_i$  に対して、 $C_i \times 1$  ベクトル  $z_i$  と  $R \times 1$  ベクトル  $a_i$  によりランク制約を設けた方法は、PRINCIPALS (Young, Takane & de Leeuw, 1978) と呼

ばれる。

$$S(\{z_i\}, \{a_i\}, M) = \sum_{i=1}^I \|X_i z_i a_i' - M\|^2$$

ただし、 $z_i$  に対しては  $z_i'X_i'X_i z_i = N$ ,  $1'X_i z_i = 0$  といった制約をおく。PRINCIPALS は名義尺度や順序尺度で得られたデータに何らかの変換を施し ( $X_i z_i$ )、これを間隔尺度によるものと考えて (2.5) 式の主成分分析を行う方法と言える。主成分分析、尺度法、PRINCIPALS の間の関係については、Bekker & de Leeuw (1988) にもまとめられている。

さらに、 $W_i$  に対してより一般的なランク制約を課す方法は、de Leeuw & van Rijkevorsel (1988) や村上 (1996) によって提案されている。

$$S(\{Z_i\}, \{A_i\}, M) = \sum_{i=1}^I \|X_i Z_i A_i' - M\|^2$$

土屋 (1995d) はデータが  $J$  個の時点で得られた場合に、カテゴリに与える数量にランク制約を課し、データの構造変化を探る方法を提案している。

$$S(\{Z_i\}, \{A_j\}, \{M_j\}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \|X_{ij} Z_i A_j' - M_j\|^2$$

一方、(2.5) 式の  $M$  に対してランク制約を課す方法もある。それらは、Tucker-2 モデル、PARAFAC モデル、岩坪 (1987) の 3 次相関係数最大化の数量化法といった 3 相データに対する手法である。さらに、 $W_i$  や  $M$  に対して、デザイン行列を用いて制約を課す方法も提案されている。これらは、3 相データを扱った第5章で提案する方法と関連があるため、第5章で述べることにする。

## 2.2.4 正準相関分析

2 つの変数群が得られている場合を考える。すなわち、 $X_1$  は第1変数群に属する  $C_1$  個の変数を並べたデータ行列、 $X_2$  は第2変数群に属する  $C_2$  個の変数を並べたデータ行列とする。このとき、(2.1) 式において  $I = 2$  とすれば、正準相関分析となる。

$$S(W_1, W_2, M) = \|X_1 W_1 - M\|^2 + \|X_2 W_2 - M\|^2 \quad (2.7)$$

正準相関分析とは、それぞれの変数群から構成された合成変数  $X_i W_i$  の間の相関係数を最も高くするように、 $W_i$  を求める手法である。各変数が平均 0、分散 1 ならば、合成変数間の共分散 (の  $N$  倍) は、 $\text{tr}W_1'X_1'X_2W_2$  によって与えられる。それぞれの合成変数の分散が 1 という制約の下で、この共分散を最大化するには、

$$\begin{aligned} X_1'X_2W_2 &= X_1'X_1W_1\Delta \\ X_2'X_1W_1 &= X_2'X_2W_2\Delta \end{aligned}$$



あるいは

$$\begin{aligned} X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1 W_1 &= X_1' X_1 W_1 \Delta^2 \\ X_2' X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 W_2 &= X_2' X_2 W_2 \Delta^2 \end{aligned}$$

を解けばよい。

一方、(2.7) 式を  $M$  について最小化すれば、

$$M = \frac{1}{2}(X_1' W_1 + X_2' W_2)$$

が得られる。これを (2.7) 式に代入して、次式を得る。

$$S(W_1, W_2) = \frac{1}{2} \|X_1' W_1 - X_2' W_2\|^2$$

これを、 $W_1' X_1' X_1 W_1 = W_2' X_2' X_2 W_2 = NI$  という制約条件の下で最小化する  $W_1, W_2$  は明らかに正準相関分析で得られるものと等しい。

$W_1, W_2$  の第  $r$  番目の列ベクトルから構成された合成変数  $X_1 w_{1r}, X_2 w_{2r}$  は第  $r$  正準変数と呼ばれる。第  $r$  正準変数間の相関係数

$$\frac{w_{1r}' X_1' X_2 w_{2r}}{N} = 1 - \frac{\frac{1}{2} \|X_1 w_{1r} - X_2 w_{2r}\|^2}{N}$$

は第  $r$  正準相関係数と呼ばれる。

$X_1, X_2$  をそれぞれの変数群に属する変数をダミー変数表示したものとすれば、(2.7) 式は質的データに対する正準相関分析となる (van der Burg & de Leeuw, 1983; 1988)。

正準相関分析を多変数群に拡張する方法はいくつか提案されている。正準変数間の相関係数を、あらゆる正準変数の組み合わせについて求め、その和を最大とするもの、和の二乗和を最大とするもの、等である (柳井, 1994)。等質性分析の立場から正準相関分析を  $I$  変数群に拡張すれば、

$$S(\{W_i\}, M) = \sum_{i=1}^I \|X_i W_i - M\|^2$$

を最小化すればよい。 $X_i$  は第  $i$  変数群に属する変数からなるデータ行列である。 $X_i$  をダミー変数行列と見れば、上式は数量化Ⅲ類を含む尺度化法の式である。したがって式の形だけに着目すれば、数量化Ⅲ類は正準相関分析の特別な場合と見ることもできる。

なお青山 (1965a; 1965b) は、本節で用いたものとは異なる形のダミー変数行列を用いて、数量化Ⅲ類が正準相関分析となることを示している。すなわち、全反応数  $\times$  個体数 と 全反

応数  $\times$  全カテゴリ数 という 2 つのダミー変数行列を考え、どちらの行列も 1 は各行に 1 つだけとしたときに、2 つのダミー変数行列間の正準相関分析が数量化Ⅲ類に一致することを述べている。2.2.3 節では、個体とカテゴリの間の距離最小化が数量化Ⅲ類になると述べた。別の見方をすれば、個体とカテゴリの間の相関最大化が数量化Ⅲ類であるということである。

## 2.3 一般化等質性分析の提案

$X_i$  はデータを表す  $N \times C_i$  行列、 $A_i$  は  $N \times N$  計量行列、 $W_{gi}$  は  $C_i \times R$  行列、 $M_g$  は  $N \times R$  行列とする。このとき、TABLE 1.5 に示す全ての尺度に対応した尺度構成法として、次式を提案する。

$$S(\{\varphi_{gi}\}, \{W_{gi}\}, \{M_g\}) = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I \varphi_{gi} \|A_i(X_i W_{gi} - M_g)\|^2 \quad (2.8)$$

ただし、 $\{\varphi_{gi}\}$  と  $\{M_g\}$  に対して何らかの制約を課す。本論文では、(2.8) 式を一般化等質性分析と呼ぶ。明らかに、 $G=1, \varphi_{gi}=1$  とすれば、一般化等質性分析は等質性分析に一致する。すなわち、等質性分析は一般化等質性分析の特殊な場合である。

前節で述べたように、等質性分析は質的データに限らず量的データに対しても適用できる手法である。一般化等質性分析も量的データに対して適用可能である。しかし、本論文の目的である尺度構成においては、質的データが得られることが多いため、量的データについては考慮しない。さらに、本論文では TABLE 1.1 の単刺激データ (反応型データ) をターゲットとして考えていく。このデータをターゲットとした理由は、1.2.1 節で述べたように、学力テストや心理検査、質問紙調査等により、単刺激データがしばしば得られるからである。また、刺激比較データを変換することで、単刺激データと見なせる場合もある。そこで、(2.8) 式の  $X_i$  は項目  $i$  に対するダミー変数行列と考え、 $C_i$  は項目  $i$  のカテゴリ数、 $A_i = \text{Diag}(X_i 1)$  とする。

以下では、一般化等質性分析と TABLE 1.5 の各尺度との対応について説明する。なお、

$$e_{gi}^2 = \|A_i(X_i W_{gi} - M_g)\|^2$$

とする。

まず、 $G=1, R=1$  とする。また、 $\varphi_{gi}=1$  とする。このとき一般化等質性分析は、

$$S(\{w_i\}, m) = \sum_{i=1}^I \|A_i(X_i w_i - m)\|^2 \quad (2.9)$$

と書ける。既に何度も述べたとおり、 $X_i w_i$  は第  $i$  番目の直接尺度値を変換したものと見なせる。間接尺度値  $m$  と変換された直接尺度値との間の矛盾  $e_i^2$  を、全ての直接尺度について最小化しよう、 $m$  は求められる。したがって、(2.9) 式により得られる  $m$  は広義の一次元尺度値である。これが、尺度解析法や数値化Ⅲ類を含む尺度化法に一致することは既に述べた。

次に、 $G=1$ 、 $R=1$  とした次式を考える。

$$S(\{\varphi_i\}, \{w_i\}, m) = \sum_{i=1}^I \varphi_i \|A_i(X_i w_i - m)\|^2 \quad (2.10)$$

変換された直接尺度値  $X_i w_i$  と間接尺度値  $m$  との間の差  $e_i^2$  が求められる点は、(2.9) 式と同様である。ある  $e_i^2$  を十分に小さくできない場合、すなわち、どのように変換を行っても直接尺度値と間接尺度値との整合性が低い場合には、対応する  $\varphi_i$  に対して小さな値を与えることを考える。例えば、 $e_i^2$  があらかじめ定められたある値  $\varepsilon$  よりも小さい ( $e_i^2 < \varepsilon$ ) ならば  $\varphi_i = 1$ 、逆に  $e_i^2 > \varepsilon$  ならば  $\varphi_i = 0$  という値を与える。 $\varphi_i = 0$  ならば、 $e_i^2$  がどのような値をとろうとも、 $S$  の最小化には影響しない。これにより、 $e_i^2$  が十分に小さく、お互いに整合性の高い直接尺度だけから間接尺度を構成することになる。当然、 $e_i^2$  の値は  $m$  や  $\varphi_i$  に依存し、 $\varphi_i$  の値は  $e_i^2$  に依存している。したがって、繰り返し計算により値を求めることになる。また、 $\varphi_i$  の値の定め方は他にも考えられる。それがどのようなものであるにせよ、 $e_i^2$  の値が大きい場合には、 $\varphi_i$  に小さな値を与える、といった方針を持つものならば、矛盾の少ない項目だけを選び出し、間接尺度を構成できることになる。したがって、(2.10) 式により得られる  $m$  は狭義の一次元尺度値であると言える。本論文の第3章では、 $\varphi_i$  の1つの定め方を提案する。

(2.8) 式において  $R=1$  とすれば、一般化等質性分析は、

$$S(\{\varphi_{gi}\}, \{w_{gi}\}, \{m_g\}) = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I \varphi_{gi} \|A_i(X_i w_{gi} - m_g)\|^2 \quad (2.11)$$

となる。 $e_{gi}^2$  は、第  $g$  間接尺度値  $m_g$  と、これとの整合性が最も高くなるよう変換された直接尺度値  $X_i w_{gi}$  との差を表す。 $\varphi_{gi}$  には、対応する  $e_{gi}^2$  が大きい場合には小さな値を与える、という方針の制約を課す。これにより、 $m_g$  との矛盾が少ない直接尺度だけから  $m_g$  は構成される。すなわち、 $m_g$  は狭義の一次元尺度値である。(2.11) 式では、このような  $m_g$  が  $G$  個構成される。そのため (2.11) 式は、複数の一次元尺度構成法である、と言える。 $\varphi_{gi}$  あるいは  $m_g$  に対して制約を課さなければ、 $m_1 = \dots = m_G$  となる。したがって何らかの制約が必要となる。例えば、第  $g$  間接尺度値と第  $h$  間接尺度値は無相関 ( $m'_g m_h = 0 (g \neq h)$ ) といったものである。本論文の第4章では、 $\varphi_{gi}$  に対して制約を課す1つの方法を提案する。

次に、 $G=1$ 、 $\varphi_{gi}=1$  とする。

$$S(\{W_i\}, M) = \sum_{i=1}^I \|A_i(X_i W_i - M)\|^2 \quad (2.12)$$

は何度も述べるように、単数の多次元尺度構成法であり、尺度化法に一致する。

今までの説明に基づけば、一般化等質性分析そのものは、複数の多次元尺度構成法と言える。

$$S(\{\varphi_{gi}\}, \{W_{gi}\}, \{M_g\}) = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I \varphi_{gi} \|A_i(X_i W_{gi} - M_g)\|^2 \quad (2.13)$$

ただし  $\varphi_{gi}$  に対して、 $e_{gi}^2$  が大きい場合には小さな値を与える、という方針の制約を課す必要がある。複数の多次元尺度が、現実にはどのような場面で必要であるか、ということについては、残念ながらよく分かっていない。本論文でも、この方法についてはこれ以上触れない。

以上の5つの場合をまとめたのが、TABLE 2.1 である。以下の章では、狭義の一次元尺

TABLE 2.1 一般化等質性分析と各尺度との対応

	単数	複数
一次元	狭義の一次元尺度 $\sum_i \varphi_i \ X_i w_i - m\ ^2$ 広義の一次元尺度 $\sum_i \ X_i w_i - m\ ^2$	複数の一次元尺度 $\sum_g \sum_i \varphi_{gi} \ X_i w_{gi} - m_g\ ^2$
多次元	単数の多次元尺度 $\sum_i \ X_i W_i - M\ ^2$	複数の多次元尺度 $\sum_g \sum_i \varphi_{gi} \ X_i W_{gi} - M_g\ ^2$

度や複数の一次元尺度を構成するために、具体的に  $\varphi_{gi}$  に対して制約を課す方法について述べていく。





## 第3章

### 項目選択による一次元尺度構成法

本章<sup>1</sup>では、質的な項目群の中から一次元性をなす項目を選択し、狭義の一次元尺度を構成するための方法を提案する。この方法は、一般化等質性分析の基本式 (2.8) 式において、 $G=1$ 、 $R=1$  としたものである。まず、3.1 節で本章の目的を明らかにし、数量化Ⅲ類が必ずしも一次元性を持つ項目の選択に適さないことを示す。3.2 節では一般化等質性分析の  $\varphi_i$  に対する制約を提案し、一次元尺度構成のための新たな方法を述べる。3.3 節では計算方法について述べ、3.3 節では方法の特徴を評価するため、2つの人工データと4つの実データの分析例を示す。最後に3.4 節では、本章の方法について議論する。

#### 3.1 本章の目的

狭義の一次元尺度は、直接尺度との整合性が高いため、測定している概念が明確となり、解釈が行いやすいことが特徴である。そのため、教育学・心理学の分野に限らず、社会学における態度測定や政治学における世論調査、経済学における市場調査など多くの場面で求められている (McIver & Carmines, 1981)。全ての直接尺度間の整合性が十分に高いならば、広義の一次元尺度構成法を用いても狭義の一次元尺度を構成することは可能である。しかし現実のデータでは、整合性の低い直接尺度がしばしば含まれている。そのようなときには、一部の直接尺度だけを取り出し、尺度を構成する必要がある。広義の一次元尺度の構成法は、残念ながら、直接尺度を選び出すための方法として必ずしも適しているとは言えない。以下では、人工データを用いてその一例を示す。

TABLE 3.1 に示すのは、個体数  $N=13$ 、項目数  $I=6$ 、カテゴリ数  $C_i=4$  のアイテムカテゴリ型データの例である。表中の数字は各個体が選択したカテゴリを表す。項目1から項目4までを取り出し、ダミー変数表示をすればパラログラム型が得られるため、これら

<sup>1</sup>本章は、土屋 (1996a, 1996b, 1996e) の一部を再構成し、加筆したものである。



TABLE 3.1 人工データ2

n	項目					
	1	2	3	4	5	6
1	3	3	3	3	3	2
2	1	3	3	3	1	4
3	1	1	3	3	3	3
4	1	1	1	3	4	4
5	1	1	1	1	2	1
6	4	1	1	1	4	1
7	4	4	1	1	1	1
8	4	4	4	1	4	4
9	4	4	4	4	1	2
10	2	4	4	4	4	1
11	2	2	4	4	1	4
12	2	2	2	4	3	3
13	2	2	2	2	2	2

の4つの項目が完全尺度構造を持つことが分かる。ただし、カテゴリの順序はどの項目についても、カテゴリ3, 1, 4, 2の順である。一方、6項目全てを使ったときには、パラレログラム型は得られない。そのため、狭義の一次元尺度を構成するためには項目5と項目6を取り除かなければならないことになる。そして、個体1には例えば正の大きな尺度得点、個体13には負の大きな尺度得点を与える必要がある。

この人工データに対して、広義の一次元尺度構成法の1つである数量化Ⅲ類を適用した結果をFIGURE 3.1に示す。各点は、カテゴリに与えられた数量を表わす。第I軸では、カテゴリ2と3に正の大きな数量、カテゴリ1と4に負の大きな数量が与えられ、Guttman (1950b) の強度 (intensity) が現れていると考えられる。さらに、どの項目のカテゴリに対しても大きな数量が与えられ、項目1から項目4までの4つの項目が一次元性をなすという結果は見出せない。この第I軸の結果に基づけば、6項目全てを用いて尺度構成を行えばよい、という結論を導くことになる。また、どの項目においてもカテゴリ2と3を選んでいる個体1や個体13の両方に、正の大きな尺度得点が与えられることになる。他の項目との整合性の低い項目が含まれていても、なるべく全ての項目との整合性を高めるような尺度を構成する、という広義の一次元尺度構成法の特性によって、このような結果が得られたのである。

なお、第II軸では、項目5と項目6のカテゴリに対して小さな数量が与えられている。ま

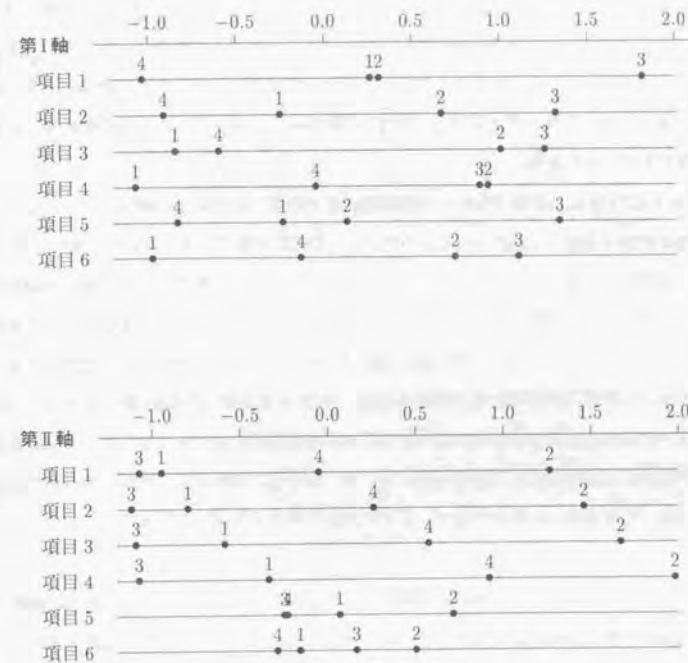


FIGURE 3.1 人工データ2の数量化Ⅲ類の結果

た、項目1から項目4では、数量がカテゴリ3, 1, 4, 2の順に大きくなっている。すなわち、TABLE 3.1のデータ構造を知っていれば、狭義の一次元尺度構成のために第I軸ではなく、第II軸を用いなければならない、ということが分かる。TABLE 3.1のデータでは、あらかじめどの項目が一次元性をなすが分かっていたため、第II軸を用いればよい、ということが判断できた。しかし現実にはどの項目が一次元性を持つかが分かっているわけではない。さらに、ある軸に必ず一次元構造が現れるという保証もない。

学力テストにおける項目分析では、正答を1、誤答を0とした項目得点と、当該項目を除いた総得点との点双列相関係数を求める、といったことがよく行われる(芝, 1991)。すなわち、総得点を仮の一次元尺度得点と見なし、それと関連の低い項目を取り除こうとするのである。順序尺度を間隔尺度と見なして主成分分析や因子分析を行ない、負荷量に基づいて項目を選択することもある。

これらの方法も、広義の一次元尺度の構成法である。なぜなら、総得点あるいは主成分が不適切な項目を含んで求められるからである。特に取り除くべき項目の数が多いときには、総得点を狭義の一次元尺度得点と見なすことには無理がある。総得点には不適切な項目も影響しているため、不適切な項目の点双列相関係数が高くなったり、逆に適切な項目のそれが低くなる。そのため、取り除くべき項目が除かれないといったことが起こる可能性がある。この点に関して服部(1991)は、総得点や主成分と関連の低い項目を削除していくよりも、その時点までに選ばれた項目群との内部一貫性が高い項目を順に選り出していくことで、信頼性の高い項目群を選択できることを見出している。ただし、カテゴリの順序が明らかではない場合には、この方法も利用できない。カテゴリにどのような値を与えればよいかわからないためである。

一方、1.5節ではMSAや項目関連構造化法を挙げた。それらの手法の目的は、順序性を持った項目群を選び出すことであり、狭義の一次元尺度構成という本章の目的と同じものを目指していると言える。特に項目関連構造化法は、テストの項目分析に用いられ、その有効性が実証されてきた。一方、それらの手法を尺度構成法という観点から見ると、個体への尺度値の与え方が定まっていない。1-0データではない名義尺度や順序尺度データに対しては適用できない、といった難点もある。さらに、POSAはdiagramによって、完全尺度構造を満たす反応パターンを見出す方法である。しかし、項目数や総カテゴリ数が多いとdiagramが繁雑になるため、項目数が少ないときだけ有効である。

そこで本章では、一般化等質性分析において $G=1$ 、 $R=1$ とすることにより、項目を選択すると同時にカテゴリに与える数量を求め、狭義の一次元尺度を構成する方法を提案する。

この方法の特徴は、項目選択のためにFIGURE 3.1のような図を必要とせず、 $\{a_i^k\}$ によって項目が尺度構成に寄与する程度を表わすことができること。 $k$ というパラメタによって、構成する尺度の一次元性の程度を調整できること、計算法が単純であること、である。

### 3.2 項目選択による一次元尺度構成法

#### 3.2.1 方法

$X_i(N \times C_i)$ を項目 $i(i=1, \dots, I)$ に対する、1と0からなるダミー変数行列とする。 $N$ は個体数、 $C_i$ は項目 $i$ のカテゴリ数である。また、データはアイテムカテゴリ型であることを仮定する。このとき、 $k$ をある正の実数として、次式を項目選択のための最小化基準として提案する。

$$S(\{w_i\}, m) = \frac{1}{I} \sum_i a_i^k \|X_i w_i - m\|^2 \quad (3.1)$$

$$a_i = 1 - \frac{1}{N} \|X_i w_i - m\|^2, \quad (i=1, \dots, I),$$

ただし、 $\|m\|^2 = N, \quad m'1 = 0$

各項目のカテゴリ間に順序がある場合には、 $w_i$ の要素間に適当な順序制約をおく。(3.1)式は、 $G=1$ 、 $R=1$ とした一般化等質性分析において、

$$\varphi_i = \frac{a_i^k}{\sum_{j=1}^I a_j^k}$$

とすることに相当する。

何度も述べるように、狭義の一次元尺度得点 $m$ を求めるためには、お互いに整合性あるいは相関の高い項目だけを使わなければならない。例えば、 $I-1$ 個の項目の $X_i w_i$ 間の相関は高いが、残りの1つの項目 $j$ と $I-1$ 個の項目との相関は低い、といった場合、 $m$ は $I-1$ 個の項目から構成されるべきである。

ところが、一般化等質性分析において $\varphi_i = 1(i=1, \dots, I)$ とした等質性分析あるいは数量化Ⅲ類では、 $m$ の構成には全ての項目が同じ割合で寄与していることになる。今述べた例で言えば、 $I-1$ 個の項目から構成した一次元尺度得点を $m_{I-1}$ とすると、項目 $j$ は $m_{I-1}$ とは相関が低いため、 $\|X_j w_j - m_{I-1}\|^2$ の値は大きくなる。そのため、この項の値を小さくするために、 $I$ 個の項目から構成される $m$ には項目 $j$ が大きく影響することになる。そし



て得られた  $m$  は一次元尺度得点とは言えなくなる。特に、一次元尺度得点を構成すべき項目の数が全ての項目の数に比べて小さいときには、このような傾向は無視できない。

そこで、 $m$  との整合性の低い項目は小さな  $a_i$  の値により重みづけることで、 $m$  の構成に対する寄与を小さくすることを考える。仮に一次元尺度得点  $m$  が分かっているとすると、 $e_i^2 = \|X_i w_i - m\|^2$  は項目  $i$  とこの次元との関係の弱さを表す程度と言える。すなわち、 $e_i^2$  の値が小さいほど関係が強いことになる。ところで、 $e_i^2$  を  $w_i$  について最小化すると、 $e_i^2 \geq \|Q_i m\|^2$  が得られ、 $0 \leq \|Q_i m\|^2 \leq \|m\|^2 = N$  である。ただし、 $Q_i = I - P_i = I - X_i(X_i' X_i)^{-1} X_i'$  である。そこで、

$$0 \leq a_i = 1 - \frac{1}{N} e_i^2 \leq 1, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (3.2)$$

を  $m$  の構成に対する項目  $i$  の寄与として用いることが考えられる。なお、この  $a_i$  は  $m$  と  $X_i w_i$  の相関係数の二乗に一致する。なぜなら、 $\|P_i m\|^2 = \|X_i m_i\|^2 = m' X_i w_i$  を利用すれば、

$$a_i = \|P_i m\|^2 / N = (m' X_i w_i)^2 / (\|m\|^2 \|X_i w_i\|^2)$$

となるからである。

各項目について、 $a_i e_i^2 = e_i^2 (1 - N^{-1} e_i^2)$  は、 $e_i^2 = 0, N$  で最小値 0、 $e_i^2 = N/2$  で最大値  $N/4$  をとる。FIGURE 3.2(a) は  $e_i^2$  と  $a_i e_i^2$  の関係をグラフにしたものである。(3.1) 式を最小にすることは、 $a_i e_i^2$  を小さくすることであるため、 $e_i^2$  の値はグラフの裾にある 0 あるいは  $N$  に近く、その結果、(3.2) 式の  $\{a_i\}$  に基づいて一次元性をなす項目とそうでない項目とを分けることが可能となる。

(3.1) 式では、さらにある正の実数  $k$  を用いて、項目  $i$  に対する重みを  $a_i^k$  とし、一次元性の程度を調節する。 $k \rightarrow 0$  のときには、 $a_i^k \rightarrow 1$  となるため、さほど一次元性の高くない項目も取り込まれる。逆に、 $k$  を大きくすると、お互いに相関が非常に大きく一次元性の高いいくつかの項目の  $a_i^k$  だけは大きくなり、その他の項目では  $a_i^k$  は 0 に近くなる。このことは図を使っても説明できる。FIGURE 3.2(b) は  $k = 0.5$  のときの  $a_i^k e_i^2$  のグラフである。グラフの山が  $e_i^2 = N$  の方に偏っているため、 $e_i^2$  を  $N$  の方に近づけて  $a_i^k e_i^2$  を小さくするためには、 $e_i^2$  がかなり  $N$  に近くなければならない。したがって、大部分の  $e_i^2$  は  $N$  ではなく 0 の方に近づく。これは、 $m$  との相関が非常に低い項目だけが取り除かれることを意味する。FIGURE 3.2(c) は  $k = 2$  のときのグラフである。山が  $e_i^2 = 0$  の方に偏っているため、 $e_i^2$  が 0 に非常に近い場合以外は、 $e_i^2$  を  $N$  に近づける方が  $a_i^k e_i^2$  を小さくできる。このことは、 $m$  との相関が非常に高い項目以外は取り除かれることを意味する。 $k$  の値を決めるための明確

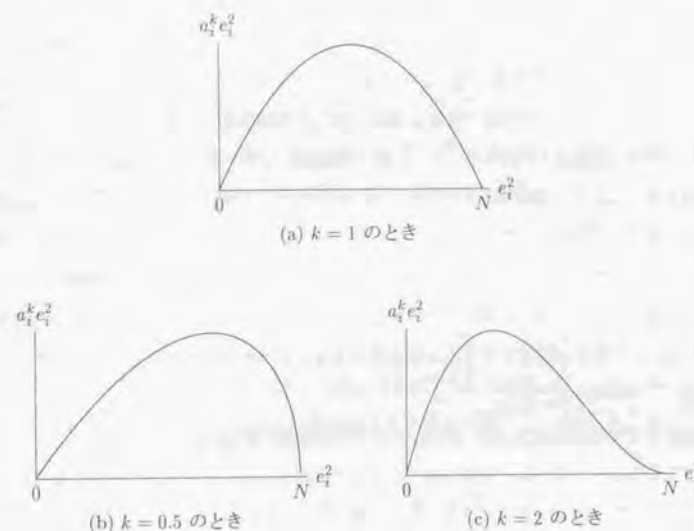


FIGURE 3.2  $k$  と  $a_i^k e_i^2$  の関係

な指針はない。しかし、このことは必ずしも本方法の難点とは言えない。なぜなら、 $k$  の値の変化により結果がどう変わるかを調べることで、データを持つ性質をより良く知ることができるからである。具体的な例は次節の数値例で述べる。

構成した尺度の一次元性の程度を示す指標としては、

$$r = 1 - \frac{1}{N} \min S \quad (3.3)$$

を用いる。ただし、 $\min S$  は最小化されたときの  $S$  の値である。(3.3) 式で定義された  $r$  は、反応したカテゴリに対して、1 ではなく、 $a_i^k$  を与えたときの数量化Ⅲ類において、最大化された相関係数の二乗に一致する(3.2.2 節参照)。したがって、 $r$  は 0 と 1 の間の値をとり、値が大きいほど一次元性の程度が高いことを表す。 $k$  が大きくなれば、当然  $r$  は大きくなる。また、 $k=0$  のとき、 $r$  は通常の数量化Ⅲ類で最大の相関係数の二乗となる。

ところで、先程述べた例では、 $I-1$  個の項目によって一次元尺度を構成すべきである、と主張した。しかし、他の項目とは相関の低い残りの 1 つの項目  $j$  だけを用いても、測定する特性は異なるものの、狭義の一次元尺度を構成することはできる。したがって、(3.1) 式の基準にはいくつかの局所解が存在する。どの解を最適解とするかは、 $S$  や  $r$  の値だけでなく、研究の目的や項目の内容も吟味することによって決められるべきものである。項目の内容によっては、 $r$  の大きな解よりも小さな解を用いる方が妥当であるかもしれない、ということである。

(3.2) 式で定義された  $a_i$  は、その値がとり得る範囲を考えれば、 $a_i = 0 (i=1, \dots, I)$  となる可能性もある。しかし、その場合 (3.1) 式が定義できなくなること、全ての項目を用いない、というのは無意味であること、という理由から、 $a_i = 0 (i=1, \dots, I)$  という解は除くこととする。なお、次節のアルゴリズムに従えば、そのような解が得られることはない。

### 3.2.2 計算方法

計算方法は、以下のとおりである。

Step 0:  $\|m\|^2 = N, m'1 = 0$  を満たす  $m$  の初期値を与える。

Step 1: (3.1) 式を  $w_i$  について微分し、その結果を 0 とおくことで、

$$w_i = (X_i' X_i)^{-1} X_i' m, \quad (i=1, \dots, I)$$

が得られる。

Step 2: (3.2) 式により  $\{a_i\}$  を求める。

Step 3: (3.1) 式を  $m$  について微分し、その結果を 0 とおくと、 $m$  に関する制約を考慮して、

$$\sum_i a_i^k X_i w_i = \lambda m$$

が得られる。ただし、 $\lambda$  はラグランジュの未定乗数である。 $\|m\|^2 = N$  という制約を満たすよう  $\lambda$  を定めると、

$$m = \frac{N^{1/2}}{\|\sum_i a_i^k X_i w_i\|} \sum_i a_i^k X_i w_i$$

が得られる。

Step 4:  $S$  の値を求め、収束していなければ Step 1 へ戻る。

特に  $k$  の値が大きいとき、前節でも述べたように、(3.1) 式にはいくつかの局所解が存在する。そこで、推定は Step 0 の初期値を変えて何度か繰り返す必要がある。

また、以上のアルゴリズムに従えば、 $a_i = 0 (i=1, \dots, I)$  という解は得られない、と述べた。その理由は次のとおりである。 $a_i = 0$  のときには、(3.2) 式を導いた議論より、 $\|Q_i m\|^2 = \|m\|^2$  となる。これは、 $m$  が  $X_i$  の直交補空間  $S(X_i)^\perp$  に含まれることを意味する。全ての  $a_i$  が 0 のとき、 $m$  は、 $S(X_1)^\perp \cap \dots \cap S(X_I)^\perp$  に含まれなければならない。ところが、Step 3 によれば、 $m$  は  $S(X_1) \cup \dots \cup S(X_I)$  に存在する。したがって、Step 0 において、 $m \in S(X_1)^\perp \cap \dots \cap S(X_I)^\perp$  を満たす初期値を与えなければ、 $a_i = 0 (i=1, \dots, I)$  という解が得られることはない。

また、一次元性の指標  $r$  が数量化Ⅲ類における相関係数の二乗に一致する理由は以下のとおりである。

推定方法の Step 1 より、

$$\begin{aligned} r &= 1 - \frac{1}{N} \min S \\ &= 1 - \frac{1}{N \sum_i a_i^k} \sum_i a_i^k \|Q_i m\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\|m\|^2 = N, \|m\|^2 - \|Q_i m\|^2 = \|P_i m\|^2$  という関係を用いれば、

$$r = \frac{m' \left( \sum_i a_i^k P_i \right) m}{m' \left( \sum_i a_i^k I \right) m}$$



が得られる。ここで、 $DA^k = \Delta$ 、 $\text{Diag}(DA^k D') = \Delta_{obs}$ 、 $A^{k/2} \text{Diag}(D' D) A^{k/2} = \Delta_{cat}$  とおく。ただし、 $A^k$  は

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k I_{C_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_l^k I_{C_l} \end{pmatrix}$$

という対角行列である。このとき、

$$\sum_i a_i^k I = \Delta_{obs}$$

$$\sum_i a_i^k P_i = \Delta \Delta_{cat}^{-1} \Delta'$$

となるので、

$$r = \frac{m' \Delta \Delta_{cat}^{-1} \Delta' m}{m' \Delta_{obs} m}$$

が得られ、 $r$  は数量化Ⅲ類における相関係数の二乗に一致する。

### 3.3 数値例

#### 3.3.1 人工データ2

はじめに、3.1節で示したTABLE 3.1のデータを分析する。このデータでは、狭義の一次元尺度構成のためには項目1から4を用いなければならない。

まず従来の方法との比較のため、TABLE 3.1のデータに対し表のカテゴリ値を間隔尺度によるものと見なして1因子の因子分析を行った<sup>2</sup>。その結果をTABLE 3.2に示す。項目2

TABLE 3.2 人工データ2について求められた因子負荷量

項目	因子負荷	共通性
1	.199	.040
2	.674	.454
3	.841	.707
4	.532	.283
5	-.193	.037
6	.266	.071
寄与	1.59	

から項目4の因子負荷は高いが、項目1の因子負荷は.199と低い。したがってこの結果に基

<sup>2</sup>計算にはSASのFACTORプロシジャを用いた。ただし、N=1, method=PRIN, priors=SMCとした

づけば、項目1は取り除いた方がよい、という結論を導くことになり、項目1から項目4だけを取り出すことはできない。これは、TABLE 3.1のカテゴリ値がカテゴリの順に対応していないため、当然の結果であると言える。

そこで、PRINCIPALSによりカテゴリ値の最適変換を求めた<sup>3</sup>。そして得られた相関係数行列を基に、1因子の因子分析を行った。TABLE 3.3には得られたカテゴリ値と因子負荷が

TABLE 3.3 最適変換された人工データ2について求められた因子負荷量

項目	因子負荷	共通性	カテゴリ			
			1	2	3	4
1	.776	.602	2.787	2.863	5.147	0.813
2	.760	.578	2.081	3.475	4.458	1.083
3	.911	.830	1.423	3.866	4.195	1.748
4	.801	.642	1.021	4.006	3.934	2.544
5	-.798	.636	2.894	2.345	0.514	3.798
6	.767	.588	0.946	3.615	4.176	2.254
寄与	3.88					

示されている。カテゴリ値について見てみると、例えば項目1ではカテゴリ4, 1, 2, 3の順に値が大きくなっており、3, 1, 4, 2あるいは2, 4, 1, 3という順にはなっていない。すなわち、はじめに想定したカテゴリの順序が得られていない。因子負荷について見ると、どの項目の因子負荷も絶対値は大きく、取り除いた方がよい項目はない、ということになる。結局、TABLE 3.3に基づいて適切な項目の選択は行えないことが分かる。この理由は、1.5節でも述べたとおり、主成分分析モデルや因子分析モデルをあてはめるために最適変換は行われているが、それが必ずしも項目の選択という目的のためには最適変換となっていないためである。

次に、 $k=1$ として、本章の方法を行った結果がTABLE 3.4である。TABLE 3.4には、 $r$ および各項目の $a_i^k, w_i$ の値が示されている。 $a_i^k$ の値を見てみると、項目1から項目4については、.928から.930という高い値を示す。逆に、項目5は.073、項目6は.022と値が低い。このことは、項目1から項目4までの4項目を使って尺度を構成している、ということの意味する。これらの4項目のカテゴリに与えられる数量の大きさは、カテゴリ3, 1, 4, 2の順になっており、3.1節で述べたカテゴリの順に対応している。すなわち本方法を用いれば、適切に項目を選択できるとともに、はじめに想定したカテゴリの順序を見出すことがで

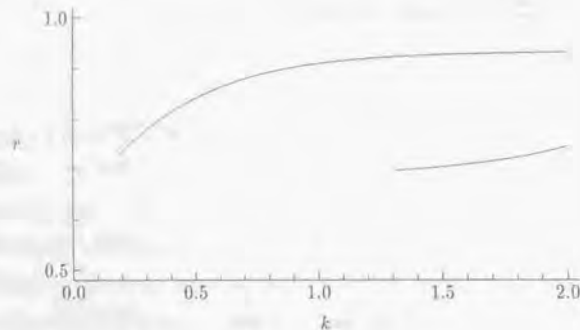
<sup>3</sup>計算にはSASのPRINQUALプロシジャを用いた。ただし、N=1, method=MTVとした。

TABLE 3.4 人工データ2の分析結果

r	項目	$a_i^k$	カテゴリ			
			1	2	3	4
.908	1	.928	-1.011	1.201	-1.443	0.171
	2	.930	-0.763	1.291	-1.380	0.485
	3	.930	-0.470	1.363	-1.308	0.769
	4	.930	-0.152	1.429	-1.213	1.008
	5	.073	0.125	0.397	-0.436	0.004
	6	.022	-0.005	0.215	0.068	-0.190

きることが分かる。

$k$  の値と  $r$  との関係を示すために、 $k$  の値を 0.2 から 2 まで変えたときの  $r$  の値をプロットしたものを FIGURE 3.3 に示す。FIGURE 3.3 より、 $k$  の値が大きくなるにつれ、 $r$  の

FIGURE 3.3 人工データ2における  $k$  と  $r$  の関係

値も大きくなる様子が分かる。また、 $k = 1.3$  付近から 2 つの局所解が得られるようになったため、2 種類の  $r$  の値が得られている。そこで、 $k = 2$  のときの 2 つの局所解を TABLE 3.5 に示す。 $r = .928$  となった解の  $a_i^k$  の値を見てみると、項目 1 から項目 4 は .862 や .866 と高く、項目 5 と項目 6 は .005 や .001 と低い。すなわち、項目 1 から項目 4 を用いて尺度構成がなされていることを示している。一方、 $r = .743$  のときの解では、項目 3 の  $a_i^k$  が .820 と高く、項目 5 と項目 6 が .583 や .630 とやや高い。このことは、項目 3 と項目 5、6 がや

TABLE 3.5 人工データ2の分析結果 ( $k = 2$ )

r	項目	$a_i^k$	カテゴリ			
			1	2	3	4
.928	1	0.862	-1.013	1.206	-1.427	0.164
	2	0.866	-0.768	1.297	-1.371	0.481
	3	0.866	-0.480	1.370	-1.299	0.769
	4	0.862	-0.162	1.426	-1.207	1.013
	5	0.005	0.123	0.387	-0.422	0.000
	6	0.001	-0.014	0.217	0.080	-0.189
.743	1	0.174	-0.088	-0.386	-1.427	0.831
	2	0.234	0.322	-0.792	-0.943	0.744
	3	0.820	0.930	-1.328	-1.090	0.552
	4	0.265	-0.977	-1.098	-0.644	-0.058
	5	0.583	0.270	-0.151	-1.456	0.898
	6	0.630	0.964	-0.771	-1.471	0.349

や関連しており、これらの 3 項目で一次元尺度を構成できる可能性があることを示している。しかし、この解が妥当であるか否かは、 $a_i^k$  の値だけではなく、 $r$  の値やカテゴリに与えられる数量、項目の内容も考慮して判断する必要がある。

### 3.3.2 人工データ 1

次に、第 1 章の TABLE 1.12 で示した人工データ 1 の分析例を示す。人工データ 1 は 2 つの一次元構造を持つデータである。第 1 章では、このデータに対して数量化Ⅲ類を適用したが、その結果から適切な構造を探るのは難しい。

$k$  の値を 0.01 から 10 まで変えて本章の方法を適用したときの  $r$  の値を FIGURE 3.4 に示す。 $k$  が 4 よりも大きくなると 2 つの局所解が得られることが分かる。ただし、2 つの解の間で  $r$  の値にはほとんど差がない。 $k = 5$  としたときの 2 つの解を TABLE 3.6 に示す。 $r = .891$  となったときの解は、項目 1 から項目 4 の  $a_i^k$  の値が .589 から .774 と高く、逆に項目 5 から項目 8 の  $a_i^k$  の値は .028 から .224 と低い。すなわち項目 1 から項目 4 を用いて尺度が構成されることを表している。 $r = .888$  となったときの解は、項目 5 から項目 8 の  $a_i^k$  の値が .598 から .717 と高く、項目 1 から項目 4 の  $a_i^k$  の値は .029 から .315 と低い。この解では項目 5 から項目 8 を使って尺度が構成されていることになる。以上の結果から、局所解を利用することで 8 つの項目を 2 つのグループに分類し、各グループにおいて狭義の一次



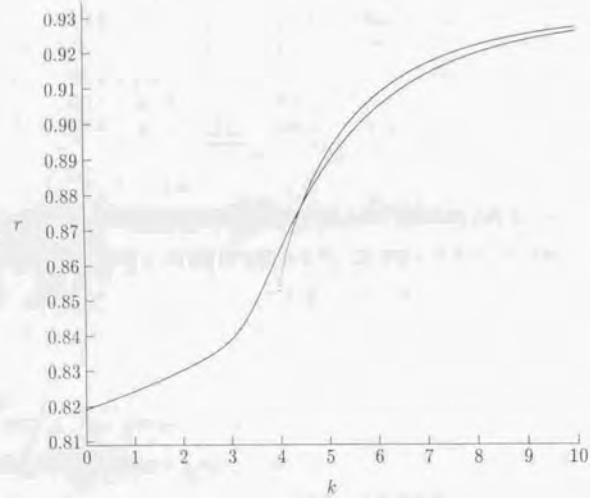
FIGURE 3.4 人工データ1における  $k$  と  $r$  の関係

TABLE 3.6 人工データ1の分析結果

$r$	項目	$a_i^k$	カテゴリ			
			1	2	3	4
.891	1	.589	-1.379	-0.966	0.082	1.229
	2	.617	-1.330	-0.765	0.450	1.306
	3	.710	-1.237	-0.543	0.758	1.426
	4	.774	-1.175	-0.246	1.054	1.466
	5	.224	-0.165	-1.031	-0.082	1.154
	6	.028	-0.772	-0.636	0.234	1.050
	7	.111	-0.843	-0.652	0.746	1.077
	8	.059	-0.953	-0.066	0.672	1.387
.888	1	.049	-1.246	-0.491	-0.243	1.045
	2	.029	-1.118	-0.426	0.241	0.992
	3	.139	-0.829	-0.664	0.650	1.273
	4	.315	-0.904	-0.480	1.128	1.020
	5	.717	-1.206	-1.023	0.049	1.276
	6	.621	-1.226	-0.808	0.401	1.361
	7	.711	-1.193	-0.590	0.765	1.439
	8	.598	-1.142	-0.235	0.996	1.526

元尺度を構成することが可能であると言える。なお、 $k$  を  $k > 4$  という大きな値にしなければ2つの解が得られないという事実は、2つの一次元尺度の間の相関が高い、ということを示唆する。実際、各局所解で得られた  $m$  通りの相関係数は、.840 である。

### 3.3.3 数学能力検定試験データ

次に、実データの分析例を紹介する。データは、数理検定協会が1995年に実施した数学能力検定試験（A3グレード）の結果である。受検者82名が51項目に対して回答した結果を、「正答」と「誤答（無回答を含む）」という2カテゴリのアイテムカテゴリ型データにまとめた。自由反応型データを用いないのは、次の第4章において示すように、テスト項目の一次元性を調べるにはアイテムカテゴリ型データの方がよいからである。丘本（1992b）、岩崎（1989）も同様の主張をしている。

ここでの分析の目的は、51項目の中から不適切な項目を取り除くことである。3.1節でも述べたように、通常は項目得点と当該項目を除いた総得点との点双列相関係数などを基に項目分析を行うことが多い。そこで参考のために、TABLE 3.7 に51項目の点双列相関係数  $r$

TABLE 3.7 数学能力検定試験データにおける  
当該項目以外の項目の総得点と項目得点の点双列相関係数  $r$

項目	$r$	項目	$r$	項目	$r$
1	.16	18	.27	35	.08
2	.34	19	.34	36	.59
3	.38	20	.34	37	.51
4	.42	21	.54	38	.70
5	.15	22	.18	39	.36
6	.37	23	.56	40	.53
7	-.08	24	.22	41	.61
8	.25	25	.42	42	.30
9	.40	26	.51	43	.54
10	.51	27	.56	44	.34
11	.33	28	.27	45	.30
12	-.01	29	.49	46	.57
13	.24	30	.40	47	.42
14	.50	31	.53	48	.64
15	.38	32	.24	49	.64
16	.41	33	.07	50	.45
17	.46	34	.50	51	.65

を示す。 $r < 0.1$  を基準とすれば、取り除くべき項目は、項目7、項目12、項目33、項目35の4つとなる。また、 $r < 0.3$  を基準とすれば、項目1,5,7,8,12,13,22,24,32,33,35を取り除くことになる。

次に、数量化Ⅲ類の第Ⅰ軸と第Ⅱ軸においてカテゴリに与えられる数量をプロットしたものをFIGURE 3.5に示す。いくつかの項目を取り除けば、カテゴリの配置は放物線を描くように思われるが、帯状に散らばっているため、どの項目を取り除くべきかという判断は難しい。数量化Ⅲ類の結果を基に項目の選択を行うことは困難である、ということである。

そこで、 $k = .5$  と  $k = 1$  として本章の方法を適用した結果をそれぞれ TABLE 3.8、TABLE 3.9 に示す。 $k = .5$  としたとき、 $a_i^k$  は  $X_i w_i$  と  $m$  の間の相関係数に等しい。そこで、 $a_i^k < 0.1$  を基準とすれば、取り除くべき項目は4つある。さらに、 $w_i$  の値を見ると、項目12は正答に対して  $-0.056$ 、誤答に対して  $0.518$  となっており、他の項目とは正負が逆になっている。すなわち、尺度得点の高い個体ほど誤答しているということになるので、項目12も取り除くべきである。結局取り除くべき項目は、項目5、項目7、項目12、項目22、項目35の5つとなる。 $r < 0.1$  を基準として点双列相関係数を使ったとき、項目7、項目12、項目35は共通しているが、その他の項目は異なっている。 $a_i^k < 0.3$  を基準とすれば、項目1,5,6,7,8,12,13,18,20,22,28,32,33,35,39を取り除くことになる。 $r < 0.3$  を基準として点双列相関係数を用いる場合に比べ、項目6,18,20,28,39が増えている。一方点双列相関係数に基づけば不適切とされる項目24は取り除かれない。

以上のように、点双列相関係数を用いる場合と本章の方法に基づく場合では、取り除くべき項目は異なる。どちらの結果が良いのかは、このデータが実データであり、真の状況が分からないため確かめることはできない。そこで便宜的な比較の基準として信頼性の指標を用いる。すなわち、点双列相関係数に基づいて  $J$  個の項目を取り除いたデータ（データRとする）と  $a_i^{0.5}$  に基づいて  $J$  個の項目を取り除いたデータ（データAとする）のクロンバックの  $\alpha$  係数をそれぞれ求めた。 $J$  を3から35まで変えたときの結果をFIGURE 3.6に示す。 $\circ$  はデータRの  $\alpha$  係数、 $\bullet$  はデータAの  $\alpha$  係数を表す。取り除く項目数が、4個、13個、14個のときにはデータRの  $\alpha$  係数の方が高い。しかし他の場合には、データAの  $\alpha$  係数の方が高い。特に、取り除く項目数が15個から20個の間でははっきりした差が見られ、30個を越えると大きな差がつく。以上の結果がどのようなデータでも常に得られるとは限らない。しかし従来の方法に比べ、本章の方法に基づいて項目を取り除いたデータの方が信頼性が高い、ということが示唆された。本章の方法によって取り除く項目は、点双列相関係数を用いる場合と全く異なるわけではない。しかしこのデータの項目は、一次元性があることを想定して



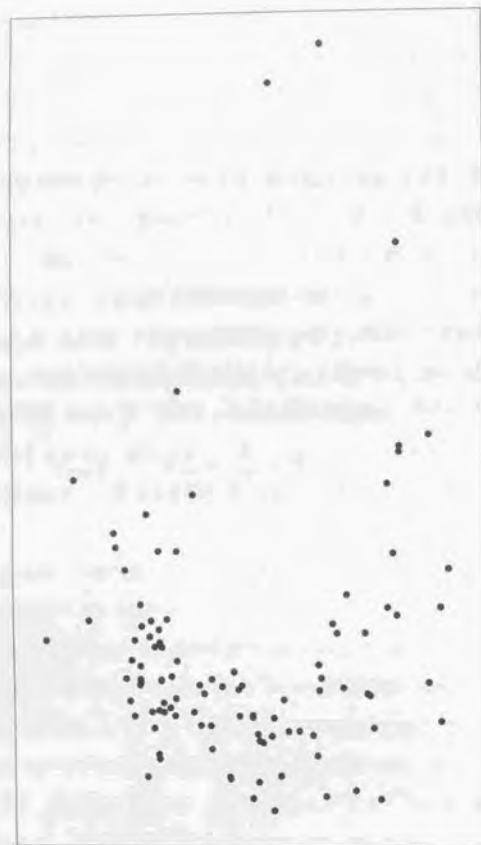


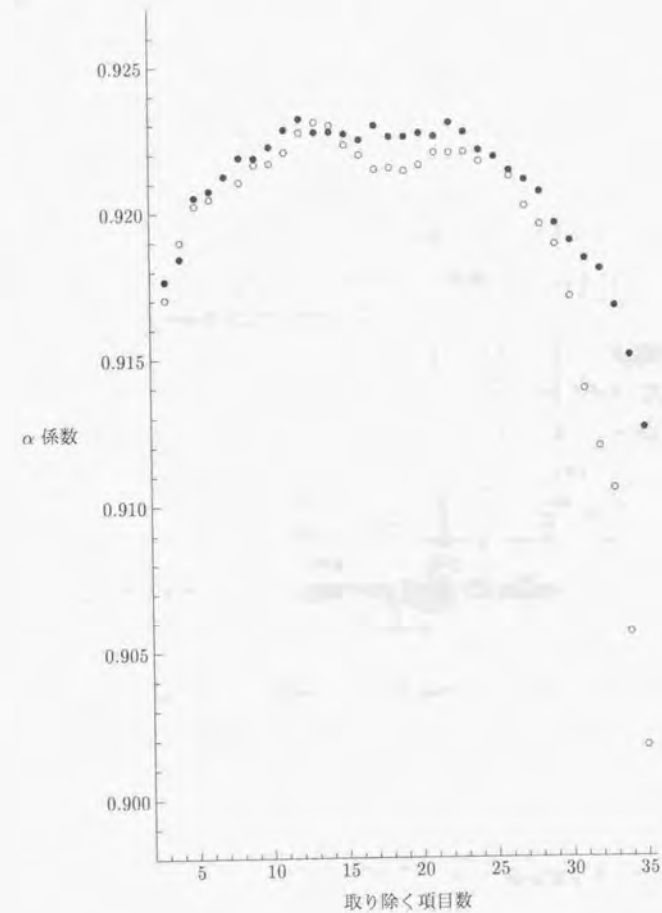
FIGURE 3.5 数学能力検定試験項目に対する数量化Ⅲ類  
(第Ⅰ軸対第Ⅱ軸)の結果

