

# 固体ヘリウムの核磁気緩和時間に関する研究

——現象論的モデルにもとづく $T_1$ および $T_2$ の導出——

日本歯科大学 新潟歯学部

松 元 和 幸

## 目次

1.	この研究の目的	1
2.	$T_1$ および $T_2$ にかんする理論	
2-1	ヒートバスモデル	13
2-2	スペクトル関数による公式	16
2-3	$T_2$	20
2-4	バンブレックのモーメント	22
3.	高密度相HCPヘリウム3における異方性	
3-1	HCP単結晶における $T_2$ の断熱的部分	25
3-2	バンブレックの二次のモーメント	27
3-3	バンブレックの四次のモーメント	30
3-4	数値計算の結果	39
3-5	多結晶平均	44

4.	HCPヘリウム3における基底状態の分析	
4-1	現象論的モデルハミルトニアン	53
4-2	現象論的結果を再現するミクロな模型	59
5.	BCCヘリウム3における $M_4$ の計算	
5-1	二次と四次のモーメント	71
5-2	実験結果との比較	76
6.	まとめと将来の展望	84
	文献リスト	87

①

## 固体ヘリウムの核磁気緩和時間に関する研究

-現象論的モデルにもとづく $T_1$ および $T_2$ の導出-

日本歯科大学 新潟歯学部

松元 和幸

### 1章 この研究の目的

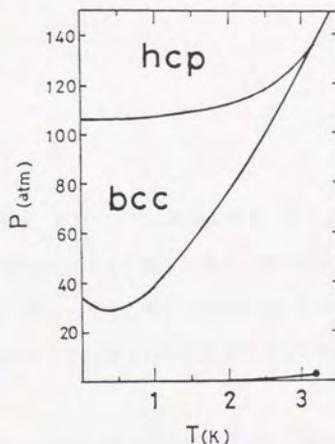
この研究は固体ヘリウムの核磁気に関する性質を、核磁気緩和時間をもとめることによって明らかにして行こうとするものである。具体的には核磁気緩和時間  $T_1$  および  $T_2$  を現在ひろく受け入れられている現象論的なモデルにもとずいて計算した。まずこの1章では、研究の詳しい内容に立ち入るまえに、この研究が行われるにいたった背景あるいは動機について述べることからはじめたいと思う。

よく知られているようにヘリウムは質量が小さいため量子効果がおおきく、常圧下では絶対零度まで固化しない。 $^3\text{He}$ の場合、固体は35気圧以上の圧力をくわえてはじめてえられる(図1-1参照)。こうしてえられた固体ヘリウムは原子の零点振動がおおきく、量子固体とよばれている。

量子固体のいちじるしい特徴は量子トンネル効果がうみだす交換相互作用である。 $^3\text{He}$ は核スピンの1/2のフェルミオンであり交換相互作用はこれら核スピンの間に作用する。その結果、

核スピンは、融解圧での場合、約 1 mK で核磁気秩序状態に転移する。この磁気構造は、オシエロフ、クロス、フィッシャーによって U 2 D 2 とよばれるスピン配列であることがつきとめられた。(1)-(3)このスピン構造についてはのちほどあらためて説明する。

図 1-1



$^3\text{He}$ の相図

固体ヘリウムの磁性理論を歴史上はじめて考察したのは、ベルナードとプリマコフであるといわれている。(4)その文献のなかで、固体ヘリウム3の磁性は、反強磁性的近接相互作用をもつハイゼンベルグモデルでよく記述されるとかながえられている。そうした結論がみちびかれた要点を以下に説明しておこう。ハミルトニアンはつぎのように記述される。

$$H = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m} p_i^2 + \sum_{(i,j)} V_{i,j} \quad (1-1)$$

$p_i$  は  $i$  番目の原子の運動量、 $m$  はヘリウム原子の質量である。そして、 $V_{i,j}$  は  $i$  番目と  $j$  番目の原子間にはたらく相互作用である。固体状態では原子は格子点によく局在しているとかがえることができる。そこで、ヘリウム原子が各格子点によく局在していて、量子論特有のトンネル効果によってときたまその位置をいれかえる効果を交換相互作用というかたちであらわすことを考えよう。

まず、あるひとつの原子がある格子点  $R$  に局在している波動関数をスピン関数もふくめて  $\phi(r)$  とする。もちろん  $r$  はスピン座標を含んでいるとする。それぞれの原子が各格子点に局在していると、その原子配置に対応して波動関数  $\phi$  の積がきまる。そして、その波動関数の積を完全反対称化することによって全波動関数がえられるでしょう。つまり、具体的にはつぎのような表式を想定する。

$$\Psi = \sum_P (-)^P P \Phi(r_1, \dots, r_N) \quad (1-2)$$

$$\Phi(r_1, \dots, r_N) = \phi_1(r_1) \phi_2(r_2) \dots \phi_N(r_N) \quad (1-3)$$

Φは各格子点に上下いずれかの向きのスピン関数を指示することによってきまる。スピンの配置は $2^n$ 通りあるからこうしたΦも $2^n$ 通りある。ハミルトニアン(1-1)式をこうしたΦの間でつくられたマトリックスで表現する。その結果、(1-1)式はスピンオペレーターだけがかかれた実効的ハミルトニアンであらわされ、それを $2^n$ 次元のスピン空間のなかで対角化すればよい。すなわち、固体の状態では基底状態からの低エネルギー励起は実効的ハミルトニアン、

$$H = \sum_{(i,j)} J_{ij} P^{\sigma} \quad (1-4)$$

で記述されることになる。 $P^{\sigma}$ はスピンの交換演算子で、 $J_{ij}$ は $P^{\sigma}$ に対応する交換積分といわれる。最近接原子対の交換相互作用以外の $J_{ij}$ が無視できる場合は、

$$H = \sum_{(i,j)} \frac{J}{2} (P_{ij}^{\sigma} + P_{ij}^{\sigma^{-1}}) \quad (1-5)$$

となる。ただし、二体の置換は反強磁性的相互作用を結論することがしられているので、 $J$ の符号は正でなければならない。そして、置換の演算子 $P_{ij}^{\sigma}$ はスピン演算子と

$$P_{ij}^{\sigma} = \frac{1}{2} (1 + 4(S_i \cdot S_j)) \quad (1-6)$$

によってむすびつけられている。以上のようにかんがえてくと固体 $^3\text{He}$ は近接相互作用型の反強磁性体であるということが結論される。実際、1960年代から70年代のはじめまでは、このような結論にもとずいて実験データが整理されていた。ところが、その