TABLE 3.8 数学能力検定試験データの分析結果 ( $k = .5$ )

項目	$a_i^k$	カテゴリ		項目	$a_i^k$	カテゴリ	
		正答	誤答			正答	誤答
1	.133	0.026	-0.681	27	.543	0.696	-0.423
2	.320	0.112	-0.912	28	.229	0.179	-0.294
3	.301	0.199	-0.454	29	.503	0.541	-0.467
4	.446	0.841	-0.236	30	.419	0.567	-0.310
5	.046	0.032	-0.065	31	.491	0.583	-0.413
6	.261	-0.103	-0.662	32	.187	0.174	-0.201
7	.068	-0.027	0.172	33	.192	0.755	-0.049
8	.225	0.128	-0.395	34	.658	1.158	-0.374
9	.331	0.213	-0.514	35	.080	0.090	-0.071
10	.415	0.323	-0.532	36	.583	0.788	-0.431
11	.323	0.292	-0.356	37	.526	0.868	-0.318
12	.170	-0.056	0.518	38	.780	1.288	-0.472
13	.223	0.539	-0.092	39	.279	0.272	-0.285
14	.571	0.614	-0.530	40	.651	1.434	-0.295
15	.390	0.362	-0.420	41	.607	0.944	-0.391
16	.454	0.667	-0.310	42	.382	1.025	-0.142
17	.514	0.694	-0.380	43	.708	1.335	-0.376
18	.238	0.226	-0.250	44	.361	0.408	-0.319
19	.312	0.297	-0.327	45	.329	0.470	-0.231
20	.265	0.201	-0.349	46	.667	1.355	-0.328
21	.725	1.161	-0.452	47	.533	1.082	-0.262
22	.071	0.040	-0.125	48	.756	1.110	-0.515
23	.579	1.276	-0.263	49	.705	0.904	-0.549
24	.372	1.217	-0.114	50	.574	0.819	-0.402
25	.426	0.561	-0.324	51	.683	0.923	-0.505
26	.615	1.048	-0.361				

TABLE 3.9 数学能力検定試験データの分析結果 ( $k=1$ )

項目	$a_i^k$	カテゴリ		項目	$a_i^k$	カテゴリ	
		正答	誤答			正答	誤答
1	.018	0.026	-0.695	27	.245	0.635	-0.386
2	.087	0.103	-0.839	28	.042	0.159	-0.261
3	.064	0.168	-0.383	29	.224	0.510	-0.440
4	.182	0.803	-0.226	30	.148	0.520	-0.284
5	.000	0.002	-0.005	31	.189	0.517	-0.366
6	.044	0.083	-0.534	32	.025	0.146	-0.170
7	.003	-0.023	0.148	33	.053	0.901	-0.058
8	.042	0.116	-0.360	34	.484	1.225	-0.395
9	.081	0.183	-0.441	35	.007	0.096	-0.075
10	.126	0.277	-0.455	36	.312	0.755	-0.413
11	.077	0.252	-0.307	37	.237	0.803	-0.295
12	.051	-0.075	0.689	38	.633	1.314	-0.482
13	.040	0.484	-0.083	39	.048	0.214	-0.224
14	.329	0.617	-0.533	40	.445	1.470	-0.303
15	.128	0.333	-0.385	41	.339	0.905	-0.375
16	.185	0.630	-0.293	42	.147	1.027	-0.143
17	.237	0.658	-0.360	43	.558	1.409	-0.396
18	.041	0.193	-0.213	44	.120	0.391	-0.306
19	.082	0.273	-0.301	45	.094	0.437	-0.214
20	.048	0.167	-0.290	46	.458	1.375	-0.333
21	.590	1.231	-0.480	47	.298	1.109	-0.269
22	.000	0.012	-0.038	48	.613	1.149	-0.533
23	.285	1.177	-0.242	49	.502	0.909	-0.553
24	.170	1.351	-0.126	50	.352	0.847	-0.416
25	.152	0.513	-0.296	51	.450	0.907	-0.496
26	.386	1.059	-0.364				

FIGURE 3.6 項目を取り除いたときの  $\alpha$  係数



作成されたものであり、取り除く項目はなるべく少なくしたい。そのような状況では、わずかな違いであっても信頼性の高い本章の方法を用いるべきであろう。

なお参考のため、 $k$  の値を 0.01 から 2 まで変えたときの  $r$  の値をプロットしたものを FIGURE 3.7 に示す。 $k = 1.2$  辺りから局所解が生じ、 $k = 1.6$  を過ぎると局所解が増えるこ

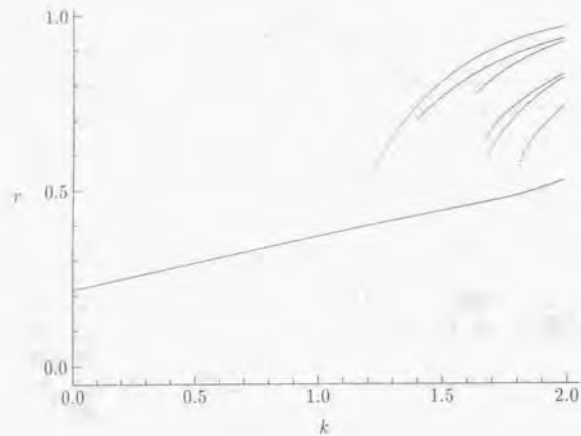


FIGURE 3.7 数学能力検定試験データにおける  $k$  と  $r$  の関係

とが読みとれる。詳細は示さないが、新たに増えた解は全て、1つあるいは2つの項目の  $a_i^k$  の値が大きく、他はりに近い。このデータの項目はどれも数学能力を測ることを目的として作成されたものであるため、1つあるいは2つの項目だけを選択するという解は望ましくない。

### 3.3.4 循環系機能評価データ

次に、数量化Ⅲ類では項目の選択が難しいデータの分析例を示す。データは、駒澤 (1992) に示された以下の6つの循環系機能評価項目に対する32名の被検者の評価値である<sup>4</sup>。

<sup>4</sup>駒澤 (1992) では、心機能評価データと呼ばれている。

### 3.3. 数値例

1 心拍	:	少ない	普通	多い	
2 最大血圧	:	低い	普通	やや高い	高い
3 最小血圧	:	低い	普通	高い	
4 平均血圧	:	低い	普通	やや高い	高い
5 脈圧	:	普通	やや高い	高い	
6 左室駆出時間	:	遅い	普通	早い	

各項目のカテゴリは、「低い」から「高い」へというように言葉の意味の上では順序をなしている。そのため循環系機能評価尺度を構成する1つの方法として、「高い」に対して1、「低い」に対して3や4という値を与え、主成分分析を行うことが考えられる。しかし循環系機能を評価する上で、例えば血圧は普通であるのが最もよく、血圧が高すぎても低すぎてもよくない、といった考え方も成り立つであろう。その場合には、「普通」に対して3、「低い」や「高い」に対して1といった値を与えなければならない。

どちらの方法を採用すべきかは、項目やカテゴリの内容を吟味しているだけでは分からない。したがってカテゴリに与える数量は、あらかじめ決めるのではなく、データに基づいて決めた方がよい。そこで、このデータに対する数量化Ⅲ類の第I軸の結果を FIGURE 3.8 に

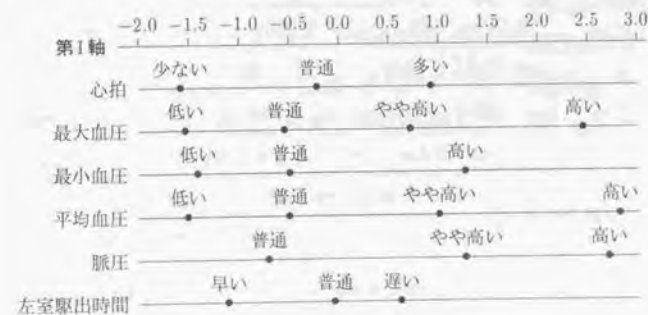


FIGURE 3.8 循環系機能評価データの数量化Ⅲ類の結果

示す。FIGURE 3.8 より、どの項目についても、カテゴリに与える数量はカテゴリの意味の順になっていることが分かる。また FIGURE 3.8 では、特に取り除くべき項目があるようには見えない。

このデータに対し、 $k = 1$  として本章の方法を適用した結果を TABLE 3.10、FIGURE 3.9

に示す。左室駆出時間の  $a_6$  の値は、 $a_6 = .015$  と低く、一次元尺度を構成するためには、こ

TABLE 3.10 循環系機能評価データの分析結果

項目	$a_i$
1 心拍	.206
2 最大血圧	.915
3 最小血圧	.375
4 平均血圧	.860
5 脈圧	.713
6 左室駆出時間	.015

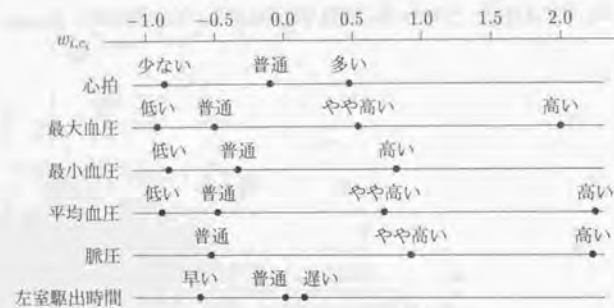


FIGURE 3.9 循環系機能評価データのカテゴリに与える数量

の項目を取り除かなければならない、ということが分かる。さらに、より一次元性の高い循環系機能評価尺度の構成には、最大血圧 ( $a_2 = .915$ )、平均血圧 ( $a_4 = .860$ )、脈圧 ( $a_5 = .713$ ) の3項目だけを用いるべきである、ということになる。明らかに、FIGURE 3.8 に示された数量化Ⅲ類の結果からは、このようなはっきりとした知見を得ることは難しい。なお本方法を用いても、カテゴリに与える数量はカテゴリの意味の順に対応している。

## 3.3.5 循環器系危険因子データ

次に本方法を用いて、いくつかの一次元尺度を構成する例を示す<sup>5</sup>。データは、駒澤 (1982) に示された、循環器系危険因子の集団検診データである<sup>6</sup>。対象は、検診後の追跡調査で脳卒中あるいは虚血性心疾患を発症した被検者 58 名である。項目とカテゴリは以下に示すとおりである。

1 年齢	~39	40~49	50~	
2 最大血圧	~139	140~159	160~179	180~
3 最小血圧	~79	80~89	90~99	100~
4 血清総コレステロール	~159	160~229	230~	
5 心電図所見	正常	やや異常	異常	非常に異常
6 喫煙	以前から吸わない	1日に19本以下	1日に20本以上	現在はやめている
7 飲酒	以前から飲まない	現在はやめている	ときどき飲む	毎日飲む
8 体格	やせている	普通	太っている	肥満

循環系機能評価データのところで述べたように、必ずしもカテゴリに与える数量をカテゴリの順序通りにしてよいとは限らない。また、喫煙や飲酒のカテゴリのうち、「現在はやめている」の順序は明かではない。そこで、このデータに対して数量化Ⅲ類を行い、その第Ⅱ軸までの結果を FIGURE 3.10 に示す。円中に示す数値は項目とカテゴリを表す。例えば、12 は項目 1 (年齢) のカテゴリ 2 (40~49) を表す。ただし、カテゴリの番号は上の表で左に位置するものから 1, 2 と順に表したものである。FIGURE 3.10 では、54 や 31 といったカテゴリを除けば、右上に開いた放物線が得られるようにも思われるが、はっきりとした結論は得られない。

そこで、 $k = .5$  として本章の方法を適用した。2つの局所解が得られたので、その結果を TABLE 3.11 に示す。 $r = .486$  となった第1の解では、 $a_i^k$  の値が大きい項目を順に挙げると、最小血圧 (.930)、最大血圧 (.894)、血清総コレステロール (.447)、体格 (.386) となる。これらの項目のうち与えられる数量が大きいカテゴリは、最小血圧 (100~)、最大血圧 (180~)、コレステロール (~159)、体格 (やせている) である。したがって、第1の解は脳血管障害に関する尺度と見なすことができる。ここで見出された項目のまとまりは、やせていてコ

<sup>5</sup>この節の結果の解釈は、統計数理研究所 駒澤勉教授の示唆による。

<sup>6</sup>駒澤 (1982) では、循環器系疾患データと呼ばれている。



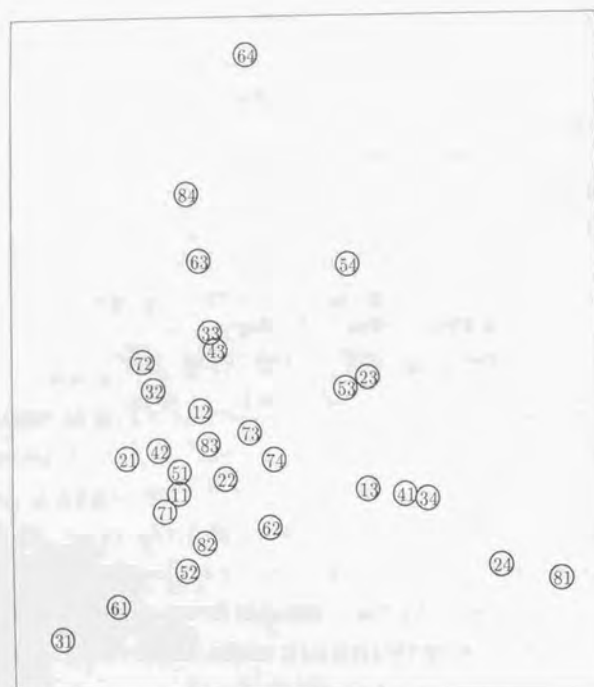


FIGURE 3.10 循環器系危険因子データに対する数量化Ⅲ類  
(第I軸対第II軸)の結果

TABLE 3.11 循環器系危険因子データの分析結果

$r$	項目	$a_i^k$	カテゴリ			
			1	2	3	4
.486	1	.303	-0.188	-0.156	0.536	
	2	.894	-0.829	-0.028	1.151	1.708
	3	.930	-1.035	-0.606	-0.221	1.331
	4	.447	0.681	-0.311	0.078	
	5	.329	-0.289	-0.102	-0.466	0.493
	6	.147	-0.241	0.111	-0.171	0.029
	7	.132	-0.147	-0.381	0.133	-0.013
	8	.386	1.114	-0.264	0.168	-0.114
.443	1	.153	-0.091	0.178	-0.175	
	2	.170	0.051	-0.105	0.232	-0.408
	3	.594	-0.958	0.361	0.735	-0.266
	4	.161	-0.228	0.072	0.379	
	5	.460	-0.141	-0.481	0.405	0.949
	6	.883	-0.761	-0.446	1.254	2.219
	7	.130	-0.212	0.145	0.115	0.002
	8	.774	-0.688	-0.423	-0.105	1.654

コレステロール値が低く、最小血圧が高いと脳出血を起こしやすいという従来得られていた知見とも一致する。

一方、 $r = .443$  となった第2の解では、喫煙 (.883)、体格 (.774)、最小血圧 (.594)、心電図所見 (.460) の  $a_i^2$  の値が高い。与えられる数量が大きいカテゴリは、喫煙 (現在はやめている、1日に20本以上)、体格 (肥満)、最小血圧 (90~99)、心電図所見 (非常に異常) である。最小血圧がやや異常であるが、他の項目から、第2の解は心疾患に関する尺度と見なすことができる。

このデータは、脳卒中あるいは虚血性心疾患を発症した被検者を対象にしているため、この2つの尺度が得られたのは当然である、と考えることもできる。しかし、FIGURE 3.10 に示した数量化Ⅲ類の結果からは、このような項目のまとまりを見出すことは難しい。

### 3.3.6 EPPS 性格検査データ

最後に、EPPS 性格検査 (肥田野・岩原・岩脇・杉村・福原, 1970) のデータを分析した結果を紹介する。EPPS 性格検査は、Murray (1938) の理論に基づいた15の欲求特性を測定するために開発されたものである。特に、質問紙法における社会的望ましさの影響を軽減するため、各項目は社会的望ましさの等しい2つの陳述を対にして構成され、どちらかを強制選択させる、という方法上の特徴を持つ。15の特性についてそれぞれ9つずつ陳述が用意されている。ここでの分析の目的は、データに基づいて一次元性をなす陳述を選び出すことである。

受検者は、首都圏の大学生 909 名である。検査は全部で 225 項目からなるが、15 項目は信頼度を調べるために重複して提示されているため、採点に用いる 210 項目だけを使用する。まず、受検者×陳述というデータ行列をつくるため、各受検者ごとにそれぞれの陳述を選択した回数を数え、陳述をアイテム、選択された回数をカテゴリとする。このようにデータを変換すると、どの陳述と対になっていたとき選択されたのか、という情報は失われる。また、210 項目のなかで、それぞれの陳述が現れる頻度は、陳述によって違うため、カテゴリ数は陳述ごとに異なる。しかし、どの陳述と対になっているかが、ある陳述を選んだ回数が多い人は、回数が少ない人に比べて、その陳述に対する欲求が強いと言うことはできよう。そこで、例えば陳述 A を選んだ回数が多い人は、陳述 B を選んだ回数も多い、といった場合、2つの陳述が同じ特性を測っていると考えられる。さらに、本章の方法は、アイテムごとにカテゴリ数が異なっても構わないため、変換されたデータに基づき、同じ特性を測る陳述を選択することは可能である。同じようなデータ変換は、Nishisato (1978) や西里 (1982) にも述べられている。

$k=1$  として本章の方法を適用した結果を TABLE 3.12 に示す。陳述番号の後に ( ) で示

TABLE 3.12 EPPS 性格検査の 135 陳述の分析結果

陳述	$a_i$	選択された回数					
		0	1	2	3	4	5
120(異性愛) 異性と恋をしてみたい	.790	-1.589	-1.257	-.909	-.603	-.035	.908
123(異性愛) すてきな異性といっしょに歩きたい	.681	-1.419	-.854	-.582	-.365	.268	.957
126(異性愛) 異性といっしょに遊んだり、仕事をしたりしたい	.631	-1.502	-1.055	-.802	-.433	-.079	.821
93(養護) 友だちには好意を示してあげたい	.349	.264	.365	-1.010			
118(異性愛) すてきな異性にキスしたい	.300	-.608	.493				
92(養護) 友だちには寛大でありたい	.294	.311	.436	.348	-.796		
112(持久) 結果がどうなるかわからなくても、やり始めた仕事や問題と、さいごまで取り組みたい	.229	.540	.288	.162	-.440	-.998	
125(異性愛) 性的興奮を味わってみたい	.219	-.608	-.168	.147	.649		
8(達成) やりかけたことは、うまくやりとげたい	.196	-.409	.440	.071	-.482	-1.030	
83(内罰) 悪いことをしたときは、それを告白すべきだと思う	.185	.153	.384	-.098	-.841		
119(異性愛) 異性から、肉体的魅力があると思われたい	.184	-.639	-.139	-.040	.534		
25(秩序) 自分の計画を途中であまり変えないで、順調に毎日を送るように生活をきちんとしておきたい	.178	.342	.244	-.000	-.292	-.589	-1.315
110(持久) 一つの仕事を仕上げてから、他の仕事に移りたい	.162	.279	.416	.196	.019	-.553	-.902
124(異性愛) 性的話には好んで加わりたい	.130	-.387	.084	.311	.530		
65(求護) 友だちから親切にしてもらいたい	.124	-.679	-.404	-.173	.100	.442	
45(自律) 他人の考えにこだわらず、自分の考えどおりにしたい	.124	.234	.259	-.047	-.770		
88(内罰) どんな苦しいことがあっても、それは自分のためになるのだと思う	.121	.297	.257	.178	-.142	-.692	
122(異性愛) 性が中心になっている本や小説を読みたい	.116	-.381	.019	.469			
48(親和) できるだけ多くの友だちをつくりたい	.110	-.424	-.534	-.253	.275		
72(求護) 友だちからあたたかい気持ちで接してもらいたい	.109	-.662	-.448	-.071	.136	.470	

されているのは、あらかじめ仮定された 15 特性への分類を表したものである。TABLE 3.12 には、135 陳述のうち、 $a_i > .1$  となった 20 陳述の  $a_i$  と、カテゴリである、選択された回数に対する数量が示されている。 $a_i > .1$  という基準を選んだのは、 $a_i > .1$  のとき  $m$  と  $X_i w_i$  の間の相関係数は  $\sqrt{1} = .316$  以上であり、十分に高いとは言えないまでも、低くはないためである。選択された 20 の陳述を見ると、「異性愛」に分類される 118 から 126 の 9 つの陳



述のうち8つが選ばれていることが分かる。また、「異性愛」の陳述に対する  $a_i$  の値は大きいものが多い。陳述112や陳述83といった「異性愛」とは無関係であると思われる陳述がいくつ含まれているものの、ここで構成されたのは、「異性愛」に関する尺度であると言ってよいだろう。「異性愛」の陳述は、選択された回数が大きくなると、それに与えられる数量も大きくなる。例えば、陳述120では0回に対しては-1.589であったのが、回数とともに数量も大きくなり、5回に対しては.908となる。すなわち、 $m_n$ の値が大きい受検者  $n$  は、「異性愛」の陳述を選んだ回数が多く、「異性愛」に対する欲求が高い、と解釈される。

次に、135陳述から今の分析で選択された20陳述を除いた115陳述を基にして、再度分析を行った。その結果をTABLE 3.13に示す。TABLE 3.13には、 $a_i > .1$  となった12陳述

TABLE 3.13 EPPS 性格検査の115陳述の分析結果

陳述	$a_i$	選択された回数					
		0	1	2	3	4	5
78(支配)	人からリーダーとして認められたい	.842	-.870	-.249	.426	1.637	
60(他者認知)	友だちの性格について考えたり、どうしてそのような性格になったかを調べてみたい	.595	1.534	.926	-.117	-.652	
75(支配)	自分の所属している集団のリーダー格になりたい	.570	-.529	.327	1.613		
73(支配)	クラス会や委員会では、議長として指名されたり選挙されたい	.311	-.366	-.166	.783	1.336	
17(追従)	グループ活動で何をするか決めるときは、誰か他の人の意見に従いたい	.248	1.024	.308	.223	-.391	-.393
80(支配)	グループ活動の決定は、自分がやりたい	.193	-.414	-.118	.320	1.070	
53(親和)	一人でやるよりも、友だちと協力してやる方が好きである	.162	.870	.467	-.100	-.240	-.336
81(支配)	人を説得して、自分がやりたいと思っていることをやらせたい	.151	-.544	-.294	-.036	.338	.662
90(内罰)	自分には、いろいろな場面を切り抜ける力がないのでゆううつになる	-.147	.489	.100	-.397		
134(攻撃)	人からばかにされたら仕返しをしたい	.126	-.510	-.256	-.021	.222	.574
31(顕示)	自分がなしとげたことを好んで人に話したい	.112	-.278	-.257	.159	.638	
13(追従)	世の中の慣習に従い、自分の尊敬する人が認めないようなことはしたくない	.101	.434	.013	-.152	-.527	

の  $a_i$  と回数に与えられる数量が示されている。陳述60,90は、やや内容が異質であるように

思われるが、他の10陳述については、「支配」を意味すると考えてよいであろう。ただし、内容は、肥田野他が述べている「支配」よりも、より広義の「支配」である。陳述17,53,13については、その意味が「支配」とは逆転しているが、これは回数に与えられる数量が、回数が多いほど小さくなっていることと対応している。例えば、陳述78では3回が1.637、0回が-.870となっているのに対し、陳述17では0回が1.024、5回が-.628となっている。すなわち、ここで得られた  $m_n$  の値が大きい受検者  $n$  は、「支配」に対する欲求が高いと解釈される。なお、陳述60の  $a_{60}$  の値が大きい主な理由は次の通りである。TABLE 3.14には、

TABLE 3.14 各陳述が用いられた回数

陳述	210項目の中で用いられた回数	TABLE 3.5の11陳述と対になった回数
78	3	1
60	3	3
75	2	1
73	3	1
17	5	1
80	3	1
53	5	1
81	4	1
90	2	2
134	4	2
31	3	1
13	3	1

各陳述が210項目の中で現れる全回数と、TABLE 3.13の中の陳述と対になって現れる回数が示されている。陳述60は、210項目の中で3つの項目に現れるが、その3つの項目全てが、TABLE 3.13の中の陳述と対になっている。そこで、陳述60を選んだ回数の多い人は、TABLE 3.13の他の陳述を選んだ回数が少ない、という関係が強くなり立っていることになる。このことは、陳述78や75などの「支配」の陳述では多い回数に対して大きな数量が与えられるのに対し、陳述60では少ない回数に対して大きな数量が与えられることから裏付けられる。一対比較による強制選択という方法をとる以上、このような結果が得られることは避けられない。陳述90についても、2項目中2項目がTABLE 3.13の他の陳述と対になっている。したがって、この陳述の  $a_i$  が  $a_i > .1$  となったのには、陳述の内容だけでなく、方法上の特性も関係していると言えよう。

さらに、残りの115陳述から、TABLE 3.13の12陳述を除いた103陳述を基に、再度分析を行った。その結果がTABLE 3.15である。 $a_i > .1$ の基準で選ばれた19陳述の内容は、およそ2つに分かれる。1つは、陳述104,105,38,44,101,103によって表される「変化」である。もう1つは、陳述47,98,67,89,41,58,70,54,97,130,66,39によって表される「親和」である。第1のグループでは、例えば陳述104では3回が-.952、0回が1.608など、多い回数に対して小さな数値が与えられているため、 $m_n$ の値が小さい受検者 $n$ は、「変化」への欲求が高いことになる。また、第2のグループでは、陳述41,130,39が他の陳述とは数量や意味が逆転している。例えば、陳述47では4回が.678、0回が-.727なのに対し、陳述41では0回が.763、3回が-.545となっている。すなわち、 $m_n$ の値が大きい受検者は「親和」への欲求が高いことになる。

「変化」と「親和」という一見無関係と思われる2つの特性が、ここで同時に選ばれたのには、いくつか理由が考えられる。第1の理由は、「変化」を望む受検者は「親和」を望まない、という傾向が実際に存在する、というものである。第2の理由は、受検者数が909では少なく、2つの特性を分離するには、さらに多くの受検者数が必要である、というものである。第3の理由は、先程述べた一対比較法という方法上の特性による、というものである。第3の理由の可能性を調べるため、TABLE 3.14と同じことを表したものをTABLE 3.16に示す。TABLE 3.16の陳述どうして対になった項目はさほど多くはなく、方法上の特性が原因であると断定することはできない。したがって、今後受検者数を増やすなどして原因を探る必要があろう。

なお、残りの84陳述についての分析では、解釈の容易な結果が得られなかったため、これ以上一次元性をなす陳述を抽出することはできないと判断した。結局、検査の作成時に仮定された15特性を全て抽出することはできなかった。しかし、このことは、検査が妥当でない、ということ直ちに意味するものではない。なぜなら、一対比較という方法上の特性により、異質な内容の陳述間の相関が高くなりやすく、特性間の分離がしにくくなるためである。さらに、135という陳述数に対しては、909という受検者数は十分に多いとは言えない。特に今回のデータは、首都圏の大学生を対象に収集されたものであるため、さらに一般の成人に受検者をひろげる必要があろう。

TABLE 3.15 EPPS 性格検査の103陳述の分析結果

陳述	$a_i$	選択された回数					
		0	1	2	3	4	5
104(変化)	新しいことや、ちがったことをやってみよう	.705	1.608	.620	-.113	-.952	
105(変化)	新しいことを試みるのが好きである	.470	1.244	.809	.131	-.249	-.849
38(自律)	ものごとは、きまりきった型どおりのやり方ではしたくない	.404	.982	.469	-.280	-.812	
44(自律)	他の人が「型やぶりだ」と思うようなことをしたい	.286	.798	.563	-.176	-.649	
47(親和)	友だちと非常に親密になりたい	.273	-.727	-.329	.077	.574	.678
98(養護)	人には親切と同情心をもって接したい	.264	-.733	-.300	.088	.733	
67(求護)	けがをしたり病気になる時、友だちから大いに気をつかってもらいたい	.239	-.742	-.450	-.208	.012	.499 .944
89(内罰)	自分の考えをおし通して争うよりは、相手にゆずった方がよいと思う	.215	-.612	-.424	-.134	.243	.269 .785
41(自律)	自分がやりたいと思うことを、自由に行ないたい	.198	.763	.533	.043	-.545	
58(他者認知)	何か事があった場合、人はそれをどう感じているか知りたい	.171	-.478	-.368	.118	.593	.685
70(求護)	困っているときは、友だちに助けてもらいたい	.169	-.658	-.332	-.196	.583	
54(親和)	たがいに親切で、仲のよいグループに加わりたい	.168	-.637	-.297	.067	.395	.730
97(養護)	友だちがけがをしたり病気になる時には、同情してあげたい	.145	-.580	-.320	-.301	.080	.548
101(変化)	新しい流行をとり入れるのが好きである	.133	.394	-.060	-.458		
130(攻撃)	他の人に対する自分の気持ち、当人にははっきり言いたい	.129	.623	.278	-.110	-.222	-.205 -.476
66(求護)	病気になる時、友だちからいたわってもらいたい	.123	-.415	-.097	-.401		
39(自律)	何かやりたいときは、他人にたよらず、自分の判断で決めたい	.121	.448	.355	-.001	-.243	-.587 -.155
103(変化)	あちらこちら、いろいろなところに住んでみたい	.110	.384	.386	.352	-.020	-.401
6(達成)	ものごとは、他の人よりじょうずにやりたい	.106	-.180	-.358	-.151	.396	.553



TABLE 3.16 各陳述が用いられた回数

陳述	210 項目の中で 用いられた回数	TABLE 3.7 の 18 陳述 と対になった回数
104	3	2
105	4	2
38	3	2
44	3	0
47	4	1
98	3	1
67	5	1
89	5	3
41	3	2
58	4	2
70	3	1
54	4	1
97	4	1
101	2	1
130	5	0
66	2	0
39	5	1
103	4	2
6	4	1

## 3.4 まとめ

本章では、一般化等質性分析の特別な場合として、 $G=1$ ,  $R=1$  とすることにより、狭義の一次元尺度を構成する方法を提案した。第1章で述べたように、潜在構造分析や項目反応理論といった確率的な尺度構成法を適用するためには、一次元性を持つ項目をあらかじめ選び出しておくことが要求される。さらに項目反応理論において、段階反応モデルを用いるときには、項目が一次元性を持つことだけでなく、カテゴリの順序も分かっている必要はない。本章で提案した方法は、このような要求にも応え得る方法である。その特徴は、図に頼らず、 $a_i^k$  の値に基づいて項目の選択を行えること、項目を選択するという目的に鑑みて最適なカテゴリ値の変換が求まること、である。これらの特徴は、2つの人工データの分析例によって明らかにされた。また、数学能力検定試験データの分析では、 $k$  の値を変えることで構成する尺度の一次元性の度を調整する方法が示された。循環系機能評価データや循環器系危険因子データでは、カテゴリの順序を見出すとともに、数量化Ⅲ類では不可能であった項目の選択を行うことができた。さらに、EPPS 性格検査データで示されたように、全項目数に対して選択すべき項目数が少ないときにも、項目の選択が可能であった。

以上の結果から、本章で提案した手法は、テストデータの解析や質問紙調査データの構造分析等、応用場面において現実役に立つことが期待できると言えよう。3.1 節で述べたように、狭義の一次元尺度は多くの人文・社会科学の分野で必要とされている。本来は狭義の一次元尺度を目的として項目を作成していたにもかかわらず、実際には狭義の一次元性を持っていないといった場合も多い。本章の方法によって、そのような項目群のなかから一次元性を持つ項目を選び出し、狭義の一次元尺度を構成できることが示された。したがって本方法は、諸分野において有用性を持つと考えられる。

実際に本方法を適用する上での留意点や今後の展開について、以下にまとめた。

提案した方法を現実用いる上で最も問題となるのは、 $k$  の値をいくつにするか、ということと、項目選択の基準となる  $a_i^k$  の値をいくつにするか、ということであろう。個体に対して一次元尺度得点を与えることが目的ならば、 $a_i^k$  の値をいくつにするかということは問題とはならない。なぜなら本章の方法で求められた  $m$  は、 $a_i^k$  により重みづけられた上で求められており、 $m$  は既に一次元尺度得点となっているためである。しかし、他の尺度構成法の事前分析として本章の方法を用いる場合には、項目選択を行う必要がある。

項目選択の基準となる  $a_i^k$  の値は、最適変換されたスコアベクトル  $X_i w_i$  と尺度得点  $m$  との相関係数の二乗となること、3.2 節で示された。したがってこの値は、主成分分析にお



ける主成分負荷や因子分析における因子負荷と同じように解釈することができる。因子分析において、例えば 0.3 以上の因子負荷を持つ項目だけを取り出すならば、本章の方法においても  $a_i > 0.3^2 = 0.09$  となる項目だけを選択すればよいということである。

尺度の一次元性の程度を調節するパラメタである  $k$  の値を決める 1 つの方法は、十分に大きな  $r$  の値が得られるまで  $k$  の値を大きくする、というものである。 $k$  は 0 より大きな任意の実数を取り得るため、その値を決めづらい。一方、 $r$  は 0 と 1 の間の値を取り、数量化Ⅲ類における相関係数の二乗に相当するため、値の意味が理解しやすい。 $k$  を大きくすれば  $r$  も大きくなるため、研究者の望む  $r$  の値が得られるまで  $k$  の値を大きくするのである。しかし、 $r$  の値だけに基いて  $k$  の値を決めることは賢明ではない。なぜなら、人工データ 1 のように  $r = .82 (k = 0)$  であっても  $k$  を大きくし一部の項目を選択すべき例もあるからである。あらかじめ  $k$  の値を 1 つに決めず、それを定めることでどのような局所解が得られるか、といったデータ構造を吟味すべきである。

$k$  の値を大きくすれば局所解が生じることは、人工データや数学能力検定試験データにおいて示された、どの局所解を採択すべきか、ということは項目の内容によって決めるべきである。学力テストなどのように、一次元性があることを想定して項目を作成したときには、なるべく多くの項目を取り込める解を採択すべきであろう。また本章の方法においては、局所解が生じることが好ましくないとは言えない。なぜなら、データによっては構成される一次元尺度の数が 1 つであるとは限らないからである。その例は人工データ 1 の分析でも示された。人工データ 1 では局所解が生じたことによりデータ構造を見出すことができた。さらに、複数の一次元尺度を構成するときに、1 つの項目が複数の尺度構成に寄与するというデータ構造がある場合でも、本章の方法を用いることにより、各局所解によって、項目の重なりがある尺度を構成できる。その例は、循環器系危険因子データで示されたとおりである。

以上述べたように、 $k$  の値を変え、局所解を調べることで探索的に項目の選択を行う、というのが本論文の立場である。このような立場をとることで、本章の手法はデータ探索の方法としての適用範囲がさらにひろがる。例えば、通常は因子分析を行い、複数の因子を抽出しようとするデータにおいても、各局所解を利用することで、複数の一次元尺度構成が可能となる。因子分析では因子数の決定方法があいまいであり、因子数を変えれば因子負荷が変わってしまう、しかし本章の方法を用いれば、1 尺度 1 項目といった解は除き（場合によってはそれも含め）、局所解の数を尺度の数とすればよい。また、明らかに不適切な解を除くことで尺度の数を変えたとしても、他の局所解における  $a_i^2$  の値は変わらない。

さらに、ここで提案した手法は尺度構成を目的としているが、その適用範囲は必ずしも

尺度構成に限る必要はない。例えば、循環系機能評価データでは、研究目的によっては、全ての項目を用いた広義の一次元尺度構成（例えば数量化Ⅲ類）が必要であり、項目を捨て去る必要はないかもしれない。しかし、本章の方法を適用することにより、左室駆出時間は他の項目とは異質なものである、という知見が得られる。複数の質的項目に関してデータが得られたとき、有益な結果が得られなくともとりあえず本方法によって分析してみる価値はあるということである。数量化Ⅲ類では、カテゴリ間の関連を表現することはできる。しかし場合によっては、カテゴリよりも項目に関心の重点が置かれることもある。本方法によって得られる  $a_i^2$  の値を調べることで、項目がどのように関連しているのか、というデータ構造をより理解することができよう。ただしここで主張しているのは、数量化Ⅲ類に置き換わるものとして本章の手法を用いるべきである、ということではない。数量化Ⅲ類や IRS といった従来の手法と、ここで提案した手法とを併用することにより、それぞれの手法の特徴を生かした豊かな知見が得られるであろう、ということである。

第 2 章で示したように、量的データを扱えるような等質性分析を变形することは非常に容易である。本章の方法においてもタミー変数行列  $X_i$  を量的変数ベクトル  $x_i$  に置き換えれば、量的データを扱えるようになる。さらに、個体がいくつかのグループに分かれている等、何らかの構造があらかじめ知られているならば、尺度得点  $m$  に対して、正準判別分析や数量化Ⅱ類のようにデザイン行列による制約を課すことも可能である。

本方法は、データの探索的な分析を目的としており、記述的な方法である。したがって、結果の信頼性等の議論は行っていない。統計的な推測を行うための 1 つの方法は、ブートストラップ法 (Efron, 1979) により、結果の信頼区間を構成することであろう (馬場・土屋・中村・山崎, 1996a; 1996b)。また、確率的なモデルを導入し統計的な推測を行うという考えもある。例えば CATDAP (坂元, 1985) は、AIC に基づくモデル選択という立場から、質的な項目群の中から質的目的変数を最もよく説明できる項目を自動的に選択する方法である。どのようなモデルを導入すればよいか、といった点は必ずしも容易ではないが、今後統計的な評価の方法を考えていく必要もある。



このように、項目選択による一次元尺度構成法は、項目の選択によって、一次元尺度の構成が可能である。この方法の長所は、項目の選択によって、一次元尺度の構成が可能である点にある。この方法の短所は、項目の選択によって、一次元尺度の構成が可能である点にある。この方法の長所は、項目の選択によって、一次元尺度の構成が可能である点にある。この方法の短所は、項目の選択によって、一次元尺度の構成が可能である点にある。

このように、項目選択による一次元尺度構成法は、項目の選択によって、一次元尺度の構成が可能である。この方法の長所は、項目の選択によって、一次元尺度の構成が可能である点にある。この方法の短所は、項目の選択によって、一次元尺度の構成が可能である点にある。この方法の長所は、項目の選択によって、一次元尺度の構成が可能である点にある。この方法の短所は、項目の選択によって、一次元尺度の構成が可能である点にある。

## 第4章

# 項目パタンの分類による尺度構成法

本章<sup>1</sup>では、項目をいくつかの群に分類し、各群においてそれぞれ狭義の一次元の尺度を構成する方法について述べる。まず、4.1節で本章の目的を明らかにし、従来の項目分類のための方法をいくつか述べる。4.2節では、項目分類のための新たな方法を提案した後、その方法の意味を説明する。そして、4.3節では計算方法を述べ、4.4節でデータに対する適合度指標を提案する。4.5節では方法の性質や特徴を吟味するため、5つの人工データと3つの実データの分析例を示す。最後に4.6節では、提案した方法についてまとめる。

### 4.1 本章の目的

第3章では、局所解を用いることで複数の一次元尺度を構成する方法が例示された。この方法によれば、1つの項目が複数の一次元尺度の構成に寄与することが可能である。しかし、より単純なモデルとして、1つの項目が唯一つの一次元尺度の構成だけに寄与する、というものも考えられよう。モデルを単純化したことで、各一次元尺度の構成に寄与する項目の選別がさらにすすみ、各尺度の解釈がより容易になることが期待される。そこでこの章では、項目がいくつかの互いに排反なグループに分かれ、各グループ内の項目は一次元性を持つ、という構造を持ったデータを考える。このようなデータ構造は珍しいものではない。例えば、特性論の立場に立つ性格検査(詫摩・依田, 1968)等のように、1回の測定において、測ろうとする特性が複数ある、という場合である。測定の対象となる特性があらかじめ明確でないときには、それと関連すると思われる項目を多数用意するのが普通であり、異なる特性を測る項目が混じっていることは十分にあり得る。

そのようなデータ構造が考えられたとき、項目の分類には因子分析法が頻繁に用いられる。ところが因子分析法には、実際に適用する上で少なくとも3つの問題点を挙げることが

<sup>1</sup>本章は、土屋(1995a, 1995b, 1995c)、Tsuchiya(1996a)の一部を再構成し、加筆したものである。



できる。1.5節と一部重複するが、ここで再びそれらを述べる。

第1の問題点は、因子分析法は積率相関係数行列を基にする、という点である。なぜなら、質的なデータに対しては相関係数行列を求めることはできないからである。データが順序尺度の水準で得られている場合には、とりあえずそれを間隔尺度によるものと仮定して相関係数を求めることが多い。しかし、その仮定の是非については吟味されないことが多い。データが名義尺度の水準で得られているときには、各カテゴリにどのような数値を与えればよいのか、ということは、事前には知られない。また Guttman (1950b) や 楠 (1986) は、0・1変数に対して因子分析を行うと、一次元構造を持つデータが見かけ上多因子構造を示し、誤った解釈を行う危険性があることを指摘している。

さらに、積率相関係数は項目間の直線的な関係の強さを示すものであり、その他の関係の強さを表すことはできない、という欠点を持つ。この点に関しては、カテゴリ値の最適変換を行いながら主成分分析モデルや因子分析モデルを当てはめる PRINCIPALS や OSMOD といった方法も考えられている (Young, Takane & de Leeuw, 1978; Takane, Young & de Leeuw, 1979; Saito & Otsu, 1988; Kuhfeld & Young, 1989; 大津, 1993)。また、各カテゴリへの反応確率が因子分析モデルによって規定される方法も提案されている (Christofferson, 1975, 1977; Muthén, 1978)。

第2の問題点は、因子分析モデルだけでは、パラメタに回転に対する不定性があるため、解を求めるためにはさらに別の基準を導入する必要がある、という点である。不定性があるという性質は、単純構造への回転を許し、解釈の容易な結果を得ることに寄与している (Kiers, 1994) ため、利点とも言える。しかし、回転法により項目の分類結果が異なることがあり、直交回転・斜交回転を含め多くの回転法の中から唯一の方法を選ぶための適切な指針がない、という難点も生み出している。また、カテゴリ値の最適変換を伴う方法では、最適変換の基準に単純構造への回転基準が組み込まれていない。すなわち、因子分析モデルを当てはめるために最適変換はなされても、その変換が項目を分類するために最適なものであるという保証はない。

第3の問題点は、回転法が定まり因子負荷が求まったとしても、因子得点の推定にもいくつかの方法がある、という点である。因子分析法は、個体に尺度得点を与える方法と見なされるにもかかわらず、尺度得点が一意に定まらないことは問題である。また、尺度構成を行うときには、各個体の尺度得点をその後の分析に使う場合が多く、推定法の違いが結果に影響を与えることもあり得る。

一方、質的なデータをそのまま扱える数量化Ⅲ類では、項目の分類を行うためには、図表現

を用いなければならない上、結果の解釈が難しいことは1.7節で指摘したとおりである。そこで本章では、一般化等質性分析において  $R=1$  とすることにより、項目パタンを分類すると同時にカテゴリに与える数量を求め、複数の一次元尺度を構成する方法を提案する。この方法の特徴は、質的な変数をそのまま扱えること、項目分類のために、FIGURE 1.4 のような図や、因子分析法における回転法などの他の基準を必要としないこと、尺度得点間に直交性の仮定をおかないこと、計算法が単純であること、である。

なおここで、分類を伴った数量化Ⅲ類あるいは対応分析に関する研究について簡単に触れておく。

Cleveland & Relles (1975) は、2元分割表において行のカテゴリから列のカテゴリを予測するための情報の減少がなるべく少なくなるよう、行のカテゴリのクラスターリングを行う方法を述べている。Greenacre (1988) は、分割表の行と列のカテゴリをそれぞれ階層的に分類する方法を述べている。具体的には、対応分析の考え方に基き、行プロフィールあるいは列プロフィールをウォード法により階層的に分類している。Goodman (1981) は分割表の当該行あるいは列だけを取り出し、 $\chi^2$  検定を行うことで行あるいは列をまとめるか否かを判断している。Gihula (1986) は、Goodman の考え方を発展させ、正準分析 (対応分析) の結果得られる行と列の正準得点を基に、行と列のグルーピングを行うことを提案している。以上の方法は、項目の分類というよりは項目内のカテゴリの分類法であると考えられる。

DeSarbo, Carroll, Clark & Green (1984) や De Soete, DeSarbo & Carroll (1985) は、変数への最適な重みを見出すとともに個体を非階層的に、あるいは階層的に分類する方法を提案している。方法は量的な変数や各項目が1カテゴリを持つ自由反応型データを対象としているが、変数を重みづけるという考え方は、カテゴリの重みを求めながら個体の分類を行う、という方法へ発展させることができると思われる。そこで、van Buuren & Heiser (1989) は、カテゴリ値の最適変換を行うと同時に  $k$ -means 法 (MacQueen, 1967) により個体を分類する方法 (GROUPALS) を提案している。自由反応型データにおいて、各項目のカテゴリが1つであると見なせば、双対性 (西里, 1982) を利用しデータ行列の行と列を入れ替えることで、項目の分類に GROUPALS を用いることができる。しかし、アイテムカテゴリ型データや、1項目のカテゴリ数が複数の場合の自由反応型データに対し、行と列を入れ替えて GROUPALS を適用すると、カテゴリを分類することになり、項目の分類はできない。

ナビア (1976) はクラスター分析によって項目を分類した後、尺度解析法によって個体と項目に尺度値を与えるという二段階の分析法を示している。しかしクラスター分析は、尺度解析法で求められた尺度値に基づいて行うべきであり、尺度解析法を行うためには、クラス



ター分析で項目を分類しておかなければならない。すなわち、4.3節で示すような繰り返し計算が必要となる。

#### 4.2 項目パタンの分類による尺度構成法

第3章と同じく、 $X_i(N \times C_i)$ を項目  $i(i=1, \dots, I)$  の、1,0 から成るダミー変数行列とする。ただし、 $X_i$  の各行ごとについて、1はどこか一か所のみにあるか、全くないかのどちらかであるとする。例えば、アイテムカテゴリ型データの場合には、 $C_i$  はカテゴリ数であり、 $X_i 1_{C_i} = 1_N$  ( $i=1, \dots, I$ ) となる。また、自由反応型データのときには、各カテゴリを、カテゴリが一つの項目と見なせば、 $C_i=1$  であり、アイテムカテゴリ型の一つの項目と見なせば、 $C_i=2$  である。どちらの方法をとるべきかについては、後の節で議論する。また、 $A_i = \text{diag}(X_i 1)$  ( $i=1, \dots, I$ ) とする。特に、アイテムカテゴリ型データの場合には、 $A_i = I$  ( $i=1, \dots, I$ ) である。

このとき、次式を項目パターン分類のための最小化基準として提案する。

$$S(\{a_{gi}\}, \{w_{gi}\}, \{m_g\}) = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \|A_i(X_i w_{gi} - m_g)\|^2 \quad (4.1)$$

$$\text{ただし、} \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \|A_i m_g\|^2 = \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \|A_i 1\|^2, \quad (g=1, \dots, G),$$

$$\sum_{i=1}^I a_{gi}^k m_g' A_i 1 = 0, \quad (g=1, \dots, G),$$

$$\sum_{g=1}^G a_{gi} = 1, \quad (i=1, \dots, I), \quad \{a_{gi}\} \geq 0$$

(4.1) 式は、 $R=1$  とした一般化等質性分析において、

$$\varphi_{gi} = a_{gi}^k$$

とすることに相当する。

$k$  は、 $1 < k < \infty$  を満たす実数で、分析者があらかじめ与える値である。 $G$  は、項目を分類する群の数であり、構成される狭義の一次元尺度の数を表すことから、次元数と呼ぶこととする。 $G$  は因子分析における因子数に相当するが、(4.1) 式の基準は因子分析モデルの考え方に基づくものではなく、別の方法であることを強調するため、あえて別の用語を用いる。

$m_g$  は、第  $g$  次元尺度上の  $N$  個の尺度得点  $m_{gi}$  を並べた  $N \times 1$  ベクトルである。基準  $S$  だけでは、 $m_g$  は一意に定まらないので、(4.1) 式に示す制約条件を課す。特に、 $A_i = I$  ( $i=1, \dots, I$ ) のときには、各  $m_g$  は平均 0、分散 1 となるよう基準化される。なお、異なる

次元の尺度得点間に  $m_g' m_h = 0$  ( $g \neq h$ ) とした直交性は仮定されていない。心理学の分野では、異なる次元間に直交性の仮定をおくことが難しい場合もあるため、この点は大きな魅力である。直交という条件を課すことも可能ではあるが、本論文では考慮しない。

$a_{gi}$  は、0 と 1 の間の値をとり、項目  $i$  が第  $g$  次元尺度の構成に寄与する程度を表す。したがって項目  $i$  は、求められた  $a_{1i}, \dots, a_{Gi}$  の中で最も値の大きい次元へ分類される。同じ次元に分類されたいくつかの項目の内容を基に、その次元の尺度の意味を解釈することになる。 $\{a_{gi}\}$  は因子分析における因子負荷に相当するものと考えてよい。

$w_{gi}$  は、第  $g$  次元尺度上で、項目  $i$  の各カテゴリに与える数量  $w_{gic_i}$  を並べた  $C_i \times 1$  ベクトルである。項目内のカテゴリ間に順序がある場合には、 $w_{gi}$  の要素間に適当な順序制約をおく。第  $g$  次元尺度得点  $m_{gi}$  の大きな個体  $n$  は、次元  $g$  に分類された項目  $j$  の  $w_{gic_j}$  の値が大きいカテゴリに反応する傾向がある、ということが出来る。そのため、 $w_{gi}$  は尺度得点の値の大小の意味を解釈するのに用いられる。

(4.1) 式の基準の意味を説明するために、まず  $G=1$  とした場合を考える。このとき (4.1) 式は、数量化Ⅲ類において第1軸を求める基準に一致する。仮に全ての項目が一次元性を持つならば、最適変換されたスコアベクトル  $X_i w_i$  と  $X_j w_j$  ( $j \neq i$ ) の間の相関は、どの  $i$  と  $j$  の組み合わせについても高い。したがって、等質性分析により、それらスコアベクトルから求められる  $m$  を狭義の一次元尺度得点とみなすことは妥当である。逆に言えば、一次元尺度得点  $m$  を求めるためには  $m$  との相関が高くなる項目のみを用いなければならない。1.7節の人工データ1では、項目1から項目4のスコアベクトルのみを用いて尺度得点を構成すべきである(この尺度得点を  $m^*$  と表す)。ところが人工データ1では、項目5から項目8のスコアベクトル  $X_i w_i$  と  $m^*$  との間の相関は、どのような  $w_i$  を用いても低いので、 $e_i^* = \|A_i(X_i w_i - m^*)\|^2$  ( $i=5, \dots, 8$ ) の値は大きくなる。人工データ1の8項目全てを用いて数量化Ⅲ類を行うと、これら4つの  $e_i^*$  の値を小さくしなければならないため、最終的に得られる  $m$  には項目5から項目8のスコアベクトルが大きく影響し、 $m$  は項目1から項目4だけで構成された狭義の一次元尺度得点  $m^*$  とは異なるものになる。

(4.1) 式の基準では、 $\{a_{gi}\}$  という重み係数を導入することにより、相関の高い項目のグループを見出し、各グループにおいて狭義の一次元尺度得点  $m_g$  を構成することができる。その原理は以下のとおりである。 $\{a_{gi}\}$  に対して  $\sum_g a_{gi} = 1$  ( $i=1, \dots, I$ ) という制約条件があるため、(4.1) 式の  $S$  を最小化するためには、 $e_{gi}^2 = \|A_i(X_i w_{gi} - m_g)\|^2$  の値が小さい項へは大きな  $a_{gi}$  の値を、 $e_{gi}^2$  の値が大きい項へは小さな  $a_{gi}$  の値を与えなければならない。すなわち、何らかの方法で暫定的に  $m_g^*$  が求められたとすると、 $m_g^*$  との相関が低い項目に対



しては、小さな  $a_{gi}$  の値が与えられる。その結果、 $m_g^*$  との相関が高い項目だけを用いて、新たに  $m_g$  を求めることができる。この  $m_g$  は、一部のお互いに相関の高い項目だけから構成されているため、狭義の一次元尺度得点とみなしてよい。

$\sum_g a_{gi} = 1 (i = 1, \dots, I)$  という制約を満たす  $\{a_{gi}\}$  を用いて分類を行う。という考え方は、ファジィ c-means クラスタ法 (Dunn, 1974a; Dunn, 1974b; Bezdek, 1974; 大隅, 1979; Bezdek, 1981; Bezdek, 1987; Hathaway & Bezdek, 1988) でも用いられている。すなわち、ファジィ c-means クラスタ法では、 $I$  個のデータ  $\{\phi_i\}$  を  $G$  個のクラスタに分類するために、

$$D(\{a_{gi}\}, \{m_g\}) = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \|\phi_i - m_g\|^2 \quad (4.2)$$

$$\text{ただし, } \sum_g a_{gi} = 1 (i = 1, \dots, I), \quad \{a_{gi}\} \geq 0$$

を最小化する。(4.2) 式で求められた  $m_g$  は各クラスタの中心となる。

(4.1) 式とファジィ c-means 法の大きな違いは以下の点である。すなわち、(4.2) 式では、 $\{\phi_i\}$  はあらかじめ固定されており、どのクラスタにおいても不変であるのに対し、(4.1) 式では各  $g$  ごとに  $X_i w_{gi}$  という異なる尺度変換が施されており、 $\{X_i w_{gi}\}$  は分析の結果得られるものである。このことを示したのが FIGURE 4.1 である。FIGURE 4.1(a) では、6 個の  $\phi_i$  は固定されており、ファジィ c-means 法では、これらの点と  $m_1$  あるいは  $m_2$  との距離を考える。これに対し、(4.1) 式を模式化した FIGURE 4.1(b) では、 $\phi_{gi} = X_i w_{gi}$  のとり得る  $C_i (< N)$  次元部分空間が点線の内円で囲まれている。ただし、原点と  $\phi_{gi} = c1$  となる点は除いている (理由は次節で述べる)。そして、 $m_1$  との距離を考えるときにはこの円の中で最も  $m_1$  に近い点  $\phi_{1i}$  を用い、 $m_2$  との距離を考えるときには円の中で最も  $m_2$  に近い点  $\phi_{2i}$  を使うことになる。すなわち、(4.1) 式は、 $\phi_{gi}$  が存在し得る部分空間をクラスタに分類する基準であると言える。

(4.1) 式において、各  $g$  ごとに共通の  $w_i$  ではなく、異なる  $w_{gi}$  を用いる理由は次のとおりである。次節の計算法で述べるように、順序制約をおかないとき、 $w_{gi}$  の各要素は、そのカテゴリを選択した個体の尺度得点  $m_{gn}$  の平均  $(w_{gic_i} = (\sum_n \delta_{nc_i})^{-1} \sum_n \delta_{nc_i} m_{gn})$ 、 $\delta_{nc_i}$  は個体  $n$  がカテゴリ  $c_i$  を選ばば 1、そうでなければ 0) として求められる。したがって、尺度得点の値の大小の意味を解釈するために、その尺度を構成する項目の  $w_{gi}$  に基づくことができる。一方全ての  $g$  に対して共通の  $w_i$  を用いた場合、 $w_i$  の各要素は、上で求められた  $w_{gic_i}$  の加重平均  $(w_{ic_i} = (\sum_g a_{gi}^k)^{-1} \sum_g a_{gi}^k w_{gic_i})$  となる。そのため、 $w_{ic_i}$  の値を利用して尺度得点の解釈を行うことはできない。

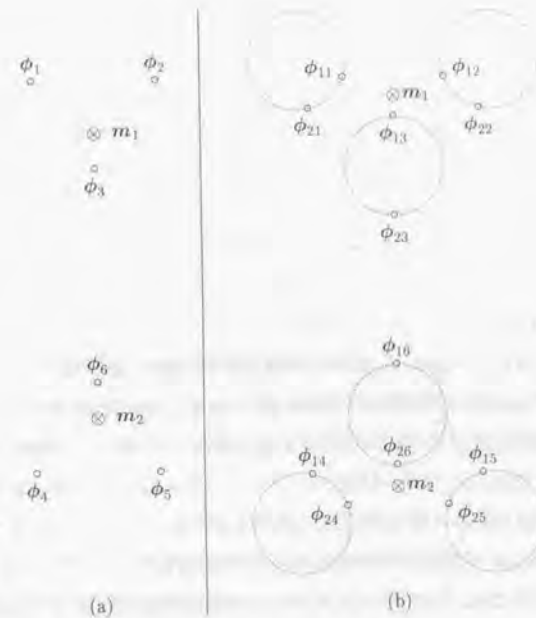


FIGURE 4.1 ファジィ c-means クラスタ法と (4.2) 式との違い

項目を分類するために、クラスタリングの代表的な手法である  $k$ -means 法ではなく、ファジィ c-means 法の考え方を導入した理由は 3 つある。第 1 は、 $\{a_{gi}\}$  という重み係数の値によって、項目  $i$  が尺度  $g$  の構成に寄与する程度を示すことができるからである。因子負荷行列に似た形に  $a_{gi}$  を並べれば、因子分析に慣れた分析者には結果が理解しやすいであろう。一方、 $k$ -means 法では、 $a_{gi}$  が 1 か 0 の値しかとらず、どの尺度に寄与するかだけしか分からない。第 2 は、後で述べるように、 $k \rightarrow 1$  とすることによってファジィ c-means 法は  $k$ -means 法となるため、(4.1) 式の基準は  $k$ -means 法を含んでいると言えるからである。第 3 は、どのグループにも属さない項目を、ある程度分析から除外することができるからである。 $k$ -means 法では、各項目は必ずどこかのグループに属さなければならない。あるグループに、属すべきでない項目が含まれる場合、そのグループの項目で構成する  $m_g$  は一次元尺度得点とは言えない。ファジィ c-means 法では、 $a_{gi} = G^{-1} (g = 1, \dots, G)$  とすることによって、どのグ

ループにも属すべきでない項目の影響を減らすことができる。次節の計算法で述べるように、 $\bar{m}_g$  は各項目のスコアベクトル  $X_i w_{gi}$  ( $i = 1, \dots, I$ ) の  $a_{gi}^k$  による加重平均で求められる。例えば、 $G = 3, k = 2$  の場合、 $G^{-k} \approx .11$  なので、 $a_{gi} = 1$  を用いる  $k$ -means 法に比べれば、 $m_g$  の構成に寄与する程度はかなり小さい。

次元数  $G$  の値は、因子分析における因子数と同様に、分析者が定めなければならない。実際には、 $G$  の値をいろいろに変化させ、各次元に分類された項目の内容や、 $m_1, \dots, m_G$  間の相関の高さを吟味して決めることになる。例えば、FIGURE 4.1(b) において、全ての円どうしが近くにある場合には、次元への分類は当然あいまいとなり、 $m_1$  と  $m_2$  の相関も高くなる。このときには  $G = 1$  とする方が適切かもしれない。 $G$  の値を決めるいくつかの基準については、後で述べる。

また、 $k$  の値も、 $1 < k < \infty$  を満たす範囲で事前に設定する必要がある。明らかに、 $k$  の値が大きくなるほど  $a_{gi}$  の値は  $G^{-1}$  に近づき、 $m_1, \dots, m_G$  間の相関係数は 1 に近づく (Bezdek, 1981)。逆に、 $k$  の値が小さくなると  $a_{gi}$  の値は 1 または 0 に近くなり、 $m_1, \dots, m_G$  間の相関は低くなる。そして、 $k \rightarrow 1$  のとき、ファジィ  $c$ -means クラスタ法は  $k$ -means クラスタ法となる。残念ながら、 $k$  を決めるための客観的な方法はない。しかし、次節の結果によれば  $A_i = I$  ( $i = 1, \dots, I$ ) ならば  $k = 2$  としたとき  $S$  は各項目について  $e_{gi}^2 = \|X_i w_{gi} - m_g\|^2$  の調和平均となること、 $a_{gi}$  の値そのものより項目の分類が目的ならば  $k$  の値が結果にはほとんど影響しないこと、などの理由から、次章の数値例では特にことわらないかぎり  $k = 2$  とした。Bezdek(1981) は、より詳しく  $k = 2$  とする理由を述べている。

### 4.3 計算方法

$S$  の最小化には交互最小二乗法を用いる。その基本的な手順は以下のとおりである。

Step 0:  $G, k$  を定める。 $\{a_{gi}\}, \{m_g\}$  に (4.1) 式の制約を満たす初期値を与える。

Step 1:  $\{a_{gi}\}, \{m_g\}$  を固定し、 $\{w_{gi}\}$  を求める。

Step 2:  $\{a_{gi}\}, \{w_{gi}\}$  を固定し、 $\{m_g\}$  を求める。

Step 3 ( $A_i = I$  ( $i = 1, \dots, I$ ) のとき):  $\{w_{gi}\}, \{m_g\}$  を固定し、 $\{a_{gi}\}$  を求める。

Step 3 ( $A_i \neq I$  のとき):  $\{w_{gi}\}$  を固定し、 $\{a_{gi}\}, \{m_g\}$  を求める。

Step 4:  $S$  の値を求め、収束していなければ Step 1 へ戻る。

### 4.3. 計算方法

$A_i$  の値によって Step 3 が異なることに注意する必要がある。また、 $A_i \neq I$  のときには、実際のプログラム上では Step 2 は不要である。ここで示す計算法は、特に次元がはっきりと分かれていない場合に、局所解に陥る可能性があるため、Step 0 の初期値をいろいろに変えて計算を繰り返す必要がある。

次に各 Step ごとに方法を説明する。

#### Step 1

項目内のカテゴリ間に順序制約がない場合には、 $w_{gi}$  は任意の値を取り得る。そこで、 $S$  を  $w_{gi}$  で微分し、その結果を 0 とおくと、 $A_i X_i = X_i$  であることから、 $w_{gi} = (X_i' X_i)^{-1} X_i' m_g$  ( $g = 1, \dots, G, i = 1, \dots, I$ ) が得られる。

カテゴリ間に順序制約 ( $w_{gi1} \leq \dots \leq w_{giC_i}$ ) がある場合には、以下の方法を用いる。まず、 $w_{gi1}, \dots, w_{giC_i}$  間に順序制約をおかずに  $e_{gi}^2 = \|A_i (X_i w_{gi} - m_g)\|^2$  を最小化すると、上で述べたとおり、各  $w_{giC_i}$  ( $C_i = 1, \dots, C_i$ ) はそのカテゴリを選んだ個体の  $m_{gC_i}$  の平均となる。それらが制約を満たしていれば、そのまま Step 2 へ進めばよい。しかし、仮に  $w_{gi1} > w_{gi2}$  となったとすると、 $w_{gi1} \leq w_{gi2}$  を満たしながら  $e_{gi}^2$  を最小とする  $w_{gi1}, w_{gi2}$  は  $w_{gi1} = w_{gi2}$  である。このとき、 $e_{gi}^2$  を最小にする  $w_{gi1}$  と  $w_{gi2}$  は、カテゴリ 1 とカテゴリ 2 を選んだ個体の  $m_{gC_i}$  の平均となる。このような手続きによって順序制約を満たす  $w_{gi1}, \dots, w_{giC_i}$  を見つけばよい。この結果得られた  $w_{gi}$  は、ある行列  $K_{gi}$  を用いて、

$$w_{gi} = K_{gi} (K_{gi}' X_i' X_i K_{gi})^{-1} K_{gi}' X_i' m_g$$

と表わされる。 $K_{gi}$  は例えば、 $w_{gi1} = w_{gi2}$  とした場合、

$$K_{gi} = \begin{pmatrix} 1 & 0' \\ 1 & 0' \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

である。

#### Step 2

(4.1) 式を  $m_g$  について微分し、結果を 0 とおくと、 $m_g$  に関する制約を考慮して、

$$\begin{aligned} m_g &= \frac{1}{1 - \lambda_g} A_g^{-1} \left( \sum_i a_{gi}^2 X_i w_{gi} + \xi_g A_g \mathbf{1} \right) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda_g} n_g \\ \text{ただし、} A_g &= \sum_i a_{gi}^k A_i, \\ 1 - \lambda_g &= (n_g' A_g n_g / \mathbf{1}' A_g \mathbf{1})^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$



$$\xi_g = \mathbf{1}' \sum_i a_{gi}^k \mathbf{X}_i \mathbf{w}_{gi} / \mathbf{1}' \mathbf{A}_g \mathbf{1}$$

が得られる。Step 1 の結果を用いれば、 $\mathbf{1}' \mathbf{X}_i \mathbf{w}_{gi} = \mathbf{1}' \mathbf{A}_i \mathbf{m}_g$  が成り立つため、(4.1) 式の制約条件から、 $\xi_g$  は 0 であることが分かる。そこで、 $\mathbf{A}_i = \mathbf{I}$  のときには、 $\xi_g = 0$  として各  $\mathbf{m}_g$  の値を実際に求めればよい。しかし、 $\mathbf{A}_i \neq \mathbf{I}$  のときには、Step 3 で  $a_{gi}$  と共に  $\mathbf{m}_g$  を求めるため、この Step 2 では  $\mathbf{m}_g$  を  $a_{gi}$  の関数として表現することが重要であり、 $\mathbf{m}_g$  の値を実際に求める必要はない。むしろ、 $\mathbf{m}_g$  が (4.1) 式の制約を常に満たすようにするため、 $\xi_g$  は残しておく。

Step 3 ( $\mathbf{A}_i = \mathbf{I} (i = 1, \dots, I)$  のとき)

$\mathbf{A}_i = \mathbf{I}$  のときには、(4.1) 式の  $\mathbf{m}_g$  についての制約が、 $\|\mathbf{m}_g\|^2 = N$ 、 $\mathbf{m}_g' \mathbf{1} = 0$  となり、 $a_{gi}$  に依存しない。そこで、(4.1) 式の  $S(a_{gi})$  を  $a_{gi}$  について微分し、その結果を 0 とおくと、 $a_{gi}$  に関する制約を考慮して

$$a_{gi} = \left( \sum_{h=1}^G c_{hi}^{-\frac{2}{k-1}} \right)^{-1} c_{gi}^{-\frac{2}{k-1}}$$

が得られる。ただし、 $c_{gi}^{\frac{2}{k-1}} = \|\mathbf{X}_i \mathbf{w}_{gi} - \mathbf{m}_g\|^2$  である。

Step 3 ( $\mathbf{A}_i \neq \mathbf{I}$  のとき)

$\mathbf{A}_i \neq \mathbf{I}$  のときには、 $\mathbf{m}_g$  についての制約が  $a_{gi}$  に依存するため、 $\mathbf{m}_g$  と  $a_{gi}$  に関して同時に  $S(a_{gi}, \mathbf{m}_g)$  を最小化しなければならない。そこで、(4.4) 式の  $\mathbf{m}_g$  を (4.1) 式に代入し、 $S(a_{gi})$  を  $a_{gi}$  の関数と考える。そして全ての  $\mathbf{w}_{gi}$  を固定し、 $\sum_g a_{gi} = 1$ 、 $a_{gi} \geq 0$  という条件の下で  $S(a_{gi})$  を最小化する  $a_{gi}$  を何らかの数値最適化法を使って求める。ここでは、最急降下法による外点ペナルティ法 (今野・山下, 1978) を使う場合について説明する。その手順は以下のとおりである。

Step 3.0:  $r$  に初期値として適当な正の小さな値を与える。

Step 3.1:  $S_{penalty} = S(a_{gi}) + rp(a_{gi})$  を最小とする  $a_{gi} (g = 1, \dots, G; i = 1, \dots, I)$  を数値微分を使った最急降下法により求める。ただし、

$$p(a_{gi}) = \sum_g \sum_i \left( \min(a_{gi}, 0)^2 + \max(a_{gi} - 1, 0)^2 \right) + \sum_i \left( \sum_g a_{gi} - 1 \right)^2$$

である。

Step 3.2:  $\sum_i \left( \sum_g a_{gi} - 1 \right) > \epsilon$  ならば  $r$  を大きくし、Step 3.1 へ。ただし、 $\epsilon$  はあらかじめ定めた正の小さな数である。

全ての  $a_{gi}$  が求まった時点で、(4.4) 式により  $\mathbf{m}_g$  の値を求め、Step 4 へ進めばよい。

#### 4.4 適合度指標

データへの適合度のよさを表わす指標として、ここでは残差二乗和  $S$  を利用する。前節の Step 1 より、 $S \geq \sum_g \sum_i a_{gi}^k \|Q_{gi} \mathbf{A}_i \mathbf{m}_g\|^2$  が成り立つ。ただし、 $Q_{gi} = \mathbf{I} - P_{gi} = \mathbf{I} - \mathbf{X}_i \mathbf{K}_{gi} (\mathbf{K}_{gi}' \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \mathbf{K}_{gi})^{-1} \mathbf{K}_{gi}' \mathbf{X}_i'$  である。  $0 \leq a_{gi}^k \|Q_{gi} \mathbf{A}_i \mathbf{m}_g\|^2 \leq a_{gi}^k \|\mathbf{A}_i \mathbf{m}_g\|^2$  なので、

$$0 \leq \min S \leq \sum_g \sum_i a_{gi}^k \|\mathbf{A}_i \mathbf{m}_g\|^2 = \sum_g \sum_i a_{gi}^k \|\mathbf{A}_i \mathbf{1}\|^2$$

となる。ただし、 $\min S$  は最小化された  $S$  の値である。全ての  $a_{gi}$  の値についてこれが成り立つため、

$$0 \leq \min S \leq G^{1-k} \sum_i \mathbf{1}' \mathbf{A}_i \mathbf{1}$$

が得られる。そこで、

$$0 \leq \lambda = 1 - \frac{G^{k-1}}{\sum_i \mathbf{1}' \mathbf{A}_i \mathbf{1}} \min S \leq 1$$

を適合度の指標として用いることとする。 $\lambda$  の値が 1 に近いほど、 $G$  次元性への適合度が高い、ということになる。当然、 $G = I$  のときには、1 つの次元の尺度を 1 項目から構成することになり、 $\lambda = 1$  となる。また、 $G = 1$  のとき  $\lambda$  は、

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - \frac{1}{\sum_i \mathbf{1}' \mathbf{A}_i \mathbf{1}} \sum_i \|Q_i \mathbf{A}_i \mathbf{m}\|^2 \\ &= \frac{\mathbf{m}' \sum_i P_i \mathbf{m}}{\mathbf{m}' \sum_i \mathbf{A}_i \mathbf{m}} = \frac{\mathbf{m}' \mathbf{D} \mathbf{D}_{col}^{-1} \mathbf{D}' \mathbf{m}}{\mathbf{m}' \mathbf{D}_{obs} \mathbf{m}} \end{aligned}$$

となり、数量化Ⅲ類における第 I 軸の相関係数の二乗に一致する。

なお、4.1 節の FIGURE 4.1(b) では、原点と  $\phi_{gi} = c1$  となる点を除いた。その理由は、全ての  $\phi_{gi}$  が 0 のとき、 $\min S = G^{1-k} \sum_i \mathbf{1}' \mathbf{A}_i \mathbf{1}$  となるが、これは数量化Ⅲ類において最大の相関係数が 0 であるということを示し、現実のデータでは普通これより小さな  $S$  が存在するからである。また、 $\mathbf{A}_i = \mathbf{I} (i = 1, \dots, I)$  のとき、全ての  $\phi_{gi}$  が  $c1$  ということも考えられるが、このときの最小値  $S = (c^2 + 1) G^{1-k} N I$  は理論的な最大値である  $G^{1-k} N I$  よりも大きくなるため、 $\phi_{gi} = c1$  は最適解とはなり得ない。

$\mathbf{A}_i = \mathbf{I} (i = 1, \dots, I)$  のときには、各項目・各次元ごとにこのような適合度を求めることができる。

項目  $i$  については,

$$0 \leq \lambda_i = 1 - \frac{G^{k-1}}{N} \left( \sum_{g=1}^I \|Q_i m_g\|^{-\frac{2}{k-1}} \right)^{1-k} \leq 1$$

の値が1に近いほど適合度は高くなる。逆にこの値が0に近いときには、項目  $i$  はどの次元へも分類が難しい、ということになる。この値はいわば因子分析における共通性のようなものと考えることができる。

次元  $g$  については,

$$0 \leq \lambda_g = 1 - \frac{G^k}{IN} \sum_{i=1}^I \left( \sum_{h=1}^G \|Q_i m_h\|^{-\frac{2}{k-1}} \right)^{-k} \|Q_i m_g\|^{-\frac{2}{k-1}} \leq 1$$

の値が1に近いほど適合度は高いことになる。この値は、次元  $g$  に分類された項目の一次元性の程度を表すものであり、因子分析における寄与とは意味が異なる。例えば、ある次元  $g$  に対して1つの項目の  $a_{gi}$  は1であり、他の項目の  $a_{gi}$  は0である場合、次元  $g$  は1つの項目のみから構成されるため、 $\lambda_g$  は1となる。

#### 4.5 数値例

本章で提案した方法の適用例を示す。まず、4つの人工データに適用した後、3つの実データを分析した結果を示す。

##### 4.5.1 人工データ1・3

まずはじめに分析するのは、第1章のTABLE 1.12に示した人工データ1と、TABLE 4.1に示した人工データ3であり、どちらもアイテムカテゴリ型データである。人工データ3は、全ての項目について次元構造を持つ。

計算は、 $k=2$ とし、Step 0の初期値をランダムに変えることにより、それぞれ100回ずつ実行した。TABLE 4.2には、与えた  $G$  の値、100回のうち適合度指標  $\lambda$  が最も大きい値をとった回数、適合度指標  $\lambda$  の値が示されている。 $G=1$ のときには、数量化Ⅲ類に一致する。また、順序制約をおく場合には、各項目について  $w_{g11} \leq \dots \leq w_{g14}$  とした。

TABLE 4.2に示されるように、人工データ1では  $G=2$  のときには必ず最適解に収束するが、 $G$  の値が大きくなるにつれ、局所解に陥りやすくなることが分かる。このことは、8つの項目を2つに分類することは容易だが、3つや4つのグループに分類する組み合わせはいくつかあり、どれか1つに絞ることは難しい、ということを示唆している。また、 $G=3$  のときの  $\lambda$  の値は、 $G=2$  のときのそれに比べてあまり変わらず、順序制約がないときに

TABLE 4.1 人工データ3

$n$	項目							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	1	1	1
3	2	2	1	1	1	1	1	1
4	2	2	2	1	1	1	1	1
5	2	2	2	2	1	1	1	1
6	2	2	2	2	2	1	1	1
7	2	2	2	2	2	2	1	1
8	2	2	2	2	2	2	2	1
9	2	2	2	2	2	2	2	2
10	3	2	2	2	2	2	2	2
11	3	3	2	2	2	2	2	2
12	3	3	3	2	2	2	2	2
13	3	3	3	3	2	2	2	2
14	3	3	3	3	3	2	2	2
15	3	3	3	3	3	3	2	2
16	3	3	3	3	3	3	3	2
17	3	3	3	3	3	3	3	3

TABLE 4.2 100回の計算のまとめ(人工データ1・3)

データ セット名	$N$	$G$	順序制約なし		順序制約あり	
			回数	適合度	回数	適合度
人工データ1	13	1	100	.819	100	.818
		2	100	.879	100	.878
		3	23	.878	27	.878
		4	26	.896	21	.895
人工データ3	17	1	100	.837	100	.837
		2	100	.844	100	.844
		3	49	.857	49	.857
		4	74	.879	59	.879



は、.879から.878へ小さくなってさえている。そこで、このデータでは $G=2$ が妥当であろうと判断される。この結果は、第1章で述べた人工データ1の作成方針に一致している。

$G=2$ のときに得られた $\{a_{gi}\}$ の値、各項目・各次元の適合度指標および $m_1$ と $m_2$ の間の相関係数をTABLE 4.3に示す。順序制約の有無にかかわらず、項目1から4については

TABLE 4.3 人工データ1について求められた $\{a_{gi}\}$ の値

項目	順序制約なし			順序制約あり		
	$g=1$	$g=2$	適合度	$g=1$	$g=2$	適合度
1	.875	.125	.873	.876	.124	.874
2	.898	.102	.883	.897	.103	.882
3	.853	.147	.881	.853	.147	.882
4	.794	.206	.880	.795	.205	.880
5	.189	.811	.878	.158	.842	.878
6	.104	.896	.878	.104	.896	.877
7	.132	.868	.885	.136	.864	.883
8	.129	.871	.872	.130	.870	.871
適合度	.880	.878	.879	.881	.876	.878
相関	.733			.734		

$g=1$ 、項目5から8については $g=2$ の方の $a_{gi}$ の値が大きく、それぞれがグループをなすことを示している。そして、ここで得られたグループは、第1章の議論で得られたものに一致している。

TABLE 4.4には、 $G=2$ のときの $\{w_{gi}\}$ の値が示されている。項目1から4については $g=1$ 、項目5から8については $g=2$ の方の $w_{gi}$ の値を見ると、制約をおかずともカテゴリの値とともに数量は大きくなっており、カテゴリの順序どおりであることが分かる。なお、制約のある場合には、例えば $g=1$ では項目5のカテゴリ1と2で値が等しくなるなど、全ての次元・項目で確かにカテゴリの順序に従った数量が得られている。

$k$ の値が結果に与える影響を調べるために、 $G=2$ のまま $k$ の値を変えて人工データ1を分析した結果をTABLE 4.5に示す。 $k$ の値が小さくなると $a_{gi}$ の値は1または0に近づく、 $k$ が大きくなると $a_{gi}=0.5$ に近づくことが分かる。またそのため、 $m_1$ と $m_2$ の間の相関係数は $k$ とともに大きくなる。ただし、 $a_{gi}$ の値が最も大きい次元へ項目を分類するという手続きに従えば、TABLE 4.5において得られる項目の分類は $k$ の値に依存しない。この後の適用例でもこの傾向は変わらなかったで、全て $k=2$ として分析を行なった。

TABLE 4.4 人工データ1について求められた $\{w_{gi}\}$ の値

次元( $g$ )	項目	カテゴリ(制約なし)				カテゴリ(制約あり)			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	1	-1.43	-1.01	0.15	1.21	-1.43	-1.00	0.15	1.22
	2	-1.37	-0.77	0.48	1.31	-1.37	-0.77	0.47	1.31
	3	-1.29	-0.49	0.76	1.38	-1.28	-0.49	0.76	1.39
	4	-1.20	-0.18	1.02	1.43	-1.19	-0.18	1.02	1.43
	5	-0.00	-1.01	-0.07	1.09	-0.81	-0.81	-0.07	1.09
	6	-0.72	-0.57	0.20	0.97	-0.72	-0.57	0.20	0.97
	7	-0.79	-0.62	0.71	0.99	-0.79	-0.62	0.71	0.99
	8	-0.92	-0.00	0.58	1.34	-0.92	0.00	0.58	1.35
2	1	-1.32	-0.37	-0.27	0.97	-1.31	-0.37	-0.27	0.98
	2	-1.13	-0.30	0.18	0.91	-1.13	-0.30	0.18	0.91
	3	-0.76	-0.64	0.62	1.19	-0.76	-0.64	0.62	1.19
	4	-0.86	-0.45	1.07	0.93	-0.86	-0.45	1.04	1.04
	5	-1.39	-1.01	0.14	1.22	-1.39	-1.02	0.15	1.22
	6	-1.35	-0.78	0.47	1.31	-1.35	-0.78	0.47	1.31
	7	-1.28	-0.50	0.77	1.39	-1.28	-0.50	0.77	1.39
	8	-1.20	-0.18	1.01	1.45	-1.20	-0.18	1.01	1.45

TABLE 4.5 人工データ1について求められた $\{a_{gi}\}$ の値

項目	$k=1.5 (\lambda=.902)$		$k=3 (\lambda=.857)$		$k=10 (\lambda=.834)$	
	$g=1$	$g=2$	$g=1$	$g=2$	$g=1$	$g=2$
1	.981	.019	.716	.284	.544	.456
2	.986	.014	.745	.255	.551	.449
3	.972	.028	.705	.295	.546	.454
4	.945	.055	.657	.343	.538	.462
5	.047	.953	.332	.668	.464	.536
6	.013	.987	.258	.742	.448	.552
7	.024	.976	.280	.720	.451	.549
8	.020	.980	.287	.713	.455	.545
相関	.723		.758		.819	

次に人工データ3については、その作成方針から  $G=1$  とすることが妥当である。しかし、TABLE 4.2 に示された結果では、 $G=1$  とする積極的な根拠は見られない。むしろ最適解の回数からは、 $G=2$  が適当であるように見える。さらに、 $G=2$  のときの  $\{a_{gi}\}$  の値を TABLE 4.6 に示す。人工データ3では、順序制約を課す場合にも、得られた  $\{a_{gi}\}$  の値は制

TABLE 4.6 人工データ3について求められた  $\{a_{gi}\}$  の値

項目	$g=1$	$g=2$	適合度
1	.785	.215	.869
2	.600	.400	.812
3	.373	.627	.817
4	.206	.794	.877
5	.206	.794	.877
6	.373	.627	.817
7	.600	.400	.812
8	.785	.215	.869
適合度	.845	.842	.844
相関		.918	

約のない場合と同じである。TABLE 4.6 では、項目3から6とそれ以外というかなりはっきりとした分類がなされている。ところが、 $m_1$  と  $m_2$  の間の相関係数は.918 とかなり高い。したがって、情報の縮約という観点から見れば、 $m_1$  と  $m_2$  を区別する必要はなく、 $G=1$  とすべきである、ということになる。ただし、実際のデータの分析においては、研究目的によっては、項目の内容も考慮し、相関係数が高くとも項目を分類する場合もあり得る。

以上の結果をまとめると、 $G$  の選択には、局所解の数や適合度  $\lambda$  の値、 $\{a_{gi}\}$  の値や  $m_1, \dots, m_G$  間の相関係数等を見た総合的な判断が必要である、ということになる。

#### 4.5.2 人工データ4

次に因子分析法との比較を行うために、TABLE 4.7 に示す人工データ4を分析する。人工データ4(a)の項目5から項目8において、カテゴリ1, 2, 3, 4をそれぞれカテゴリ3, 1, 4, 2と入れ換えることで人工データ4(b)が得られる。したがってカテゴリの値を名義尺度によるものとすれば、人工データ4(a)と人工データ4(b)は全く同じであると見なせる。どちらのデータセットにおいても項目1から項目4を取り出しダミー変数表示すれば完全尺度構造が得られる。また、項目5から項目8を取り出しダミー変数表示すれば、行と列を適当に並び換えることでやはり完全尺度構造が得られる。しかし、2つの項目群の間で個体の並

TABLE 4.7 人工データ4

(a)									(b)								
$n$	項目								$n$	項目							
	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3
2	2	1	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	3
3	2	2	1	1	1	1	1	1	3	2	2	1	1	3	3	3	3
4	2	2	2	1	2	1	1	1	4	2	2	2	1	1	3	3	3
5	2	2	2	2	3	2	2	2	5	2	2	2	2	4	1	1	1
6	3	2	2	2	3	3	2	2	6	3	2	2	2	4	4	1	1
7	3	3	2	2	2	2	2	2	7	3	3	2	2	1	1	1	1
8	3	3	3	2	3	3	3	3	8	3	3	3	2	4	4	4	4
9	3	3	3	3	4	4	3	3	9	3	3	3	3	2	2	4	4
10	4	3	3	3	4	4	4	3	10	4	3	3	3	2	2	2	4
11	4	4	3	3	3	3	3	2	11	4	4	3	3	4	4	4	1
12	4	4	4	3	4	4	4	4	12	4	4	4	3	2	2	2	2
13	4	4	4	4	4	3	3	3	13	4	4	4	4	2	4	4	4

び順は異なるため、狭義の一次元尺度を構成するためには項目を2つに分類する必要がある。

まず2つのデータセットそれぞれに対し、カテゴリ値を間隔尺度によるものと見なして、因子数を2とした因子分析を行った。共通性の推定値には SMC を用い、ヴァリマックス回転を行った結果を TABLE 4.8 に示す。カテゴリの順序がカテゴリ値と一致するデータ4(a)では、項目1から4と項目5から8に分類され、適切な項目群が得られている。一方、カテゴリの順序がカテゴリ値と一致していないデータ4(b)では、項目5と6が項目1から4と同じ因子に分類され、元の項目群を再現できていない。このことは、項目間の関連が直線的になるようにカテゴリ値を与えることができれば、因子分析法は有効であるが、そうでない場合には、適切な項目のまとまりを見出せないことを意味している。仮に適切ではないカテゴリ値を与えていたとしても、因子分析の結果からは、その不適切性を検出することはできない。カテゴリの順序があいまいな場合には、データに基づいて順序を定めた方がよい、ということになる。

そこで次に、PRINCIPALS<sup>2</sup> (Young, Takane & de Leeuw, 1978) によりカテゴリ値の最適変換を求め、得られた相関係数行列を基に因子分析を行った。どちらのデータセットについても、最終的には同じ結果が得られるため、データ4(b)の結果を示す。TABLE 4.9 は

<sup>2</sup>計算には SAS の PRINQUAL プロシジャを用いた。ただし、 $K=2$ , method=MTV とした。



TABLE 4.8 人工データ4について求められた因子負荷量

(a)				(b)			
項目	F=1	F=2	共通性	項目	F=1	F=2	共通性
6	.896	.347	.924	1	.947	.043	.899
5	.871	.426	.940	2	.946	.161	.920
7	.781	.543	.905	3	.897	.256	.870
8	.755	.567	.892	4	.892	.163	.823
2	.323	.934	.976	6	.508	.371	.396
1	.500	.802	.889	5	.383	-.122	.162
3	.583	.774	.939	7	.264	.845	.785
4	.602	.732	.899	8	-.098	.801	.652
寄与	3.80	3.57		寄与	3.88	1.63	

TABLE 4.9 人工データ4(b)について求められたカテゴリの最適変換値

項目	カテゴリ			
	1	2	3	4
1	1.29	1.87	3.05	4.00
2	1.06	1.92	3.08	3.96
3	1.02	1.88	3.24	3.72
4	0.92	2.07	3.18	3.30
5	1.16	3.85	0.36	2.65
6	1.63	4.09	0.56	3.02
7	1.93	4.13	0.88	3.59
8	2.55	4.32	1.03	3.84

PRINCIPALSにより最適変換されたカテゴリ値である。項目5から項目8についてはカテゴリ3, 1, 4, 2の順に値が大きくなっており、正しい順序が見出されている。TABLE 4.10は

TABLE 4.10 最適変換された人工データ4について求められた因子負荷量

項目	F=1	F=2	共通性
5	.895	.400	.961
6	.872	.394	.915
8	.763	.567	.904
7	.745	.609	.925
4	.696	.677	.943
2	.354	.932	.994
1	.537	.780	.897
3	.641	.731	.945
寄与	4.01	3.48	

TABLE 4.9のカテゴリ値を用いて因子分析(ヴァリマックス回転)を行った結果である。項目3と4はどちらの因子に対しても因子負荷が大きくTABLE 4.8(a)ほど単純構造になっていない。特に項目4は第1因子への負荷が大きく、項目5から8とおなじグループに分類されることになる。したがって、最適変換されたカテゴリ値を用いたのでは、あらかじめ想定された項目群を見出すことができない、ということになる。この理由は、最適変換が、回転の不定性がある主成分分析モデルだけを基にして行われ、単純構造への回転基準を考慮して行われてはいないからである。すなわち、得られるカテゴリ値は、主成分分析モデルや因子分析モデルを当てはめるのに最適ではあっても、単純構造を得るために最適であるとは限らない、ということである。この点は、1.4節や4.1節の本章の目的で述べたとおりである。

TABLE 4.11とTABLE 4.12は、 $G=2$ ,  $k=2$ として本章の方法を用いた結果である。ただし、TABLE 4.12では、各次元に属する項目の値のみを示している。また、初期値を変えて100回計算を行ったが局所解は得られなかった。各項目に対する $a_{gi}$ の値は、どちらのデータセットについても同じ結果が得られた。TABLE 4.11より、 $a_{gi}$ の値を基にして、項目1から項目4と項目5から項目8という2つのグループが見出される。この分類はあらかじめ想定していたものと一致する。また、TABLE 4.12(b)では、項目5から8の各カテゴリに与えられる数量は、カテゴリ3, 1, 4, 2の順に大きくなっており、正しい順序が見出されている。

TABLE 4.11 人工データ4について求められた  $\{a_{gi}\}$  の値

項目	$g=1$	$g=2$	適合度
1	.766	.234	.895
2	.828	.173	.889
3	.634	.366	.912
4	.537	.463	.905
5	.184	.816	.896
6	.237	.763	.884
7	.404	.596	.906
8	.299	.702	.892
適合度	.901	.894	.898
相関		.930	

TABLE 4.12 人工データ4について求められた  $\{w_{gi}\}$  の値

次元 ( $g$ )	項目	カテゴリ (データ 4(a))				カテゴリ (データ 4(b))			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	1	-1.44	-1.04	0.23	1.17	-1.44	-1.04	0.23	1.17
	2	-1.36	-0.81	0.56	1.24	-1.36	-0.81	0.56	1.24
	3	-1.29	-0.50	0.82	1.30	-1.29	-0.50	0.82	1.30
	4	-1.22	-0.13	1.02	1.30	-1.22	-0.13	1.02	1.30
2	5	-1.44	-1.04	0.21	1.19	-1.04	1.19	-1.44	0.21
	6	-1.36	-0.79	0.54	1.25	-0.79	1.25	-1.36	0.54
	7	-1.30	-0.48	0.81	1.29	-0.48	1.29	-1.30	0.81
	8	-1.24	-0.09	1.00	1.34	-0.09	1.34	-1.24	1.00

以上の結果をまとめると、

・カテゴリの順序があらかじめ確実に知られていないときには、カテゴリ値をそのまま用いた因子分析は、適切に項目を分類できない場合があること。

・主成分分析モデルや因子分析モデルを基にした、カテゴリ値の最適変換は、単純構造を得て項目を分類するためには必ずしも適切ではない場合があること。

・本章の方法は、項目の分類を行うために最適なカテゴリ値を見出すと同時に、項目の分類を行うことができること。

が示された。

#### 4.5.3 人工データ5・6

次に自由反応型データの分析例を示す。TABLE 4.13 の人工データ5は、項目1から10

TABLE 4.13 人工データ5

$n$	項目																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

までと残りの項目という2つの群に分けられるデータである。すなわち、はじめの10項目を取り出すと上三角行列となり、他の10項目を行について並びかえるとやはり上三角行列が得られる。このようなデータの例は、はじめの10項目が算数の問題、後の10項目が国語の問題といった場合に得られる。

本章で提案した方法の特徴の1つは、人工データ5のように項目数が個体数に比べて多いときでも、項目を分類することができる、という点である。因子分析法や主成分分析法では、相関係数行列のランクが落ちるため、項目数は個体数よりも少なくなければならない、という制限がある。



各項目をカテゴリが1つ ( $C_i = 1$ ) と見た場合と、1と0という2つのカテゴリを持つ ( $C_i = 2$ ) と見た場合のそれぞれについて、 $G = 2$  のときの適合度、 $\{a_{gi}\}$  の値、 $m_1$  と  $m_2$  の間の相関係数を TABLE 4.14 に示した。 $C_i = 1$  のときには、 $\{a_{gi}\}$  の大きさによって項

TABLE 4.14 人工データ5について求められた  $\{a_{gi}\}$  の値

項目	$C_i = 1 (\lambda = .255)$		$C_i = 2 (\lambda = .384)$	
	$g = 1$	$g = 2$	$g = 1$	$g = 2$
1	1.000	.000	.540	.460
2	1.000	.000	.630	.370
3	.618	.382	.701	.299
4	.556	.444	.793	.207
5	.580	.420	.858	.142
6	.557	.442	.785	.215
7	.557	.443	.704	.296
8	.550	.450	.625	.375
9	.538	.461	.554	.446
10	.532	.467	.500	.500
11	.026	.974	.447	.553
12	.005	.995	.416	.584
13	.505	.495	.374	.626
14	.626	.374	.235	.765
15	.674	.326	.149	.851
16	.700	.300	.183	.817
17	.544	.456	.283	.717
18	.540	.460	.416	.584
19	.538	.462	.457	.543
20	.532	.467	.500	.500
相関	-.119		.407	

目を分類すると、項目11と12を除いた18項目が次元1に分類されてしまう。それに対し、 $C_i = 2$  のときには、項目1から9が次元1、項目11から19が次元2に分類されており、ほぼ正しく分類が行なわれていることが分かる。項目10と項目20では、 $a_{gi} = 1/2$  となり、分類ができない。しかし、これらの項目に対しては全ての個体が1と反応しており、どのように行を並べかえても上三角行列の最後の列となり得るため、当然の結果であると言える。

以上のことから、本章で提案した方法の性質として、行と列を適当に並べかえることによってパラログラム型が得られるように、ダミー変数行列の列をいくつかに分類する方法である、ということが示唆される。なぜなら、上三角行列は、 $C_i = 2$  とすれば、列を並びか

えることによってパラログラム型が得られるからである(駒澤・土屋、1995)。

このことを確かめるため、さらに TABLE 4.15 の人工データ6を分析する。人工データ

TABLE 4.15 人工データ6

$n$	項目															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
5	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
7	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
9	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0

6も項目を8つずつ2つの群に分けられるデータである。ただし、行について並びかえて得られるのは、上三角行列ではなく、対角部分に1の集まった行列である。

TABLE 4.16 に  $C_i = 1$  の場合と  $C_i = 2$  の場合の  $\{a_{gi}\}$  の値を示す。 $C_i = 1$  としたときには、項目1から8と項目9から16という二つの群がはっきりと得られているのに対し、 $C_i = 2$  としたときには項目の分類ははっきりとしていない。すなわち、上で述べたことを裏づける結果となっていると言える。

#### 4.5.4 SD法データ

次に、実データに対して、本方法を適用した例を示す。データは、33人の大学生に、33枚の絵画に対する直観的印象を、TABLE 4.18 に示した20項目について7段階評価してもらったものである。すなわち、評定者×絵画×印象項目という3相データであるが、ここでは評定者と絵画を1つの相にまとめ、(評定者, 絵画)×印象項目という2相データにしたため、 $N = 1089$  である。3相データのまゝ扱う方法は、第5章で述べる。渡部・土屋(1995)は、このデータに対して、評定値を間隔尺度と見なし因子分析を行ない、ヴァリマックス回転により項目を3つの因子に分類している。TABLE 4.18 にその結果の一部を示す。

このデータに対して、本章の方法を、 $G = 1, 2, 3, 4, 5$  として適用した。計算は初期値を変えてそれぞれ100回行い、その結果を TABLE 4.17 にまとめた。 $G = 3$  までは局所解が存

TABLE 4.16 人工データ6について求められた  $\{a_{gi}\}$  の値

項目	$C_i = 1 (\lambda = .834)$		$C_i = 2 (\lambda = .286)$	
	$g = 1$	$g = 2$	$g = 1$	$g = 2$
1	.989	.011	.513	.487
2	.979	.021	.589	.411
3	.821	.179	.597	.403
4	.642	.358	.463	.537
5	.699	.301	.104	.896
6	.872	.128	.480	.520
7	.984	.016	.633	.367
8	.993	.007	.587	.413
9	.001	.999	.425	.575
10	.001	.999	.519	.481
11	.129	.871	.531	.468
12	.193	.806	.420	.580
13	.177	.822	.364	.636
14	.088	.912	.575	.425
15	.020	.980	.922	.078
16	.000	1.000	.546	.454
相関	.110		.153	

TABLE 4.17 100回の計算のまとめ (SD法データ)

$N$	$G$	回数	適合度
1089	1	100	.344
	2	100	.367
	3	100	.382
	4	38	.390
	5	2	.414

在せず、また  $G = 4$  の適合度は  $G = 3$  のそれに比べ、あまり高くなっているとは言えない。そこで、 $G = 3$  とすることが妥当であると考えられる。

$G = 3$  の場合の  $\{a_{gi}\}$  の値を TABLE 4.18、 $\{w_{gi}\}$  の値を TABLE 4.19 に示す。ただし、

TABLE 4.18 SD法データについて求められた  $\{a_{gi}\}$  の値 (順序制約なし)  
項目の後の数字は因子分析で分類された因子

項目	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	適合度
17 暗い—明るい (1)	.763	.116	.121	.674
10 楽しい—苦しい (1)	.686	.154	.160	.589
8 陰気な—陽気な (1)	.670	.162	.168	.554
15 あたたかい—つめたい (1)	.635	.185	.181	.496
19 気持ちがいい—気持ちが悪い (1)	.537	.233	.231	.420
14 のびのびした—いじけた (1)	.472	.242	.287	.339
13 かたい—やわらかい (1)	.403	.257	.340	.257
11 雑な—ていねいな (2)	.134	.733	.133	.645
4 ずぼらな—几帳面な (2)	.156	.677	.167	.560
9 繊細な—粗野な (2)	.211	.574	.215	.429
16 慎重な—軽率な (2)	.260	.458	.282	.232
18 敏感な—鈍感な (2)	.286	.400	.314	.155
7 鈍い—鋭い (2)	.267	.390	.343	.217
3 重い—軽い (3)	.200	.198	.602	.430
12 厚い—薄い (3)	.216	.213	.571	.385
5 堂々とした—貧弱な (3)	.245	.221	.535	.382
2 激しい—おだやかな (3)	.265	.243	.492	.323
1 小さい—大きい (3)	.266	.259	.476	.231
20 静的な—動的な (3)	.309	.292	.400	.130
6 異常な—正常な (1)	.327	.306	.367	.189
適合度	.359	.418	.369	.382
相関 ( $g = 1$ )	.316		-.011	
相関 ( $g = 2$ )			-.092	

TABLE 4.19 では、各次元に属する項目の値のみを示している。 $\{a_{gi}\}$  を用いて得られる3つの項目群は、TABLE 4.18 に示されるように、因子分析のそれとほぼ一致する。ただし、「正常な—異常な」については分類される群が異なっている。この項目の適合度は.187と低く、分類のための重みはほぼ  $a_{gi} = 1/3 (g = 1, \dots, 3)$  となっており、ここで用いた項目群の中では分類を行ないにくい項目であると推察される。



TABLE 4.19 SD 法データについて求められた  $\{w_{gi}\}$  の値 (順序制約なし)

次元 (g)	項目	カテゴリ						
		1	2	3	4	5	6	7
1	17	-1.72	-1.17	-0.63	-0.20	0.43	1.11	2.03
	10	1.97	1.09	0.42	-0.15	-0.71	-1.19	-1.55
	8	-1.61	-1.09	-0.61	-0.11	0.36	0.98	1.86
	15	1.84	1.09	0.35	-0.38	-0.76	-1.16	-1.67
	19	-1.37	-1.21	-0.67	-0.30	0.37	0.97	1.44
	14	1.41	0.72	0.23	-0.25	-0.52	-1.04	-1.47
	13	-1.05	-0.79	-0.40	-0.30	0.12	0.72	1.61
2	11	-2.44	-1.09	-0.20	0.23	0.47	0.91	1.59
	4	-2.36	-1.03	-0.18	0.08	0.50	0.81	1.40
	9	1.49	0.79	0.55	0.34	-0.13	-0.88	-2.33
	16	1.49	0.75	0.44	-0.01	-0.34	-1.11	-2.19
	18	1.24	0.61	0.38	0.10	-0.22	-0.80	-1.65
	7	-2.22	-0.74	0.02	0.25	0.27	0.43	1.17
	3	2.36	0.89	-0.11	-0.42	-0.59	-0.47	-0.12
3	12	2.53	0.97	-0.14	-0.41	-0.57	-0.43	-0.16
	5	1.86	0.28	-0.31	-0.53	-0.58	-0.41	-0.16
	2	2.36	0.80	-0.08	-0.51	-0.56	-0.33	0.33
	1	-0.18	-0.25	-0.57	-0.58	-0.32	0.04	1.47
	20	0.46	-0.28	-0.50	-0.33	0.08	0.84	1.55
	6	1.72	0.70	0.03	-0.38	-0.36	-0.19	0.31

次元1に分類されたのは、「暗い—明るい」、「楽しい—苦しい」、「陰気な—陽気な」、「あたたかい—つめたい」等の項目である。TABLE 4.19 では、カテゴリに与える数量は、カテゴリと共に大きくあるいは小さくなっており、「明るい」、「楽しい」、「陽気な」等のカテゴリに対する  $w_{1ic}$  の値が正に大きい。すなわち、 $m_{g1}$  の値が正に大きな値は、「明るい」という印象を与えていることになり、この次元は、「明るさ・あたたかさ—暗さ・つめたさ」を表す次元である、と解釈できる。次元2に分類されたのは、「雑な—ていねいな」、「ずばらな—几帳面な」、「繊細な—粗野な」、「慎重な—軽率な」等の項目である。TABLE 4.19 では、「ていねいな」、「几帳面な」、「繊細な」等のカテゴリに対する  $w_{2ic}$  の値が正に大きいことから、この次元は、「ていねいさ—雑さ」を表す次元である、と解釈できる。次元3に分類されたのは、「重い—軽い」、「厚い—薄い」、「堂々とした—貧弱な」、「激しい—おだやかな」等の項目である。TABLE 4.19 では、次元1、2と異なり、カテゴリに与える数量がカテゴリの大きさの順になっていない。例えば、項目3では、正に大きな値を与えられたカテゴリは1であり、負に大きな値を与えられたカテゴリは5である。そこで、次元3に分類された7項目を取り出して数量化Ⅲ類を行い、第Ⅱ軸までの結果を図示したものを FIGURE 4.2 に示す。FIGURE 4.2 では、カテゴリの布置の放物線が傾いており、そのために第Ⅰ軸ではカテゴリの順に数値が与えられないことが分かる。このような結果が生じる原因は、はっきりと分かっているわけではないが、主として各カテゴリの選択度数に依存していると思われる。このように、順序通りではない  $w_{gi}$  の値が得られた場合には、 $m_g$  の値を「ていねいさ—雑さ」を表すものと直ちに解釈することはできない。

そこで、次に  $w_{gi}$  の要素間に順序制約を課すことを考える。そのために、TABLE 4.18 を参考にして、カテゴリ7に対して大きな  $w_{gic}$  の値が与えられるよう、カテゴリ値の変換を行った。例えば、項目10では、カテゴリ1をカテゴリ7、カテゴリ2をカテゴリ6等と変換した。このデータに対して  $w_{g11} \leq \dots \leq w_{g17}$  という順序制約を課した結果を TABLE 4.20、TABLE 4.21 に示す。TABLE 4.22 に基づく項目の分類は、TABLE 4.18 のものと変わらない。TABLE 4.21 で分かるとおり、次元3では、カテゴリに与えられる数量はカテゴリの順序通りになっており、この次元は、「重厚さ—軽薄さ」を表す次元である、と解釈することができる。

#### 4.5.5 Kendall データ

次に数量化Ⅲ類では有効な分析が困難なデータの分析例を示す。データは、Kendall, Stuart & Ord (1983) の、48 人の就職希望者に対する 15 項目の評定データである。元の項目は、そ



FIGURE 4.2 次元3に分類された項目に対する数量化Ⅲ類  
(第Ⅰ軸対第Ⅱ軸)の結果

TABLE 4.20 SD法データについて求められた  $\{a_{gi}\}$  の値 (順序制約あり)  
項目の後の数字は順序制約なしで分類された次元

	項 目	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	適合度
17	暗い—明るい (1)	.768	.117	.114	.664
10	苦しい—楽しい (1)	.697	.154	.149	.583
8	陰気な—陽気な (1)	.678	.164	.158	.542
15	つめたい—あたたかい (1)	.645	.184	.171	.491
19	気持ちがわるい—気持ちがいい (1)	.556	.232	.211	.411
14	いじけた—のびのびした (1)	.505	.257	.238	.285
13	かたい—やわらかい (1)	.414	.259	.327	.247
11	雑な—ていねいな (2)	.139	.733	.128	.632
4	ずぼらな—几帳面な (2)	.156	.691	.153	.559
9	粗野な—繊細な (2)	.211	.583	.207	.415
16	軽率な—慎重な (2)	.264	.473	.263	.218
7	鈍い—鋭い (2)	.285	.428	.287	.159
18	鈍感な—敏感な (2)	.290	.421	.289	.138
3	軽い—重い (3)	.182	.172	.646	.484
12	薄い—厚い (3)	.205	.205	.590	.384
5	貧弱な—堂々とした (3)	.212	.212	.576	.364
1	小さい—大きい (3)	.255	.257	.488	.236
2	おだやかな—激しい (3)	.277	.250	.474	.301
20	静的な—動的な (3)	.306	.307	.386	.081
6	正常な—異常な (3)	.336	.308	.356	.172
	適合度	.336	.392	.378	.368
	相関 ( $g = 1$ )		.301	-.040	
	相関 ( $g = 2$ )			-.073	



TABLE 4.21 SD 法データについて求められた  $\{w_{gi}\}$  の値 (順序制約あり)

次元 (g)	項目	カテゴリ						
		1	2	3	4	5	6	7
1	17	-1.70	-1.16	-0.64	-0.21	0.43	1.12	2.02
	10	-1.57	-1.18	-0.72	-0.16	0.42	1.10	1.96
	8	-1.60	-1.09	-0.61	-0.12	0.36	0.99	1.85
	15	-1.63	-1.15	-0.76	-0.40	0.35	1.09	1.85
	19	-1.39	-1.21	-0.67	-0.30	0.37	0.98	1.45
	14	-1.45	-1.04	-0.52	-0.25	0.23	0.72	1.40
	13	-1.05	-0.79	-0.41	-0.31	0.12	0.73	1.63
2	11	-2.28	-1.08	-0.24	0.17	0.42	0.93	1.82
	4	-2.23	-1.02	-0.22	0.02	0.46	0.82	1.61
	9	-2.19	-0.87	-0.18	0.29	0.52	0.85	1.73
	16	-2.03	-1.08	-0.37	-0.05	0.41	0.81	1.75
	7	-2.14	-0.74	-0.02	0.22	0.26	0.50	1.40
	18	-1.57	-0.79	-0.25	0.06	0.38	0.69	1.47
	3	-0.59	-0.59	-0.58	-0.33	-0.02	0.95	2.39
3	12	-0.54	-0.54	-0.54	-0.31	-0.06	1.02	2.46
	5	-0.56	-0.56	-0.56	-0.43	-0.27	0.35	1.86
	1	-0.56	-0.56	-0.56	-0.51	-0.30	0.10	1.47
	2	-0.37	-0.37	-0.37	-0.37	-0.02	0.87	2.33
	20	-0.29	-0.29	-0.29	-0.23	0.14	0.84	1.40
	6	-0.25	-0.25	-0.25	-0.25	0.07	0.65	1.67

それぞれ 11 カテゴリを持つが, Sato & Yanai (1985) は, カテゴリの選択頻度を考慮して, 11 カテゴリを 3 カテゴリにまとめている. そこで, ここではこの 3 カテゴリにカテゴリライズし直されたデータを用いる. 数量化Ⅲ類の結果得られた, カテゴリに与える数量を FIGURE 4.3 に示す. FIGURE 4.3 では, 目立った特徴が見られず, 何らかの知見を得ることは難しい. そ

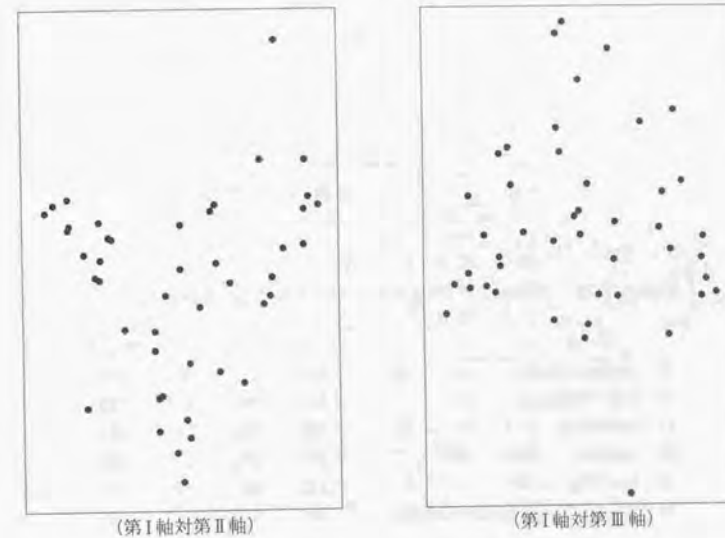


FIGURE 4.3 Kendall データに対する数量化Ⅲ類の結果

こで,  $G$  を 1 から 4 まで変え, それぞれ初期値をランダムに 100 回変えて行った計算結果を TABLE 4.22 にまとめた.  $G=3$  では, 局所解が存在するものの, 100 回のうち最適解を 66 回得ており, 必ずしも 3 つに分類することが難しいとは言いきれない. また,  $G=3$  としても得られた項目のグループを解釈することができたので, その結果を TABLE 4.23, TABLE 4.24 に示す. 第 1 の次元に分類された項目は, 「8 Salesmanship」, 「5 Self-confidence」, 「11 Ambition」等であり, この次元は「仕事に対する情熱」といったものを表すと言える. 第 2 の次元は, 「13 Potential」や「12 Grasp」等から構成され, 「力量」や「能力」を表す次元と言える. 第 3 の次元は「4 Likeability」や「7 Honesty」等から成り, 「外見的评价」の次元と言えるだろう.

TABLE 4.22 100回の計算のまとめ (Kendall データ)

$N$	$G$	回数	適合度
48	1	100	.469
	2	100	.474
	3	66	.492
	4	6	.520

TABLE 4.23 Kendall データについて求められた  $\{a_{gi}\}$  の値 ( $G=3$ )

項 目	$g=1$	$g=2$	$g=3$	適合度
8 Salesmanship	.834	.116	.050	.872
5 Self-confidence	.679	.201	.120	.693
11 Ambition	.500	.366	.137	.693
10 Drive	.431	.410	.159	.655
6 Lucidity	.413	.395	.192	.493
14 Keenness to join the company	.351	.312	.337	.342
13 Potential	.144	.751	.106	.815
12 Grasp	.226	.640	.134	.698
15 Suitability	.338	.374	.288	.361
9 Experience	.327	.347	.326	.078
4 Likeability	.032	.042	.926	.916
7 Honesty	.257	.271	.473	.260
1 Form of letter of application	.306	.334	.360	.133
2 Appearance	.303	.346	.351	.302
3 Academic ability	.327	.332	.342	.064
適合度	.471	.465	.538	.492
相関 ( $g=1$ )		.856	.424	
相関 ( $g=2$ )			.616	

TABLE 4.24 Kendall データについて求められた  $\{w_{gi}\}$  の値

次元 ( $g$ )	項目	カテゴリ		
		1	2	3
1	8	-0.93	0.84	1.10
	5	-1.13	-0.92	0.85
	11	-1.08	-0.15	1.09
	10	-0.83	-0.08	1.14
	6	-1.00	-0.18	0.69
2	14	-0.26	-0.40	1.05
	13	-1.29	0.01	1.00
	12	-1.36	-0.09	0.86
	15	-0.88	0.39	0.54
	9	-0.24	0.10	0.55
3	4	-1.45	0.18	0.93
	7	-1.62	-1.03	0.37
	1	-0.51	-0.01	0.58
	2	-0.86	-0.42	0.59
	3	-0.49	0.31	-0.20



なお、Kendall et al.(1983) は、元の11カテゴリのデータに対する因子数を4とした因子分析において、ヴァリマックス解と最尤解の結果を示している。それぞれの解に基づいた項目の分類結果は異なる。TABLE 4.23 も含めてどの結果が「正しい」のか、ということとは、Kendallデータが実データであり、元の構造が分からないため、判断は下せない。しかし、分析法を利用する側の立場に立てば、分析者の主観的な判断によって複数の異なる結果の中から1つを選ばなければならない因子分析法に比べて、唯一つの結果が得られ、分析者の判断に委ねられる部分が少ない本方法は魅力的であると考えられる。さらに人工データ4で示したように、因子分析を行った場合には、項目を分類するという目的に鑑みて必ずしも適切なカテゴリ値が与えられているとは限らない。またカテゴリの順序を確かめることもできない。一方、本章の方法は項目を分類する上で最適なカテゴリ値が与えられており、カテゴリの順序を確認することもできる。この点も因子分析に比べて大きな利点と言えよう。

#### 4.5.6 「日本人の国民性」データ

最後に数値化Ⅲ類や因子分析では分析が難しいデータへの適用例を示す。データは、統計数理研究所が実施している「日本人の国民性調査」の中から、TABLE 4.25 に示す12項目を取り出したものである。林(1992)は12項目のうちはじめの6項目を「義理人情」に関する項目、後の6項目を「伝統対近代」に関する項目と分類し、それぞれの項目群において数値化Ⅲ類を行っている<sup>3</sup>。ただし、この分類は恣意的なものであり、データに基づいて行われたものではない。そこで、1993年に実施した第9次調査のデータを基に、項目の分類を試みる。12項目全てについて、「その他」と「D.K.」を選択していない個体(N=1130)を分析の対象とする。

TABLE 4.25 「日本人の国民性調査」の質問群(一部)

##### #4.4 「先生が悪いことをした」

「先生が悪いことをした」というような話を、子供が聞いてきて、親にたずねたとき、親はそれがほんとうであることを知っている場合、子供には「そんなことはない」といった方がよいと思いますか、それとも「それはほんとうだ」といった方がよいと思いますか?

- 1 そんなことはないという
- 2 ほんとうだという

##### #5.1 「恩人がキトクするとき」

南山さんという人は、小さいときに両親に死に別れ、となりの親切な西木野さんに育てられて、大学まで卒業させてもらいました。そして、南山さんはある会社の社長にまで出世しました。ところが故郷の、育ててくれた、西木野さんが「キトクだからスグカエレ」という電報を受けとつ

<sup>3</sup>「義理人情」項目群には、#5.1d「大切な道徳」も含まれるが、自由反応型データであるため、ここでは除いた。

たとき、南山さんの会社がつぶれるか、つぶれないか、ということがきまってしまう大事な会議があります。あなたはつぎのどちらの態度をとるのがよいと思いますか。よいと思う方を1つだけえらんで下さい?

- 1 なにをおいても、すぐ故郷に帰る
- 2 故郷のことが気になっても、大事な会議に出席する

##### #5.1b 「親がキトクするとき」

いまの質問では、恩人が死にそうなきを、うかがいましたが、もしキトクなのが恩人ではなくて、南山さんの親だったら、どうしたらよいと思いますか、どちらかえらんで下さい?

- 1 なにをおいても、すぐ故郷に帰る
- 2 故郷のことが気になっても、大事な会議に出席する

##### #5.1c-1 「入社試験(親戚)」

あなたが、ある会社の社長だったとします。その会社で、新しく職員を1人採用するために試験をしました。入社試験をまかせておいた課長が、「社長のご親戚の方は2番でした。しかし、私としましては、1番の人でも、ご親戚の方でも、どちらでもよいと思いますがどうでしょうか」と社長のあなたに報告しました。あなたはどちらをとれ(採用しろ)とよいと思いますか?

- 1 1番の人を採用するようにいう
- 2 親戚を採用するようにいう

##### #5.1c-2 「入社試験(恩人の子)」

それでは、このばあい、2番になったのがあなたの親戚の子供でなくて、あなたの恩人の子供だったとしたら、あなたはどちらをとりますか?(どちらをとれとよいと思いますか?)

- 1 1番の人を採用するようにいう
- 2 恩人の子供を採用するようにいう

##### #5.6 「めんどろをみる課長」

ある会社につきのような2人の課長がいます。もしあなたが使われるとしたら、どちらの課長につかわれる方がよいと思いますか、どちらか1つあげて下さい?

- 1 規則をまげてまで、無理な仕事をさせることはありませんが、仕事以外のことで人のめんどろを見ません
- 2 時には規則をまげて、無理な仕事をさせることもありますが、仕事のこと以外でも人のめんどろをよく見ます

##### #4.10 「他人の子供を養子にするか」

子供がないときは、たとえば血のつながりがない他人の子供でも、養子にもらって家をつがせた方がよいと思いますか、それとも、つがせる必要はないと思いますか?

- 1 つがせた方がよい
- 2 つがせないでもよい、意味がない
- 3 場合による

##### #2.1 「しきたりに従うか」

あなたは、自分が正しいと思えば世のしきたりに反しても、それをおし通すべきだと思いますか、それとも世間のしきたりに、従った方がまちがよいと思いますか?

- 1 おし通せ
- 2 従え
- 3 場合による

##### #2.5 「自然と人間の関係」

自然と人間との関係について、つぎのような意見があります。あなたがこのうち真実に近い(ほんとうのことに近い)と思うものを、1つだけえらんで下さい?

- 1 人間が幸福になるためには、自然に従わなければならない
- 2 人間が幸福になるためには、自然を利用しなければならない
- 3 人間が幸福になるためには、自然を征服してゆかなければならない

## #7.4 「日本と個人の幸福」

あなたはつぎの意見の、どちらに賛成ですか、1つだけあげてください？

- 1 個人が幸福になって、はじめて日本全体がよくなる
- 2 日本がよくなって、はじめて個人が幸福になる
- 3 日本がよくなることも、個人が幸福になることも同じである

## #8.1b 「政治家にまかせるか」

こういう意見があります。「日本の国をよくするためには、すぐれた政治家がでたら、国民がたがいに議論をたたかわせるよりは、その人にまかせる方がよい」というのですが、あなたはこれに賛成ですか、それとも反対ですか？

- 1 賛成
- 2 時、人による
- 3 反対

## #4.5 「子供に「金は大切」と教える」

小学校に行っているくらいの子供をそだてるのに、つぎのような意見があります。「小さいときから、お金は人にとって、いちばん大切なものだと思わせるのがよい」というのです。あなたはこの意見に賛成ですか、それとも反対ですか？

- 1 賛成
- 2 反対
- 3 いちがいいにはいえない

#4.10 から #4.5 までの6項目はカテゴリ数が3であり、例えば#2.5「自然と人間の関係」のように、カテゴリ間の順序が明らかではないものもある。そのため、カテゴリ値を順序尺度と見なして積率相関係数を求め、因子分析を適用することはできない。また、数量化Ⅲ類の結果をFIGURE 4.4に示す。●は「義理人情」項目群のカテゴリ、○は「伝統対近代」項目群のカテゴリを表す。FIGURE 4.4では、放物線等の目立った構造は見出せず、「義理人情」項目群と「伝統対近代」項目群も重なっているため、それらを分けることはできない。

そこで、 $G=2$ 、 $k=1.1$ として本章の方法を適用した結果をTABLE 4.26とTABLE 4.27に示す。 $k=1.1$ としたのは、12項目があらかじめ「義理人情」や「伝統対近代」を測ることを目的として作成されたものではないため項目間の関連が弱く、 $k=2$ としたのでは局所解が多く分類があいまいとなるためである。また、「義理人情」と「伝統対近代」という2つの項目群が得られるか否かを調べるのが目的であるため、他の $G$ の値は試みていない。

TABLE 4.26とTABLE 4.27を見ると、次元1に分類された項目のカテゴリで正の高い値を与えられたものは、「すぐ故郷へ帰る」や「親戚（恩人の子）を採用する」である。逆に負の高い値を与えられたものは、「大事な会議に出席する」や「1番の人を採用する」である。

一方、次元2に分類された項目のカテゴリで正の高い値を与えられたものは、「金は大切（いちがいいにはいえない）」、「しきたりに従うか（場合による）」、「政治家にまかせるか（反対）」、「日本と個人の幸福（個人→日本）」、「養子にするか（場合による）」、「自然と人間の関係（自然を利用）」、「めんどろを見る課長（めんどろを見ない）」、「先生が悪いことをした（ほ



(第I軸対第II軸)



(第I軸対第III軸)

FIGURE 4.4 「日本人の国民性」データに対する数量化Ⅲ類の結果



TABLE 4.26 「日本人の国民性」データについて求められた  $\{a_{gi}\}$  の値

項目	$g=1$	$g=2$	適合度
#5.1 恩人がキトクするとき	1.000	.000	.807
#5.1b 親がキトクするとき	1.000	.000	.802
#5.1c-1 入社試験(親戚)	.528	.472	.006
#5.1c-2 入社試験(恩人の子)	.513	.487	.006
#4.5 子供に「金は大切」と教える	.001	.999	.473
#2.1 しきたりに従うか	.011	.989	.324
#8.1b 政治家にまかせるか	.025	.975	.263
#7.4 日本と個人の幸福	.037	.963	.229
#4.10 他人の子供を養子にするか	.404	.596	.045
#2.5 自然と人間の関係	.435	.565	.028
#5.6 めんどうをみる課長	.461	.539	.017
#4.4 先生が悪いことをした	.476	.524	.005
適合度	.464	.037	.250
相関		-.110	

TABLE 4.27 「日本人の国民性」データについて求められた  $\{w_{gi}\}$  の値

次元( $g$ )	項目	カテゴリ		
		1	2	3
1	#5.1	0.85	-0.96	
	#5.1b	0.88	-0.92	
	#5.1c-1	-0.06	0.18	
	#5.1c-2	-0.09	0.09	
2	#4.5	-0.93	0.48	0.74
	#2.1	-0.12	-0.71	0.74
	#8.1b	-0.98	0.32	0.51
	#7.4	0.49	-0.83	0.18
	#4.10	-0.40	0.08	0.39
	#2.5	-0.02	0.15	-0.63
	#5.6	0.40	-0.06	
	#4.4	-0.16	0.06	

んとうだという'である。逆に負の高い値を与えられたものは、'金は大切(賛成)'、'しきたりに従うか(従え)'、'政治家にまかせるか(賛成)'、'日本と個人の幸福(日本→個人)'、'養子にするか(つがせた方がよい)'、'自然と人間の関係(自然を征服)'、'めんどうを見る課長(めんどうを見る)'、'先生が悪いことをした(そんなことはないという)'である。

従来の用語を援用すれば、とりあえず次元1と次元2の名称をそれぞれ「義理人情」尺度、「近代性」尺度としてよいように思われる。しかし、項目は一次元尺度構成を目的として作成されたわけではないこと、次元1の項目は全て会社の場面であること、近年は伝統対近代といった見方が成り立たなくなっていること(林, 1992)などの理由から、次元の命名についてはさらに慎重な検討が必要であろう。本論文では、「日本人の国民性」について論じることが目的ではないため、これ以上の解釈は控えたい。

着目すべきことは、取り上げた12項目の中では、「義理人情」に関する項目とされていた#5.6と#4.4が、「伝統対近代」に関する項目とされていた6項目とともに次元2に分類されている点である。これら2項目の適合度は.017や.005と低く、 $a_{gi}$ も.5に近い値、必ずしも次元2の他の項目と等質であるとは見せないかもしれない。しかし、カテゴリへの回答パタンの類似性に基づいて項目群を2つに分類するとすれば、#5.6と#4.4は「義理人情」項目である#5.1等とまとめるよりは、「伝統対近代」項目である#4.5等とまとめた方がよい、ということになる。

また、次元1の中では、2つの「キトクするとき」項目の $a_{gi}$ の値が大きい。カテゴリを選択する際に、対象者(恩人か血縁者か)よりも場面(キトクか入社試験か)が考慮されること分かる。次元2では、6項目の「伝統対近代」項目群のうち#4.10と#2.5の $a_{gi}$ の値が低く、他の4つの「伝統対近代」項目とは異なった「考えの筋道」(林, 1993b)に従って回答されていることが示唆される。項目間のこのような関連を、FIGURE 4.4の数量化Ⅲ類の結果から見出すことは難しい。以上のように、必ずしも尺度構成を目的としない場合でも、本章の方法を用いることで、新たな知見を得ることができる。

TABLE 4.27では、#4.5、#2.1、#4.10の「いちがいにはいえない」、「場合による」といったカテゴリに対して、0.74や0.39という大きな $w_{gic}$ の値を与えられており、カテゴリの内容順に順序づけがなされているわけではない。一方#8.1bでは、「賛成」と「反対」に対して絶対値の大きな値を与えられており、カテゴリの内容の順序と同じ順序がつけられている。カテゴリの順序に対するこのような柔軟な対応は、質的データの分析を目的とした本方法の特徴の1つである。



## 4.6 まとめ

本章では、一般化等質性分析の特別な場合として、 $R=1$  とすることにより、複数の一次元尺度を同時に構成する方法を提案した。そして、人工データやSD法データ、Kendallデータ、「日本人の国民性」データを通して、実際に有用な複数の一次元尺度が構成できることが示された。本章の手法は、因子分析において尺度の最適化と単純構造への斜交因子回転を同時に行うことに相当する。しかし因子分析に比べて、カテゴリの順序があらかじめはっきりと知られていない場合でも、データに基づき、項目の分類のために最適なカテゴリ値が得られる、という利点があることが示された。1.4.2節で触れたように、心理学の分野では因子分析が多く用いられている。この事実は、複数の一次元尺度構成を必要とする場面が実際に多いということを示唆している。したがって、本章の方法は現実の応用場面で十分に役立つことが期待できる。

データが順序尺度の水準で得られている場合には、因子分析と同じような結果が得られることがある。例えば、SD法のデータでは因子分析によるものとほぼ同じ項目群が得られた。しかしこのことは、どちらかの方法が不要であることを意味するわけではない。むしろ、普通は因子分析を行う場面でも、質的データが得られたならば、本章の方法も同時に試してみよう価値はある。その理由は2つある。

第1は、Takane, Young & de Leeuw(1979)が述べているように、本章の方法を適用することで、尺度水準に対する仮定の是非も検討できるからである。あらかじめカテゴリの順序が想定できる場合でも、順序を定めずに分析することで、その順序の妥当性をデータによって示すことができる。一方、人工データ4で示したように、順序を固定したまま分析すると、仮にその順序が適切でなかった場合には、データ構造を見逃してしまう危険性がある。

第2は、回転法の選択等に悩まされることがなく、唯一の解が得られるからである。現実には尺度構成を行いたい研究者にとって、誰が分析しても同じ結果が得られるという客観性は、大きな利点であろう。ただし、探索的にデータを分析する場合には、必ずしも複数の解が得られることが欠点であるとは言いきれない。いくつかの解を見比べることでデータ構造に対する理解が深まるからである。また、複数の解が得られれば、結果が安定していないことを実感できるが、唯一の解が得られてしまうと、盲目的にそれが正しいかのように錯覚してしまうことも危惧される。最終的には最適解を取り上げるとしても、他の局所解も吟味するといった慎重さも必要である。

すなわち、3.4節でも述べたように、因子分析といった従来の手法に置き換わるものとし

て、本章の方法を用いるべきである、と主張しているわけではない。従来の手法と本方法とを同時に活用することによって、データに対するより深い理解が得られるであろう、ということである。

第3章の方法でも、複数の一次元尺度構成が可能なのは示されている。本章の方法とは、以下のように使い分けられよう。まず、本来の意味での狭義の一次元尺度が欲しい場合には、第3章の方法を使うべきである。仮に項目がいくつかの一次元性を持つグループに分かれていても、局所解によってそれらを全て見つけ出すことができる。一方、グループに分かれるという構造はありそうだけれども、各グループ内の一次元性があまり高くない、という場合には、本章の方法を用いるべきである。本章の方法では、グループがあるという強い仮定を置いているからである。一次元性の程度があまり高くなく、第3章の方法では見出せないグループも、本章の方法により明らかになる。そのようなグループは、厳密に言えば、狭義の一次元尺度を構成するとは言えないだろう。しかし、仮定を置いたことで、より豊かな結果が得られる場合もある。例えば、詳細は示さないが、Kendallデータに対して第3章の方法を適用すると、次元3の項目群は得られない。しかし、本章の方法を適用することで、「外見的な評価」を表す項目群があることが見出されたのである。

本章の手法は、一次元尺度構成を目的として提案されたものである。しかし、第3章の方法と同様、その適用範囲は必ずしも尺度構成に限らない。例えば、「日本人の国民性」データで取り上げた項目は、尺度構成を念頭に作成されたものではない。しかし、本方法を用いることで、数値化項目では知ることのできなかった項目間の構造が明らかになった。心理学や教育学の分野では、調査や実験により質的なデータが得られることが多い。最終的に利用できる結果が得られなくとも、質的項目群が得られたときに、その構造探索の1つの方法として、とりあえず本方法を適用してみることは十分意義あることであろう。もちろん、項目を分類することを目的とした手法であるため、項目数 $I$ が1や2の場合には適用する意味がない。少なくとも $I$ が4や5より大きいことが必要である。

以下では、実際に本方法を適用する上での細かな留意点等についてまとめた。

次元数 $G$ を決めるための明確な基準は今のところない。数値例では、適合度の値、 $m_1, \dots, m_G$ 間の相関係数、最適解の回数といった指標を利用した。例えば、適合度が十分に改善されなければ、 $G$ を大きくする必要はない。また、 $m_1, \dots, m_G$ 間の相関が高すぎたり、最適解の回数が少なければ、 $G$ を小さくした方がよいかもしれない。本論文で示した数値例だけでは、これらの基準の性質が十分に明らかになったとは言えず、さらに別のデータも分析することが求められる。また、第3章の方法をまず適用し、次元数に関してだいたいの見当をつけ



てから、本章の方法を適用する、というのも1つの手である。しかし、 $G$ の決定に最も重要なのは、得られた項目の分類が解釈できるか否か、ということであると考え、上で述べた指標に盲目的に従うのではなく、それらは参考として補助的な役割を果たすべきであろう。

4.3節の計算方法では局所解が生じることがある。そのような場合、他の多くの手法では、適切な初期値を選ぶことで、なるべく局所解を避けようとする。しかし本章では、初期値の推定を行わず、逆に、局所解が得られるという事実を  $G$  を決める一つの指標として利用した。すなわち、項目がグループにはっきりと分かれているときには、局所解は生じないが、項目を  $G$  個のグループに分類する組み合わせがいくつもある場合には、多くの局所解が得られる、と考えた。項目の分類があいまいで局所解が多く存在するとき、初期値を工夫し最適解を得ようとするにはあまり意味がないだろう。なぜなら、そこで得られた項目のグループが、個体数を増やしたり別の個体を使ったときにも得られるとは考えにくく、結果は不安定で一般性に乏しいと思われるからである。また、どのグループにも分類しにくい項目がいくつか存在するときには、最適解を唯一求めるよりも、いくつかの局所解を調べることににより、取り除くべき項目に関する情報が得られるかもしれない。初期値をランダムに変えたときに得られる最適解の回数を、 $G$  の決定に利用するという方法は、理論的な裏付けを持つわけではない。シミュレーション等により、この方法の妥当性をさらに体系的に調べる必要がある。

4.4節のほとんどの数値例では、 $k$  の値を2として分析を行った。通常の分析では、 $k=2$  のままで十分であると考えられるが、次のような場合には、 $k$  の値を変えてもよい。すなわち、項目間の相関が高く、ほとんどの項目で  $a_{gi} = 1/G$  に近づくにもかかわらず、項目を分類したい、という場合である。このとき、 $k$  の値を1に近づければ、 $a_{gi}$  の値は1または0に近づくため、項目分類が可能になる。「日本人の国民性」データでは、逆に項目間の関連性がさほど高くなく、 $k=2$  では多くの局所解が存在して結果が不安定になると考えられたため、 $k=1.1$  として分類を試みた。 $k$  の値を小さくすることとは、項目を強制的に分類することであるから、項目の内容に照らして、そのような分類が本当に適当であるかどうかを吟味しなければならない。第5章の数値例では、 $k$  の値を小さくすることにより個体を強制的に分類する方法を示す。また、本章では局所解の数を  $G$  の値を決めるために利用した。しかし、局所解になるべく陥らないようにしたいときには、まず  $k$  の値を大きくしておき、繰り返し計算において徐々に  $k$  を小さくする、という方法も考えられる。

自由反応型のデータにおいて、 $C_j = 1$  とした場合と  $C_j = 2$  とした場合は、数量化Ⅲ類の結果が異なることはよく知られている(山田・西里, 1993; 柳井, 1994)。本論文の方法にお

いても結果は大きく異なり、上三角行列に分類したいときには  $C_j = 2$ 、セミ対角行列に分類したいときには  $C_j = 1$  とするのがよいことが示された。どちらの方法をとるべきかについては、丘本(1992b)が述べているように、項目の内容によって決まる。例えば、人工データ3のようなテスト項目に対する回答では、 $C_j = 2$  とするのがよいだろう。これは丘本(1992b)や、テスト得点の解析に数量化Ⅲ類を用いた岩崎(1989)の主張とも一致する。

カテゴリに順序がある場合には、 $w_{gi}$  に順序制約を課すことができた。しかし、順序がある場合でも、まず制約をおかずに分析を行うべきであろう。なぜなら先に述べたように、本当にその順序が正しいものか否かが、データを通して検証できるからである。また、SD法データのように、一部の項目のカテゴリの順序が他の項目のそれと逆転している場合に、逆向きの順序制約を課す項目が、あらかじめ分かっていることもあるからである。繰り返し計算において、適切な向きの制約を見出す方法も考えられるが、まだ成功していない。

現実の場面では、データに欠損値が含まれていることがしばしばある。本章で提案した方法は、欠損値がない場合にのみ適用可能である。提案した方法をより現実的な方法とするために、欠損値への対処を考慮した拡張が必要であろう。例えば Meulman (1982) は、欠損値がある場合の等質性分析について議論している。de Leeuw & van der Heijden (1988) は、分割表において頻度が0のセルがある場合の対応分析を述べている。これらの方法が参考になるかもしれない。





## 第5章

### 3相データのための項目パターンの分類による尺度構成法

本章<sup>1</sup>では、第4章で提案した複数の一次元尺度構成法の特別な場合として、3相3元データにおける尺度構成法を提案する。3相3元データにおいても、狭義の一次元尺度を構成するためには、整合性の高い項目を選択しなければならないことは変わらない。しかし、3相であるというデータ構造に対する事前知識を制約として取り込むことにより、情報を取り出すことができるようになる。

まず、5.1節では本章の目的と従来の方法についていくつか説明する。5.2節ではデザイン行列を用いる方法について説明した後、実際の分析結果を述べる。5.3節ではランク制約を用いる方法について説明し、その数値例を挙げる。5.4節では評定者の分類を伴う方法を提案し、実際に適用を試みる。最後に、5.5節では3つの手法について比較し議論する。

#### 5.1 本章の目的

##### 5.1.1 3相データ

第3章と第4章では、質的な2相2元データに対する狭義の一次元尺度構成の方法を述べた。この章では、データが3相3元データとして得られる場合について考える。3相データの1つの例は、第4章で用いた、 $\text{個体} \times \text{SD項目} \times \text{刺激}$ というSD法のデータである。また、教授効果等何らかの効果を調べるためにプリ・テストとポスト・テストが実施される場合、同じ項目を用いれば3相3元データが得られる。発達的な変化を追うために、縦断的にパネル調査を行えば、 $\text{個体} \times \text{項目} \times \text{時期}$ という3相データとなる。さらに、構成概念妥当性の研究に用いられる多特性他方法行列 (Schmitt, Coyle & Saari, 1977; Browne, 1984, Marsh

<sup>1</sup>本章は、土屋 (1996c, 1996f) の一部を再構成し、加筆したものである。

& Byrne, 1993; Byrne & Goffin, 1993) も個体 × 特性 × 方法という3相データの例である。

3相データは2相データに比べ、相の数が増えたのに応じて分析の目的がより多様になる。例えば、個体 × 項目 × 時期という同一のデータでも、個体差は考えず時期の変化により項目間の構造がどのように変わるのかに関心がある場合もある。また、時期が変わるとともに項目への回答パターンが変化する個体と変化しない個体といった個体差を知りたいこともある。さらに時期や個体間の差異は考えずに、項目間の構造だけが研究対象となる場合もあるかもしれない。

分析の目的が異なれば、それを達成するための方法も異なる。したがって、特に3相データに対する分析法を述べる際には、何らかの目的を持って集められた現実のデータに基づいた方がよい。そこで本章では、第4章で用いられたSD法データを基に、絵画の印象を測る尺度を構成することを目的とする。このデータは、都内の33名の大学生が20のSD項目に関して33枚の絵画を7段階評定したものである。すなわち、評定者(33名) × SD項目(20個) × 絵画(33枚)という3相3元データとなる。具体的なSD項目は、TABLE 4.18に示されている。

ここで、データを表す記号について整理しておく。評定者数を  $N$ 、SD項目数を  $I$ 、刺激である絵画の数を  $P$  とする。評定者  $n$  の項目  $i$  に関する評定値をダミー変数表示した行列を  $X_{in}$  ( $i=1, \dots, I, n=1, \dots, N$ ) とおく。項目  $i$  のカテゴリ数を  $C_i$  とすれば、 $X_{in}$  は1と0からなる  $P \times C_i$  の行列であり、 $X_{in}1_{C_i} = 1_p$  が成り立つ。またこの章では、

$$X_i = \begin{pmatrix} X_{i1} \\ \vdots \\ X_{iN} \end{pmatrix}, (i=1, \dots, I)$$

とする。 $X_i$  は第4章までの  $X_i$  とは使い方が異なることに注意する必要がある。

次節以降では、3相データに対する従来の手法についても言及する。それらの多くは量的データに対するものであり、ダミー変数行列  $\{X_{in}\}$  に対する尺度構成法としてそのまま説明することは難しい。そこで、とりあえず各カテゴリに与える数量は何らかの方法によって得られているものと仮定し、それを  $v_{in}$  とする。例えば、各カテゴリに1から  $C_i$  という数量を順に与え、それを評定者・項目ごとに平均0、分散1になるよう基準化したものである。したがって、 $X_{in}v_{in}$  が評定者  $n$  の項目  $i$  に対するデータベクトルとなる。

### 5.1.2 2相データに変換する方法

分析の目的は、絵画印象測定のための複数の一次元尺度構成である。したがって3相データにおいても、一次元性を持つ項目のまとまりを見出さなければならないことは変わらない。

そこで、まず項目の相だけに着目する方法が考えられる。すなわち3相データを、項目以外の相 × 項目という2相データに変換し、一次元性をなすように項目の分類あるいは選択を行うのである。

Kiers (1991b) は、 $(X_{1n}v_{1n}, \dots, X_{In}v_{In})$  ( $n=1, \dots, N$ ) を縦に並べた  $NP \times I$  行列に対して主成分分析を行う方法を PCA-SUP と呼んでいる。PCA-SUP は等質性分析の考え方をを用いれば、

$$S(\{w_i\}, M) = \sum_{i=1}^I \left\| \begin{pmatrix} X_{11}v_{11} \\ \vdots \\ X_{iN}v_{iN} \end{pmatrix} w_i' - M \right\|^2$$

の最小化として表される。

また岩下 (1983) は、SD法データの分析法として、この  $NP \times I$  行列に対する因子分析を説明している(以後この方法を FA-SUP と呼ぶこととする)。

評定者間の違いが少ないと考えられるなら、評定者について平均や最頻値などをとり、絵画 × SD項目という2相データに変換することもできる。Kiers (1991b) は、評定者について和をとった  $P \times I$  という行列に対し主成分分析を行う方法を SUMPCA と呼んでいる。SUMPCA は、

$$S(\{w_i\}, M) = \sum_{i=1}^I \left\| \sum_{n=1}^N X_{in}v_{in}w_i' - M \right\|^2$$

の最小化として表される。

4.5.4節のSD法データの分析例では、 $\{X_i\}$  に対して項目パターン分類による尺度構成法を行った。この方法も3相データを2相データとして扱うものと言え、次式の最小化として表現される。

$$S(\{a_{gi}\}, \{w_{gi}\}, \{m_g\}) = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \|X_i w_{gi} - m_g\|^2 \quad (5.1)$$

SD法データに対する分析の結果は、TABLE 4.18に示したとおりである。

### 5.1.3 尺度得点に対する制約

以上の方法は、3つの相のうち項目の相の分析に重点を置いた方法である。他の2つの相の構造分析に関心がなければ、例えば項目パターン分類による尺度構成法を用いて、一次元性を持つ項目を見出せばよい。しかし、データが3相であるならば、その特徴を利用して、残りの2つの相からも何らかの情報を得たいことも多い。項目以外の2つの相が持つ情報は、項目パターン分類による尺度構成法を用いる場合、 $G$  個の  $NP$  次元ベクトル  $m_g$  ( $g=1, \dots, G$ ) に表現される。また、PCA-SUPにおいて第  $G$  主成分まで求めたならば、 $NP \times G$  行列  $M$



として表されている。しかし、要素の数が全部で  $GNP$  個と多いため、 $m_g$  や  $M$  の中に何らかの構造を見出し、そこから知見を得ることは難しい。

1つの対処法は、得られた尺度得点を、主成分分析等何らかの多変量解析の手法によって再分析することであろう。しかし、結果の安定性や信頼性という観点に鑑みて、再分析という方法は必ずしも望ましいとは言えない。特に、因子分析モデルでは回転に対する不定性があるため、得られた因子得点は非常に不安定なものと考えるべきであろう。また何度も述べるように、二段階の分析では、二次分析には必要な情報が、はじめの分析において取り除かれている。という危険性もある。

もう1つの方法は、一次元性を持つ項目を見出す際に、それと同時に尺度得点に対して何らかの制約を課し、パラメタ数を減らすことで尺度得点を持つ構造を明らかにする、というものである。構造を示すためにパラメタ数を減らすという考え方は、例えば主成分分析において、元の変数の数よりも少ない数の主成分を求めることで、元の変数の持つ情報を縮約・表現しようとする考え方と同じである。また、より少ないパラメタ数でデータを表現するため、結果の安定性が期待できる (Takane, Kiers & de Leeuw, 1995)。

そこで次節以降では、第4章の項目パターンの分類による尺度構成法において尺度得点  $\{m_g\}$  に制約を課し、その要素の数を減らすことで、個体と絵画の相から知見を得る方法を提案する。

ここで問題となるのは、尺度得点に課す制約の「程度」をどのようにして決めるか、換言すれば、どこまでパラメタ数を減らせるか、ということである。例えば、Kiers (1991b) は、PCA-SUP, Tucker-3, PARAFAC/CANDECOMP, SUMPCA などの3元データの分析法の間には階層的な関係があり、パラメタに次々と制約条件を課していくことでそれぞれの方法が得られることを示している。制約の厳しい分析法では、制約の緩い分析法に比べ、データへの適合の度合いは低くなる。そこで、どの分析法を用いるかを決めるためには、最も制約の緩い方法に比べ、適合度が低くなり過ぎない方法を選ばないと述べている。また、2元データに対する主成分分析では、主成分の数を決めるために寄与率が1つの手がかりとなる。したがって、次節以降で提案する方法においても、制約がないときの適合度指標と制約を課したときのそれとを比較し、適合度の値が小さくなり過ぎないものを選ぶ、という方法が考えられる。しかし後に示すように、この方法は選択の基準があいまいであり、これだけに頼ることは難しい。

ところで、冒頭で述べたように、ここでの分析の目的は、絵画に対する印象を測る狭義の一次元尺度を構成することである。そのためには、同じ特性を測ると考えられる項目のまとまりを見出す必要があった。したがって、 $m_g$  に制約を課すとしても、そのとき得られる項

目のグループは、制約がない場合である TABLE 4.18 の結果を保持している方がよい。制約を課すことで項目の分類が変わるということは、制約によって分類に必要な情報が欠落した、ということの意味している。そのため、TABLE 4.18 と同じ分類結果が得られるまで制約を緩めなければならない。逆に、制約を入れても TABLE 4.18 と同じ分類が可能ならば、より厳しい制約を課しても構わないであろう。すなわち、TABLE 4.18 に示される項目の分類結果を基にして、制約の程度を決めることができる。得られる制約の「程度」は、項目の分類を行うという目的に鑑みて最も厳しいものである、と言える。この考え方では、TABLE 4.18 を基準にするが、それは TABLE 4.18 の結果が「正しい」、ということ意味するわけではない。狭義の一次元尺度構成では項目を選び出すことが第1の目的であり、この目的を果たした上で冗長な情報をどこまで制約によって取り除くことができるか、ということである。

## 5.2 デザイン行列を用いる方法

### 5.2.1 目的

(5.1) 式では、評定者ごとに各絵画の尺度得点  $m_{g,np}$  が得られる。ただし  $m_{g,np}$  は  $m_g$  の第  $np$  要素である。しかし、評定者の相には関心がなく、主に各絵画の印象だけを知りたいことも多い。すなわち、全ての評定者の印象をまとめた上でそれぞれの絵画を尺度上に位置づけ、どの絵画がどのような印象を与えるのかを調べるのである。そのため、評定者に関して、7段階評定値の平均を求めたり、因子分析の結果得られる因子スコアの平均を求めることがある。(5.1) 式で言えば、絵画  $p$  の次元  $g$  上の位置を、 $\sum_{n=1}^N m_{g,np}/N$  によって表すことになる。ただし、このような尺度得点の二段階分析が好ましくないことは前にも述べた。

一方、各尺度上でそれぞれの絵画に1つの尺度得点を与えたいのであれば、あらかじめ  $N$  人の尺度得点は等しい ( $m_{g,1p} = \dots = m_{g,Np} = m_{g,p}^*$ ) という制約条件を課した上で、 $m_g$  を求める、という方法も考えられる。この場合、 $m_{g,p}^*$  が絵画  $p$  の次元  $g$  上の尺度得点となる。この方法の主な利点は、求めるパラメタの数が少なくなるため、解が安定する、という点である。

ところで、 $\sum_{n=1}^N m_{g,np}/N$  を求めたり、 $m_{g,1p} = \dots = m_{g,Np}$  といった制約を用いるときに注意しなければならないのは、全ての評定者が等質であるか、という点である。絵画に対して、どの評定者も同じ印象を持つならば、全ての評定者をとおして絵画に唯一の尺度得点を与えることは構わない。しかし、評定者によって印象が異なるとき、評定者間の変動を取り除くことで、絵画間の違いも取り除かれてしまい、有益な情報が得られなくなる可能性がある。



例えば、FIGURE 5.1 は、絵画 1 に対する SD 項目 11「雑な—ていねいな」および絵画 17 に対する SD 項目 2「激しい—おだやかな」の評定値の分布である。FIGURE 5.1(a) では、26 名の評定者が「ていねいな」側の 3 つのカテゴリを選んでいるため、絵画 1 に対し、ていねいさ尺度において高い数値を与えてよいであろう。一方 FIGURE 5.1(b) では、全体の 2/3 の評定者が、「激しい」側の 3 つのカテゴリを選択しているものの、「おだやかな」絵であると感じる評定者もいる。評定者に関して印象を平均し、絵画 17 は激しくもなく、おだやかでもない、と考えることもできるが、そもそもこの絵に対する印象は評定者により異なるため、それを 1 つの数値で表すことは無理である、といった考え方も成り立つ。

評定者間に差異があるか否かを調べる 1 つの方法は、(5.1) 式により得られた尺度得点の分散分析を行うことであろう。ところがよく知られているように、絵画数  $P$  が大きくなれば、評定者間に差異はないという帰無仮説は必ず棄却される。したがって、 $m_{g,1p} = \dots = m_{g,Np}$  という制約は有意に厳しすぎることになる。

しかし、統計的有意性と実用的有意性とは異なる (南風原, 1995)。評定者が全く等質である、ということはあるが、実用的に意味のない程度の差ならば無視して構わない、ということである。ここで実用的というのは、一次元尺度構成のために項目を分類できるか否かということである。なぜなら、分析の目的は狭義の一次元尺度構成であり、実用性は分析の目的に照らして判断されるべきだからである。すなわち、評定者が等質である、としても項目の分類ができるならば、評定者間の差異は実用的に小さなものであると言える。逆に項目の分類ができなければ、実用的に意味のある差が取り除かれたということになる。そこで、制約を課した上で項目の分類を試み、制約がない場合である TABLE 4.18 の結果と比較することで、制約条件の可否を判断することとする。

$m_g$  に対する制約は、 $NP \times R_g$  デザイン行列  $F_g$  を用いて次式のように表現される。

$$m_g = F_g m_g^*, (g = 1, \dots, G)$$

例えば、絵画  $p$  に対する次元  $g$  の尺度得点はどの評定者でも同じ ( $m_{g,1p} = \dots = m_{g,Np}$ ) とする制約は、

$$F_g = \begin{pmatrix} I_P \\ I_P \\ \vdots \\ I_P \end{pmatrix} \quad (g = 1, \dots, G) \quad (5.2)$$

と表現される。このときの  $F_g$  は  $NP \times P$  行列であり、 $P$  次元ベクトル  $m_g^*$  は評定者に依存しない、次元  $g$  における絵画  $p$  の尺度得点を並べたものとなる。また、この制約を少しゆ

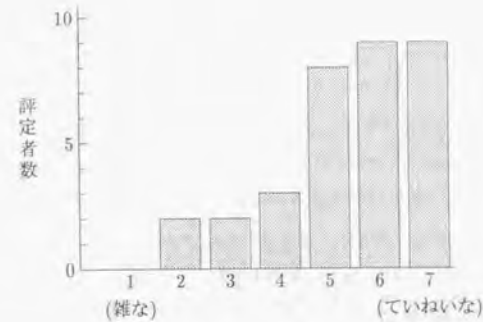


FIGURE 5.1(a) 絵画 1 に対する項目 11 の評定値の分布

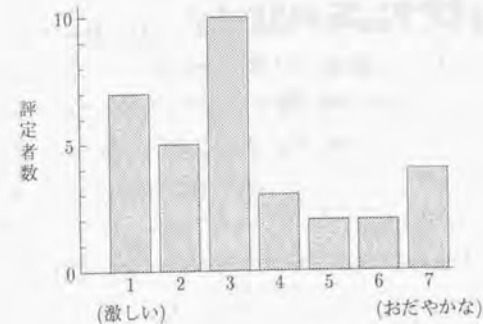


FIGURE 5.1(b) 絵画 17 に対する項目 2 の評定値の分布



るめて、評定者ごとに尺度得点の平均だけが異なる。とする制約は、

$$F_g = \begin{pmatrix} I_P & 1_P & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_P & 0 & \cdots & 1_P \\ I_P & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (g=1, \dots, G) \quad (5.3)$$

によって表現できる。このときの  $F_g$  は  $NP \times P+N-1$  行列である。列数が  $P+N$  でないのは、 $F_g$  を full column ランクとするためである。 $P+N-1$  次元ベクトル  $m_g^*$  は次元  $g$  における絵画  $p$  の得点と個体  $n$  の得点を並べたものとなる。すなわち、(5.3) 式は、次元  $g$  の尺度得点は絵画  $p$  の得点と評定者  $n$  の得点の和によって求まる、ということを表す。他にもデザイン行列を用いることで、例えば性別など評定者の属性ごとに尺度得点異なる、といった制約を表すこともできる。

各次元ごとに異なるデザイン行列  $F_g$  を用いるため、ある次元では制約を入れ、別の次元には制約を入れないということもできる。また、制約の表現法として、線形制約付き正準分析のようにゼロ空間指定法 (高根, 1995) を用いることも考えられる。しかし、(5.2) 式や (5.3) 式の制約を用いるのは、この方が直感的で結果が理解しやすいためである。

なお、このようなデザイン行列を用いていくつかのパラメタの間に線形制約を設ける、という方法はいくつか提案されている。制約付き主成分分析法 (Takane & Shibayama, 1991, 高根, 1992a, 1992b) は、個体と変数に関する事前情報を表現したデザイン行列を用いることで、外部分析によりデータを制約により説明できる部分とそうでない部分に分け、内部分析によりそれぞれの部分に主成分分析を行う方法である。DCDD (Takane, Kiers & de Leeuw, 1995) は、制約付き主成分分析法において主成分ごとに異なるデザイン行列を用いる方法である。正準対応分析 (ter Braak, 1985) や線形制約付き正準分析 (Böckenholt & Böckenholt, 1990) は制約付き主成分分析法の特殊な場合であり、数量化Ⅲ類において個体またはカテゴリに与える数量に制約を課したものである (高根, 1995)。西里 (1982) も、個体や項目に関する外部情報があるとき、それらをデザイン行列として表現し、双対尺度法を適用する方法を述べている。また、Takane, Yanai & Mayekawa (1991) は、これらの方法間の関係について整理している。

ここでは、次に提案する方法との関連から、正準対応分析を等質性分析の考え方から述べておく。項目  $i$  に対するダミー変数行列を  $X_i$ 、個体に対するデザイン行列を  $F$ 、項目  $i$  に対するデザイン行列を  $H_i$  とする。このとき正準対応分析は、

$$S(W^*, M^*) = \sum_{i=1}^I \|X_i H_i W^* - F M^*\|^2$$

を  $M^{*T} F^T F M^* = I$  等といった条件の下で最小化するものとなる。

### 5.2.2 最小化の基準

デザイン行列  $F_g$  によって尺度得点に制約を課すると同時に、項目の分類を行うためには、次式の  $S^{(d)}$  を最小化すればよい。

$$S^{(d)}(\{a_{gi}\}, \{w_{gi}^*\}, \{m_g^*\}) = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \|X_i H_{gi} w_{gi}^* - F_g m_g^*\|^2 \quad (5.4)$$

$$\text{ただし, } \|F_g m_g^*\|^2 = NP, \quad 1^T F_g m_g^* = 0,$$

$$\sum_{g=1}^G a_{gi} = 1, \quad \{a_{gi}\} \geq 0$$

カテゴリのためのデザイン行列  $H_{gi}$  は方法の一般化のために導入したものであり、本論文では  $H_{gi} = I$  とする。 $m_g^*$  は  $R_g$  次元ベクトルである。注意しなければならないのは、 $m_g^*$  ではなく、 $F_g m_g^*$  が平均 0、分散 1 に基準化されているという点である。(5.2) 式のデザイン行列を用いる場合には、 $m_g^*$  も平均 0、分散 1 となるため、この点を気にしなくてよい。しかし、一般には  $F_g$  を考慮しながら  $m_g^*$  の各要素の値を解釈しなければならない。 $H_{gi} w_{gi}^*$  はカテゴリに与える数量となり、尺度得点の大小を解釈するために用いることができる。

(5.4) 式の特別な場合として、 $G=1$  のときには  $X_1, \dots, X_I$  に対する正準対応分析の第 I 軸に一致する。さらに  $G=1, I=1$  とすれば、(5.4) 式は 2.2.2 節で述べた正準判別分析あるいは数量化Ⅱ類となる。

(5.4) 式の適合度指標  $\lambda^{(d)}$  および各次元・各項目についての適合度指標  $\lambda_g^{(d)}$ ,  $\lambda_i^{(d)}$  は次式で与えられる。

$$0 \leq \lambda^{(d)} = 1 - \frac{G^{k-1}}{INP} \min S^{(d)} \leq 1$$

$$0 \leq \lambda_g^{(d)} = 1 - \frac{G^k}{INP} \min S_g^{(d)} \leq 1 \quad (g=1, \dots, G)$$

$$0 \leq \lambda_i^{(d)} = 1 - \frac{G^{k-1}}{NP} \min S_i^{(d)} \leq 1 \quad (i=1, \dots, I)$$

ただし、

$$S_g^{(d)} = \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \|X_i H_{gi} w_{gi}^* - F_g m_g^*\|^2 \quad (g=1, \dots, G)$$

$$S_i^{(d)} = \sum_{g=1}^G a_{gi}^k \|X_i H_{gi} w_{gi}^* - F_g m_g^*\|^2 \quad (i=1, \dots, I)$$

である。また、

$$\lambda^{(d)} = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G \lambda_g^{(d)} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \lambda_i^{(d)}$$

という関係が成り立つ。

(5.4) 式は,  $F_g = I$  ( $g = 1, \dots, G$ ) とした, (5.1) 式の特珠な場合である。したがって  $F_g = I$  のとき,  $\lambda^{(d)}$  は 2.4 節で示した適合度指標  $\lambda$  に等しくなる。

### 5.2.3 計算方法

(5.4) 式の最小化は, 以下に示す繰り返し計算によって行う。

Step 0:  $G, k$  を定める。  $\{a_{gi}\}$ ,  $\{m_g^*\}$  に (5.4) 式の制約を満たす初期値を与える。

Step 1:  $\{a_{gi}\}$ ,  $\{m_g^*\}$  を固定し, 次式により  $\{w_{gi}^*\}$  を求める。

$$w_{gi}^* = (H_{gi}' X_i' X_i H_{gi})^{-1} H_{gi}' X_i' F_g m_g, \quad (g = 1, \dots, G, i = 1, \dots, I)$$

Step 2:  $\{a_{gi}\}$ ,  $\{w_{gi}^*\}$  を固定し, 次式により  $\{m_g^*\}$  を求める。

$$m_g^* = c_g (F_g' F_g)^{-1} (t_g - \xi F_g' 1), \quad (g = 1, \dots, G),$$

$$\xi = (1' P_g 1)^{-1} 1' P_g t_g,$$

$$t_g = \sum_{i=1}^I a_{gi}^k F_g' X_i H_{gi} w_{gi}^*,$$

$$P_g = F_g (F_g' F_g)^{-1} F_g'$$

ただし,  $c_g$  は  $\|F_g m_g^*\|^2 = NP$  を満たすための係数である。

Step 3:  $\{w_{gi}^*\}$ ,  $\{m_g^*\}$  を固定し, 次式により  $\{a_{gi}\}$  を求める。

$$a_{gi} = \left( \sum_{h=1}^G e_{hi}^{-\frac{2}{k-1}} \right)^{-1} e_{gi}^{-\frac{2}{k-1}}, \quad (g = 1, \dots, G, i = 1, \dots, I),$$

$$e_{gi} = \|X_i H_{gi} w_{gi}^* - F_g m_g^*\|^2$$

Step 4:  $S^{(d)}$  の値を求め, 収束していなければ Step 1 へ戻る。

### 5.2.4 数値例

第2章と同様に,  $k=2, G=3$  とし, (5.2) 式の  $F_g$  ( $g=1, \dots, 3$ ) を用いて分析を行った結果を TABLE 5.1 に示す。項目の後に括弧で示された数値は, TABLE 4.18 で分類された次元を表す。また表の右下の .177 は  $\lambda^{(d)}$  の値である。次元3については, 分類された項目は, TABLE 4.18 とほぼ同じである。しかし,  $a_{gi}$  の値を見ると, 次元1と次元2の値が, どの項目についてもほとんど等しく, これらの次元間の分割が困難であることが分かる。表

TABLE 5.1 SD 法データについて求められた  $\{a_{gi}\}$  の値 ( $F_g$  は (5.2))  
項目の後の数字は TABLE 4.18 で分類された次元

	項目	$g=1$	$g=2$	$g=3$	$\lambda_i^{(d)}$
10	楽しい—苦しい (1)	.383	.383	.234	.331
8	陰気な—陽気な (1)	.381	.381	.239	.311
17	暗い—明るい (1)	.377	.377	.246	.285
15	あたたかい—つめたい (1)	.369	.369	.262	.233
19	気持ちがわるい—気持ちがいい (1)	.357	.357	.286	.189
13	かたい—やわらかい (1)	.347	.347	.307	.239
9	繊細な—粗野な (2)	.344	.345	.311	.109
14	のびのびした—いじけた (1)	.344	.344	.312	.149
11	雑な—ていねいな (2)	.343	.343	.315	.104
4	ずぼらな—几帳面な (2)	.337	.337	.326	.061
18	敏感な—鈍感な (2)	.334	.334	.332	.050
1	小さい—大きい (3)	.272	.272	.456	.191
5	堂々とした—貧弱な (3)	.277	.277	.446	.213
3	重い—軽い (3)	.280	.280	.441	.280
12	厚い—薄い (3)	.291	.291	.419	.166
2	激しい—おだやかな (3)	.309	.310	.381	.289
20	静的な—動的な (3)	.312	.312	.377	.078
7	鈍い—鋭い (2)	.323	.323	.355	.091
6	異常な—正常な (3)	.333	.333	.334	.138
16	慎重な—軽率な (2)	.333	.333	.334	.031
	$\lambda_g^{(d)}$	.181	.181	.168	.177
	$\lambda_g$	.369	.420	.359	.383



TABLE 5.2 SD法データについて求められた  $\{a_{gi}\}$  の値 ( $F_g$  は (5.3))  
項目の後の数字は TABLE 4.18 で分類された次元

項目	$g=1$	$g=2$	$g=3$	$\lambda_i^{(d)}$
10 楽しい—苦しい (1)	.364	.321	.315	.331
8 陰気な—陽気な (1)	.360	.322	.318	.281
17 暗い—明るい (1)	.360	.322	.318	.283
15 あたたかい—つめたい (1)	.357	.324	.320	.240
19 気持ちがわるい—気持ちがいい (1)	.347	.328	.325	.214
14 のびのびした—いじけた (1)	.344	.329	.327	.169
11 雑な—ていねいな (2)	.340	.331	.329	.230
9 繊細な—粗野な (2)	.337	.333	.331	.245
16 慎重な—軽率な (2)	.328	.336	.336	.180
18 敏感な—鈍感な (2)	.329	.336	.335	.156
4 ずぼらな—几帳面な (2)	.333	.334	.333	.202
3 重い—軽い (3)	.306	.344	.350	.305
1 小さい—大きい (3)	.314	.341	.346	.146
2 激しい—おだやかな (3)	.316	.340	.344	.274
12 厚い—薄い (3)	.317	.340	.343	.229
5 堂々とした—貧弱な (3)	.320	.338	.341	.177
20 静的な—動的な (3)	.321	.339	.341	.141
7 鈍い—鋭い (2)	.321	.339	.340	.232
6 異常な—正常な (3)	.329	.335	.336	.217
13 かたい—やわらかい (1)	.331	.335	.335	.291
$\lambda_g^{(d)}$	.227	.227	.227	.227
$\lambda_g$	.369	.420	.359	.383

の一番下の行には TABLE 4.18 の  $\lambda_g$  および  $\lambda(=.383)$  の値を示してある。TABLE 4.18 の次元と TABLE 5.1 の次元との対応は明確ではないが、いずれにしても、適合度の値はかなり小さくなっている。以上のことから、評定者によって絵から受ける印象に違いはない、という制約は厳しすぎたため、項目の分類に必要な変動が取り除かれてしまったことが分かる。なお、次元1と次元2の区別をはっきりさせ、項目を強制的にどちらかに分類するためには、 $k$  の値を小さくすればよい。しかし、 $k=2$  とした TABLE 4.18 との比較を行うためには、ここでも  $k=2$  とする必要がある。

TABLE 5.2 は (5.3) 式の  $F_g(g=1, \dots, 3)$  を用いた結果である。TABLE 5.1 に比べれば、3つの次元への分類はややはっきりしている。また、右下に示した  $\lambda^{(d)}$  の値も .177 から .227 へと大きくなっており、制約がないときの約 60% ( $=.227/.383$ ) となっている。しかし、どの  $a_{gi}$  も  $1/3$  に近く、TABLE 4.18 に比べればあいまいである。また、項目 11 や項目 7 など、TABLE 4.18 では次元2に分類されていた項目が、次元1や次元3に分類されている。したがって、評定者ごとに尺度得点の平均だけが異なる、という制約も厳しすぎることになる。

以上の結果から、項目の分類を行い尺度の構成を行う上で、評定者間の差異は無視できない、すなわち、絵から受ける印象には個人差がある、ということが分かる。したがって、全ての評定者の印象をまとめた上で、各絵画に対して1つの尺度得点を与えてしまうと、重要な情報を取り残してしまうことになる。そこで次節では、評定者間の差異を表現し、どのような印象の違いがあるのかを探る方法を述べる。

### 5.3 ランク制約を用いる方法

#### 5.3.1 目的

前節の (5.3) 式のデザイン行列は、尺度得点  $m_{g,np}$  が評定者得点と絵画得点の和により求まる、ということを表したものであった。これは、ある2人の評定者  $n_1$  と  $n_2$  において、絵画  $p$  に対して  $m_{g,n_1p} > m_{g,n_2p}$  ならば、別の絵画  $q$  に対しても  $m_{g,n_1q} > m_{g,n_2q}$  となる、ということの意味する。したがって、評定者と絵画の、いわば交互作用がないことを表すものである。したがって、 $m_g^*$  の要素の値だけによって、絵が与える印象を判断することができた。

ところが、(5.3) 式のデザイン行列は厳しすぎるものであり、評定者間に個人差があることが示唆された。すなわち、各絵画の尺度得点は評定者に依存するという交互作用が想定される。この交互作用を表現する一つの方法は、評定者得点  $y_{gn}$  と絵画得点  $z_{gp}$  を考え、 $m_{g,np}$  を  $y_{gn}$  と  $z_{gp}$  の積 ( $m_{g,np} = y_{gn} \cdot z_{gp}$ ) により求めるというものである。例えば、絵画  $p_1$  の

得点  $z_{gp1}$  が絵画  $p_2$  の得点  $z_{gp2}$  よりも大きい ( $z_{gp1} > z_{gp2}$ ) としても, 評定者  $n$  の得点  $y_{gn}$  が負ならば  $m_{g,np_1} < m_{g,np_2}$  となる. このため, 各絵画が与える印象を知るためには, 絵画得点  $z_{gp}$  だけによるのではなく, 評定者得点  $y_{gn}$  も同時に考慮しなければならない. 後の数値例では, 具体的に  $y_{gn}$  や  $z_{gp}$  の解釈の仕方を述べる.

より一般的には, 尺度得点  $m_{g,np}$  を2つの  $R_g$  次元得点ベクトルの内積  $m_{g,np} = y'_{gn} z_{gp}$  で表現する. ただし,  $R_g \leq \min(N, P)$  である. 評定者の得点を並べた行列を  $Y_g (N \times R_g) = (y_{g1}, \dots, y_{gN})'$ , 絵画の得点を並べた行列を  $Z_g (P \times R_g) = (z_{g1}, \dots, z_{gP})'$  とすれば,

$$\begin{pmatrix} m_{g,11} & \dots & m_{g,1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{g,N1} & \dots & m_{g,NP} \end{pmatrix} = Y_g Z_g'$$

と表される. すなわち本節の方法は,  $N \times P$  行列  $\{m_{g,np}\}$  のランクを  $R_g$  に制約すること, パラメタの数を減らし, 評定者と絵画の相の関係を表そうとするものと言える.

以上の考え方は, 形式的には, 2相データにおける主成分分析あるいは3相データにおける PARAFAC/CANDECOMP モデル (Carroll & Chang, 1970; Law, Snyder & McDonald, 1984) に対応する. すなわち, 主成分分析では, データ  $x_{in}$  を  $x_{in} \approx \sum_r a_{ir} b_{nr}$  と分解し, PARAFAC では, データ  $x_{inrp}$  を  $x_{inrp} \approx \sum_r a_{ir} b_{nr} c_{pr}$  と分解する. さらに  $x_{inrp} \approx \sum_q \sum_r \sum_s a_{iq} b_{nr} c_{ps} d_{qrs}$  と分解する Tucker-3 モデル (Tucker, 1966) は, PARAFAC のより一般的な場合である (ten Berge, de Leeuw & Kroonenberg, 1987; Kiers, 1991b). これらのモデルの性質や推定法については多くの研究がなされており, 枚挙にいとまがない. 例えば, Kroonenberg & de Leeuw (1980) は交互最小二乗法を用いた Tucker-3 モデルの推定法 (TUCKALS3) を提案し, Kiers, Kroonenberg & ten Berge (1992) はその改良を試みている. Kroonenberg (1983a) は Tucker-3 モデルや PARAFAC モデルの推定法や実際の適用例をまとめ, Kroonenberg (1983b) は3相因子分析に関する文献をまとめている. Lastovicka (1981) は3相因子分析モデルを4相データに拡張し, Kapteyn, Neudecker & Wansbeek (1986) はさらに  $n$  相データに拡張を試みている. DeSarbo & Carroll (1985) は, PARAFAC モデルの考え方をを用いた3相展開法を提案している. Pham & Möcks (1992) は, PARAFAC/CANDECOMP モデルの統計的な性質について吟味している. CANDELINC (Carroll, Pruzansky & Kruskal, 1980) は, PARAFAC/CANDECOMP モデルにおいて, パラメタにデザイン行列を使った線形制約を課したものである. また, IDIOSCAL モデル (Carroll & Chang, 1970; ten Berge, Bekker & Kiers, 1994) は, 対象行列に対するより一般的な PARAFAC/CANDECOMP モデルと言える. 分散共分散行列を基に PARAFAC/CANDECOMP モデルを当てはめようと

する方法は PARAFAC2 と呼ばれる (Harshman & Lundy, 1984; Kroonenberg & ten Berge, 1989; ten Berge & Kiers, 1996). Cox & Cox (1994) はこれらの手法を簡略にまとめ, ソフトウェアについても紹介している. さらに非対称行列に対して PARAFAC2 モデルを拡張した PARATUCK2 モデルも提案されている (Harshman & Lundy, 1996). また, 質的3相 (元) データにおいては, Sands & Young (1980) の ALSCOMP3 が,  $x_{inrp}$  の最適変換を伴う PARAFAC とと言える.

ここでは, 次に提案する方法との関連から, Tucker-3 モデルの特別な場合である Tucker-2 モデル (Kroonenberg & de Leeuw, 1980; Kroonenberg, 1983a) あるいは Murakami (1983) の準3相主成分分析, 階層的な主成分分析モデル (村上, 1990) を等質性分析の立場から簡単に述べる. 5.1 節の記法を用いれば, Tucker-2 モデルでは適当な制約条件の下で次式の基準を最小化することになる.

$$S(\{w_i\}, Z, \{Y_n\}) = \sum_{i=1}^I \left\| \begin{pmatrix} X_{i1} v_{i1} \\ \vdots \\ X_{iN} v_{iN} \end{pmatrix} w_i' - \begin{pmatrix} Z Y_1' \\ \vdots \\ Z Y_N' \end{pmatrix} \right\|^2 \quad (5.5)$$

ただし,  $w_i$  は  $R \times 1$  ベクトル,  $Z$  は  $P \times S$  行列,  $Y_n$  は  $R \times S$  行列であり, 先に述べた評定者得点や絵画得点を表す  $Y_g$ ,  $Z_g$  とは異なる. 5.1.2 節の PCA-SUP の表現と比較すれば, Tucker-2 モデルは PCA-SUP において主成分得点に  $Z Y_n'$  という構造を持たせたものと考えることができる. 特に (5.5) 式において  $R = S = 1$  とした (5.6) 式は, 全ての次元を1とした PARAFAC モデルの特別な場合となる.

$$S(\{w_i\}, z, \{y_n\}) = \sum_{i=1}^I \left\| \begin{pmatrix} X_{i1} v_{i1} \\ \vdots \\ X_{iN} v_{iN} \end{pmatrix} w_i - \begin{pmatrix} z y_1 \\ \vdots \\ z y_N \end{pmatrix} \right\|^2 \quad (5.6)$$

さらに (5.6) 式において,  $X_{in} v_{in}$  をダミー変数行列  $X_{in}$  で置き換え,  $w_i$  を  $w_i$  とすれば, 岩坪 (1974; 1987) の3相相関係数最大化の数量化法の第1軸となる.

$$\begin{aligned} S(\{w_i\}, z, \{y_n\}) &= \sum_{i=1}^I \left\| \begin{pmatrix} X_{i1} \\ \vdots \\ X_{iN} \end{pmatrix} w_i - \begin{pmatrix} z y_1 \\ \vdots \\ z y_N \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^I \|X_i w_i - (I_N \otimes z) y\|^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

ただし,  $y$  は  $y_n$  を縦に並べた  $N$  次元ベクトルである. (5.6) 式と (5.7) 式の関係は, 2.2.3 節の主成分分析の表現において  $x_i$  をダミー変数行列  $X_i$  で置き換えれば数量化Ⅲ類が得られることに対応する.



## 5.3.2 最小化の基準

尺度得点にランク制約を課すと同時に、項目の分類を行うためには、次式の  $S^{(r)}$  を最小化する。

$$S^{(r)}(a_{gi}, w_{gi}, Y_g, Z_g) = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \sum_{n=1}^N \|X_{in} w_{gi} - Z_g y_{gn}\|^2 \quad (5.8)$$

$$= \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \|X_i w_{gi} - (I_N \otimes Z_g) \text{vec}(Y_g')\|^2,$$

$$\text{ただし, } \sum_{n=1}^N \|Z_g y_{gn}\|^2 = NP, \quad Z_g' \mathbf{1} = \mathbf{0},$$

$$\sum_{g=1}^G a_{gi} = 1, \quad a_{gi} \geq 0$$

注意しなければならないのは、尺度得点の原点に対する制約が(5.1)式とは異なる点である。(5.1)式では  $NP$  個の尺度得点  $m_g$  の平均が0としているが、(5.8)式では、 $Z_g$  に対して制約が課され、評定者ごとに  $P$  個の尺度得点の平均  $(\mathbf{1}' Z_g y_{gn})$  が0とされている。そのため、例えばある評定者は  $P$  個の評定値が6や7に偏るのに対し、別の評定者は1や2に偏る、といった傾向があると、項目の分類がうまくいかないことがある。しかしこの点は、評定を行う際の教示により対処することができよう。制約が課せられた  $Z_g$  を絵画得点としたのはこのためである。なぜなら、ある絵画の  $N$  個の評定値は6や7に偏り、別の絵画は1や2に偏るということは十分あり得るため、絵画ごとに  $N$  個の尺度得点の平均を0とすることは難しいからである。制約が(5.1)式とは異なるため、 $R_g = \min(N, P)$  としたとしても、多くの場合、(5.8)式の結果は(5.1)式の結果に一致しない。ただし、評定者ごとに評定値の偏りがなければ結果は似たものとなる。 $\sum_n \mathbf{1}' Z_g y_{gn} = 0$  ( $g = 1, \dots, G$ ) という制約によって(5.1)式と対応させるということも考えられるかもしれない。しかし、その場合計算方法が難しくなること、どの評定者についても尺度得点の平均を0と仮定することは不自然ではないこと、から(5.8)式の制約を用いる。

(5.8)式の特別な場合として  $G = 1$  のときには、(5.5)式と見比べることで、 $R = 1$  とした Tucker-2 モデルと関連していることが分かる。さらに  $R_g = 1$  とすれば、(5.8)式は、(5.7)式に示した岩坪の3次相関係数最大化の数量化法と一致する。

(5.8)式の基準の適合度指標は次式によって与えられる。

$$0 \leq \lambda^{(r)} = 1 - \frac{G^{k-1}}{INP} \min S^{(r)} \leq 1$$

$$0 \leq \lambda_g^{(r)} = 1 - \frac{G^k}{INP} \min S_g^{(r)} \leq 1 \quad (g = 1, \dots, G)$$

$$0 \leq \lambda_i^{(r)} = 1 - \frac{G^{k-1}}{NP} \min S_i^{(r)} \leq 1 \quad (i = 1, \dots, I)$$

先に述べたとおり、 $R_g = \min(N, P)$  としたとしても、(5.8)式は(5.1)式に一致しないため、 $\lambda^{(r)}$  は2.4節の  $\lambda$  と等しくはならない。そのため厳密に言えば、 $\lambda^{(r)}$  を  $\lambda$  と直接比較することはできないことに注意する必要がある。

## 5.3.3 計算方法

(5.8)式の最小化は、繰り返し計算によって行う。なお、明らかに(5.8)式の  $Y_g$  と  $Z_g$  の間には回転とスケールに関する不定性があるので、

$$y_{gi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i, \quad (g = 1, \dots, G)$$

とする。

Step 0:  $G, k$  を定める。 $\{a_{gi}\}, \{Y_g\}, \{Z_g\}$  に(5.8)式の制約を満たす初期値を与える。

Step 1:  $\{a_{gi}\}, \{Y_g\}, \{Z_g\}$  を固定し、次式により  $\{w_{gi}\}$  を求める。

$$w_{gi} = (X_i' X_i)^{-1} X_i' (I_N \otimes Z_g) \text{vec}(Y_g'), \quad (g = 1, \dots, G, i = 1, \dots, I)$$

Step 2:  $\{a_{gi}\}, \{w_{gi}\}, \{Z_g\}$  を固定し、次式により  $\{y_{gn}\}$  を求める。

$$y_{gn} = b_{gn} (Z_g' Z_g)^{-1} \left( \sum_{i=1}^I a_{gi}^k Z_g' X_{in} w_{gi} \right), \quad (g = 1, \dots, G, n = 2, \dots, N)$$

ただし、 $b_{gn}$  は  $\sum_{n=1}^N \|Z_g y_{gn}\|^2 = NP$  を満たすための係数である。

Step 3:  $\{a_{gi}\}, \{w_{gi}\}, \{Y_g\}$  を固定し、次式により  $\{Z_g\}$  を求める。

$$Z_g = c_g \left( \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \sum_{n=1}^N X_{in} w_{gi} y_{gn}' \right) \left( \sum_{n=1}^N y_{gn} y_{gn}' \right)^{-1}, \quad (g = 1, \dots, G)$$

ただし、 $c_g$  は  $\sum_{n=1}^N \|Z_g y_{gn}\|^2 = NP$  を満たすための係数である。

Step 4:  $\{w_{gi}\}, \{Y_g\}, \{Z_g\}$  を固定し、次式により  $\{a_{gi}\}$  を求める。

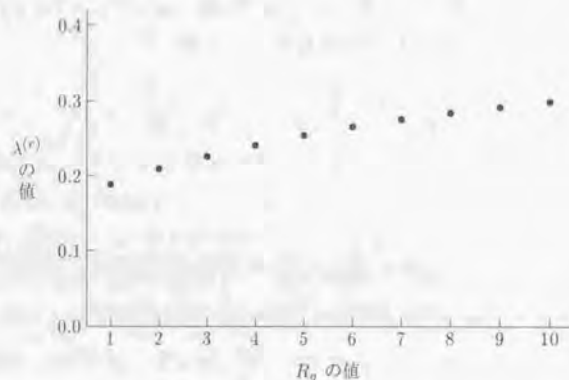
$$a_{gi} = \left( \sum_{h=1}^G e_{gh}^{-\frac{2}{k-1}} \right)^{-1} e_{gi}^{-\frac{2}{k-1}}, \quad (g = 1, \dots, G, i = 1, \dots, I),$$

$$e_{gi} = \sum_{n=1}^N \|X_{in} w_{gi} - Z_g y_{gn}\|^2$$

Step 5:  $S^{(r)}$  の値を求め、収束していなければ Step 1 へ戻る。

## 5.3.4 数値例

ランク制約を用いる上で問題となるのは、 $R_g$  の値をいくつにしたらよいか、という点である。先に述べたように、主成分分析等では適合度の値を手がかりとすることが多い。そこで、 $k=2$ 、 $G=3$  とし、 $R_g(g=1, \dots, 3)$  を1から10まで変えて分析を行い、得られた適合度指標の値を FIGURE 5.2 に示す。 $R_g$  の値が大きくなるにつれ、 $\lambda^{(r)}$  の値も緩やかに大き

FIGURE 5.2  $R_g$  と  $\lambda^{(r)}$  の関係

くなる様子が、図から読みとれる。しかし、 $\lambda^{(r)}$  の値が急激に変化する  $R_g$  の値などは見られず、適合度指標だけを根拠に適切な  $R_g$  の値を決めることは困難である。そこで、TABLE 5.3 から TABLE 5.5 に、 $R_g$  を1から3としたときの、 $\{a_{gi}\}$  および各項目、各次元の適合度指標の値を示す。 $\lambda_g^{(r)}$  の行の最右列に示したのは  $\lambda^{(r)}$  の値である。 $R_g=1$  としたときは (TABLE 5.3)、次元2に分類されていた項目11や項目9が次元1に分類されるなど、TABLE 4.18 の分類結果とは異なっている。このことは、 $R_g=1$  としたのでは制約が厳しすぎるため、項目の分類に必要な情報までもが取り除かれている、ということの意味する。一方、 $R_g=2$  (TABLE 5.4) や  $R_g=3$  (TABLE 5.5) としたときには、全ての項目について、TABLE 4.18 で分類された次元へ分類が行われている。すなわち、 $R_g \geq 2$  としなければ分類のために必要な情報が得られない、ということになる。 $R_g=3$  としたときには、 $R_g=2$  のときに比べ次元間の  $a_{gi}$  の値の差がよりはっきりし、適合度指標の値も大きくなる。しかし、 $R_g=2$  でも項目の分類には成功しており、尺度構成のためには最低限必要な情報が得られて

TABLE 5.3 SD 法データについて求められた  $\{a_{gi}\}$  の値 ( $R_g=1$ )  
項目の後の数字は TABLE 4.18 で分類された次元

項目	$g=1$	$g=2$	$g=3$	$\lambda^{(r)}$
10 楽しい—苦しい (1)	.452	.283	.264	.253
8 陰気な—陽気な (1)	.448	.285	.267	.238
17 暗い—明るい (1)	.440	.288	.271	.214
15 あたたかい—つめたい (1)	.414	.301	.285	.172
19 気持ちがいい—気持ちが悪い (1)	.389	.310	.301	.150
14 のびのびした—いじけた (1)	.381	.302	.317	.129
11 雑な—ていねいな (2)	.345	.332	.323	.121
9 繊細な—粗野な (2)	.342	.339	.319	.119
2 激しい—おだやかな (3)	.260	.382	.358	.347
7 鈍い—鋭い (2)	.293	.355	.352	.157
6 異常な—正常な (3)	.315	.352	.333	.161
13 かたい—やわらかい (1)	.332	.351	.317	.239
18 敏感な—鈍感な (2)	.321	.343	.336	.069
16 慎重な—軽率な (2)	.322	.342	.337	.058
4 ずぼらな—几帳面な (2)	.330	.338	.331	.086
5 堂々とした—貧弱な (3)	.266	.331	.403	.263
1 小さい—大きい (3)	.261	.336	.403	.229
3 重い—軽い (3)	.224	.386	.391	.381
12 厚い—薄い (3)	.259	.350	.391	.251
20 静的な—動的な (3)	.301	.338	.361	.121
$\lambda_g^{(r)}$	.180	.192	.192	.188
$\lambda_g$	.369	.420	.359	.383



TABLE 5.4 SD法データについて求められた  $\{a_{gi}\}$  の値 ( $R_g = 2$ )  
項目の後の数字は TABLE 4.18 で分類された次元

	項 目	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$\lambda_i^{(r)}$
10	楽しい—苦しい (1)	.490	.247	.263	.267
8	陰気な—陽気な (1)	.481	.254	.265	.245
17	暗い—明るい (1)	.476	.258	.265	.234
15	あたたかい—つめたい (1)	.442	.280	.278	.189
19	気持ちがわるい—気持ちがいい (1)	.410	.289	.301	.158
14	のびのびした—いじけた (1)	.395	.288	.316	.155
13	かたい—やわらかい (1)	.367	.296	.337	.187
7	鈍い—鋭い (2)	.245	.468	.287	.288
4	ずぼらな—几帳面な (2)	.284	.436	.281	.213
18	敏感な—鈍感な (2)	.279	.434	.287	.189
11	雑な—ていねいな (2)	.294	.433	.273	.237
16	慎重な—軽率な (2)	.290	.413	.297	.151
9	繊細な—粗野な (2)	.312	.398	.290	.189
3	重い—軽い (3)	.250	.275	.475	.297
1	小さい—大きい (3)	.268	.284	.448	.215
5	堂々とした—貧弱な (3)	.280	.274	.446	.253
12	厚い—薄い (3)	.266	.292	.442	.237
2	激しい—おだやかな (3)	.293	.267	.440	.252
20	静的な—動的な (3)	.311	.320	.369	.104
6	異常な—正常な (3)	.333	.307	.359	.112
	$\lambda_g^{(r)}$	.195	.226	.204	.209
	$\lambda_g$	.369	.420	.359	.383

TABLE 5.5 SD法データについて求められた  $\{a_{gi}\}$  の値 ( $R_g = 3$ )  
項目の後の数字は TABLE 4.18 で分類された次元

	項 目	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$\lambda_i^{(r)}$
10	楽しい—苦しい (1)	.505	.239	.257	.296
8	陰気な—陽気な (1)	.504	.241	.255	.285
17	暗い—明るい (1)	.498	.247	.255	.273
15	あたたかい—つめたい (1)	.454	.274	.272	.213
19	気持ちがわるい—気持ちがいい (1)	.419	.283	.298	.181
14	のびのびした—いじけた (1)	.411	.282	.307	.171
13	かたい—やわらかい (1)	.365	.291	.345	.200
7	鈍い—鋭い (2)	.239	.477	.284	.298
18	敏感な—鈍感な (2)	.271	.448	.281	.206
4	ずぼらな—几帳面な (2)	.274	.447	.278	.227
11	雑な—ていねいな (2)	.286	.444	.270	.246
16	慎重な—軽率な (2)	.284	.424	.292	.163
9	繊細な—粗野な (2)	.296	.418	.285	.210
3	重い—軽い (3)	.238	.264	.497	.318
2	激しい—おだやかな (3)	.280	.259	.462	.277
12	厚い—薄い (3)	.263	.290	.447	.242
5	堂々とした—貧弱な (3)	.284	.274	.442	.248
1	小さい—大きい (3)	.273	.286	.441	.209
6	異常な—正常な (3)	.327	.306	.367	.122
20	静的な—動的な (3)	.315	.319	.366	.108
	$\lambda_g^{(r)}$	.212	.241	.222	.225
	$\lambda_g$	.369	.420	.359	.383

いる、ということになる。より少ないパラメータ数で必要な情報を表現するモデルが好ましい、とする立場に立てば、 $R_g = 2$  とするのがよいことになる。

そこで、 $R_g = 2$  のときの  $\{Y_g\}$ ,  $\{Z_g\}$  の値を FIGURE 5.3 から FIGURE 5.5 に示す。図中の  $\bullet$  は、各絵画の布置  $Z_g$  を表し、 $\circ$  は、各評定者の方向  $Y_g$  を表す。ただし、作図の都合上  $y_{gn}$  は  $\|y_{gn}\| = 2.5$  に基準化してある。図中の数字は評定者番号あるいは絵画番号を表す。なお、パラメータの推定の際に  $y_{g1} = e_1 (g = 1, \dots, G)$  と定めたため、図の軸には意味がない。評定者の絵画に対する尺度得点は、 $\bullet$  を、原点から  $\circ$  へ向かう直線上に射影することによって得られる。すなわち、各評定者は、その直線の  $\circ$  の方向に位置する絵に対して高い尺度得点を与えている、と解釈できる。例えば、FIGURE 5.3 において、原点から評定者1の  $\circ$  へ向かう直線は横軸となるので、横軸の座標値の最も大きい  $\bullet$ 、すなわち絵画2に対して、評定者1は高い尺度得点を与えていることになる。TABLE 5.6 には、カテゴリに与える数量  $w_{gi}$  が、分類された次元についてのみ示されている。カテゴリ1は TABLE 5.4 の形容詞対の左側の形容詞を表す。次元1において大きな数量を与えられたカテゴリは、「楽しい(1.37)」、「陽気な(1.36)」といったカテゴリである。したがって、評定者1は絵画2を非常に陽気だと感じていることになる。逆に、評定者1は絵画7に対して低い尺度得点を与えており、この絵が非常に暗いと感じていることが分かる。一方、原点から評定者17の  $\circ$  へ向かう直線上で見ると、絵画9の尺度得点が高く、絵画30のそれは逆に低い。したがって、評定者1と評定者17では、陽気さの感じ方がかなり異なることになる。

また、TABLE 5.4、TABLE 5.6 より次元2では「鈍い(0.59)」や「ずぼらな(0.44)」といったカテゴリに大きな数量を与えられており、「ずぼらさ」を表す次元であると言える。FIGURE 5.4 では、評定者に大きく2つのグループがあることが分かる。例えば、評定者25は、絵画1に対して非常に尺度得点が高く、ずぼらだと感じているが、絵画7に対してはていねいだと感じている。逆に、評定者30は、絵画10が鈍く、絵画1は非常にていねいであるとしている(原データでは、例えば絵画1に対する項目11の評定値は、評定者25は3、評定者30は7である。FIGURE 5.1(a) 参照)。

次元3は「重い(1.84)」、「大きい(1.38)」に大きな数量を与えられており、「重厚さ」を表す次元である。FIGURE 5.5 より、評定者1は絵画17が非常に重厚であり、絵画23は軽小であると感じているのに対し、評定者32は、絵画33が重厚であり、絵画17は軽小であると感じていることになる(原データでは、例えば絵画17に対する項目2の評定値は、評定者1は1、評定者32は4である。FIGURE 5.1(b) 参照)。

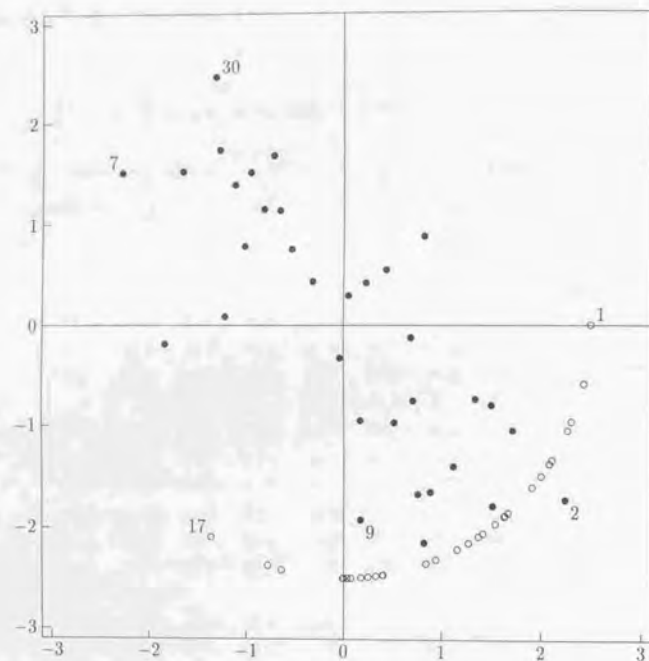
なお、次元2や次元3では、絵画7や絵画17など、大きな  $z_{gp}$  を持つ絵画がいくつかあ

TABLE 5.6 SD 法データについて求められた  $\{w_{gi}\}$  の値 ( $R_g = 2$ )

次元 (g)	項目	カテゴリ						
		1	2	3	4	5	6	7
1	10	1.37	0.89	0.41	-0.30	-0.50	-0.94	-1.38
	8	-1.21	-0.92	-0.45	-0.14	0.32	0.79	1.36
	17	-1.44	-0.81	-0.49	-0.07	0.31	0.82	1.47
	15	1.14	0.74	0.32	-0.24	-0.53	-0.89	-1.79
	19	-1.04	-0.89	-0.44	-0.20	0.31	0.60	1.03
	14	0.89	0.54	0.20	-0.21	-0.31	-0.74	-1.47
	13	-0.99	-0.72	-0.31	-0.16	0.17	0.53	1.25
2	7	0.59	0.42	0.28	0.11	0.00	-0.64	-3.21
	4	0.44	0.46	0.36	0.15	0.03	-0.43	-2.12
	18	-2.78	-0.88	-0.01	0.11	0.34	0.41	0.54
	11	0.52	0.41	0.34	0.14	0.01	-0.46	-2.28
	16	-2.79	-0.77	-0.05	0.19	0.35	0.44	0.28
3	9	-2.33	-0.78	0.06	0.19	0.28	0.31	0.36
	3	1.84	0.86	0.09	-0.37	-0.48	-0.53	-0.73
	1	-0.63	-0.49	-0.53	-0.49	-0.26	0.08	1.38
	5	1.54	0.28	-0.18	-0.31	-0.47	-0.50	-0.65
	12	2.10	0.69	0.01	-0.22	-0.39	-0.49	-0.61
	2	2.08	0.80	0.12	-0.38	-0.40	-0.40	-0.16
	20	-0.04	-0.31	-0.37	-0.20	0.20	0.78	1.23
	6	1.33	0.67	0.13	-0.22	-0.27	-0.25	-0.19



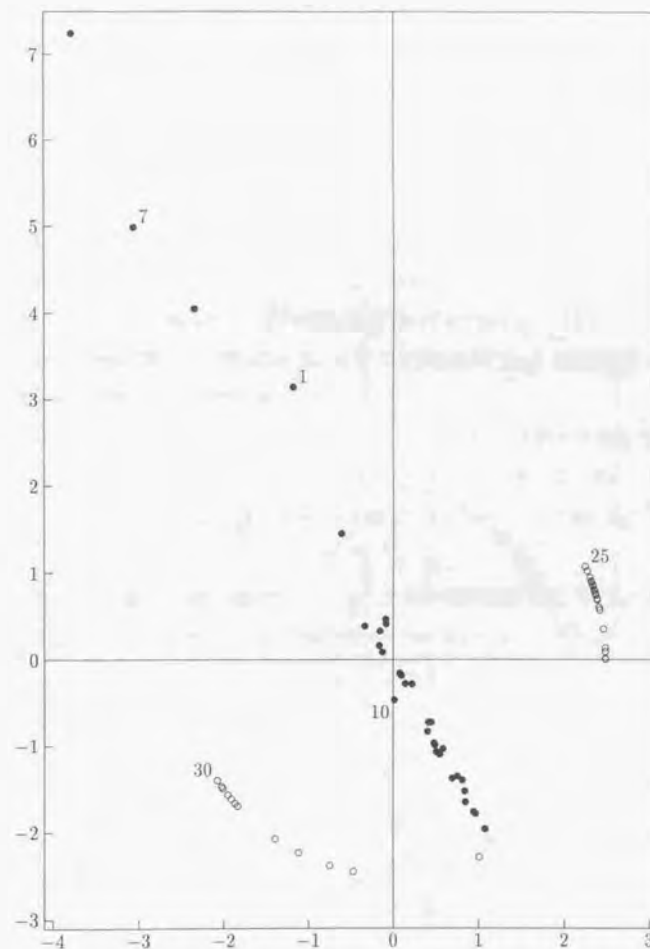
る。  $z_{gp}$  が大きいと  $y_{gn}$  のわずかな違いも  $m_{g, np} = y_{gn} z_{gp}$  には大きくあらわれる。すなわち、そのような少数の絵画に対する評定者間の差が、「ずぼらさ」や「重厚さ」といった一見印象が同じと思われる次元において個人差を生み出す原因になっていると考えられる。

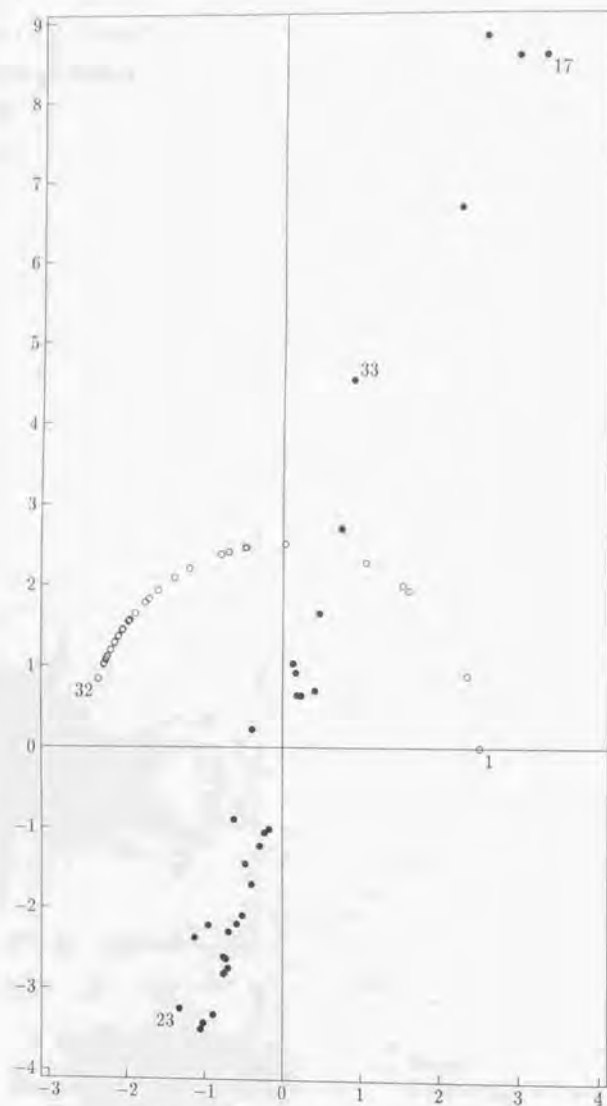
FIGURE 5.3 次元1の  $Y_1(\circ)$  と  $Z_1(\bullet)$ 

#### 5.4 評定者の分類を伴う方法

##### 5.4.1 目的

前節では、尺度得点にランク制約を課すことで、評定者間の差異を図に表現することができた。場合によっては、そのような評定者間の違いを生み出す要因について知りたいこともある。例えば、同じ絵に対して性別によって「明るさ」の感じ方が違うとか、世代が異なると「ずぼらさ」の印象が変わる、といったことである。このことを探るには、評定者を、

FIGURE 5.4 次元2の  $Y_2(\circ)$  と  $Z_2(\bullet)$

FIGURE 5.5 次元3の  $Y_3(\circ)$  と  $Z_3(\bullet)$ 

絵に対する感じ方が同じいくつかのグループにまとめればよい。そして各グループに属する評定者に共通した特徴を調べるのである。

しかし、評定者をグループに分けるためには、FIGURE 5.3 から FIGURE 5.5 のような図は利用しにくい。なぜなら、評定者得点  $\{Y_g\}$  を基にクラスター分析を行うことは、分析で得られた結果を再分析することになるからである。再分析を行うために必要な情報が、はじめの分析によって取り除かれているかもしれない。さらに、クラスター数を決めるための統計的な指標については尤度比検定を用いるもの (Wolfe, 1970) からブートストラップ (Efron, 1979) による情報量基準 (坂元・石黒・北川, 1983) を利用するもの (中村, 1995) まで数多く提案され議論されており、どれか1つを選ぶのは難しい。項目を分類するときには、分類された項目の内容が納得できるものか否かという点を基準に、グループ数を決定することができる。しかし、評定者の場合には、全ての評定者についてよく知ることは難しく、そのような手段に依ることはできない。同じことが、(5.1) 式で得られる  $\{m_g\}$  を基にクラスター分析を行おうとする場合にも当てはまる。

絵に対する印象が、異性や異世代の間では異なり、同性や同世代の間では同じである、といったことをあらかじめ仮定できるならば、デザイン行列を用いて評定者のグループをつくらればよい。しかし、仮説がないときにはデータに基づいてクラスタリングを行わなければならない。

そこでこの節では、項目の分類を行うと同時に評定者の分割を行う方法を述べる。この方法の利点は2つある。1つは、一度の分析によって評定者のグループも得られるため、安定した結果が得られるという点である。もう1つは、ある2人の評定者の間の違いが項目の分類のために必要ならばその2人は異なるグループに分類し、不要ならば同じグループに分類する、という考え方によってクラスター数あるいはグループ数を決めることができる点である。評定者のグループ数を  $H$  として項目の分類を行ったときに、(5.1) 式に基づく項目の分類が得られないとすれば、それは評定者をまとめすぎたために、項目分類に必要な評定者間の違いが欠落した、ということの意味する。したがって、TABLE 4.18 に示したものと同じ分類が得られるまで、グループ数  $H$  を増やさなければならない。逆に、あるグループ数  $H$  のとき TABLE 4.18 と同じ項目のまとまりが見出されれば、 $H$  を小さくすることで、項目の分類という観点から見て冗長な評定者間の変動を取り除くことができる。このようにしてグループ数を決める方法は、尤度関数等に基づく方法と違って、統計理論的な裏付けを持つわけではない。しかし冒頭で述べたように、尺度構成が第1の目的であり、そのために必要な評定者間の差異だけを残しておく、という立場に立てば、合理的な方法であると言える。



う。なお、ここでは評定者の相を分割するが、分析の目的によっては、当然ながら、絵画の相を分割してもよい。

2つの相を同時に分類する、という方法は2相データにおいてはいくつか提案されている。Greenacre (1988) は対応分析の考え方に基づき、分割表の行と列に対し同時に階層的クラスタリングを行っている。また、村田・馬場 (1993) はランキングデータにおいて多項分布を仮定し、信頼領域に基づく個体と項目の同時分類法を提案している。足立 (1995) は、展開法あるいはベクトルモデル (キャロル, 1976) に基づく多次元尺度構成法において、個体と刺激を同時に分類する方法を述べている。

#### 5.4.2 最小化の基準

項目パタンの分類を行うとともに評定者の分割を行うためには、次式の  $S^{(c)}$  を最小化する。

$$S^{(c)}(a_{gi}, b_{hn}, w_{gi}, m_{gh}) = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \sum_{h=1}^H \sum_{n=1}^N b_{hn}^\ell \|X_{in} w_{gi} - m_{gh}\|^2 \quad (5.9)$$

ただし、 $\|m_{gh}\|^2 = P$ ,  $m_{gh}' \mathbf{1} = 0$ ,

$$\sum_{g=1}^G a_{gi} = \sum_{h=1}^H b_{hn} = 1, \quad a_{gi}, b_{hn} \geq 0$$

$H$  は評定者を分割するグループの数である。評定者  $n$  は、 $b_{hn}$  の値が最も大きなグループ  $h$  に分類される。 $\ell$  は  $k$  と同様に  $\ell > 1$  を満たす範囲で事前に定めなければならない。 $P$  次元ベクトル  $m_{gh}$  は、評定者グループ  $h$  における、次元  $g$  についての各絵画の尺度得点を並べたものである。 $GH$  個の  $m_{gh}$  がそれぞれ基準化されている。そのため前節の方法と同様に、ある評定者は  $P$  個の評定値が6や7に偏り、別の評定者は1や2に偏る、といった傾向がないようにしなければならない。また、 $H = N$  としても (5.9) 式の結果は (5.1) 式の結果に完全には一致しない。

(5.9) 式の  $\{a_{gi}\}$ ,  $\{b_{hn}\}$  により項目と評定者の同時分類ができる原理を以下に述べる。簡単のため、 $k = \ell = 2$  とする。後の計算方法で述べるように、 $\{a_{gi}\}$  以外の値が分かっているとき、 $a_{gi}$  は、

$$a_{gi} \propto \left\{ \sum_{h=1}^H \sum_{n=1}^N b_{hn}^\ell \|X_{in} w_{gi} - m_{gh}\|^2 \right\}^{-1} \quad (5.10)$$

として求められる。 $e_{gihn} = \|X_{in} w_{gi} - m_{gh}\|^2$  は、個体  $n$  がグループ  $h$  に属する場合の、最適変換されたスコアベクトル  $X_{in} w_{gi}$  と次元  $g$  の尺度得点  $m_{gh}$  との距離になる。ただし、項目  $i$  が次元  $g$  に属しているとしても、個体  $n$  がグループ  $h$  に属していなければ、この値

は大きくなる可能性がある。そこで、 $b_{hn}^\ell$  という重みを用いることで、各個体が属さないグループに関しては、 $e_{gihn}$  の値が  $a_{gi}$  に影響しないよう調節する。最も極端な場合は、 $b_{hn}$  が1または0という値だけをとる場合である。その場合、個体が属するグループに関してだけ  $e_{gihn}$  の値が意味を持つ。 $e_{gihn}$  の値が小さいほど、項目  $i$  が次元  $g$  に属すると言えるので、(5.10) 式により求められる  $a_{gi}$  は項目  $i$  が次元  $g$  に属する程度を表すと言える。 $\{b_{hn}\}$  についても同様である。

(5.9) 式の適合度指標は次式で与えられる。

$$0 \leq \lambda^{(c)} = 1 - \frac{G^{k-1} H^{\ell-1}}{INP} \min S^{(c)} \leq 1$$

また、各次元・各項目・各グループ・各評定者の適合度指標は、

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda_g^{(c)} &= 1 - \frac{G^k H^{\ell-1}}{INP} \min S_g^{(c)} \leq 1 \quad (g = 1, \dots, G) \\ 0 \leq \lambda_i^{(c)} &= 1 - \frac{G^{k-1} H^{\ell-1}}{NP} \min S_i^{(c)} \leq 1 \quad (i = 1, \dots, I) \\ 0 \leq \lambda_h^{(c)} &= 1 - \frac{G^{k-1} H^\ell}{INP} \min S_h^{(c)} \leq 1 \quad (h = 1, \dots, H) \\ 0 \leq \lambda_n^{(c)} &= 1 - \frac{G^{k-1} H^{\ell-1}}{IP} \min S_n^{(c)} \leq 1 \quad (n = 1, \dots, N) \end{aligned}$$

となる。前節と同様に、 $G = I$ ,  $H = N$  としても  $\lambda^{(c)} = \lambda$  とはならないことに注意。

#### 5.4.3 計算方法

$S^{(c)}$  の最小化は、繰り返し計算によって行う。

Step 0:  $G$ ,  $H$ ,  $k$ ,  $\ell$  を定める。 $\{a_{gi}\}$ ,  $\{b_{hn}\}$ ,  $\{m_{gh}\}$  に (5.9) 式の制約を満たす初期値を与える。

Step 1:  $\{a_{gi}\}$ ,  $\{b_{hn}\}$ ,  $\{m_{gh}\}$  を固定し、次式により  $\{w_{gi}\}$  を求める。

$$w_{gi} = \left( \sum_{h=1}^H \sum_{n=1}^N b_{hn}^\ell X_{in}' X_{in} \right)^{-1} \sum_{h=1}^H \sum_{n=1}^N b_{hn}^\ell X_{in}' m_{gh}, \quad (g = 1, \dots, G, i = 1, \dots, I)$$

Step 2:  $\{a_{gi}\}$ ,  $\{b_{hn}\}$ ,  $\{w_{gi}\}$  を固定し、次式により  $\{m_{gh}\}$  を求める。

$$\begin{aligned} m_{gh} &= c_{gh} \left( \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \sum_{n=1}^N b_{hn}^\ell X_{in} w_{gi} - \xi_{gh} \mathbf{1} \right), \quad (g = 1, \dots, G, h = 1, \dots, H), \\ \xi_{gh} &= P^{-1} \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \sum_{n=1}^N b_{hn}^\ell \mathbf{1}' X_{in} w_{gi} \end{aligned} \quad (5.11)$$

ただし、 $c_{gh}$  は  $\|m_{gh}\|^2 = P$  を満たすための係数である。

Step 3:  $\{b_{hi}\}$ ,  $\{w_{gi}\}$ ,  $\{m_{gh}\}$  を固定し, 次式により  $\{a_{gi}\}$  を求める.

$$a_{gi} = \left( \sum_{h=1}^G e_{hi}^{-\frac{2}{i-1}} \right)^{-1} e_{gi}^{-\frac{2}{i-1}}, \quad (g=1, \dots, G, i=1, \dots, I),$$

$$e_{gi} = \sum_{h=1}^H \sum_{n=1}^N b_{hn}^i \|X_{in} w_{gi} - m_{gh}\|^2$$

Step 4:  $\{a_{gi}\}$ ,  $\{w_{gi}\}$ ,  $\{m_{gh}\}$  を固定し, 次式により  $\{b_{hn}\}$  を求める.

$$b_{hn} = \left( \sum_{i=1}^I e_{fn}^{-\frac{2}{i-1}} \right)^{-1} e_{hn}^{-\frac{2}{i-1}}, \quad (h=1, \dots, H, n=1, \dots, N),$$

$$e_{hn} = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \|X_{in} w_{gi} - m_{gh}\|^2$$

Step 5:  $S^{(c)}$  の値を求め, 収束していなければ Step 1 へ戻る.

このモデルには, 特に  $H$  の値が大きいき, 多くの局所解が存在する. そこで,  $\{a_{gi}\}$  の初期値として (5.1) 式による解を用いる. また  $\{b_{hn}\}$  の初期値としては, 項目の分類を行わず, 評定者の分類だけを行った結果を用いる. van Buuren & Heiser (1989) は, 最適尺度変換とともに個体のクラスタリングを行う方法 (GROUPALS) を述べている. しかし, GROUPALS は  $k$ -means 法を用いており, 各個体は必ずどこかのクラスタに属するため, その結果は  $\{b_{hn}\}$  の初期値としては適当ではない. そこで,  $b_{hn}$  の初期値として次の基準の解を用いることとする.

$$S^{(c)*}(\{b_{hn}\}, \{w_i\}, \{m_{ih}\}) = \sum_{h=1}^H \sum_{n=1}^N b_{hn}^i \sum_{i=1}^I \|X_{in} w_i - m_{ih}\|^2 \quad (5.12)$$

$$\text{ただし, } \|m_{ih}\|^2 = P, \quad m_{ih}^i \mathbf{1} = 0, \quad (i=1, \dots, I, h=1, \dots, H),$$

$$\sum_{h=1}^H b_{hn} = 1, \quad (n=1, \dots, N), \quad \{b_{hn}\} \geq 0$$

この基準は, 次元数を  $I$  とし,

$$a_{gi} = \begin{cases} 1 & \text{if } g=i \\ 0 & \text{if } g \neq i \end{cases}$$

とした (5.9) 式の基準に一致する.  $P$  次元ベクトル  $m_{ih}$  は, 各絵画に対する評定者グループ  $h$  の項目  $i$  についての得点を並べたものとなる.

$S^{(c)*}$  の最小化の方法は以下のとおりである.

Step 0.0:  $\{b_{hn}\}$ ,  $\{m_{ih}\}$  に (5.12) 式の制約を満たす初期値を与える.

Step 0.1:  $\{b_{hn}\}$ ,  $\{m_{ih}\}$  を固定し, 次式により  $\{w_i\}$  を求める.

$$w_i = \left( \sum_{h=1}^H \sum_{n=1}^N b_{hn}^i X_{in}' X_{in} \right)^{-1} \sum_{h=1}^H \sum_{n=1}^N b_{hn}^i X_{in}' m_{ih}, \quad (i=1, \dots, I)$$

Step 0.2:  $\{b_{hn}\}$ ,  $\{w_i\}$  を固定し, 次式により  $\{m_{ih}\}$  を求める.

$$m_{ih} = e_{ih} \left( \sum_{n=1}^N b_{hn}^i X_{in} w_i - \xi_{ih} \mathbf{1} \right), \quad (i=1, \dots, I, h=1, \dots, H),$$

$$\xi_{ih} = P^{-1} \sum_{n=1}^N b_{hn}^i \mathbf{1}' X_{in} w_i$$

ただし,  $e_{ih}$  は  $\|m_{gh}\|^2 = P$  を満たすための係数である.

Step 0.3:  $\{w_i\}$ ,  $\{m_{ih}\}$  を固定し, 次式により  $\{b_{hn}\}$  を求める.

$$b_{hn} = \left( \sum_{i=1}^I e_{fn}^{-\frac{2}{i-1}} \right)^{-1} e_{hn}^{-\frac{2}{i-1}}, \quad (h=1, \dots, H, n=1, \dots, N),$$

$$e_{hn} = \sum_{i=1}^I \|X_{in} w_i - m_{gh}\|^2$$

Step 0.4:  $S^{(c)*}$  の値を求め, 収束していなければ Step 0.1 へ戻る.

#### 5.4.4 数値例

適合度の値は, 評定者のグループ数  $H$  を決める 1 つの手がかりとなる可能性がある. そこで,  $H$  の値を 2 から 20 まで変えて得られた  $\lambda^{(c)}$  の値を FIGURE 5.6 に示す.  $H$  の値が大きくなるにつれ, 適合度指標  $\lambda^{(c)}$  の値も大きくなる様子が, 図には示されている. しかし,  $\lambda^{(c)}$  の値が急激に大きくなる  $H$  の値などは見当たらない.  $H=13$  のとき  $\lambda^{(c)}$  はやや大きいようであるが決定的とは言えず, このデータでは,  $\lambda^{(c)}$  を基に適切な  $H$  の値を決めることは難しい.

そこで, 各  $H$  の値において, TABLE 4.18 で得られた項目のグループが得られているかを調べた. その結果,  $H \leq 17$  では, TABLE 2.17 と異なる項目グループが得られていたのに対し,  $H \geq 18$  では, TABLE 4.18 と同じ分類が行われていた. TABLE 5.7 には,  $H=18$  のときの  $a_{gi}$  の値を示す. このことから, 尺度構成を行うという目的のためには, 評定者のグループ数  $H$  は少なくとも 18 としなければならないことが分かる. 評定者数は  $N=33$  であるため,  $H=18$  では評定者をほとんどまとめていないことになる. しかしこのことは, 絵に対する印象は人によってかなり異なるものであり, 目的の節で述べたような, その差異を生み出す要因等について議論するときには慎重になる必要がある, ということを示唆している.



TABLE 5.7 SD法データについて求められた  $\{a_{gi}\}$  の値 ( $H=18$ )  
項目の後の数字は TABLE 4.18 で分類された次元

項目	$g=1$	$g=2$	$g=3$	$\lambda_i^{(c)}$
10 楽しい—苦しい (1)	.569	.210	.221	.370
8 陰気な—陽気な (1)	.561	.215	.224	.347
17 暗い—明るい (1)	.556	.218	.226	.338
15 あたたかい—つめたい (1)	.493	.256	.251	.253
19 気持ちがわるい—気持ちがいい (1)	.451	.272	.277	.227
14 のびのびした—いじけた (1)	.424	.269	.306	.189
13 かたい—やわらかい (1)	.380	.281	.339	.161
4 ずぼらな—几帳面な (2)	.232	.536	.233	.320
11 雑な—ていねいな (2)	.243	.526	.231	.328
9 繊細な—粗野な (2)	.273	.465	.262	.235
16 慎重な—軽率な (2)	.285	.422	.293	.129
18 敏感な—鈍感な (2)	.292	.402	.306	.111
7 鈍い—鋭い (2)	.282	.385	.333	.142
3 重い—軽い (3)	.242	.235	.524	.292
5 堂々とした—貧弱な (3)	.268	.244	.488	.269
2 激しい—おだやかな (3)	.278	.247	.476	.269
12 厚い—薄い (3)	.266	.266	.468	.207
1 小さい—大きい (3)	.268	.274	.458	.194
20 静的な—動的な (3)	.306	.306	.388	.092
6 異常な—正常な (3)	.334	.307	.359	.104
$\lambda_g^{(c)}$	.201	.263	.222	.229
$\lambda_g$	.369	.420	.359	.383

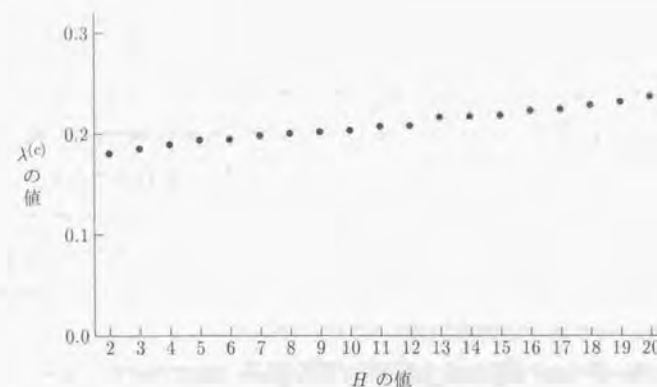


FIGURE 5.6  $H$  と  $\lambda^{(c)}$  の関係

## 5.5 まとめ

本章では、一般化等質性分析を用いることで、3相データにおいて尺度を構成する方法を3つ提案した。それらは全て、項目パターン分類のための数量化法に何らかの制約を課し、項目以外の2つの相から情報を得ようとするものである。すなわち、デザイン行列を用いる方法では、分析者の仮説をデザイン行列として表現し、その仮説の妥当性を検証することで情報を得ようとした。数値例では、同一の絵画に対する尺度得点は、どの評定者でも等しい、という仮説に基づいて分析を行った。しかし、その結果適切な項目の分類が得られず、仮説は支持されなかった。絵画から受ける印象には個人差がある、ということになった。そこで、ランク制約を用いる方法では、尺度得点にランク制約を課すことで、評定者間の差を表現した。また、評定者の分類を伴う方法では、評定者をいくつかのグループに分類することで、評定者間の違いについての情報を得ようとした。

多くの3相データ解析法が、3つの相を対等に扱う手法であるのに対し、本章の3つの手法は、どれも狭義の一次元尺度構成を第1目的としているため、項目の相に重点を置く手法である。すなわち、まず何ら制約を課さない(5.1)式により項目の分類を行うことで、項目の相の情報を得る。この情報を基に、どの程度まで他の2つの相に制約を課してよいか、あるいは制約を緩めなければならないか、を判断するのである。ある1つの相に重点を置くた

め、3相データに対する分析法というよりは、2相データに対する分析法の特別な場合といった方がよいかもしれない。

しかし、このような方法の利点は2つある。第1は、結果の解釈が容易である、という点である。項目分類に用いる  $a_{gi}$  をはじめ、デザイン行列を用いる方法の  $m_g^*$ 、ランク制約を用いる方法の  $Y_g, Z_g$ 、評定者の分類を伴う方法の  $b_{hi}$  等の意味は明確であり、それぞれ論文中で述べたような解釈ができる。第2は、ランク制約を用いる方法における  $R_g$  や、評定者の分類を伴う方法における  $H$  の値を項目の分類を行うという目的に照らして決められる、という点である。提案した3つの方法は、尤度に基づくわけではなく、 $R_g$  や  $H$  を決めるための確率的な裏付けを持たない。しかし、制約を課さないときの項目の分類が得られるか否かを基にすることで、合理的に値を決めることができる。

デザイン行列を用いる方法は、3相データだけでなく、個体やカテゴリに対する何らかの外部情報が得られている場合の2相データに対しても適用することができる。例えば、個体×項目という2相データにおいて、年齢ごとに個体の尺度得点は等しい、といった仮説を取り入れて分析することで、その仮説の是非を検討することができよう。本章で提案した方法が、制約つき主成分分析や正準対応分析に比べて優れている点は、何度も述べてきたように、あらかじめカテゴリの順序が知られていない場合でも、項目を分類し一次元尺度を構成するという目的に照らして最適なカテゴリの順序が、データに基づいて得られること、図を用いることなく項目の分類を行えること、である。

ランク制約を用いる方法は、5.3節で述べたように、Tucker-3やPARAFACといったモデルと関連がある。これらのモデルは、個体や条件によって項目間の構造がどのように変わるのか、ということを表現するモデルであり、全ての個体や条件をとおして、項目の分類を行う本章の方法とは目的が異なる。そのため、これらのモデルに比べた本章の方法の利点を議論することはあまり意味がない。3相データにおける尺度構成の方法という観点からあえて比較を行えば、Tucker-3モデルに比べて、本章の方法の利点は、回転を用いなくとも項目の分類が一意に定まる、という点である。PARAFACモデルでは、個人差を利用することで回転に対する不定性を取り除かれている。しかし得られる因子構造が、一次元性を持つ項目のまとまりを見出すために適している、という保証は必ずしもない。一方、本論文の方法は、はじめから項目のグループを見つけることを目的としており、その意味でPARAFACモデルに比べて優れていると言える。またPARAFACモデルでは、いわば本章の方法における  $R_g$  と  $G$  の関係が、 $R_g = G$  に固定されており、制約の厳しいモデルである(村上, 1990)。データが名義尺度で得られている場合に、カテゴリ値の最適変換とPARAFACモデルへの当ては

めを交互に行う方法では、項目の分類に最適なカテゴリ値が得られるとは限らない。これは、第4章において項目パタンの分類法が因子分析や主成分分析に比べて優れている点として述べたとおりである。

評定者の分類を伴う方法では、項目と評定者の相を同時に分類した。さらに、絵画の相も同時に分類する方法へ拡張することができるかもしれない。ただし、評定者の分類を伴う方法には、5.4.3節でも触れたが、数値計算上多くの局所解が存在する。3つの相の同時分類を行うためには、効率的なアルゴリズムが必要となろう。

第3章や第4章で提案した方法は、質的項目群が得られた場合には、とりあえず試してみる価値がある。と前に述べた。しかし、本章で提案した方法は、質的3相データならぼどのようなデータに対しても適用してよいわけではない。全ての個体や条件をとおして項目の分類は1通りしか求まらないため、項目間の構造の変化を探りたい場合には別の方法を考える必要がある。また、本章での個体と絵画に相当する相がどれであるか、といったことや、各方法の制約条件が適切であるか、といった吟味が必要である。本章の方法は、SD法の実データを分析する目的で提案されたものであるため、SD法を用いた他のデータに対しても有効であろう。しかし、他の種類の3相データに適用する場合には、慎重にならなければならない。



このように、3相データの項目パタンを分類し、尺度構成法を導くことができる。

このように、3相データの項目パタンを分類し、尺度構成法を導くことができる。

このように、3相データの項目パタンを分類し、尺度構成法を導くことができる。

このように、3相データの項目パタンを分類し、尺度構成法を導くことができる。

このように、3相データの項目パタンを分類し、尺度構成法を導くことができる。

このように、3相データの項目パタンを分類し、尺度構成法を導くことができる。

このように、3相データの項目パタンを分類し、尺度構成法を導くことができる。

このように、3相データの項目パタンを分類し、尺度構成法を導くことができる。

このように、3相データの項目パタンを分類し、尺度構成法を導くことができる。

このように、3相データの項目パタンを分類し、尺度構成法を導くことができる。

## 第 6 章

### 2つの項目群における項目パタンの分類法

本章<sup>1</sup>では、一般化等質性分析の1つの拡張について検討する。第4章では項目パタンを分類することによって狭義の一次元尺度を構成した。狭義の一次元尺度を構成する項目は、お互いに相関が高く、構成された尺度の解釈は容易である。そこで、項目群が2つの場合にもその考え方をを用いることで、各項目群から関連する項目のまとまりを見出すことができるであろう。

まず6.1節で本章の目的について述べる。そして、6.2節で第2章の項目パタン分類のための方法を2つの項目群に拡張した方法を提案する。6.3節では計算方法について述べ、6.4節で適合度の指標について述べる。6.5節では2つの人工データと2つの実データを用いて、提案した方法の有効性を検証する。最後に6.6節では、提案した方法の性質と今後の拡張について述べる。

#### 6.1 本章の目的

前章までは、項目群が1つであるときの尺度構成法について述べた。この章では、項目群が2つ得られる場合を考える。例えば、新しい性格テストバッテリーの基準関連妥当性を検証するために従来のテストバッテリーとの比較が行われる。また、入学試験の予測的妥当性研究のために、入学試験の成績と入学後の学業成績が比較される。教授効果等何らかの効果を調べるためにプリ・テストとポスト・テストが実施されることもある。

2つの項目群を同時に分析する目的の1つは、一方の項目群のどの項目ともう一方の項目群のどの項目が関係しているのか、ということ調べることである。あるいは、それぞれ

<sup>1</sup>本章は、土屋 (1996d,1996g) の一部を再構成し、加筆したものである。



の項目群によって測られるどのような特性どうしが関連しているのか、ということでもある。例えば、従来の性格テストバッテリーと新しいテストバッテリーでは、どのような性格特性を共通して測っているのか、ということが関心の対象となる。入学後の学力と関係しているのは、入学試験のどの項目か、ということ調べることで、今後の試験項目作成の参考となる。

2つの項目群間の探索的な構造分析法の1つとしては、正準相関分析 (Hotelling, 1936) がある。正準相関分析は、主成分分析や重回帰分析・数量化Ⅲ類をその特別な場合として含み、理論的には発展している (柳井, 1994)。しかし、本論文で扱う質的項目群間の構造を探るには、少なくとも2つの問題点が挙げられる。

第1は、正準相関分析は項目間の相関係数行列あるいは分散共分散行列を基にする、という点である。したがって、名義尺度や順序尺度の水準で得られた項目に対しては、厳密に言えば、正準相関分析は適用できない。これに対して、van der Burg & de Leeuw (1983, 1988) や Gifi (1990) は、データの最適変換とモデルへの当てはめを交互最小二乗法によって行う質的データの正準相関分析法を提案している。

理由の第2は、結果の解釈がしばしば困難である、という点である (Israëls, 1987)。正準相関分析は、項目群全体どうしの関連があるのか否か、ということや、どちらの項目群の方がより冗長であるか、といったことを調べるには適した方法である (例えば、国生・柳井・柏木, 1990)。しかし先に述べたように、それぞれの項目群のどの項目とどの項目が関連しているのか、ということ調べる場合も多い。そのような目的には、必ずしも正準相関分析が適しているとは言えない。そこで、各正準項目の解釈をより容易にするため、いくつかの提案がなされている。ter Braak (1990) は、正準構造のバイプロットを利用することで、正準項目の解釈を容易にしようと試みている。また、Cliff & Krus (1976) や豊田 (1988) は、正準構造を、因子分析におけるのと同じように、単純構造へ回転することを提案している。そして、回転を施すことで、結果の解釈が容易になったと報告している。また、Israëls (1986) は冗長性分析においても回転を行う方が望ましいと述べている。しかし単純構造への回転法はいくつか考えられており、1つを選ぶための明確な指針はない。さらに、最適変換を伴う正準相関分析では、カテゴリ値の最適変換が必ずしも単純構造を満たすために最適であるとは限らない。これらの点は、以前に因子分析法の問題点として述べたとおりである。

ところで、単純構造へ回転することで解釈が容易になる1つの理由は、各項目群の中で同じ特性を測ると考えられる項目のまとまりが見出されるからである。第4章で一般化等質性分析の1つとして提案した項目パターン分類のための方法は、質的項目をそのような一次元性をなすいくつかの群に分類することを目的としていた。さらに、項目を分類し一次元尺度

を構成するという目的に鑑みて最適なカテゴリ値が得られる方法であった。したがって本章では、第4章の手法の考え方を、項目群が2つの場合に拡張することを目的とする。2つの項目群において関連する、一次元性を持った項目のまとまりを見出すことで、回転法を用いることなく、解釈の容易な結果を得ることができよう。また提案する方法は、項目を分類する上で最適なカテゴリ値が得られる。回転法に比べ計算法が比較的単純である、という特徴も持つ。

## 6.2 2つの項目群における項目パタンの分類法

まず、第4章の方法についてももう一度簡単に述べる。 $C_i$  個のカテゴリを持つ項目  $i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) に対するダミー変数行列を  $Z_i (N \times C_i)$  とする。ただし本章では、データはアイテムカテゴリ型であることを仮定する。このとき、項目パタンの分類のためには、基準

$$S(\{a_{gi}\}, \{w_{gi}\}, \{m_g\}) = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \|Z_i w_{gi} - m_g\|^2 \quad (6.1)$$

$$\text{ただし, } m_g^t m_g = N, \quad m_g^t \mathbf{1} = 0, \quad (g = 1, \dots, G),$$

$$\sum_{g=1}^G a_{gi} = 1, \quad (i = 1, \dots, I), \quad \{a_{gi}\} \geq 0$$

を最小とするよう、 $\{a_{gi}\}$ ,  $\{w_{gi}\}$ ,  $\{m_g\}$  を求める。 $m_g$  は次元  $g$  における個体の尺度得点であり、 $w_{gi}$  は、次元  $g$  において項目  $i$  の各カテゴリに与える数量である。項目  $i$  は、 $a_{1i}^2, \dots, a_{Gi}^2$  の値が最も大きい次元  $g$  に分類される。同じ次元に分類された項目のまとまりは、どの  $Z_i w_{gi}$  もある1つの得点ベクトル  $m_g$  に近いため、一次元性を持つと言える。

以上の項目パターン分類のための方法や、回転を行った因子分析、正準相関分析の結果が解釈しやすいのは、相互に相関が高く、一次元性を持つ項目のまとまりが見出されるからである。仮に項目間の相関がどの項目の組み合わせについても低ければ、項目の分割を行っても解釈しやすい結果は得られない。しかし、心理学の分野では信頼性の高い測定を行うために、あらかじめ一次元性が高いと考えられる複数の項目を用意することが多い。したがって、項目群が2つの場合にも、各群において項目を分割し、相関の高い項目のまとまりを構成しようと考えことは自然である。ただし、項目群間の関連を調べるのが分析の目的であるから、群ごとに独立にまとまりを構成するのではなく、相手の群で得られた項目のまとまりとも相関が高くなければならない。

そこで、 $X_i (N \times C_i)$ ,  $Y_j (N \times D_j)$  をそれぞれ第1項目群に属する項目  $i$  ( $i = 1, \dots, I$ )、第2項目群に属する項目  $j$  ( $j = 1, \dots, J$ ) のダミー変数行列とする。 $C_i, D_j$  は各項目のカテゴリ数で



ある。\$X\_i, Y\_j\$ の各要素は、先ほどの \$Z\_i\$ と同様に 0 と 1 からなり、\$X\_i 1\_{C\_i} = 1\_N\$ (\$i = 1, \dots, I\$), \$Y\_j 1\_{D\_j} = 1\_N\$ (\$j = 1, \dots, J\$) である。このとき、\$\alpha, \beta, \gamma\$ を 0 より大きい正の実数として、次式の \$S\$ を最小化基準として提案する。

$$S(\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}, \{v_{gi}\}, \{w_{gj}\}, \{m_g\}, \{n_g\}) = \sum_{g=1}^G \left\{ \alpha \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \|X_i v_{gi} - m_g\|^2 + \beta \sum_{j=1}^J b_{gj}^k \|Y_j w_{gj} - n_g\|^2 + \gamma \|m_g - n_g\|^2 \right\} \quad (6.2)$$

ただし、\$m'\_g m\_g = n'\_g n\_g = N\$, \$m'\_g 1 = n'\_g 1 = 0\$, (\$g = 1, \dots, G\$),

$$\sum_{g=1}^G a_{gi} = \sum_{g=1}^G b_{gj} = 1, \quad (i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J), \quad \{a_{gi}\}, \{b_{gj}\} \geq 0$$

\$k\$ は 1 より大きな実数で、構成する尺度の一次元性の程度を調整するものである。また、各カテゴリに順序がある場合には、\$v\_{gi}, w\_{gj}\$ の要素に順序制約を課してもよい。

(6.2) 式の第 1 項、第 2 項はそれぞれ、第 1 項目群、第 2 項目群において、一次元性をなす項目のまとまりを構成することを意味する。すなわち、\$m\_g(N \times 1), n\_g(N \times 1)\$ は、それぞれ第 1 項目群、第 2 項目群に属するいくつかの項目から構成された、次元 \$g\$ の尺度得点を表わす。それぞれの尺度得点の大小が持つ意味を解釈するときには、第 2 章の方法の場合と同じように、カテゴリに対して与えられる数量 \$v\_{gi}(C\_i \times 1)\$ や \$w\_{gj}(D\_j \times 1)\$ が基になる。

そして第 3 項により、各群の \$g\$ 次元どうしの相関を高くすることができる。仮に、第 1 項目群のなかのある項目 \$i\$、第 2 項目群のなかのある項目 \$j\$ が、\$a\_{gi}, b\_{gj}\$ の値によって、ともにある次元 \$g\$ に分類されたとする。さらに、項目 \$i\$ のあるカテゴリ \$c\_i\$ に反応した個体は \$m\_{gi}\$ の値が大きく、項目 \$j\$ のあるカテゴリ \$d\_j\$ に反応した個体は \$n\_{gj}\$ の値が大きいといった場合、\$m\_g\$ と \$n\_g\$ の間の相関は高いため、カテゴリ \$c\_i\$ に反応した個体は、カテゴリ \$d\_j\$ にも反応するという傾向が存在することになる。したがって、同じ次元 \$g\$ に分類された項目 \$i\$ と項目 \$j\$ は関連がある、ということになる。同じ次元に分類される項目どうしは、一次元性が高いため、各次元の意味を解釈するのは容易になると期待される。

各項の係数 \$\alpha, \beta, \gamma\$ は、各群内で見出す項目のまとまりの一次元性の程度と、群の間での相関の高さとのバランスを調節するための係数であり、分析者があらかじめ与える値である。

(6.2) 式の直観的な意味を FIGURE 6.1 を使って説明する。図中の点は、各ベクトルあるいは数量を与えられたデータを表わし、点どうしが近いことは、それらの間の相関が高いことを意味する。例えば、FIGURE 6.1(a) の場合には、\$X\_1, X\_2, X\_3\$ のまとまりと \$Y\_1, Y\_2\$ のまとまり、\$X\_4, X\_5\$ のまとまりと \$Y\_3, Y\_4, Y\_5\$ のまとまりがそれぞれ関連しているということになる。基準 \$S\$ の最小化は、図中の点と点を結ぶ実線の長さ (の二乗) の和の最小化とほ

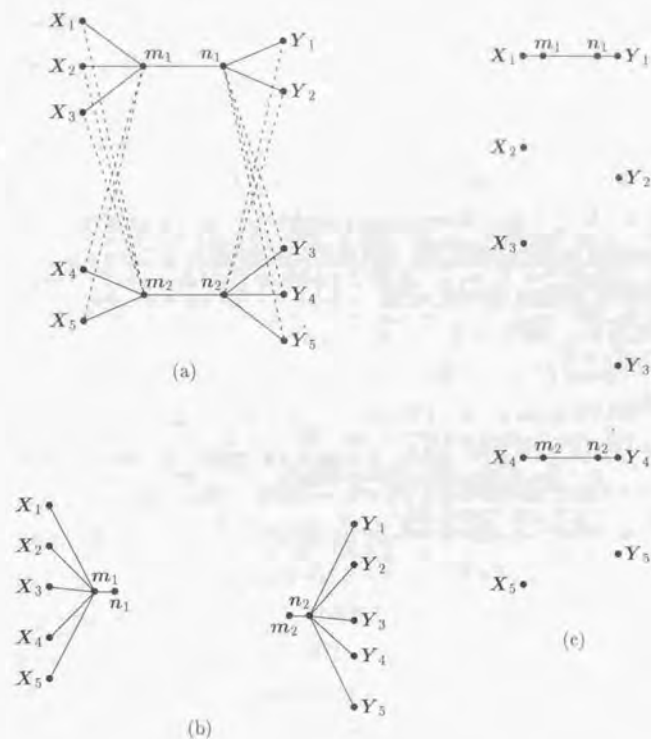


FIGURE 6.1 (6.2) 式の図表現



ほぼ等価である。ただし、 $a_{gi}^k, b_{gj}^k$  の値が0に近い場合には、線を省略してある。

FIGURE 6.1(a)において、 $G=2$ としたとき、 $m_1$ は $X_1, X_2, X_3$ の近くに位置し、これらの3つの項目の相関が高いことを示すと同時に、3つの項目をいわば代表した変数となる。そして、 $Y_1, Y_2$ を代表した $n_1$ と $m_1$ が近いことで、 $X_1, X_2, X_3$ と $Y_1, Y_2$ が関連していることを表わす。同様に、 $X_4, X_5$ を代表する $m_2$ と $Y_3, Y_4, Y_5$ を代表する $n_2$ が近いことで、それらが関連していることが分かる。なお、FIGURE 1(a)には示されていないが、他のどの項目とも関連が低い項目は、全ての次元において、 $a_{gi}^2$ または $b_{gj}^2$ の値が小さくなる。

$\alpha, \beta, \gamma$ は、 $m_g$ と $n_g$ をどの程度近づけるかを定めるための係数であり、データの性質と分析者の目的に応じて定めなければならない。 $\gamma$ を $\alpha, \beta$ に比べて大きくすると、 $m_g$ と $n_g$ は非常に近くなる。しかし、FIGURE 6.1(b)に示されるように、各項目群内での相関が、項目群間の相関に比べて高い場合には、群内の項目は分割されず、1つのまとまりとされてしまう。そこで、項目を分割するためには、 $\gamma$ を小さくする必要がある。逆に、 $\alpha, \beta$ を大きくすると、 $m_g$ と $n_g$ は必ずしも近くならない。しかし、FIGURE 6.1(c)に示されるように、項目群間で一部の項目どうしの相関が高い場合には、相関の高い項目の結びつきが見出されるだけで、群内での項目のまとまりは得られない。このときには、項目をまとめるために、 $\alpha, \beta$ を小さくしなければならない。ただし、FIGURE 6.1(b)の場合には、項目群の間で関連する項目を見つけるのには無理があるとするとのも1つの考え方である。また、FIGURE 6.1(c)の場合に、項目群内で一次元性の高い項目のまとまりはない、と考えることもできる。すなわち、分析する項目の内容や性質に応じて $\alpha, \beta, \gamma$ を定めればよい、ということである。

$\alpha, \beta, \gamma$ に対しては、0より大きな正の実数ということ以外に何ら制約条件はない。しかし、例えば $\alpha + \beta + \gamma = 1$ や $\alpha = \beta, \alpha + \gamma = 1$ などといった条件をさらにつけ加えることは意味あることである。なぜなら、 $\alpha, \beta, \gamma$ はその絶対的な大きさではなく、 $\alpha : \beta : \gamma$ という比が重要だからである。 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ などの条件をつけ加えれば、その比は理解しやすくなるであろう。なお、 $\gamma = 0$ としても、(6.2)式を最小にする解は求まる。しかし、それはそれぞれの項目群において項目パタンの分類を行なうことに相当し、同じ次元に分類された項目どうしが関連しているとは言えなくなる。そのため、 $\gamma > 0$ でなければならない。

$\alpha, \beta, \gamma$ の任意性を避けるために、(6.2)式において $m_g = n_g$ とすることも考えられるかもしれない。その方法は、両項目群に属する項目を全てまとめて、第2章の手法あるいは因子分析を行うことに相当する。しかし、項目が2つの群に分かれているからには、データが得られた状況など群の間で項目の性質が異なると考えるのが自然であり、項目群を代表する

ベクトル $m_g$ と $n_g$ が完全に一致すると仮定するのには無理がある。また、 $\alpha, \beta, \gamma$ をデータから決めるという考え方もある。この点については6.6節で述べる。

$\alpha, \beta, \gamma$ の具体的な値の例として、TABLE 6.1を挙げる。TABLE 6.1では先に述べた

TABLE 6.1  $\alpha, \beta, \gamma$ の組み合わせ例

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
case 1	1	1	1
case 2	$I^{-1}$	$J^{-1}$	1
case 3	1	1	$G^{-1}$
case 4	$I^{-1}$	$J^{-1}$	$G^{-1}$

$\alpha + \beta + \gamma = 1$ のような条件を加えていない。これは、TABLE 6.1の形の方が、比がより分かりやすいからである。case 1は最も単純な場合である。case 2は、(6.2)式の第1項、第2項をそれぞれ平均することで、3つの項を等しく扱うものである。case 1に比べて相対的に $\gamma$ の値は大きくなり、 $m_g$ と $n_g$ の間の相関は高くなる。case 3は、次元数に応じて $\gamma$ を変える場合である。次元数が増えると、各次元に属する項目の数は少なくなり、(6.2)式を次元ごとに考えれば、第1項、第2項に比べて第3項の $S$ に対する重みが相対的に増すことになる。そこで、 $\gamma = G^{-1}$ とすることで、次元数にかかわらず第3項の重みをなるべく一定に保とうとするものである。case 4は、case 2とcase 3を組み合わせた場合である。6.5節では、それぞれの場合について、どのような結果が得られるかを人工データによって例示する。

### 6.3 計算方法

$S$ の最小化の手順は次のとおりである。

Step 0:  $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}, \{m_g\}, \{n_g\}$ に対して(4.2)式の制約を満たす初期値を与える。

Step 1:  $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}, \{m_g\}, \{n_g\}$ を固定し、 $\{v_{gi}\}, \{w_{gj}\}$ を求める。

Step 2:  $\{m_g\}, \{n_g\}, \{v_{gi}\}, \{w_{gj}\}$ を固定し、 $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}$ を求める。

Step 3:  $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}, \{v_{gi}\}, \{w_{gj}\}$ を固定し、 $\{m_g\}, \{n_g\}$ を求める。

Step 4: 収束していなければStep 1へ。

前章までの方法と同様に、この計算方法は局所解に陥る可能性があるため、Step 0 の初期値をいろいろ変えて計算を繰り返さなければならない。

次に各 Step ごとに方法を説明する。

### Step 1

(4.2) 式の  $S$  を  $v_{gi}, w_{gj}$  で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial v_{gi}} &= 2\alpha a_{gi}^k (X_i' X_i v_{gi} - X_i' m_g), \quad (g=1, \dots, G, i=1, \dots, I), \\ \frac{\partial S}{\partial w_{gj}} &= 2\beta b_{gj}^k (Y_j' Y_j w_{gj} - Y_j' n_g), \quad (g=1, \dots, G, j=1, \dots, J)\end{aligned}$$

となる。そこで、第4章と同様に、 $K_{gi}, K_{gj}$  を順序制約のための行列として、

$$\begin{aligned}v_{gi} &= K_{gi} (K_{gi}' X_i' X_i K_{gi})^{-1} K_{gi}' X_i' m_g, \quad (g=1, \dots, G, i=1, \dots, I), \\ w_{gj} &= K_{gj} (K_{gj}' Y_j' Y_j K_{gj})^{-1} K_{gj}' Y_j' n_g, \quad (g=1, \dots, G, j=1, \dots, J)\end{aligned}$$

が得られる。 $K_{gi}$  は例えば、 $v_{g11} = v_{g12}$  とした場合、

$$K_{gi} = \begin{pmatrix} 1 & 0' \\ 1 & 0' \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

である。

### Step 2

$S$  を  $a_{gi}, b_{gj}$  で微分し、その結果を0とおくと、 $a_{gi}, b_{gj}$  に関する制約を考慮して、

$$\begin{aligned}a_{gi} &= \left( \sum_{h=1}^G e_{X,hi}^{-\frac{2}{k-1}} \right)^{-1} e_{X,gi}^{-\frac{2}{k-1}}, \quad (g=1, \dots, G, i=1, \dots, I), \\ b_{gj} &= \left( \sum_{h=1}^G e_{Y,hj}^{-\frac{2}{k-1}} \right)^{-1} e_{Y,gj}^{-\frac{2}{k-1}}, \quad (g=1, \dots, G, j=1, \dots, J)\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned}e_{X,gi}^2 &= \|X_i v_{gi} - m_g\|^2 \\ e_{Y,gj}^2 &= \|Y_j w_{gj} - n_g\|^2\end{aligned}$$

である。

### Step 3

$S$  を  $m_g, n_g$  で微分し、その結果を0とおくと、

$$\begin{aligned}m_g &= \xi_{gm} \left\{ \alpha \sum_{i=1}^I a_{gi}^k X_i v_{gi} + \gamma n_g \right\}, \quad (g=1, \dots, G), \\ n_g &= \xi_{gn} \left\{ \beta \sum_{j=1}^J b_{gj}^k Y_j w_{gj} + \gamma m_g \right\}, \quad (g=1, \dots, G)\end{aligned}$$

が得られる。ただし、

$$\begin{aligned}\xi_{gm} &= \sqrt{N} \cdot \left\| \alpha \sum_{i=1}^I a_{gi}^k X_i v_{gi} + \gamma n_g \right\|^{-1} \\ \xi_{gn} &= \sqrt{N} \cdot \left\| \beta \sum_{j=1}^J b_{gj}^k Y_j w_{gj} + \gamma m_g \right\|^{-1}\end{aligned}$$

である。

## 6.4 適合度の指標

2つの項目群があるとき、両項目群において関連している項目を見出すと共に、関連性の程度を知りたいのが普通である。指標の1つとしては、 $m_g$  と  $n_g$  の間の相関係数が挙げられる。しかし、この指標は、各次元に分類された項目の間の一次元性の程度を考慮していない上、 $\alpha, \beta, \gamma$  の値に大きく左右される。そこで、残差  $\min S$  を利用することを考える。 $\min S$  が小さいということは、FIGURE 6.1(a) で示した実線の長さの和が小さいということにほぼ対応する。2.3 節の結果と  $0 \leq m_g' n_g \leq N$  であることを用いれば、(6.2) 式の基準  $S$  に対して、

$$0 \leq \min S \leq G^{1-k} N(\alpha I + \beta J) + 2\gamma NG = \varphi$$

が成り立つ。そこで、

$$0 \leq \lambda = 1 - \frac{\min S}{\varphi} \leq 1$$

も指標として用いることとする。 $\lambda$  は正準相関分析における正準相関係数とは解釈が異なる。なぜなら、項目群間の関連の高さだけではなく、各次元に分類された項目の一次元性の程度も影響するからである。正準相関係数は、項目の数が増えると大きくなる(あるいは等しい)が、 $\lambda$  は、一次元性の低い項目が増えると小さくなる。 $\lambda$  の値が1に近いほど、各次元に分類された項目間の一次元性が高い上、 $m_g$  と  $n_g$  の間の相関も高いことになる。特に、 $\lambda = 1$  のときは、FIGURE 6.1(a) では実線で結ばれた全ての点どうしがびったりと一致することになる。これは、 $X_1$  のあるカテゴリを選んだ人は必ず  $X_2$  のあるカテゴリを選ぶ、といった場合に起こる。注意しなければならないのは、FIGURE 6.1(b) の場合でも、実線で結ばれた点どうしがびったり重なれば、 $\lambda = 1$  となることである。また、 $\lambda$  の値が低い場合には、その原因として、各項目群内の項目の一次元性は高いものの、項目群間の項目の関連が低いことや、FIGURE 6.1(c) のように項目群間のいくつかの項目の関連は高いものの、各項目群内の項目の一次元性が低いことなどが考えられる。したがって、関連性の程度を調べるには、 $\lambda$  の値だけでなく、 $a_{gi}, b_{gj}$  の値や  $m_g$  と  $n_g$  の間の相関係数なども考慮しなければならない。



なお、このような指標は、第2章の方法と同様、各次元ごとに求めることもできる。

$$S_g = \alpha \sum_{i=1}^I a_{gi}^k \|X_i v_{gi} - m_g\|^2 + \beta \sum_{j=1}^J b_{gj}^k \|Y_j w_{gj} - n_g\|^2 + \gamma \|m_g - n_g\|^2$$

とすれば、

$$0 \leq \lambda_g = 1 - G \frac{\min S_g}{\varphi} \leq 1$$

が各次元ごとの指標となる。また、明らかに  $\sum_{g=1}^G \lambda_g = \lambda$  が成り立つ。

## 6.5 数値例

本章で提案した方法の性質を調べるために、数値例を示す。2つは人工データによるものであり、あとの2つは実データによるものである。なお、ここで示す結果は全て  $k=2$  とした場合のものである。

### 6.5.1 人工データ7

まず、人工データによって正準相関分析と本章の方法との比較を行う。データは因子分析モデルによって発生させるため、TABLE 6.2 に示す10項目、3因子の因子負荷行列  $A_1, A_2$

TABLE 6.2 人工データ7発生のための因子負荷行列

項目	因子1	因子2	因子3
1	.7	.4	.3
2	.7	.3	.4
3	.4	.7	.3
4	.3	.4	.7
5	.7	.3	.4
6	.4	.7	.3
7	.3	.7	.4
8	.3	.4	.7
9	.4	.3	.7
10	.3	.4	.7

を用意した。ただし、項目1から項目4は第1項目群  $A_1$ 、項目5から項目10は第2項目群  $A_2$  に属する。TABLE 6.2 から分かるように、項目1,2と項目5、項目3と項目6,7、項目4と項目8,9,10が関連していることになる。次に

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0.95I \\ 0.95I & I \end{pmatrix} \right)$$

という6次元正規乱数を発生させ、

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 f_1 \\ A_2 f_2 \end{pmatrix} + 0.3e$$

を暫定的なデータとした。ただし、 $e \sim N(0, I)$  である。両項目群の間で対応する因子間の相関は0.95となる。このようなデータを  $N=500$  発生させ、各項目ごとに500個のデータの平均、標準偏差を求めた。そして以下の基準でカテゴリを定めた2種類のデータセットを作成した。

	人工データ7(a)		人工データ7(b)	
	項目1 ～項目4	項目5 ～項目10	項目1 ～項目4	項目5 ～項目10
～平均 - 標準偏差	1	1	1	3
平均 - 標準偏差～平均	2	2	2	1
平均～平均 + 標準偏差	3	3	3	4
平均 + 標準偏差～	4	4	4	2

すなわち、人工データ7(a)の項目5から項目10のカテゴリ1, 2, 3, 4をそれぞれカテゴリ3, 1, 4, 2に変えれば、人工データ7(b)が得られる。カテゴリ値を名義尺度によるものと見なせば、人工データ7(a)と人工データ7(b)は同じであると言える。

以上の手続きにより得られたデータに対し、まず、データを間隔尺度によるものと見なして正準相関分析を行った<sup>2</sup>。その結果をTABLE 6.3に示す。表中の数値は正準構造である。また、得られた正準構造をヴァリマックス回転した結果もあわせて示している<sup>3</sup>。

人工データ7(a)では、回転を施す前は、10項目全てが第1正準変数との相関が高く、データ発生時に意図した項目間の関連が全く見出されていない。しかしヴァリマックス回転を行うと、第1正準変数に対しては項目4, 8, 9, 10、第2正準変数に対しては項目3, 6, 7、第3正準変数に対しては項目1, 2, 5の値が大きく、意図したとおりの分類を行えるようになる。

一方人工データ7(b)では、回転を施す前は、第1正準変数に対して項目1, 2, 3, 4の負荷が高く、第1項目群の分類を行うことができていない。回転後は、例えば第1正準変数に対して項目3, 6, 10の負荷が高く、元の構造が見出されていない。

以上の結果から、あらかじめ適切なカテゴリ値が与えられている場合には、正準相関分析を行った後にヴァリマックス回転を施すことで、項目を分類することができるが、そうでない場合には、適切な結果が得られないことが示された。カテゴリの順序をあらかじめ仮定し正準相関分析を行っても、その結果に基づいて仮定したカテゴリの順序の適否を判断する

<sup>2</sup>計算にはSASのCANCORRプロシジャを用いた。ただし、 $N=3$ とした。

<sup>3</sup>計算にはSASのFACTORプロシジャを用いた。

TABLE 6.3 正準相関分析の結果

項目	人工データ 7(a)						人工データ 7(b)					
	回転前			回転後			回転前			回転後		
	正準変数			正準変数			正準変数			正準変数		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	.87	-.20	-.35	.29	.48	.77	.93	.11	-.24	.33	.46	.79
2	.88	-.01	-.37	.42	.34	.79	.92	.24	-.01	.56	.38	.67
3	.86	-.43	.28	.34	.90	.26	.74	.42	.41	.86	.18	.34
4	.88	.40	.26	.92	.31	.23	.81	-.35	.48	.55	.83	.05
5	.85	-.00	-.52	.35	.26	.89	.51	.23	-.54	-.03	.06	.78
6	.86	-.42	.02	.26	.79	.48	.47	.37	.46	.74	.07	.12
7	.86	-.31	.24	.42	.79	.29	.60	.49	-.05	.50	-.02	.59
8	.89	.27	.20	.82	.38	.29	.63	-.68	.03	-.02	.92	.12
9	.85	.37	-.02	.79	.20	.45	.63	-.32	.06	.19	.65	.23
10	.88	.26	.12	.78	.35	.36	.54	.00	.49	.61	.40	.00
正準相関	.897	.565	.526				.292	.176	.127			

ことはできない。すなわち、カテゴリの順序があいまいな場合には、正準相関分析を行うと誤った結果を得る可能性があることになる。

次に、 $G=3$ として、本章の方法を適用した。 $\alpha, \beta, \gamma$ の組み合わせには、TABLE 6.1に示した4種類を用いた。その結果、人工データ 7(a)と人工データ 7(b)ではどの $\alpha, \beta, \gamma$ の組み合わせを用いても、組み合わせごとに同じ $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}$ の値が得られた。その値をTABLE 6.4に示す。ただし、最下行の相関の欄は、 $m_g$ と $n_g$ の間の相関係数を表す。

各項目は、表中の $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}$ の値が最も大きい次元に分類される。例えば、case 1では、次元1に分類されるのは項目1, 2, 5である。次元2には項目3, 6, 7が分類され、次元3には項目4, 8, 9, 10が分類される。すなわち、はじめに設定した項目間の関連が見出されている。case 2からcase 4を用いても、各caseの間で $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}$ の値は異なるものの、同じ分類が得られる。

TABLE 6.5には、case 3のとき得られた $\{v_{gi}\}, \{w_{gj}\}$ の値を示す。ただし紙面の節約から、当該項目が分類された次元についてのみ値を示している。例えば、項目2は次元1に分類されるので、 $v_{12}$ の値が示されている。人工データ 7(a)では、10項目全てについてカテゴリ1, 2, 3, 4の順に値が大きくなり順序通りであることが分かる。一方人工データ 7(b)

TABLE 6.4  $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}$ の値 (人工データ 7)

項目	case 1 ( $\lambda = .908$ )			case 2 ( $\lambda = .974$ )			case 3 ( $\lambda = .859$ )			case 4 ( $\lambda = .936$ )		
	$g=1$			$g=1$			$g=1$			$g=1$		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	.56	.25	.19	.56	.25	.19	.57	.25	.18	.56	.25	.19
2	.69	.16	.15	.76	.12	.12	.80	.10	.10	.79	.11	.10
3	.13	.76	.12	.06	.88	.06	.04	.92	.04	.06	.89	.05
4	.12	.12	.76	.12	.11	.77	.03	.03	.93	.07	.07	.85
5	.71	.14	.15	.51	.23	.26	.88	.06	.06	.54	.22	.24
6	.22	.61	.17	.31	.46	.24	.19	.64	.17	.29	.50	.22
7	.18	.64	.18	.27	.47	.27	.13	.72	.15	.25	.51	.24
8	.18	.18	.64	.23	.22	.56	.15	.16	.68	.23	.22	.56
9	.27	.20	.53	.29	.21	.50	.25	.20	.56	.29	.21	.49
10	.23	.21	.56	.26	.23	.51	.20	.20	.60	.26	.23	.50
$\lambda_g$	.909	.910	.903	.972	.977	.972	.863	.863	.850	.931	.942	.934
相関	.990	.989	.989	1.000	.999	1.000	.941	.940	.941	.997	.996	.994



TABLE 6.5 人工データ7について求められた  $\{v_{gi}\}, \{w_{gj}\}$  の値

項目	カテゴリ				
	1	2	3	4	
人工データ 7(a)	1	-1.47	-0.43	0.56	1.33
	2	-1.64	-0.50	0.59	1.42
	3	-1.56	-0.53	0.51	1.61
	4	-1.50	-0.60	0.58	1.58
	5	-1.64	-0.42	0.58	1.44
	6	-1.45	-0.44	0.46	1.51
	7	-1.53	-0.50	0.48	1.53
	8	-1.43	-0.54	0.51	1.49
	9	-1.36	-0.49	0.55	1.42
	10	-1.41	-0.50	0.54	1.43
人工データ 7(b)	1	-1.47	-0.43	0.56	1.33
	2	-1.64	-0.50	0.59	1.42
	3	-1.56	-0.53	0.51	1.61
	4	-1.50	-0.60	0.58	1.58
	5	-0.42	1.44	-1.64	0.58
	6	-0.44	1.51	-1.45	0.46
	7	-0.50	1.53	-1.53	0.48
	8	-0.54	1.49	-1.43	0.51
	9	-0.49	1.42	-1.36	0.55
	10	-0.50	1.43	-1.41	0.54

では、項目1から項目4ではカテゴリ1, 2, 3, 4の順、項目5から項目10ではカテゴリ3, 1, 4, 2の順に値が大きくなっている。すなわち、はじめに想定したカテゴリの順序が正しく見出されていることが分かる。

以上の結果をまとめると、正準相関分析ではカテゴリの順序があらかじめ知られている場合には、回転を行うことで項目の分類ができた。しかし、回転を必要とする方法には、第2章で述べたとおり、回転法を選ぶ基準がない、カテゴリ値の最適な変換が求められない、といった問題点が存在する。一方、本章の方法はカテゴリの順序があらかじめ分からない場合にも、カテゴリ値の最適な変換が求めるとともに、項目を分類できることが示された。

### 6.5.2 人工データ8

次に、 $\alpha, \beta, \gamma$ の組み合わせの効果を示す分析例を述べる。データは、人工データ7(a)と同じ手続きによって作成した。ただし、両項目群の間で対応する因子間相関を0.95ではなく、0.8とした。すなわち、

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0.8I \\ 0.8I & I \end{pmatrix} \right)$$

である。

TABLE 6.6 には、 $G=3$ としてcase 1からcase 4の $\alpha, \beta, \gamma$ を用いた結果を示す。 $\{a_{gi}\}$ の値に基づいて第1項目群の項目を分類すると、どのcaseについても、項目1, 2は次元1、項目3は次元2、項目4は次元3に分類され、はじめに想定した分類がなされている。しかし、第2項目群について見ると、case 2とcase 4では、6項目全てが次元3に分類され、適切な分類がなされていない。case 1とcase 3では、項目5は次元1、項目6, 7は次元2、項目8, 9, 10は次元3に分類され、それぞれ第1項目群の対応する項目と関連があることが示されている。case 2とcase 4において、項目群間の関連が見出されなかった理由は、相関の欄に示されるとおり、 $m_g$ と $n_g$ の間の相関係数が1に非常に近くなり、FIGURE 6.1(b)のようなことが起きたことにある。人工データ8は、元の対応する因子間相関が0.8とあまり高くない。それにもかかわらず、 $\alpha, \beta$ に比べ $\gamma$ の相対的な値が大きすぎたために、(6.2)式の第3項の $S$ に対する重みが大きくなり、 $m_g$ と $n_g$ を近づけすぎた、ということである。実際、 $\alpha, \beta$ に比べて相対的に $\gamma$ の値を小さくしたcase 3では、 $m_g$ と $n_g$ の間の相関係数が.904から.907であり、他のcaseに比べ低くなっている。

項目群が2つ得られる場合には、それぞれの項目群で測られる特性が必ずしも完全に一致するとは限らない。特性間の関連があまり高くない場合でも、本方法において $\alpha, \beta, \gamma$ の組

TABLE 6.6  $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}$  の値 (人工データ 8)

項目	case 1 ( $\lambda = .890$ )			case 2 ( $\lambda = .969$ )			case 3 ( $\lambda = .830$ )			case 4 ( $\lambda = .923$ )		
	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$
1	.65	.19	.17	.57	.24	.18	.60	.22	.18	.57	.24	.19
2	.71	.15	.15	.81	.10	.09	.73	.14	.13	.81	.10	.09
3	.34	.41	.25	.05	.92	.04	.07	.86	.07	.05	.91	.04
4	.30	.27	.44	.32	.33	.36	.06	.07	.87	.30	.31	.40
5	.38	.31	.31	.35	.26	.39	.82	.09	.09	.37	.26	.37
6	.15	.69	.16	.27	.33	.40	.20	.62	.19	.28	.35	.36
7	.17	.63	.20	.26	.33	.41	.14	.69	.17	.26	.36	.38
8	.16	.20	.64	.17	.67	.17	.15	.67	.17	.17	.66	.66
9	.20	.21	.59	.21	.18	.61	.26	.21	.53	.21	.19	.60
10	.19	.24	.57	.18	.18	.64	.19	.22	.59	.19	.18	.63
$\lambda_g$	.894	.894	.884	.969	.974	.963	.833	.836	.822	.924	.935	.910
相関	.995	.995	.994	1.000	1.000	1.000	.906	.907	.904	.998	.997	.998

み合わせを調整することで、その関連を探ることができる。この例では示された。ただし、高いとは言えない関連を見出すことに意義があるか否かは、当然ながら研究目的によって判断されるべきである。

次に case 3 を用いて、 $G = 1, 2, 4$  とした本方法を適用した。その結果を TABLE 6.7 に

TABLE 6.7  $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}$  の値 (人工データ 8)

項目	$G = 1$ ( $\lambda = .771$ )		$G = 2$ ( $\lambda = .799$ )		$G = 4$ ( $\lambda = .855$ )			
	$g = 1$		$g = 1$	$g = 2$	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 4$
1	1.00		.76	.24	.44	.22	.18	.16
2	1.00		.70	.30	.78	.08	.08	.06
3	1.00		.60	.40	.05	.88	.04	.03
4	1.00		.17	.83	.04	.04	.88	.04
5	1.00		.56	.44	.85	.05	.05	.05
6	1.00		.75	.25	.19	.44	.18	.18
7	1.00		.67	.33	.08	.74	.09	.09
8	1.00		.27	.73	.07	.08	.75	.11
9	1.00		.29	.71	.22	.17	.34	.27
10	1.00		.31	.69	.01	.01	.01	.98
$\lambda_g$	.771		.787	.810	.817	.824	.842	.935
相関	.895		.914	.926	.876	.883	.887	.999

示す。TABLE 6.6 に示された  $G = 3$  の場合も併せて見比べると、 $G$  の値が大きくなるにつれ、 $\lambda$  の値も大きくなるのが分かる。しかし、 $G = 4$  と  $G = 3$  の間の  $\lambda$  の差 (.025) は、 $G = 3$  と  $G = 2$  の間のそれ (.031) ほどは大きくない。また、 $G = 4$  のとき次元 4 では、相手の項目群の中で関連する項目を見出せていない。以上のことから、このデータでは  $G = 3$  とすることが妥当と考えられ、この結果はデータ発生時の設定に一致する。

### 6.5.3 Russett データ

次に実データの分析例を示す。データは、Russett (1964) が、経済的不平等さと政治的不安定さとの関連を調べるために、47 の国について収集したもので、Gifi (1990) がカテゴリズし直したものをを用いる。第1項目群に含まれる経済的不平等さを示す項目は、

#### 1. (GINI) ジニ集中係数



2. (FARM) 土地の半分を所有する農家の割合を1から減じたもの(値が大きいほど不平等を表す)
3. (RENT) 土地を借りている農家の割合
4. (GNPR) 国民総生産
5. (LABO) 農業に従事する労働力の割合
- である。また、第2項目群に含まれる政治的不安定さを示す項目は、
6. (INST) 行政官の長の数と1945年から1961年の間に独立国家であった年数の関数(値が小さいほど安定を表す)
7. (ECKS) 1946年から1961年の間に起こった内紛の総数
8. (DEAT) 市民グループ間の衝突の結果殺された人の数
9. (DEMO) 安定した民主主義国家・不安定な民主主義国家・独裁国家という3つのカテゴリをとる項目

である。

このデータに対して、TABLE 6.1 の4つのcaseを用いて本章の方法を適用した。その結果、case 3の場合に解釈の容易な結果が得られた。そこで、case 3を用いて、 $G=2$ 、 $G=3$ としたときの $\{a_{gi}\}$ 、 $\{b_{gj}\}$ の値をTABLE 6.8に示す。また、TABLE 6.9とTABLE 6.10は、分類された次元についての各項目の $v_{gi}$ 、 $w_{gj}$ の値である。例えば、TABLE 6.8ではFARMは次元1に分類されるので、TABLE 6.9には $v_{12}$ の値が示されている。

TABLE 6.8において、次元1には、 $G=2$ と $G=3$ のどちらの場合でも、GINI、FARM、RENTとINSTが分類され、これらの項目が関連していることが分かる。特に、GINI、FARM、RENTという項目はどれも土地が一部の地主に集中しているか否かを表す項目であるため、この結果はもつともである。TABLE 6.9、TABLE 6.10では、第1項目群の経済的不平等さの大きいカテゴリと、第2項目群の政治的不安定さの大きなカテゴリに対して、正の数量を与えられている。すなわち、政治的に不安定で植民地支配を受けていた国では土地が一部の者に独占されている、という傾向があることが分かる。

$G=3$ としたときには、残りの項目がさらに2つの次元に分かれる。すなわち、次元2には、GNPR(.94)とECKS(.94)、DEAT(.39)が分類され、戦争などの争いが多い国では国民総

TABLE 6.8  $\{a_{gi}\}$ 、 $\{b_{gj}\}$  の値 (Russett データ)

項目	$G=2$ ( $\lambda=.765$ )		$G=3$ ( $\lambda=.829$ )		
	$g=1$	$g=2$	$g=1$	$g=2$	$g=3$
GINI	.94	.06	.96	.02	.02
FARM	.96	.04	.96	.02	.02
RENT	.69	.31	.46	.24	.30
GNPR	.08	.92	.02	.94	.04
LABO	.10	.90	.02	.04	.94
INST	.85	.15	.78	.12	.10
ECKS	.28	.72	.03	.94	.03
DEAT	.26	.74	.25	.39	.36
DEMO	.24	.76	.03	.04	.93
$\lambda_g$	.784	.747	.774	.861	.851
相関	.865	.937	.827	.939	.932

生産が低い、ということになる。また、次元3には、LABO(.94)とDEMO(.93)が分類され、安定した民主主義国家では農業従事者の割合が低い、ということが分かる。

なお、Gifi (1990) は、このデータに対して非線形正準相関分析を行い、独裁国家では農業労働者の割合が多い、という結果を見出している。この結果は、TABLE 6.6における次元3に対応すると考えられる。しかしGifi (1990)では、次元1と次元2に対応する知見は得られていない。

#### 6.5.4 絵画印象データ

次に、第4章、第5章で用いたSD法データを使った分析例を示す。この分析例の目的は、絵画に対する印象と絵画の形状的特徴の関連を探索的に調べることであり、用いる絵画は、大学生33名が描いた樹木画33枚であり、 $N=33$ となる。

第4章でも示したSD法データは順序尺度により測られたものである。そこで、51名の回答を統合するために、絵画ごとに各項目に対する51名の回答の頻度分布を求め、形容詞対のどちらに分布が偏っているかによって2値化した。すなわち、7段階のうちTABLE 6.9の左の形容詞側3段階の回答者数の方が多ければ1、右の形容詞側3段階の回答者数の方が多ければ2とした。以上のデータを第1項目群とする。

次に印象評定を行った大学生とは異なる大学生3名に33枚の絵画の特徴を、TABLE 6.10に示す18項目に関して評定させた。各項目のカテゴリはTABLE 6.11に示すとおりである。

TABLE 6.9  $G=2$  のときの  $\{v_{gi}\}, \{w_{gj}\}$  の値 (Russett データ)

項目	カテゴリ							
	1	2	3	4	5	6	7	8
GINI	-2.49	0.08	0.06	0.47	0.57	0.54		
FARM	-2.93	-2.06	0.09	0.14	0.53			
RENT	-3.25	-0.44	0.27	0.39	0.33	0.56		
GNPR	-0.99	-1.01	-0.59	-0.77	0.20	0.79	1.78	1.42
LABO	1.56	0.37	-0.60	-0.99	-0.55			
INST	-1.41	0.16	-3.02	-0.44	0.39	0.47		
ECKS	1.88	0.02	-0.92					
DEAT	1.03	-0.43	-0.82	-0.62	-1.39			
DEMO	1.18	-0.19	-0.80					

TABLE 6.10  $G=3$  のときの  $\{v_{gi}\}, \{w_{gj}\}$  の値 (Russett データ)

項目	カテゴリ							
	1	2	3	4	5	6	7	8
GINI	-2.54	0.05	0.10	0.48	0.57	0.54		
FARM	-2.74	-2.34	0.07	0.17	0.54			
RENT	-2.93	-0.45	0.26	0.37	0.32	0.55		
GNPR	-0.73	-0.64	-0.42	-0.59	-0.32	0.13	2.49	0.02
LABO	-1.21	-0.94	0.88	1.02	-0.13			
INST	-1.36	0.09	-3.08	-0.51	0.47	0.37		
ECKS	2.47	-0.15	-0.82					
DEAT	0.82	-0.47	-0.38	-0.53	-0.89			
DEMO	-1.17	-0.30	1.13					

3名の評定値が異なる場合には、全員が納得するまで議論を繰り返した。以上の手続きで得たデータを第2項目群とする。

第2項目群の項目のなかには、名義尺度であるものも含まれており、それらを間隔尺度と見なし正準相関分析を行うことはできない。そこで、 $\alpha, \beta, \gamma$  および  $G$  の値を変えながら本論文の方法を適用した。その結果、case 3において  $G=4$  としたときの解釈が容易であった。TABLE 6.11 に示すのは、そのときの  $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}$  の値である。また、TABLE 6.12 は分類された次元についての各項目の  $\{v_{gi}\}, \{w_{gj}\}$  の値である。例えば、4番目のSD項目は、次元3に分類されるので、括弧の中に  $v_{43}$  の値が示されている。

TABLE 6.11 において、次元1では「小さい-大きい(.91)」「堂々とした-貧弱な(.41)」と「絵のサイズ(.93)」「絵の位置(.42)」という項目の  $a_{gi}, b_{gj}$  の値が大きく、これらの項目が関連していることが分かる。TABLE 6.12 を見ると、これらの項目のカテゴリで、負の大きな値が与えられているものは、「大きい(-0.56)」「堂々とした(-0.64)」「絵のサイズ(6)(-0.88)」「絵の位置(中)(-0.40)」といったカテゴリである。逆に正の大きな値が与えられたカテゴリは、「小さい(1.74)」「貧弱な(0.87)」「絵のサイズ(1)(2.08)」「絵の位置(右)(2.20)」「絵の位置(上)(2.36)」である。これらのことから、紙の中央に大きく描かれた絵は、大きく堂々とした、という印象を与えることが分かる。そして、対応する  $m_i$  や  $n_i$  の要素の値が負に大きい絵がそのような印象を与えていることになる。逆に、値が正に大きい絵は、紙の右や上に小さく描かれ、小さく貧弱な、という印象を与えていることになる。

次元2に属する項目は、TABLE 6.9 から「激しい-おだやかな(.73)」「重い-軽い(.44)」「かたい-やわらかい(.36)」等と「樹冠の形状(.87)」「突き出た枝(.39)」である。TABLE 6.12 で、正の大きな値を与えられたカテゴリは、「激しい(1.43)」「重い(0.81)」「かたい(1.04)」「樹冠の形状(なし)(3.00)」「突き出た枝(あり)(1.36)」である。逆に、負の大きな値を与えられたカテゴリは、「おだやかな(-0.62)」「軽い(-0.77)」「やわらかい(-0.52)」「樹冠の形状(切れ切れ)(-0.49)」「突き出た枝(なし)(-0.37)」である。これらのことから、樹冠がなく突き出た枝のある樹木の絵は、激しいという印象を与えていることになる。

次元3に属する項目は、「ずぼらな-几帳面な(.83)」「慎重な-軽率な(.54)」「雑な-ていねいな(.39)」等と「管状枝の有無(.83)」「右枝形状(.44)」等である。「管状枝」とは、太さのある枝の輪郭を示す2本の線が平行に描かれ、枝の先の方で交わっていないものを指す。TABLE 6.12 から、枝の先端まで描かれている樹木画は、几帳面なという印象を与えていることが分かる。

次元4に属する項目は、「陰気な-陽気な(.84)」「暗い-明るい(.71)」「あたたかい-つめた



TABLE 6.11  $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}$  の値 ( $\lambda = .434$ ) (絵画印象データ)

項目	$g=1$	$g=2$	$g=3$	$g=4$
1 小さい	.91	.03	.03	.03
2 激しい	.09	.73	.08	.10
3 重い	.18	.44	.17	.21
4 ずぼらな	.06	.05	.83	.05
5 堂々とした	.41	.20	.18	.20
6 異常な	.24	.29	.22	.25
7 鈍い	.22	.28	.28	.22
8 陰気な	.05	.07	.05	.84
9 繊細な	.27	.18	.36	.19
10 楽しい	.18	.18	.17	.47
11 雑な	.20	.20	.39	.22
12 厚い	.24	.32	.22	.21
13 かたい	.17	.36	.17	.30
14 のびのびした	.30	.20	.20	.30
15 あたたかい	.11	.13	.10	.66
16 慎重な	.17	.15	.54	.15
17 暗い	.08	.12	.08	.71
18 敏感な	.26	.19	.33	.22
19 気持ちのわるい	.19	.19	.19	.43
20 静的な	.27	.30	.21	.21
1 絵のサイズ	.93	.03	.02	.02
2 絵の位置	.42	.24	.17	.17
3 根の有無	.01	.01	.01	.96
4 根の大小	.02	.01	.01	.96
5 幹の大小	.29	.31	.20	.20
6 幹の節の有無	.25	.25	.25	.25
7 右枝形状	.18	.19	.44	.19
8 左枝形状	.23	.23	.29	.25
9 管状枝の有無	.06	.06	.83	.06
10 管状幹の有無	.23	.22	.34	.22
11 樹冠の形状	.04	.87	.04	.04
12 幹の線の有無	.23	.27	.24	.26
13 地平線の有無	.25	.25	.25	.25
14 筆圧	.24	.29	.23	.24
15 運筆	.25	.25	.25	.25
16 上部切断の有無	.25	.26	.24	.25
17 左右の強弱	.23	.29	.23	.24
18 突き出た枝	.20	.39	.21	.20
$\lambda_g$	.499	.427	.425	.383
相関	.925	.782	.721	.509

TABLE 6.12  $\{v_{gi}\}, \{w_{gj}\}$  の値 (絵画印象データ)

項目	カテゴリー
1 小さい (1.74)	大きい (-0.56)
2 激しい (1.43)	おだやかな (-0.62)
3 重い (0.81)	軽い (-0.77)
4 ずぼらな (1.00)	几帳面な (-0.94)
5 堂々とした (-0.64)	貧弱な (0.87)
6 異常な (0.90)	正常な (-0.29)
7 鈍い (0.32)	鋭い (-0.63)
8 陰気な (-1.07)	陽気な (0.89)
9 繊細な (-0.88)	粗野な (0.57)
10 楽しい (0.83)	苦しい (-0.78)
11 雑な (0.64)	ていねいな (-0.77)
12 厚い (0.64)	薄い (-0.53)
13 かたい (1.04)	やわらかい (-0.52)
14 のびのびした (0.52)	いじけた (-0.70)
15 あたたかい (0.74)	つめたい (-1.14)
16 慎重な (-0.93)	軽率な (0.78)
17 暗い (-1.10)	明るい (0.81)
18 敏感な (-0.76)	鈍感な (0.56)
19 気持ちのわるい (-0.90)	気持ちのいい (0.67)
20 静的な (-0.38)	動的な (0.76)
1 1(2.08) 2(-0.30) 3(-0.51) 4(-0.48) 5(-0.61) 6(-0.88)	
2 左 (0.65) 中 (-0.40) 右 (2.20) 上 (2.36)	
3 あり (0.61) なし (-1.62)	
4 大 (0.62) 普通 (0.63) 小 (0.54) なし (-1.62)	
5 大 (0.14) 普通 (-0.34) 小 (3.25)	
6 あり (-0.19) なし (0.07)	
7 上向 (0.72) 水平 (-0.80) 下向 (-0.89) なし (-0.92)	
8 上向 (0.40) 下向 (-0.42) なし (-0.66)	
9 あり (1.20) なし (-0.78)	
10 あり (0.83) なし (-0.42)	
11 連続 (-0.02) 切れ切れ (-0.49) なし (3.00)	
12 あり (0.38) なし (-0.41)	
13 あり (-0.08) なし (0.06)	
14 強 (0.64) 普通 (-0.38) 弱 (-0.35)	
15 連続 (0.12) 切れ切れ (-0.10)	
16 あり (0.41) なし (-0.11)	
17 左 (-0.15) 中 (-0.41) 右 (0.63)	
18 あり (1.36) なし (-0.37)	

い(.66)」等と、「根の有無(.96)」「根の大小(.96)」である。TABLE 6.12より、根の大きな樹木画は、陽気な感じがすることになる。この結果については、やや分かりにくい。また、 $m_4$ と $n_4$ の間の相関係数は0.51と低く、関連性の指標 $\lambda_4$ も他の次元に比べ0.38と低い。すなわち、この次元では項目間の関連はあまり高くないと言える。なお、ここで示したのはあくまでも例として用いた33枚についてのみの結果であり、絵の特徴とその印象との一般的な関連について調べるためには、より多くのデータが必要なことは言うまでもない。

TABLE 6.11では、特に絵の特徴についての項目群で、 $b_{gj}$ の値が大きい項目の数が少ない。この理由として次のことが考えられる。特徴についての項目群では、項目の内容からも分かるとおり、お互いに相関の高い項目が少ない。このことは、結果は省略するが、18項目に対して項目パタンの分類を行なっても、項目がはっきりと分割されず、どの次元にも分類できない項目が多かったことから裏づけられている。したがって、FIGURE 6.1(c)のようなことが起こったことになる。さらに、 $\lambda_g$ や $\lambda$ の値が.383から.499と低いのは、 $m_g$ と $n_g$ の間の相関係数が、次元4以外では高いことを考え合わせれば、項目群内でお互いに相関の高い項目が少ないためであり、絵の印象と特徴が関連していないということを直ちに意味するものではない。直観的な説明をすれば、いくつかの項目どうしは関連しているものの、関連性の低い項目が多く含まれることによって、全体としての平均的な関連性は薄まってしまったということになる。TABLE 6.11で $a_{gi}, b_{gj}$ に下線の付いた26項目を取り出し、 $G=4$ として分析した結果がTABLE 6.13である。各次元の解釈は変わらないが、全ての $\lambda_g$ や $\lambda$ の値が、38項目を使ったときに比べて.483から.645と大きくなっていることから、以上述べたことが納得できよう。

## 6.6 まとめ

本章では、一般化等質性分析の1つの拡張として、2つの質的な項目群において、項目をいくつかのグループに分類すると同時にカテゴリや個体に数量を与えることで、項目間の関連を探索的に分析する方法を提案した。この方法の特徴は、カテゴリの順序があらかじめ知られていない場合でも、項目を分類するという目的に最適なカテゴリ値をデータに基づいて与えることができる、という点である。また、回転を用いる方法と異なり、項目の分類が一意に定まる、という点も利点である。

人工データ8では、 $\alpha, \beta, \gamma$ の組み合わせによって結果が異なることが示された。数値例の多くでは、case 3のときに好ましい結果が得られたが、このことは、どのデータに対しても

TABLE 6.13  $\{a_{gi}\}, \{b_{gj}\}$  の値 ( $\lambda = .556$ ) (絵画印象データ)

項目	$g=1$	$g=2$	$g=3$	$g=4$
1	<u>.93</u>	.02	.02	.02
2	.07	<u>.77</u>	.07	.09
3	.19	<u>.43</u>	.17	.22
4	.07	.06	<u>.82</u>	.06
5	<u>.40</u>	.21	.19	.21
8	.05	.06	.05	<u>.84</u>
9	.27	.18	<u>.36</u>	.19
10	.18	.18	.17	<u>.46</u>
11	.20	.20	<u>.39</u>	.22
12	.24	<u>.32</u>	.22	.22
13	.17	<u>.36</u>	.17	.30
15	.11	.13	.10	<u>.65</u>
16	.16	.14	<u>.55</u>	.14
17	.08	.11	.08	<u>.72</u>
18	.26	.19	<u>.32</u>	.22
19	.19	.20	.19	<u>.43</u>
20	.27	<u>.30</u>	.22	.22
1	<u>.94</u>	.02	.02	.02
2	<u>.42</u>	.23	.17	.17
3	.01	.01	.01	<u>.96</u>
4	.02	.01	.01	<u>.96</u>
7	.19	.20	<u>.42</u>	.19
9	.05	.05	<u>.84</u>	.05
10	.23	.22	<u>.34</u>	.22
11	.04	<u>.88</u>	.04	.04
18	.20	<u>.39</u>	.21	.20
$\lambda_g$	.645	.566	.531	.483
相関	.931	.778	.728	.519



case 3 がよいということを意味するわけではない。その上、比較の対象となったのは、TABLE 6.1 に示された4つの場合だけであるが、 $\alpha, \beta, \gamma$  の組み合わせは他にも無数に挙げられる。それらの値の定め方に明確な基準がなく、分析者の裁量に委ねられるということは、分析の客観性の欠如という欠点とも考えられるが、逆に利点とも言える。なぜなら、データ分析の探索的な段階では、 $\alpha, \beta, \gamma$  の値をいろいろと変えて分析してみることで、例えばある項目と別の項目は常に同じ次元に分類され関連が非常に強い等、データの構造をより深く理解することができるからである。値を固定してしまうと、データの探索ができず、表面的な分析になってしまう可能性がある。しかし、それにもかかわらず、値を決める基準が必要となる場合があるかもしれない。そのときは、平滑化法(柏木・柳本, 1990)の考え方が参考になる。平滑化法では、パラメタの変化の滑らかさと、データへのモデルの当てはまりのよさのバランスを調節しつつ、パラメタの推定を行う。Whittaker (1923) は、バランスを調節する係数(本論文では  $\alpha, \beta, \gamma$ ) の値の決定を分析者に委ねた。しかし、Akaike (1980) は、変化が滑らかであるということ、パラメタに対する事前制約と見なし、ベイズ型尤度を用いた ABIC を最小にすることで係数の値を決めることを提案した。この考え方に基づく方法として、例えばベイズ型コホートモデル(中村, 1982) は、ABIC に基づいて係数を決めることで、コホート分析における識別問題に対処している。そこで、本章の方法においても、個体がカテゴリを選択する確率モデルを考え、 $m_g$  と  $n_g$  が近いということを事前制約とした ABIC を用いることで、係数の決定が可能となろう。具体的な方法の実現は今後の課題としたい。

ここで示した手法の考え方は、3項目群以上の場合にも拡張できる。すなわち、(6.2)式の第1項、第2項に当たる部分を増やせばよい。ただし、第3項に相当する部分をどう定めるかについては、正準相関分析を多項目群に拡張するのと同様にいくつかの方法が考えられ(柳井, 1994)、議論を要する。例えば、1つの方法は、複数項目群から2つを選ぶ全ての組み合わせについて差の二乗和をとることである。第3項の定め方の違いが結果にどのような影響を与えるか調べるのは今後の課題である。

提案された方法は、各項目群内でいくつかの排他的な項目のまとまりがあり、項目群間でそれらのまとまりが1対1に関連している、ということを仮定している。データによっては、多対1という関連を持つものもあるかもしれない。そのような構造を明らかにするには適切な方法ではない。また、2つの項目群を対等に扱っているが、一方が他方に従属しているという場合もある。例えば、絵画印象データでは、絵画の特徴によって印象が決まるのであって、印象によって特徴が決まるわけではない。冗長性分析(Van den Wollenberg, 1977)は、2つの項目群を対等に扱わない手法であるが、今後は、この冗長性分析における考え方などを取

り入れていく必要がある。

第1群

第2群

第3群

第4群

第5群

第6群

第7群

第8群

第9群

第10群

第11群

第12群

第13群

第14群

第15群

第16群

第17群

第18群

第19群

第20群

第21群

第22群

第23群

第24群

第25群

第26群

第27群

第28群

第29群

第30群

第31群

第32群

第33群

第34群

第35群

第36群

第37群

第38群

第39群

第40群

第41群

第42群

第43群

第44群

第45群

第46群

第47群

第48群

第49群

第50群

第51群

第52群

第53群

第54群

第55群

第56群

第57群

第58群

第59群

第60群

第61群

第62群

第63群

第64群

第65群

第66群

第67群

第68群

第69群

第70群

第71群

第72群

第73群

第74群

第75群

第76群

第77群

第78群

第79群

第80群

第81群

第82群

第83群

第84群

第85群

第86群

第87群

第88群

第89群

第90群

第91群

第92群

第93群

第94群

第95群

第96群

第97群

第98群

第99群

第100群

第101群

第102群

第103群

第104群

第105群

第106群

第107群

第108群

第109群

第110群

第111群

第112群

第113群

第114群

第115群

第116群

第117群

第118群

第119群

第120群

第121群

第122群

第123群

第124群

第125群

第126群

第127群

第128群

第129群

第130群

第131群

第132群

第133群

第134群

第135群

第136群

第137群

第138群

第139群

第140群

第141群

第142群

第143群

第144群

第145群

第146群

第147群

第148群

第149群

第150群

第151群

第152群

第153群

第154群

第155群

第156群

第157群

第158群

第159群

第160群

第161群

第162群

第163群

第164群

第165群

第166群

第167群

第168群

第169群

第170群

第171群

第172群

第173群

第174群

第175群

第176群

第177群

第178群

第179群

第180群

第181群

第182群

第183群

第184群

第185群

第186群

第187群

第188群

第189群

第190群

第191群

第192群

第193群

第194群

第195群

第196群

第197群

第198群

第199群

第200群

第201群

第202群

第203群

第204群

第205群

第206群

第207群

第208群

第209群

第210群

第211群

第212群

第213群

第214群

第215群

第216群

第217群

第218群

第219群

第220群

第221群

第222群

第223群

第224群

第225群

第226群

第227群

第228群

第229群

第230群

第231群

第232群

第233群

第234群

第235群

第236群

第237群

第238群

第239群

第240群

第241群

第242群

第243群

第244群

第245群

第246群

第247群

第248群

第249群

第250群

第251群

第252群

第253群

第254群

第255群

第256群

第257群

第258群

第259群

第260群

第261群

第262群

第263群

第264群

第265群

第266群

第267群

第268群

第269群

第270群

第271群

第272群

第273群

第274群

第275群

第276群

第277群

第278群

第279群

第280群

第281群

第282群

第283群

第284群

第285群

第286群

第287群

第288群

第289群

第290群

第291群

第292群

第293群

第294群

第295群

第296群

第297群

第298群

第299群

第300群

第301群

第302群

第303群

第304群

第305群

第306群

第307群

第308群

第309群

第310群

第311群

第312群



## 第 7 章

### 結論と今後の展望

本論文では、調査や実験等により得られた質的データを基に尺度構成を行うための方法として、一般化等質性分析という新たな手法を提案した。測定のための尺度があらかじめ存在しない心理学や教育学の分野では、研究の第一歩として、個体や項目に数量を与える方法である尺度構成法が重要な課題となる。本論文ではまず、広義の一次元尺度、狭義の一次元尺度、多次元尺度という視点から尺度構成法を整理した。広義の一次元尺度とは全ての項目との整合性が最も高くなるよう構成した尺度、狭義の一次元尺度とは整合性の高い項目だけを取り出して構成した尺度、多次元尺度とは全ての項目との整合性が最も高くなるよう個体や項目を多次元空間上に配置したものを指す。そして、従来の多くの尺度構成法が広義の一次元尺度や多次元尺度の構成法であることを指摘した。狭義の一次元尺度は、解釈が容易であり、測定している概念が明確になるにもかかわらず、その構成法はほとんど提案されていなかったと言ってよい。

本論文では、広義の一次元尺度構成法である数量化Ⅲ類や尺度解析法をその特別な場合として含み、かつ狭義の一次元尺度構成にも対応できる一般化等質性分析を提案することで、この問題に対処することを試みた。具体的には、

- 一般化等質性分析において  $R = G = 1$  とすることで、一次元性を持つ項目だけを選び出すと同時に、各カテゴリや個体に数量を与え、狭義の一次元尺度を構成する方法を提案した。そして、人工データや実データを分析し、数量化Ⅲ類や主成分分析との比較を行った(第3章)。
- 一般化等質性分析において  $R = 1$  とすることで、項目をそれぞれが一次元性を持つ複数のグループに分類すると同時に、各カテゴリや個体に数量を与え、各グループで狭義の一次元尺度を構成する方法を提案した。この方法は、等質性分析とファジィ c-means

クラス法を組み合わせた手法と言える。そして人工データや実データを分析し、数量化Ⅲ類や因子分析との比較を行った(第4章)。

- 第4章で提案した手法を3相データの分析に応用するため、尺度得点に3種類の制約を課す方法を示した。すなわち、デザイン行列を用いる方法、ランク制約を用いる方法、評定者の分類を伴う方法である。実際に、SD法のデータにおいて、項目を分類し各カテゴリや個体に数量を与えると同時に、項目以外の2つの相の関係を探った(第5章)。
- 第4章で提案した手法を2つの質的項目群の場合に拡張することを試みた。すなわち、2つの項目群の間に関連する項目を見出すと同時に、各カテゴリや個体に数量を与える方法を提案した。そして、人工データや実データを分析し、正準相関分析との比較を行った(第6章)。

その結果得られた結論として、

- 本論文で提案した方法により、一次元性を持つ項目の選択が行えた。そして、数量化Ⅲ類等広義の一次元尺度構成法では困難であった狭義の一次元尺度の構成に成功した。構成された一次元尺度は従来の方法によるものに比べ、信頼性の高いものであった。さらに、数量化Ⅲ類では明らかにならなかった項目間の関連をとらえ、データ構造に対する豊かな知見を得ることができた。
- カテゴリの順序があらかじめ分からず、主成分分析や因子分析あるいは正準相関分析が適用できない場合でも、一般化等質性分析を用いることで、カテゴリの順序を明らかにすることができた。さらにそのカテゴリの順序は、項目を分類し狭義の一次元尺度を構成する、という目的に則して、カテゴリカルな主成分分析等よりも適切なものであった。
- 質的3相データにおいて、項目の分類を第1目的とすることで、2相データとして扱ったものでは得られない情報を、項目以外の相からも得ることができた。
- 質的項目群が2つの場合でも、一次元性を持つ項目を選び出すという考え方に基つき、項目間の関連を示すことができた。

心理学や教育学の分野では質的な項目が得られることが多いにもかかわらず、機械的に順序尺度を間隔尺度と見なすなど、従来その扱いには十分な配慮がなされていたとは言いがたい。提案した方法がその改善のきっかけとなれば幸いである。狭義の一次元尺度は、その結

果が非常に理解しやすい上、本論文で提案した手法は計算法が容易、個体数が少なくてもよい、無理な仮定を必要としない、といった実用性も高いということが実際に示された。したがって心理学や教育学に限らず、社会学や経済学、政治学、医学といった実質科学の幅広い分野において、現実の応用場面での成果が十分に期待できる。またそれと同時に、多くの分野で、提案した手法が応用され試されることにより、今まで明らかにならなかった手法の特性や問題点が明らかになろう。尺度構成法は方法論であり、その評価は、今後の現実の応用場面への貢献度によって決まるものである。そのようなことから、提案した方法の普及・啓蒙や、誰でもすぐに利用できるソフトウェアの開発等が今後必要である。特に第3章や第4章の方法では、最適解だけが望ましいものであるという従来のアプローチとは異なり、局所解も積極的に利用するという新たな考え方を示した。この考え方は理論的な裏付けがなされているわけではないが、現実のデータ解析においては経験的に非常に役立つものと思われる。しかし、データを盲目的にプログラムに通しているだけでは、局所解を利用した分析は困難である。一般化等質性分析がどのような原理に基づく分析手法なのか、ということをつかりやすく広めていかなければならない。また、現実のデータではしばしば欠損値が生じ、その扱いに困ることがある。4.5章で触れたように、欠損値に対応できるよう一般化等質性分析を発展させるとともに、欠損値にどのように対処すればよいか、という方針を示していくことが必要であろう。

構成した尺度を安心して使えるようにするためには、測定誤差や尺度の信頼性という点に関して、理論的な検討が今後必要である。確かにLord(1958)が示すように、数量化Ⅲ類を含む尺度化法によってカテゴリに与えられる数量は、尺度値の信頼性を最も高くするものである。しかしこのことは、信頼性の絶対的な高さを意味しない。得られた尺度値の $\alpha$ 係数が0.5である、といったこともあり得る。一方、狭義の一次元尺度は信頼性の絶対的な高さを追求したものと見なせる。はたしてどの程度の信頼性が確保されるのか、 $\alpha$ の値を変えることで信頼性がどのように変わるのか、といった検討が必要であろう。

また、一般化等質性分析は記述的な手法であるため、得られた結果の精度に関して十分な情報が得られない。3.4節で少し触れたが、ブートストラップ法や確率的なモデルを導入していくのも1つの方法である。例えば、第4章の方法では、混合分布(Everitt & Hand, 1981; Titterton, Smith & Makov, 1985; Basford & McLachlan, 1985; Lindsay, 1995)や理想点判別分析法の考え方を取り入れて、モデルを構築していくことが考えられる。1.1.3節でも述べたように、確率的なモデルを導入することで、より多くの情報が引き出せる。ただし、個体に対して個々に尺度値パラメタを与える場合には、最大推定量が一致性を持たないとい



う問題点がある (Cox & Hinkley, 1974)。個体パラメタに対して事前分布を仮定するといった工夫が必要であろうが、計算法が複雑になる等解決すべき課題は多い。

本論文では、一般化等質性分析を、質的データのための尺度構成法として提案し、尺度構成法としての観点からのみ扱ってきた。しかし、等質性分析の考え方を利用しているため、一般化等質性分析はそのままの形で量的データに対しても適用可能である。すなわち、タミー変数行列  $X_i$  を量的な変数行列  $X_j$  に置き換えればよいだけである。さらに一般化等質性分析は、多変量解析における次元縮約の1つの手法となる可能性を持っており、実際にそのような方向へ向けて研究も始まっている (土屋, 1996h)。等質性分析の下位手法である主成分分析は、直交基底を求めることにより次元縮約を行う方法である。一方、一般化等質性分析を用いれば、 $m'_j m_h (g \neq h)$  といった直交性は仮定されていないため、固有値分解には基づかず、斜交基底による次元縮約が可能となる。第4章の方法の  $k$  は基底間の角度の範囲に対する制約と見なせ、 $k$  が小さくなるほど鋭角になり得る。さらに、射影追跡 (projection pursuit) (Kruskal, 1969; Friedman & Tukey, 1974; Huber, 1985; Friedman, 1987) は、データの最も興味深い構造を示す部分空間にデータを射影し、次元を縮約する手法である。一般化等質性分析は変数のまとまりという構造を、斜交基底が張る空間によって表すことができるため、射影追跡のように興味深い構造を探る方法の1つとして発展する可能性がある。Kruskal (1969) もクラスターという構造は単純だがデータ構造の中では重要なものである、と述べている。様々なデータに対して今後適用してみることで、方法の有効性と限界に関して知見を蓄積していくことが望まれる。

本論文の最も重要な貢献は、狭義の一次元尺度構成法を提出したことにある。例えば性格検査等では、狭義の一次元尺度構成を目的とすれば、似たような質問項目ばかりが並んでしまい、被検者に飽きられてしまう、といった指摘もあるかもしれない。また、複数の一次元尺度を用意したとしても、性格のような、要因が複雑に絡み合った現象の解明には役立たない、といった批判もあるかもしれない。これに関連して、極端に言えば2つの立場があるであろう。1つは、例えば共分散構造分析 (Bock & Bargmann, 1966; Jöreskog & Sörbom, 1979; Bentler & Weeks, 1980) のように、分析モデルにいくつものパラメタや仮定を導入した、複雑な分析方法を用いる、という立場である。もう1つは、分析モデルとしてはなるべく単純な方法を用いるが、データ収集方法に工夫を凝らすことによって、複雑な現象を解明している、という立場である。一方の立場がもう一方の立場よりも常に優れている、というわけではなく、お互いに相補的な関係にあるべきである。しかし本論文では、後者の立場から議論を展開してきた。なるべく単純であり、かつ明快な結果が得られる手法が望ましい、とい

うのが本論文の方針である。したがって言うまでもなく、今後重要となるのは、カテゴリ数をいくつにすべきか、といったことから、TABLE 1.1 の枠組みではとらえきれないような、新たなデータ形式に至るまで、データの収集方法に関する研究である。本論文では、データは既に得られているものとして扱っていたが、データの獲得方法とその分析方法とは本来表裏一体をなすものである。一対比較データを用いる比較判断の法則や、項目反応理論を用いた適応形テスト、適応型 MDS (Young & Cliff, 1972; Girard & Cliff, 1976; Miyano & Inukai, 1982) 等は、その典型例である。どのような刺激をどのようなデザインで呈示し、どのような反応を得ればよいのか、というデータ収集の方法と、それに応じて一般化等質性分析はどのように展開していけばよいのか、ということが今後最も重要な研究課題となろう。

図 7.10 本論文の構成図

図 7.11 本論文の構成図

図 7.12 本論文の構成図

図 7.13 本論文の構成図

図 7.14 本論文の構成図

図 7.15 本論文の構成図

図 7.16 本論文の構成図

図 7.17 本論文の構成図

図 7.18 本論文の構成図

図 7.19 本論文の構成図

図 7.20 本論文の構成図

図 7.21 本論文の構成図

図 7.22 本論文の構成図

図 7.23 本論文の構成図

図 7.24 本論文の構成図

図 7.25 本論文の構成図

図 7.26 本論文の構成図

図 7.27 本論文の構成図

図 7.28 本論文の構成図

図 7.29 本論文の構成図

図 7.30 本論文の構成図

図 7.31 本論文の構成図

図 7.32 本論文の構成図

図 7.33 本論文の構成図

図 7.34 本論文の構成図

図 7.35 本論文の構成図

図 7.36 本論文の構成図

図 7.37 本論文の構成図

図 7.38 本論文の構成図

図 7.39 本論文の構成図

図 7.40 本論文の構成図

図 7.41 本論文の構成図

図 7.42 本論文の構成図

図 7.43 本論文の構成図

図 7.44 本論文の構成図

図 7.45 本論文の構成図



## 文献

- 足立 浩平 1995 選好行列の行および列項目の同時クラスタリングを伴う多次元尺度法 日本行動計量学会第23回大会発表論文抄録集, 290-291.
- Akaike, H. 1980 Likelihood and the Bayes procedure. In J.M. Bernardo, M.H. De Groot, D.U. Lindley & A.F.M. Smith, *Bayesian Statistics* (Pp 143-166). Valencia: University Press.
- 梶山 貞登 1993 数量化のグラフィックス—態度の多変量解析—, 行動計量学シリーズ 朝倉書店
- Andrich, D. 1988 The application of an unfolding model of the PIRT type to the measurement of attitude. *Applied Psychological Measurement*, **12**, 33-51.
- 青山 博次郎 1965a ダミー変数と数量化法への応用 統計数理研究所彙報, **13**, 1-12.
- 青山 博次郎 1965b ダミー変数と数量化法への応用の訂正 統計数理研究所彙報, **13**, 135-137.
- Arabie, P., & Carroll, J.D. 1980 MAPCLUS: A mathematical programming approach to fitting the ADCLUS model. *Psychometrika*, **45**, 211-235.
- アラビ P., キャロル J.D., デサルボ W.S. 岡太彬訓・今泉忠 (訳) 1990 3元データの分析—多次元尺度構成法とクラスター分析— 共立出版  
(Arabie, P., Carroll, J.D., & DeSarbo, W.S. 1987 *Three-way scaling and clustering*. Sage.)
- 馬場 康維・土屋 隆裕・中村 好宏・山崎 伸彦 1996a ブートストラップ法による標準誤差推定の試み 第10回日本計算機統計学会大会論文集, 68-71.
- 馬場 康維・土屋 隆裕・中村 好宏・山崎 伸彦 1996b 比推定における標準誤差のブートストラップ推定の試み 第64回日本統計学会講演報告集, 240-241.
- Baker, F.B. 1992 *Item response theory*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- Bartholomew, D.J. 1983 Latent variable models for ordered categorical data. *Journal of Econometrics*, **22**, 229-243.
- Bartholomew, D.J. 1987 *Latent variable models and factor analysis*. London: Charles Griffin.
- Basford, K.E., & McLachlan, G.J. 1985 The mixture method of clustering applied to three-way data. *Journal of Classification*, **2**, 109-125.
- Bechtel, G.G., Tucker, L.R., & Chang, W.C. 1971 A scalar product model for the multidimensional scaling of choice. *Psychometrika*, **36**, 369-388.
- Bekker, P., & de Leeuw, J. 1988 Relations between variants of non-linear principal component analysis. In J.L.A. van Rijkevorsel & J. de Leeuw (Eds.), *Component and correspondence analysis*. Chichester: John Wiley & Sons. Pp.1-31.
- Bennett, J.F., & Hays, W.L. 1960 Multidimensional unfolding: Determining the dimensionality of ranked preference data. *Psychometrika*, **25**, 27-43.
- Bentler, P.M., & Weeks, D.G. 1980 Linear structural equations with latent variables. *Psychometrika*, **45**, 289-308.
- Benzécri, J.P. 1973 *L'Analyse des Données: 2.L'Analyse des Correspondances*. Paris: Dunod.
- Benzécri, J.P. 1992 *Correspondence analysis handbook*. New York: Marcel Dekker, Inc.

- Bezdek, J.C. 1974 Cluster validity with fuzzy sets. *Journal of Cybernetics*, 3, 58-73.
- Bezdek, J.C. 1981 *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*. Plenum Press.
- Bezdek, J.C. 1987 Partition structures: A tutorial. In J.C.Bezdek (Ed.), *Analysis of fuzzy information, Vol. III, Applications in engineering and science*. CRC Press. Pp.81-107.
- Bock, R.D. 1972 Estimating item parameters and latent ability when responses are scored in two or more nominal categories. *Psychometrika*, 37, 29-51.
- Bock, R.D., & Aitkin, M. 1981 Marginal maximum likelihood estimation of item parameters: Application of an EM algorithm. *Psychometrika*, 46, 443-459.
- Bock, R.D., & Bagmann, R.E. 1966 Analysis of covariance structures. *Psychometrika*, 31, 507-534.
- Bock, R.D., & Lieberman, M. 1970 Fitting a response model for  $n$  dichotomously scored items. *Psychometrika*, 35, 179-197.
- Böckenholt, U., & Böckenholt, I. 1990 Canonical analysis of contingency tables with linear constraints. *Psychometrika*, 55, 633-639.
- Böckenholt, U., & Böckenholt, I. 1991 Constrained latent class analysis: Simultaneous classification and scaling of discrete choice data. *Psychometrika*, 56, 699-716.
- Borg, I. (Ed.) 1981 *Multidimensional data representations: When and why*. Michigan: Mathesis Press.
- Borg, I., & Lingoes, J. 1987 *Multidimensional similarity structure analysis*. New York: Springer-Verlag.
- Bradley, R.A., & Terry, M.E. 1952 Rank analysis of incomplete block designs. I. The method of paired comparisons. *Biometrika*, 39, 324-345.
- Browne, M.W. 1984 The decomposition of multitrait-multimethod matrices. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 37, 1-21.
- Byrne, B.M., & Goffin, R.D. 1993 Modeling MTMM data from additive and multiplicative covariance structures: An audit of construct validity. *Multivariate Behavioral Research*, 28, 67-96.
- キャロル J.D., 岡太彬訓・渡邊恵子 (訳) 1976 個人差と MDS R.N. シェパード・A.K. ロムニ・S.B. ナーラブ (編) 多次元尺度構成法—MDS— 共立出版 Pp.115-165.
- (Carroll, J.D. 1972 Individual differences and multidimensional scaling. In R.N.Shepard, A.K.Romney, & S.B.Nerlove (Eds.), *Multidimensional scaling. Theory and applications in the behavioral sciences. Volume 1. Theory*. New York: Seminar Press. Pp.105-155.)
- Carroll, J.D., & Arabie, P. 1983 INDCLUS: An individual differences generalization of the ADCLUS model and the MAPCLUS algorithm. *Psychometrika*, 48, 157-169.
- Carroll, J.D., & Chang, J.J. 1970 Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an  $n$ -way generalization of "Eckart-Young" decomposition. *Psychometrika*, 35, 283-319.
- Carroll, J.D., Green, P.E., & Schaffer, C.M. 1986 Interpoint distance comparisons in correspondence analysis. *Journal of Marketing Research*, 23, 271-280.
- Carroll, J.D., Green, P.E., & Schaffer, C.M. 1987 Comparing interpoint distances in correspondence analysis: A clarification. *Journal of Marketing Research*, 24, 445-450.
- Carroll, J.D., Pruzansky, S., & Kruskal, J.B. 1980 CANDELINC: A general approach to multidimensional analysis of many-way arrays with linear constraints on parameters. *Psychometrika*, 45, 3-24.
- Chino, N. 1978 A graphicak technique for representing the asymmetric relationships between  $N$  objects. *Behaviormetrika*, No.5, 23-40.

- Chino, N. 1990 A generalized inner product model for the analysis of asymmetry. *Behaviormetrika*, No.27, 25-46.
- Chino, N., & Shiraiwa, K. 1993 Geometrical structures of some non-distance models for asymmetric MDS. *Behaviormetrika*, 20, 35-47.
- Christofferson, A. 1975 Factor analysis of dichotomized variables. *Psychometrika*, 40, 5-32.
- Christofferson, A. 1977 Two-step weighted least squares factor analysis of dichotomized variables. *Psychometrika*, 42, 433-438.
- Cleveland, W.S., & Relles, D.A. 1975 Clustering by identification with special application to two-way tables of counts. *Journal of the American Statistical Association*, 70, 626-630.
- Cliff, N. 1968 The "idealized individual" interpretation of individual differences in multidimensional scaling. *Psychometrika*, 33, 225-232.
- Cliff, N., & Krus, D.J. 1976 Interpretation of canonical analysis: Rotated vs. unrotated solutions. *Psychometrika*, 41, 35-42.
- Coombs, C.H. 1950 Psychological scaling without a unit of measurement. *Psychological Review*, 57, 145-158.
- Coombs, C.H. 1960 On a connection between factor analysis and multidimensional unfolding. In H.Gulliksen & S.Messick (Eds.), *Psychological scaling*. John Wiley & Sons.
- Coombs, C.H. 1964 *A theory of data*. John Wiley & Sons.
- Coombs, C.H. 1975 A note on the relation between the vector model and the unfolding model for preferences. *Psychometrika*, 40, 115-116.
- Coombs, C.H., & Kao, R.C. 1960 On a connection between factor analysis and multidimensional unfolding. *Psychometrika*, 25, 219-231.
- Coombs, C.H., Greenberg, M., & Zinnes, J. 1961 A double law of comparative judgment for the analysis of preferential choice and similarities data. *Psychometrika*, 26, 165-171.
- Cox, T.F., & Cox, M.A.A. 1994 *Multidimensional scaling*. London: Chapman & Hall.
- Cox, D.R., & Hinkley, D.V. 1974 *Theoretical statistics*. London: Chapman & Hall.
- Cronbach, L.J. 1951 Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, 16, 297-334.
- デガマン R.L., 岡太彬訓・渡邊恵子 (訳) 1976 単純構造の幾何学的表現 R.N. シェパード・A.K. ロムニ・S.B. ナーラブ (編) 多次元尺度構成法—MDS— 共立出版 Pp.207-226.
- (Degerman, R.L. 1972 The geometric representation of some simple structures. In R.N.Shepard, A.K.Romney, & S.B.Nerlove (Eds.), *Multidimensional scaling. Theory and applications in the behavioral sciences. Volume 1. Theory*. New York: Seminar Press. Pp.193-211.)
- de Leeuw, J. 1977 Applications of convex analysis to multidimensional scaling. In J.R.Barra, F.Brodeau, G.Romier & B.van Cutsem (Eds.) *Recent developments in statistics*. Amsterdam: North-Holland. Pp.133-145.
- de Leeuw, J. 1984 *Canonical analysis of categorical data*. Leiden: DSWO Press.
- de Leeuw, J., & Heiser, W. 1980 Multidimensional scaling with restrictions on the configuration. In P.R.Krishnaiah (Ed.) *Multivariate analysis V*. Amsterdam: North-Holland. Pp.501-522.
- de Leeuw, J., & van der Heijden, P.G.M. 1988 Correspondence analysis of incomplete contingency tables. *Psychometrika*, 53, 223-233.
- de Leeuw, J., & van Rijkevorsel, J.L.A. 1988 Beyond homogeneity analysis. In J.L.A.van Rijkevorsel & J.de Leeuw (Eds.), *Component and correspondence analysis*. Chichester: John Wiley & Sons. Pp.55-80.



- Dempster, A.P., Laird, N.M., & Rubin, D.B. 1977 Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **39**, 1-38.
- DeSarbo, W.S., & Carroll, J.D. 1985 Three-way metric unfolding via alternating weighted least squares. *Psychometrika*, **50**, 275-300.
- DeSarbo, W.S., Carroll, J.D., Clark, L.A., & Green, P.E. 1984 Synthesized clustering: A method for amalgamating alternative clustering bases with differential weighting of variables. *Psychometrika*, **49**, 57-78.
- DeSarbo, W.S., Howard, D.J., & Jedidi, K. 1991 MULTICLUS: A new method for simultaneously performing multidimensional scaling and cluster analysis. *Psychometrika*, **56**, 121-136.
- De Soete, G., & Carroll, J.D. 1983 A maximum likelihood method for fitting the wandering vector model. *Psychometrika*, **48**, 553-566.
- De Soete, G., Carroll, J.D., & DeSarbo, W.S. 1986 The wandering ideal point model: A probabilistic multidimensional unfolding model for paired comparisons data. *Journal of Mathematical Psychology*, **30**, 28-41.
- De Soete, G., DeSarbo, W.S., & Carroll, J.D. 1985 Optimal variable weighting for hierarchical clustering: An alternating least-squares algorithm. *Journal of Classification*, **2**, 173-192.
- De Soete, G., & Heiser, W.J. 1993 A latent class unfolding model for analyzing single stimulus preference ratings. *Psychometrika*, **58**, 545-565.
- Dunn, J.C. 1974a A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters. *Journal of Cybernetics*, **3**, 32-57.
- Dunn, J.C. 1974b Well-separated clusters and optimal fuzzy partitions. *Journal of Cybernetics*, **4**, 95-104.
- Dunn-Rankin, P. 1983 *Scaling methods*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Edwards, A.L., & Thurstone, L.L. 1952 An internal consistency check for scale values determined by the method of successive intervals. *Psychometrika*, **17**, 169-180.
- Efron, B. 1979 Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, **7**, 1-26.
- Everitt, B.S. 1984 *An introduction to latent variable models*. London: Chapman and Hall.
- Everitt, B.S., & Hand, D.J. 1981 *Finite mixture distributions*. London: Chapman & Hall.
- Fischer, G.H. 1973 The linear logistic test model as an instrument in educational research. *Acta Psychologica*, **37**, 359-374.
- Fischer, G.H. 1983 Logistic latent trait models with linear constraints. *Psychometrika*, **48**, 3-26.
- Fischer, G.H. 1995 The linear logistic test model. In G.H. Fischer & I.W. Molenaar (Eds.) *Rasch models*. New York: Springer-Verlag. Pp.131-155.
- Fischer, G.H., & Molenaar, I.W. (Eds.) 1995 *Rasch models*. New York: Springer-Verlag.
- Fisher, R.A. 1940 The precision of discriminant functions. *Annals of Eugenics*, **10**, 422-429.
- Friedman, J.H. 1987 Exploratory projection pursuit. *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 249-266.
- Friedman, J.H., & Tukey, J.W. 1974 A projection pursuit algorithm for exploratory data analysis. *IEEE Transactions on Computers*, **C-23**, 881-889.
- Gifi, A. 1990 *Nonlinear multivariate analysis*. John Wiley & Sons.
- Gilula, Z. 1986 Grouping and association in contingency tables: An exploratory canonical correlation approach. *Journal of the American Statistical Association*, **81**, 773-779.

- Gilula, Z., & Haberman, S.J. 1986 Canonical analysis of contingency tables by maximum likelihood. *Journal of the American Statistical Association*, **81**, 780-788.
- Gilula, Z., & Haberman, S.J. 1988 The analysis of multivariate contingency tables by restricted canonical and restricted association models. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 760-771.
- Girard, R.A., & Cliff, N. 1976 A Monte Carlo evaluation of interactive multidimensional scaling. *Psychometrika*, **41**, 43-64.
- Golub, G.H., & Van Loan, C.F. 1989 *Matrix computations*. 2nd ed. Baltimore: The Johns Hopkins University Press.
- Goodman, L.A. 1981 Criteria for determining whether certain categories in a cross-classification table should be combined, with special reference to occupational categories in an occupational mobility table. *American Journal of Sociology*, **87**, 612-650.
- Gower, J.C. 1966 Some distance properties of latent root and vector methods used in multivariate analysis. *Biometrika*, **53**, 325-338.
- Gower, J.C. 1990 Fisher's optimal scores and multiple correspondence analysis. *Biometrics*, **46**, 947-961.
- Greenacre, M.J. 1984 *Theory and applications of correspondence analysis*. Academic Press.
- Greenacre, M.J. 1988 Clustering the rows and columns of a contingency table. *Journal of Classification*, **5**, 39-51.
- Greenacre, M.J. 1989 The Carroll-Green-Schaffer scaling in correspondence analysis: A theoretical and empirical appraisal. *Journal of Marketing Research*, **26**, 358-365.
- Greenacre, M.J., & Browne, M.W. 1986 An efficient alternating least-squares algorithm to perform multidimensional unfolding. *Psychometrika*, **51**, 241-250.
- Guilford, J.P. 1954 *Psychometric Methods*. 2nd. ed. New York: McGraw-Hill.
- Gulliksen, H., & Messick, S. (Eds.) 1960 *Psychological Scaling. Theory and Applications*. New York: John Wiley & Sons.
- Guttman, L. 1941 The quantification of a class of attributes: A theory and method of scale construction. In the Committee on Social Adjustment (Ed.), *The Prediction of Personal Adjustment*. New York: Social Science Research Council. Pp.319-348.
- Guttman, L. 1944 A basis for scaling qualitative data. *American Sociological Review*, **9**, 139-150.
- Guttman, L. 1950a The basis for scalogram analysis. In S.A. Stouffer (Eds.), *Measurement and Prediction*. Princeton University Press. Pp.60-90.
- Guttman, L. 1950b The principal components of scale analysis. In S.A. Stouffer (Eds.), *Measurement and Prediction*. Princeton University Press. Pp.312-361.
- Guttman, L. 1954 A new approach to factor analysis: The radex. In P.F. Lazarsfeld (Ed.), *Mathematical Thinking in the Social Sciences*. Illinois: The Free Press. Pp.258-348.
- Guttman, L. 1955 A generalized simplex for factor analysis. *Psychometrika*, **20**, 173-192.
- Guttman, L. 1968 A general nonmetric technique for finding the smallest coordinate space for a configuration of points. *Psychometrika*, **33**, 469-506.
- Guttman, L. 1978 What is not what in statistics. *Statistician*, **26**, 81-107.
- 南風原 朝和 1995 教育心理学研究と統計の検定 教育心理学年報 1994年度, **34**, 122-131.
- Haertel, E.H. 1990 Continuous and discrete latent structure models for item response data. *Psychometrika*, **55**, 477-494.
- Hambleton, R.K. 1985 *Item response theory. Principles and applications*. Kluwer.



- Harris, C.W., & Kaiser, H.F. 1964. Oblique factor analytic solutions by orthogonal transformations. *Psychometrika*, **29**, 347-362.
- Harshman, R.A., Green, P.E., Wind, Y., & Lundy, M.E. 1982. A model for the analysis of asymmetric data in marketing research. *Marketing Science*, **1**, 205-242.
- Harshman, R.A., & Lundy, M.E. 1984. The PARAFAC model for three-way factor analysis and multidimensional scaling. In H.G. Law, C.W. Snyder, Jr., J.A. Hattie & R.P. McDonald, (Eds.), *Research methods for multimode data analysis*. New York: Praeger. Pp.122-215.
- Harshman, R.A., & Lundy, M.E. 1996. Uniqueness proof for a family of models sharing features of Tucker's three-mode factor analysis and PARAFAC/CANDECOMP. *Psychometrika*, **61**, 133-154.
- 服部 環 1991. テストの内部一貫性を大きくするための項目選択技法. *教育心理学研究*, **39**, 195-203.
- Hayashi, C. 1950. On the quantification of qualitative data from the mathematico-statistical point of view. (An approach for applying this method to the parole prediction.) *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **2**, 35-47.
- Hayashi, C. 1952. On the prediction of phenomena from qualitative data and the quantification of qualitative data from the mathematico-statistical point of view. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **3**, 69-98.
- Hayashi, C. 1974. Minimum dimension analysis MDA—one of the methods of multidimensional quantification (MDQ) —. *Behaviormetrika*, No.1, 1-24.
- Hayashi, C. 1972. Two dimensional quantification based on the measure of dissimilarity among three elements. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **24**, 251-257.
- 林 知己夫 1956. 数量化理論とその応用 (II). *統計数理研究所集報*, **4**(2), 19-30.
- 林 知己夫 1976. MSA と POSA. 林 知己夫・鮎戸 弘 (編著) 多次元尺度解析法—その有効性と問題点—サイエンス社 Pp.197-207.
- 林 知己夫 1992. 日本人の国民性について. 統計数理研究所国民性調査委員会 (編) 第5日本人の国民性—戦後昭和期特集—出光書店 Pp.187-210.
- 林 知己夫 1993a. 行動計量学序説, 行動計量学シリーズ 朝倉書店
- 林 知己夫 1993b. 数量化—理論と方法—朝倉書店
- 林 知己夫・鮎戸 弘 (編著) 1976. 多次元尺度解析法—その有効性と問題点—サイエンス社
- Hathaway, R.J., & Bezdek, J.C. 1988. Recent convergence results for the fuzzy c-means clustering algorithms. *Journal of Classification*, **5**, 237-247.
- Heiser, W.J. 1991. A generalized majorization method for least squares multidimensional scaling of pseudodistances that may be negative. *Psychometrika*, **56**, 7-27.
- Hendrickson, A.E., & White, P.O. 1964. PROMAX: A quick method for rotation to oblique simple structure. *The British Journal of Statistical Psychology*, **17**, 65-70.
- 肥田野 直・岩原 信九郎・岩脇 三良・杉村 健・福原 真知子 1970. EPPS 性格検査手引. 日本文化科学社
- Hill, M.O. 1974. Correspondence analysis: A neglected multivariate method. *Applied Statistics*, **23**, 340-354.
- Hofjink, H. 1990. A latent trait model for dichotomous choice data. *Psychometrika*, **55**, 641-656.
- Horan, C.B. 1969. Multidimensional scaling: Combining observations when individuals have divergent perceptual structures. *Psychometrika*, **34**, 139-165.
- Hotelling, H. 1936. Relations between two sets of variates. *Biometrika*, **28**, 321-377.
- Huber, P.J. 1985. Projection pursuit. *The Annals of Statistics*, **13**, 435-475.

- 池田 央 1971. 行動科学の方法. 東京大学出版会
- 池田 央 1980. 調査と測定, 社会科学・行動科学のための数学入門 4. 新曜社
- Israëls, A.Z. 1984. Redundancy analysis for qualitative variables. *Psychometrika*, **49**, 331-346.
- Israëls, A.Z. 1986. Interpretation of redundancy analysis: Rotated vs. unrotated solutions. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, **2**, 121-130.
- Israëls, A.Z. 1987. *Eigenvalue techniques for qualitative data*. DSWO Press.
- 岩崎 学 1989. 数量化Ⅲ類によるテスト得点の解析. *行動計量学*, **16**, 13-21.
- 岩下 豊彦 1983. SD 法によるイメージの測定. 川島書店
- 岩坪 秀一 1974. 3-way 離散データを分類する二つの技法—相関比と3次相関係数による数量化—*行動計量学*, **2**, 54-65.
- 岩坪 秀一 1987. 数量化法の基礎. 朝倉書店
- Izenman, A.L. 1975. Reduced-rank regression for the multivariate linear model. *Journal of Multivariate Analysis*, **5**, 248-264.
- Jedidi, K., & DeSarbo, W.S. 1991. A stochastic multidimensional scaling procedure for the spatial representation of three-mode, three-way pick any/J data. *Psychometrika*, **56**, 471-494.
- Jöreskog, K.G. 1967. Some contributions to maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, **32**, 443-482.
- Jöreskog, K.G., & Lawley, D.N. 1968. New methods in maximum likelihood factor analysis. *The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **21**, 85-96.
- Jöreskog, K.G., & Sörbom, D. 1979. *Advances in factor analysis and structural equation models*. Abtbooks.
- Kaiser, H.F. 1958. The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika*, **23**, 187-200.
- Kapteyn, A., Neudecker, H., & Wansbeek, T. 1986. An approach to *n*-mode components analysis. *Psychometrika*, **51**, 269-275.
- 柏木 宣久・柳本 武美 1990. 平滑化法とそのソフトウェア. *応用統計学*, **19**, 79-92.
- Kendall, M.G., Stuart, A., & Ord, J.K. 1983. *The advanced theory of statistics. Volume 3, 4th ed.* Charles Griffin.
- Kiers, H.A.L. 1991a. Simple structure in component analysis techniques for mixtures of qualitative and quantitative variables. *Psychometrika*, **56**, 197-212.
- Kiers, H.A.L. 1991b. Hierarchical relations among three-way methods. *Psychometrika*, **56**, 449-470.
- Kiers, H.A.L. 1994. SIMPLIMAX: Oblique rotation to an optimal target with simple structure. *Psychometrika*, **59**, 567-579.
- Kiers, H.A.L., Kroonenberg, P.M., & ten Berge, J.M.F. 1992. An efficient algorithm for TUCKALS3 on data with large numbers of observation units. *Psychometrika*, **57**, 415-422.
- Kiers, H.A.L., & Takane, Y. 1993. Constrained DEDICOM. *Psychometrika*, **58**, 339-355.
- 岸野 洋久 1992. 社会現象の統計学, シリーズ社会現象の計量分析. 朝倉書店
- 国生 理枝子・柳井 晴夫・柏木 繁男 1990. 新性格検査における併存的妥当性の検証—プロマックス回転法による新性格検査の作成について (II)—. *心理学研究*, **61**, 31-39.
- Kolen, M.J., & Brennan, R.L. 1995. *Test equating*. New York: Springer.
- 駒澤 勉 1982. 数量化理論とデータ処理. 朝倉書店
- 駒澤 勉 1992. 数量化理論 (財) 放送大学教育振興会



- 駒澤 勉・土屋 隆裕 1995 可視化による探索的数量化Ⅲ類の分析法 統計数理, 43, 161-176.
- 今野 浩・山下 浩 1978 非線形計画法 日科技連出版社
- Kroonenberg, P.M. 1983a *Three-mode principal component analysis*. DSWO Press.
- Kroonenberg, P.M. 1983b Annotated bibliography of three-mode factor analysis. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 36, 81-113.
- Kroonenberg, P.M., & de Leeuw, J. 1980 Principal component analysis of three-mode data by means of alternating least squares algorithms. *Psychometrika*, 45, 69-97.
- Kroonenberg, P.M., & ten Berge, J.M.F. 1989 Three-mode principal component analysis and perfect congruence analysis for sets of covariance matrices. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 42, 63-80.
- Kruskal, J.B. 1964a Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis. *Psychometrika*, 29, 1-27.
- Kruskal, J.B. 1964b Nonmetric multidimensional scaling: A numerical method. *Psychometrika*, 29, 115-129.
- Kruskal, J.B. 1969 Toward a practical method which helps uncover the structure of a set of multivariate observations by finding a linear transformation which optimizes a new "index of condensation". In R.C. Millon & J.A. Nelder (Eds.), *Statistical Computation*. New York: Academic Press. Pp.427-440.
- Kruskal, J.B., & Shepard, R.N. 1974 A nonmetric variety of linear factor analysis. *Psychometrika*, 39, 123-157.
- Kruskal, J.B., & Wish, M. 1978 *Multidimensional scaling*. Beverly Hills: Sage.
- Kuhfeld, W.F., & Young, F.W. 1989 PRINCIPALS versus OSMOD: A comment on Saito and Otsu. *Psychometrika*, 54, 755-756.
- 楠 正 1986 順序性をもつデータ構造と因子分析—完全尺度・準尺度に従う 0・1 変数相関行列の性質— 行動計量学, 13, 8-19.
- Lancaster, H.O. 1969 *The chi-squared distribution*. New York: John Wiley & Sons.
- Lastovicka, J.L. 1981 The extension of component analysis to four-mode matrices. *Psychometrika*, 46, 47-57.
- Law, H.G., Snyder, C.W.Jr., Hattie, J.A., & McDonald, R.P. (Eds.) 1984 *Research methods for multimode data analysis*. Praeger.
- ローリー D.N., マックスウェル A.E. 丘本正 (監訳) 1970 因子分析法 共立出版 (Lawley, D.N., & Maxwell, A.E. 1963 *Factor analysis as a statistical method*. London: Butterworth.)
- Lazarsfeld, P.F. 1950a Logical and mathematical foundations of latent structure analysis. In S.A. Stouffer (Eds.), *Measurement and Prediction*. Princeton University Press. Pp.362-412.
- Lazarsfeld, P.F. 1950b The interpretation and computation of some latent structures. In S.A. Stouffer (Eds.), *Measurement and Prediction*. Princeton University Press. Pp.413-472.
- Lazarsfeld, P.F. 1954 A conceptual introduction to latent structure analysis. In P.F. Lazarsfeld (Ed.), *Mathematical Thinking in the Social Sciences*. Illinois: The Free Press. Pp.349-387.
- Likert, R.A. 1932 A technique for the measurement of attitudes. *Archives of Psychology*, No.140, 5-53.
- Lindsay, B.G. 1995 *Mixture models: Theory, geometry and applications*. I.M.S.
- Lingoes, J.C. 1963 Multiple scalogram analysis: A set-theoretic model for analyzing dichotomous items. *Educational and Psychological Measurement*, 23, 501-524.

- リンゴー J.C. 岡太彬訓・渡邊恵子 (訳) 1976 ガットマン・リンゴーの非計量的プログラム R.N. シェパード・A.K. ロムニ・S.B. ナーラブ (編) 多次元尺度構成法—MDS— 共立出版 Pp.51-75. (Lingoes, J.C. 1972 A general survey of the Guttman-Lingoes nonmetric program series. In R.N. Shepard, A.K. Romney, & S.B. Nerlove (Eds.), *Multidimensional scaling. Theory and applications in the behavioral sciences. Volume 1. Theory*. New York: Seminar Press. Pp.49-68.)
- Lingoes, J.C., & Guttman, L. 1967 Nonmetric factor analysis: A rank reducing alternative to linear factor analysis. *Multivariate Behavioral Research*, 2, 485-505.
- Lord, F.M. 1952 A theory of test scores. *Psychometric Monograph*, No.7.
- Lord, F.M. 1958 Some relations between Guttman's principal components of scale analysis and other psychometric theory. *Psychometrika*, 23, 291-296.
- Lord, F.M., & Novick, M.R. 1968 *Statistical theories of mental test scores*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing.
- Luce, R.D. 1961 A choice theory analysis of similarity judgments. *Psychometrika*, 26, 151-163.
- MacKay, D.B., & Zinnes, J.L. 1986 A probabilistic model for the multidimensional scaling of proximity and preference data. *Marketing Science*, 5, 325-349.
- MacQueen, J. 1967 Some methods for classification and analysis of multivariate observations. *Proceeding of the fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1, 281-297.
- Marsh, H.W., & Byrne, B.M. 1993 Confirmatory factor analysis of multitrait-multimethod self-concept data: Between-group and within-group invariance constraints. *Multivariate Behavioral Research*, 28, 313-349.
- Martin, J.F. 1988 On probability coding. In J.L.A. van Rijckevorsel & J.de Leeuw (Eds.), *Component and correspondence analysis*. Chichester: John Wiley & Sons. Pp.103-114.
- Maung, K. 1941 Measurement of association in a contingency table with special reference to the pigmentation of hair and eye colours of Scottish school children. *Annals of Eugenics*, 11, 189-223.
- Maxwell, A.E. 1959 Maximum likelihood estimates of item parameters using the logistic function. *Psychometrika*, 24, 221-227.
- McIver, J.P. & Carmines, E.G. 1981 *Unidimensional scaling*. Sage.
- Messick, S.J. 1956 An empirical evaluation of multidimensional successive intervals. *Psychometrika*, 21, 367-375.
- Meulman, J. 1982 *Homogeneity analysis of incomplete data*. Leiden: DSWO-Press.
- Meulman, J.J., & Verboon, P. 1993 Points of view analysis revisited: Fitting multidimensional structures to optimal distance components with cluster restrictions on the variables. *Psychometrika*, 58, 7-35.
- Miyano, H., & Inukai, Y. 1982 Sequential estimation in multidimensional scaling. *Psychometrika*, 47, 321-336.
- 三好 隆 (編著) 1962 心理学と因子分析 誠信書房
- 水野 欽司 1974 調査回答パターンの尺度解析における新しい試み 中部広告研究, 第6号, 29-42.
- 水野 欽司・頼 伸彦 1973 耐久消費財による単調順位パターンの作成 中部広告研究, 第5号, 57-78.
- 水田 正弘・馬場 康雄 1993 Principal Curves と数量化Ⅲ類を用いた質的データの1次元構造の抽出 統計数理, 41, 1-11.
- Mokken, R.J. 1971 *A theory and procedure of scale analysis*. Mouton.



- 森本 栄一 1996 数量化理論の形成過程に関する研究 東京工業大学大学院理工学研究科修士論文 (未公開)
- Mosteller, F. 1951 Remarks on the method of paired comparisons: I. The least squares solution assuming equal standard deviations and equal correlations. *Psychometrika*, 16, 3-9.
- Mosteller, F., & Tukey, J.W. 1977 *Data analysis and regression*. Massachusetts: Addison-Wesley.
- Murakami, T. 1983 Quasi three-mode principal component analysis—A method for assessing the factor change—. *Behaviormetrika*, No.14, 27-48.
- 村上 隆 1990 3相データの階層的主成分分析 柳井 晴夫・岩坪 秀一・石塚 智一(編) 人間行動の計量分析 多変量データ解析の理論と応用 東京大学出版会 Pp. 71-94.
- 村上 隆 1996 非線形主成分分析と系列カテゴリ反応の性質 日本行動計量学会第24回大会発表論文抄録集, 310-313.
- 村田 磨理子・馬場 康雄 1993 順位グラフによる分類 計算機統計学, 6, 25-36.
- Murray, H.A. 1938 *Explorations in Personality*. Oxford University Press.
- Muthén, B. 1978 Contributions to factor analysis of dichotomous variables. *Psychometrika*, 43, 551-560.
- 中村 永友 1995 クラスター化法の統計的評価とその応用 総合研究大学院大学数科学研究科博士論文 (未公開)
- 中村 隆 1982 ベイズ型コホートモデル—標準コホート表への適用— 統計数理研究所集報, 29, 77-97.
- ナビア D. 岡太彬訓・渡邊恵子(訳) 1976 評定加算法と非計量の多次元尺度構成法 R.N. シェパード・A.K. ロムニー・S.B. ナーラブ(編) 多次元尺度構成法—MDS— 共立出版 Pp.169-191. (Napier, D. 1972 Nonmetric multidimensional techniques for summated ratings. In R.N. Shepard, A.K. Romney, & S.B. Nerlove (Eds.), *Multidimensional scaling. Theory and applications in the behavioral sciences. Volume 1. Theory*. New York: Seminar Press. Pp.157-178.)
- Neuhauser, J.O., & Wrigley, C. 1954 The quartimax method: An analytical approach to orthogonal simple structure. *British Journal of Statistical Psychology*, 7, 81-91.
- Nishisato, S. 1978 Optimal scaling of paired comparison and rank order data: An alternative to Guttman's formulation. *Psychometrika*, 43, 263-271.
- Nishisato, S. 1984 Forced classification: A simple application of a quantification method. *Psychometrika*, 49, 25-36.
- 西里 静彦 1977 尺度法とその関連領域: 文献目録に見る最近の動向 (1) 行動計量学, 4, 74-95.
- 西里 静彦 1978 尺度法とその関連領域: 多次元尺度法の研究に関する最近の動向 (2) 行動計量学, 5, 37-55.
- 西里 静彦 1979 双対(最適)尺度法とその歴史 数理科学, No.190, 76-83.
- 西里 静彦 1982 質的データの数量化 朝倉書店
- Nishisato, S., & Arri, P.S. 1975 Nonlinear programming approach to optimal scaling of partially ordered categories. *Psychometrika*, 40, 525-548.
- Nishisato, S., & Shen, W.J. 1984 A note on dual scaling of successive categories data. *Psychometrika*, 49, 493-500.
- 丘本 正 1992a 数量化法第3類の人工データ 行動計量学, 19, 75-82.
- 丘本 正 1992b 数量化法第3類の諸問題 日本統計学会誌, 22, 229-239.
- 尾見 康博・川野 健治 1994 心理学における統計手法再考—数字に対する“期待”と“不安”— 性格心理学研究, 2, 56-67.

- 大隅 昇 1979 ファジィ・クラスタリング 数理科学, No.191, 34-41.
- 大隅 昇・L. ルパール・A. モリノウ・K.M. ワーウィック・馬場 康雄 1994 記述的多変量解析法 日科技連出版社
- 大津 起夫 1988 OSMOD によるカテゴリカルデータの分析—数量化3類との比較— 第56回日本統計学会講演報告集, 157-158.
- 大津 起夫 1992 数量化3類利用におけるトラブル 日本心理学会第56回大会発表論文集, 834.
- 大津 起夫 1993 OSMOD とその拡張: 人工データによる特性の検討 行動計量学, 20, 9-23.
- 大津 起夫 1996 次元縮約の落とし穴 統計数理研究所共同研究リポート86「多変量質的データの構造解析に関する研究」, 23-38.
- Pham, T.D., & Möcks, J. 1992 Beyond principal component analysis: A trilinear decomposition model and least squares estimation. *Psychometrika*, 57, 203-215.
- Poole, K.T. 1984 Least squares metric, unidimensional unfolding. *Psychometrika*, 49, 311-323.
- Ramsay, J.O. 1977 Maximum likelihood estimation in multidimensional scaling. *Psychometrika*, 42, 241-266.
- Ramsay, J.O. 1978 Confidence regions for multidimensional scaling analysis. *Psychometrika*, 43, 145-160.
- Ramsay, J.O. 1980 Some small sample results for maximum likelihood estimation in multidimensional scaling. *Psychometrika*, 45, 139-144.
- Ramsay, J.O. 1982 Some statistical approaches to multidimensional scaling data. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 145, 285-312.
- Rao, P.V., & Kupper, L.L. 1967 Ties in paired-comparison experiments: A generalization of the Bradley-Terry model. *Journal of the American Statistical Association*, 62, 194-204.
- Rasch, G. 1961 On general laws and the meaning of measurement in psychology. *Proceedings of the IV. Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*. Berkeley: University of California Press.
- ラッシュ, G. 内田 良男(監訳) 1985 心理テストの確率モデル 名古屋大学出版会 (Rasch, G. 1980 *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. The University of Chicago Press.)
- Richardson, M.W., & Kuder, G.F. 1933 Making a rating scale that measures. *Personnel Journal*, 12, 36-40.
- Russett, B.M. 1964 Inequality and instability. *World Politics*, 21, 442-454.
- 齋藤 亮幸 1980 多次元尺度構成法 朝倉書店
- Saito, T., & Otsu, T. 1988 A method of optimal scaling for multivariate ordinal data and its extensions. *Psychometrika*, 53, 5-25.
- 坂元 慶行 1985 カテゴリカルデータのモデル分析 共立出版
- 坂元 慶行・石黒 真木夫・北川 源四郎 1983 情報量統計学 共立出版
- Samejima, F. 1969 Estimation of latent ability using a response pattern of graded scores. *Psychometric Monograph*, No.17.
- Sands, R., & Young, F.W. 1980 Component models for three-way data: An alternating least squares algorithm with optimal scaling features. *Psychometrika*, 45, 39-67.
- 佐藤 隆博 1975 S-P 表の作成と解釈 明治図書
- 佐藤 隆博 1985 S-P 表の入門 明治図書
- 佐藤 隆博・竹谷 誠・藤田 広一・永岡 慶三 1973 コンピュータによるアナライザのデータ処理 I—S-P 表の理論と分析— 電子通信学会教育技術研究会技報, ET73-3, 1-11.



- Sato, T., & Yanai, H. 1985. A method of simultaneous scaling of discrete variables. *Behaviormetrika*, 18, 39-51.
- Schmitt, N., Coyle, B.W., & Saari, B. 1977. A review and critique of analysis of multitrait-multimethod matrices. *Multivariate Behavioral Research*, 12, 447-478.
- Schönemann, P.H. 1972. An algebraic solution for a class of subjective metrics models. *Psychometrika*, 37, 441-451.
- Schönemann, P.H., & Wang, M.M. 1972. An individual difference model for the multidimensional analysis of preference data. *Psychometrika*, 37, 275-309.
- Shepard, R.N. 1962. The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown distance function. I. *Psychometrika*, 27, 125-140.
- Shepard, R.N., & Arabie, P. 1979. Additive clustering: Representation of similarities as combinations of discrete overlapping properties. *Psychological Review*, 86, 87-123.
- Shye, S. 1985. *Multiple scaling*. North-Holland.
- 芝 祐順 1979. 因子分析法 (第2版) 東京大学出版会
- 芝 祐順 (編著) 1991. 項目反応理論 基礎と応用 東京大学出版会
- Sjöberg, L. 1967. Successive intervals scaling of paired comparisons. *Psychometrika*, 32, 297-308.
- Stevens, S.S. 1946. On the theory of scales of measurement. *Science*, 103, 677-680.
- 高木 幹雄・下田 陽久 (監修) 1991. 画像解析ハンドブック 東京大学出版会
- 高木 貞二 (編) 1955. 心理学における数量化の研究 東京大学出版会
- Takane, Y. 1978a. A maximum likelihood method for nonmetric multidimensional scaling: I. The case in which all empirical pairwise orderings are independent—theory. *Japanese Psychological Research*, 20, 7-17.
- Takane, Y. 1978b. A maximum likelihood method for nonmetric multidimensional scaling: I. The case in which all empirical pairwise orderings are independent—evaluations. *Japanese Psychological Research*, 20, 105-114.
- Takane, Y. 1987. Analysis of contingency tables by ideal point discriminant analysis. *Psychometrika*, 52, 493-513.
- 高根 芳雄 1980. 多次元尺度法 東京大学出版会
- 高根 芳雄 1990. 理想点判別分析法とその応用 柳井 晴夫・岩坪 秀一・石塚 智一 (編) 人間行動の計量分析 多変量データ解析の理論と応用 東京大学出版会 Pp.43-69.
- 高根 芳雄 1992a. 制約付き主成分分析法について 行動計量学, 19, 29-39.
- 高根 芳雄 1992b. 制約付き主成分分析法 (CPCA) 日本心理学会第56回大会発表論文集, S14.
- 高根 芳雄 1995. 制約付き主成分分析法 朝倉書店
- Takane, Y., Bozdogan, H., & Shibayama, T. 1987. Ideal point discriminant analysis. *Psychometrika*, 52, 371-392.
- Takane, Y., & de Leeuw, J. 1987. On the relationship between item response theory and factor analysis of discretized variables. *Psychometrika*, 52, 393-408.
- Takane, Y., Kiers, H.A.L., & de Leeuw, J. 1995. Component analysis with different sets of constraints on different dimensions. *Psychometrika*, 60, 259-280.
- Takane, Y., & Shibayama, T. 1991. Principal component analysis with external information on both subjects and variables. *Psychometrika*, 56, 97-120.
- Takane, Y., Yanai, H., & Mayekawa, S. 1991. Relationships among several methods of linearly constrained correspondence analysis. *Psychometrika*, 56, 667-684.

- Takane, Y., Young, F.W., & de Leeuw, J. 1977. Nonmetric individual differences multidimensional scaling: An alternating least squares method with optimal scaling features. *Psychometrika*, 42, 7-67.
- Takane, Y., Young, F.W., & de Leeuw, J. 1979. Nonmetric common factor analysis: An alternating least squares method with optimal scaling features. *Behaviormetrika*, 6, 45-56.
- 竹内 啓 1980. 現象と行動のなかの統計数理 新曜社
- 竹谷 誠 1979a. 教育評価に利用するテストの項目関連構造分析 電子通信学会論文誌, 62, 451-458.
- 竹谷 誠 1979b. 項目関連構造分析を応用したテストの特性解析 電子通信学会論文誌, 62, 695-702.
- 竹谷 誠 1982. 順序性に基づく項目関連構造化法の特性比較 行動計量学, 9, 29-38.
- 竹谷 誠 1987. 評定尺度データの意味構造分析法 行動計量学, 14, 10-17.
- 竹谷 誠 1991. 新・テスト理論—教育情報の構造分析法 早稲田大学出版部
- 詫摩 武俊・依田 明 1968. 性格、心理学入門講座 新版6 大日本図書
- 田中 良久 1961. 心理学的測定法 東京大学出版会
- ten Berge, J.M.F., Bekker, P.A., & Kiers, H.A.L. 1994. Some clarifications of the TUCKALS2 algorithm applied to the IDIOSCAL problem. *Psychometrika*, 59, 193-201.
- ten Berge, J.M.F., & Kiers, H.A.L. 1996. Some uniqueness results for PARAFAC2. *Psychometrika*, 61, 123-132.
- ten Berge, J.M.F., de Leeuw, J., & Kroonenberg, P.M. 1987. Some additional results on principal components analysis of three-mode data by means of alternating least squares algorithms. *Psychometrika*, 52, 183-191.
- Tenenhaus, M., & Young, F.W. 1985. An analysis and synthesis of multiple correspondence analysis, optimal scaling, dual scaling, homogeneity analysis and other methods for quantifying categorical multivariate data. *Psychometrika*, 50, 91-119.
- ter Braak, C.J.F. 1985. Correspondence analysis of incidence and abundance data: Properties in terms of a unimodal response model. *Biometrics*, 41, 859-873.
- ter Braak, C.J.F. 1990. Interpreting canonical correlation analysis through biplots of structure correlations and weights. *Psychometrika*, 55, 519-531.
- Thurstone, L.L. 1927a. Psychophysical analysis. *The American Journal of Psychology*, 38, 368-389.
- Thurstone, L.L. 1927b. A law of comparative judgment. *Psychological Review*, 34, 273-286.
- Thurstone, L.L. 1929. Fechner's law and the method of equal-appearing intervals. *Journal of Experimental Psychology*, 12, 214-224.
- Thurstone, L.L. 1947. *Multiple-factor analysis*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Thurstone, L.L., & Chave, E.J. 1929. *The measurement of attitude*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Titterton, D.M., Smith, A.F.M., & Makov, U.E. 1985. *Statistical analysis of finite mixture distributions*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Torgerson, W.S. 1952. Multidimensional scaling: I. Theory and method. *Psychometrika*, 17, 401-419.
- Torgerson, W.S. 1958. *Theory and methods of scaling*. New York: John Wiley & Sons.
- 豊田 秀樹 1988. 2群及び多群の変量の為の探索的な相関分析法 教育心理学研究, 36, 29-37.
- Tsuchiya, T. 1996a. Homogeneity analysis for partitioning qualitative variables. *Fifth Conference of International Federation of Classification Societies, Abstracts*, 1, 61-64.



- Tsuchiya, T. 1996b A probabilistic multidimensional scaling with unique axes. *Journal of Japanese Psychological Research*, 38, 170-178.
- 土屋 隆裕 1994a 統計的分類手法を用いた多変量解析のいくつかの提案 東京大学大学院教育学研究科修士論文 (未公開)
- 土屋 隆裕 1994b 一意的な軸を持つ PROSCAL の提案 日本心理学会第 58 回大会発表論文集, 438.
- 土屋 隆裕 1995a 項目分割のための数量化法 日本行動計量学会第 23 回大会発表論文抄録集, 240-241.
- 土屋 隆裕 1995b 質的データのための一次元尺度構成法 日本性格心理学会第 4 回大会発表論文集, 108-109.
- 土屋 隆裕 1995c 項目分類のための数量化法 行動計量学, 22, 95-109.
- 土屋 隆裕 1995d 複数データセット間の構造の違いを探る等質性分析—「日本人の国民性調査」データへの適用— 統計数理, 43, 121-140.
- 土屋 隆裕 1996a 一次元尺度構成のための質的項目の選択法 統計数理研究所共同研究リポート 86「多変量質的データの構造解析に関する研究」, 60-66.
- 土屋 隆裕 1996b 質的項目の選択による一次元尺度の構成法 応用心理学研究, No.21, 21-30.
- 土屋 隆裕 1996c 質的な 3 相データのための項目分類による尺度構成法 教育心理学研究, 44, 425-434.
- 土屋 隆裕 1996d 2 つの質的変数群において関連する変数を見出すための探索的等質性分析 教育心理学研究, 44, 44-54.
- 土屋 隆裕 1996e 一次元尺度構成のための質的項目の選択法 日本行動計量学会第 24 回大会発表論文抄録集, 302-303.
- 土屋 隆裕 1996f 3 相データのための尺度構成法 日本教育心理学会第 38 回総会発表論文集, 481.
- 土屋 隆裕 1996g 2 つの質的項目群における項目パターンの分類法 日本性格心理学会第 5 回大会発表論文集, 14-15.
- 土屋 隆裕 1996h 量的および質的データにおける斜交成分の分析 平成 8 年度科学研究費補助金「数理統計学における情報抽出の理論と応用に関する研究 (多変量解析の理論と応用の研究)」研究集会資料, 1-6.
- Tucker, L.R. 1960 Intra-individual and inter-individual multidimensionality. In H.Gulliksen & S.Messick (Eds.) *Psychological scaling*. New York: John Wiley & Sons. Pp.155-167.
- Tucker, L.R. 1966 Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, 31, 279-311.
- Tucker, L.R., & Messick, S. 1963 An individual differences model for multidimensional scaling. *Psychometrika*, 28, 333-367.
- Tutz, G. 1986 Bradley-Terry-Luce models with an ordered response. *Journal of Mathematical Psychology*, 30, 306-316.
- van Buuren, S., & Heiser, W.J. 1989 Clustering  $N$  objects into  $k$  groups under optimal scaling of variables. *Psychometrika*, 54, 699-706.
- Van de Geer, J.P. 1984 Linear relations among  $k$  sets of variables. *Psychometrika*, 49, 79-94.
- van den Wollenberg, A.L. 1977 Redundancy analysis: an alternative to canonical correlation analysis. *Psychometrika*, 42, 209-219.
- van der Burg, E., & de Leeuw, J. 1983 Non-linear canonical correlation. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 36, 54-80.
- van der Burg, E., & de Leeuw, J. 1988 Homogeneity analysis with  $k$  sets of variables: An alternating least squares method with optimal scaling features. *Psychometrika*, 53, 177-197.

- van der Burg, E., & de Leeuw, J. 1990 Non-linear redundancy analysis. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 43, 217-230.
- van der Lans, I.A. 1992 *Nonlinear multivariate analysis for multivariate preference data*. Leiden: DSWO Press.
- van der Ven, A.H.G.S. 1980 *Introduction to scaling*. John Wiley & Sons.
- van Rijkevorsel, J.L.A. 1988 Fuzzy coding and B-splines. In J.L.A.van Rijkevorsel & J.de Leeuw (Eds.), *Component and correspondence analysis*. Chichester: John Wiley & Sons. Pp.33-54.
- Velleman, P.F., & Wilkinson, L. 1993 Nominal, ordinal, interval, and ratio typologies are misleading. *The American Statistician*, 47, 65-72.
- Wang, M.M., Schönemann, P.H., & Rusk, J.G. 1975 A conjugate gradient algorithm for the multidimensional analysis of preference data. *Multivariate Behavioral Research*, 10, 45-79.
- 和多田 淳三・田中 英夫・浅居 喜代治 1982 ファジィ数量化理論Ⅱ類 行動計量学, 9, 24-32.
- 和多田 淳三・田中 英夫・浅居 喜代治 1983 ファジィ数量化理論Ⅰ類 行動計量学, 11, 66-73.
- 渡部 洋・土屋 隆裕 1995 樹木図の印象的評価の特徴について 東京大学教育学部紀要, 34, 195-205.
- Whittaker, E.T. 1923 On a new method of graduation. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 41, 81-89.
- Winsberg, S., & De Soete, G. 1993 A latent class approach to fitting the weighted euclidean model, CLASCAL. *Psychometrika*, 58, 315-330.
- Wolfe, J.H. 1970 Pattern clustering by multivariate mixture analysis. *Multivariate Behavioral Research*, 5, 329-350.
- 山田 文雄・西里 静彦 1993 双対尺度法に関するいくつかの特性—2 値形式のアイテム・カテゴリー型データに対する適用— 行動計量学, 20, 56-63.
- 柳井 晴夫 1994 多変量データ解析法—理論と応用—, 行動計量学シリーズ 朝倉書店
- 柳井 晴夫・繁樹 算男・前川 眞一・市川 雅教 1990 因子分析—その理論と応用— 朝倉書店
- 吉澤 正 1975 分割表における数量化モデル—その理論的検討— 行動計量学, 3, 1-11.
- 吉澤 正 1976 交互作用概念の一般化と多重配列の特異値分解 行動計量学, 4, 32-43.
- Young, F.W., & Cliff, N. 1972 Interactive scaling with individual subjects. *Psychometrika*, 37, 385-415.
- Young, F.W., Takane, Y., & de Leeuw, J. 1978 The principal components of mixed measurement level multivariate data: An alternating least squares method with optimal scaling features. *Psychometrika*, 43, 279-281.
- Young, G., & Householder, A.S. 1938 Discussion of a set of points in terms of their mutual distances. *Psychometrika*, 3, 19-22.
- Zinnes, J.L., & Griggs, R.A. 1974 Probabilistic, multidimensional unfolding analysis. *Psychometrika*, 39, 327-350.
- Zinnes, J.L., & MacKay, D.B. 1983 Probabilistic multidimensional scaling: Complete and incomplete data. *Psychometrika*, 48, 27-48.



## 付記

本論文をまとめるにあたり、多くの方々から御指導・御援助をいただきました。ここで深く感謝いたします。

東京大学教育学部の渡部洋教授には、東京大学の大学生・大学院生時代を通じて御指導いただきました。また、樹木画検査に関連して多くのデータを提供して下さいました。本論文のいくつかの研究は、樹木画データをきっかけとして始まったものであり、現実のデータがなければまとめることはできなかったと思います。統計数理研究所の駒澤勉教授には、数量化Ⅲ類の見方について教えていただくと同時に、研究の方向性についても御助言くださいました。さらに研究環境の整備についても御支援いただきました。心より感謝いたします。

大学入試センターの岩坪秀一教授には、貴重な文献について教えていただき、励ましの言葉をかけてくださいました。統計数理研究所の馬場康維助教授には、特に第4章の内容についてコメントしていただき、研究がすすむよう御支援くださいました。統計数理研究所の坂元慶行教授には、さまざまな形で激励してくださると同時に、現実のデータに目を向けるよう御助言してくださいました。数理検定協会の岡崎雅子さんには、第3章で使ったデータを快く提供して下さいました。東京大学大学院教育学研究科の川原誠司さん、総合研究大学院大学の中村好宏さんには、本論文の草稿を読んでいただきコメントをしてくださいました。この場で厚くお礼申し上げます。

1576

1577

1578

1579

1580

1581

1582

1583

1584

1585

1586

1587

1588

1589

1590

1591

1592

1593

1594

1595

1596

1597

1598

1599

1600

1601

1602

1603

1604

1605

1606

1607

1608

1609

1610

1611

1612

1613

1614

1615

1616

1617

1618

1619

1620

1621

1622

1623

1624

1625

1626

1627

1628

1629

1630

1631

1632

1633

1634

1635

1636

1637

1638

1639

1640

1641

1642

1643

1644

1645

1646

1647

1648

1649

1650

1651

1652

1653

1654

1655

1656

1657

1658

1659

1660

1661

1662

1663

1664

1665

1666

1667

1668

1669

1670

1671

1672

1673

1674

1675

1676

1677

1678

1679

1680

1681

1682

1683

1684

1685

1686

1687

1688

1689

1690

1691

1692

1693

1694

1695

1696

1697

1698

1699

1700

1701

1702

1703

1704

1705

1706

1707

1708

1709

1710

1711

1712

1713

1714

1715

1716

1717

1718

1719

1720

1721

1722

1723

1724

1725

1726

1727

1728

1729

1730

1731

1732

1733

1734

1735

1736

1737

1738

1739

1740

1741

1742

1743

1744

1745

1746

1747

1748

1749

1750

1751

1752

1753

1754

1755

1756

1757

1758

1759

1760

1761

1762

1763

1764

1765

1766

1767

1768

1769

1770

1771

1772

1773

1774

1775

1776

1777

1778

1779

1780

1781

1782

1783

1784

1785

1786

1787

1788

1789

1790

1791

1792

1793

1794

1795

1796

1797

1798

1799

1800

1801

1802

1803

1804

1805

1806

1807

1808

1809

1810

1811

1812

1813

1814

1815

1816

1817

1818

1819

1820

1821

1822

1823

1824

1825

1826

1827

1828

1829

1830

1831

1832

1833

1834

1835

1836

1837

1838

1839

1840

1841

1842

1843

1844

1845

1846

1847

1848

1849

1850

1851

1852

1853

1854

1855

1856

1857

1858

1859

1860

1861

1862

1863

1864

1865

1866

1867

1868

1869

1870

1871

1872

1873

1874

1875

1876

1877

1878

1879

1880

1881

1882

1883

1884

1885

1886

1887

1888

1889

1890

1891

1892

1893



## 論文の内容の要旨

論文題目 一般化等質性分析による質的データののための尺度構成法

氏 名 土 屋 隆 裕

本論文は、一般化等質性分析という新たな手法により、調査等で得られる質的データを基に尺度構成を行う方法を提案したものである。

測定のための尺度があらかじめ存在しない心理学や教育学の分野では、研究の第一歩として、個体や項目に数量を与える方法である尺度構成法が重要な課題となる。特に、質問紙調査などでは、順序尺度や名義尺度の水準にある項目が用いられるため、質的データに基づく尺度構成法が必要となる。

本論文の第1章ではまず、広義の一次元尺度、狭義の一次元尺度、多次元尺度という視点から尺度構成法を整理した。広義の一次元尺度とは全ての項目との整合性が最も高くなるよう構成した尺度、狭義の一次元尺度とは整合性の高い項目だけを取り出して構成した尺度、多次元尺度とは全ての項目との整合性が最も高くなるよう個体や項目を多次元空間上に配置したものを指す。そして、因子分析法やMDS、数量化Ⅲ類など従来の多くの尺度構成法が、広義の一次元尺度や多次元尺度の構成法であることを指摘した。狭義の一次元尺度は、解釈が容易であり、測定している概念が明確になるにもかかわらず、その構成法はほとんど提案されていなかったと言ってよい。

そこで第2章では、広義の一次元尺度構成法である数量化Ⅲ類や主成分分析をその特別な場合として含み、かつ狭義の一次元尺度構成にも対応できる一般化等質性分析を提案した。そして一般化等質性分析の原理について説明した。

第3章では、一般化等質性分析の下位手法として、項目の中から一次元性をなす項目だけを選択し、一次元尺度構成を行う方法を提案した。学力テストにおける項目分析等で、一次元性を持つ項目の選択は必須である。従来は因子分析法や主成分分析法が、この目的のために用いられてきた。また学力テストでは、総得点と項目得点との相関係数により項目が選択されることもある。しかし、名義尺度では項目間相関係数を求められない。カテゴリ値の最適変換を伴う方法では項目の選択に最適な変換が得られるとは限らない。主成分や総得点が不適切な項目を含んで求められる、といった問題点があった。本論文では、一般化等質性分析において、各項目得点と尺度得点との相関係数の関数である  $\{a_i^d\}$  という重み係数を導入した。尺度得点との相関が低い項目には小さな重みを与えることで、お互いに関連の高い一部の項目のみから尺度得点が構成されることになる。またそれと同時に、カテゴリや個体に対して、項目を選択し一次元尺度を構成するのに最適な数量を与えることが可能となった。

論文では、数値例として2つの人工データと、数学能力検定試験データ、循環系機能評価データ、循環器系危険因子データ、EPPS 性格検査データという4つの実データを分析した。その結果、数量化Ⅲ類では項目の選択が不可能なデータに対しても、一次元性をなす項目を選び出せること、カテゴリの順序が知られておらず主成分分析や因子分析が役立つ場合でも、カテゴリの順序を明らかにすると同時に項目の選択が行えること、複数の一次元構造を持つデータに対しても局所解を利用することで複数の一次元尺度を構成できること、テストの項目分析においては点双列相関係数を利用する場合に比べ信頼性の高い尺度が構成されること、等の方法の優れた点が明らかにされた。

第4章では、一般化等質性分析の下位手法として、項目をそれぞれが一次元性を持つ  $G$  個の群に分類し、各群において尺度を構成する項目パターン分類の方法を提案した。特性論に基づく性格検査等のように、1回の測定において測ろうとする特性が複数ある、ということは少なくない。従来、項目分類には因子分析法が多く用いられてきた。しかし因子分析法は、カテゴリの順序が分からないと適用できない。カテゴリ値を最適変換しても項目分類に最適な変換であるとは限らない。回転に対する不定性があり分類が一意に定まらない、といった問題点を抱えている。本論文では、一般化等

質性分析においてファジィ  $c$ -means クラスタ法の考え方を利用した。これにより、項目分類に最適なカテゴリ値を求めると同時に項目を一意に分類し、各個体に尺度得点を与えることが可能となった。また、どの群にも分類できない項目は、尺度の構成に寄与する程度が軽減され、自動的に取り除かれる、という優れた特徴も持つ。

論文では、数値例として5つの人工データと、絵画印象をSD法により調べたデータ、面接試験における評定データ、「日本人の国民性」調査の中から「義理人情」項目と「伝統近代」項目を用いたデータという3つの実データを分析し、方法の性質を吟味した。その結果、因子分析法では項目の分類に失敗したり分析できない場合でも適切に項目を分類できること、どの項目が関連しているのかといったデータ構造について数量化Ⅲ類の結果からは得られない知見を得られること、等の方法の利点が示された。

第5章では、第4章の方法を質的3相データに拡張した3つの方法を提案した。プリテストとポストテスト、パネル調査の結果や多特性他方法行列など3相データの例は多い。この章では、絵画に対する印象をSD法により調べた、評定者  $\times$  SD項目  $\times$  絵画というデータを数値例として用いた。提案した方法は、項目パターン分類による尺度構成法を拡張しているため、主成分分析や因子分析モデル、数量化Ⅲ類を3相に拡張した従来の方法に比べ、名義尺度であっても項目の分類に最適なカテゴリ値が得られる、回転を行うことなく一次元性を持つ項目の群が一意に得られる、といった特徴を受け継いでいる。

3つの方法は全て、尺度得点に対し何らかの制約を課しながら項目の相を分類することで、評定者と絵画の相の関係を探るものである。仮に無制約のときの項目の群が得られなければ、制約を課することで項目の分類に必要なデータ構造が取り除かれたと考えた。すなわち、適切な群が得られるまで制約を緩めなければならない。この考え方により、尺度得点に課す制約の適否を判断し、制約の程度を決めることが可能となった。データへの適合度から制約の程度を決める従来の方法に比べ、より明確な判断を下せるという利点がある。

論文では、デザイン行列を用いる方法、ランク制約を用いる方法、評定者の分類を伴う方法という3種類の方法により、尺度得点に制約を課した。その結果、評定者の間には絵画に対する印象の差がある、という結論が導かれた。そして、印象の差を図として表現したり、評定者をグループにまとめることで、評定者間の差がとらえられた。

第6章では、項目パターン分類の方法の考え方を、2つの質的項目群に拡張すること



を試みた。新しい性格テストバッテリーと従来のそれとの比較や、入学試験の成績と入学後の学業成績との比較等のために、2つの項目群が得られることがある。その場合、どのような性格特性が関連しているのか、入学後の学力と関係している入学試験の項目はどれか、といったことが関心の対象となる。2つの項目群に対しては、正準相関分析が多く用いられてきた。しかし、名義尺度のデータには適用できない。結果の解釈には正準構造の回転が必要である、といった問題点が指摘されていた。本論文では、各項目群において尺度を構成する際に、項目群間で対応する次元の尺度得点間の相関を高くすることを提案した。その結果、各項目群内で項目をそれぞれが一次元性を持つ  $G$  個のグループに分類し尺度得点を求めると同時に、項目群の間で関連する項目や特性を見出すことができるようになった。求められる項目のグループは一次元性を持つため、結果の解釈も容易である。

論文では、数値例として2つの人工データと、経済的不平等さと政治的不安定性さに関するデータ、絵画に対する印象と絵画の形状的特徴についてのデータという2つの実データを分析した。その結果、名義尺度などカテゴリの順序が分からず正準相関分析が適用できない場合でも、カテゴリを順序づけ、項目群間の関連を示せること、他の項目と関連の低い不適当な項目が含まれていても、それらの影響を取り除き解釈しやすい結果が得られること、といった手法の特徴が明らかにされた。

第7章では、本論文で提案された一般化等質性分析を用いた尺度構成法についての結論と今後の展望がまとめられている。

最後に、質的データのための尺度構成法として本論文で提案した方法が貢献する点をまとめると、

- ・カテゴリの順序があらかじめ知られていなくともよい。このため名義尺度や順序尺度を間隔尺度と見なすといった無理な仮定を置く必要がない。
- ・図に頼ることなく一次元性を持った項目を選び出すことができる。また項目の選択のために回転など別の基準を用いる必要もない。
- ・基本的な考え方や計算方法は単純であるため、項目群が複数の場合や多相データなど複雑なデータに対して拡張することが容易である。

となる。これらの点は尺度構成において重要であり、現実に狭義の一次元尺度構成を行う上で従来の他の方法に比べて優れていると言える。

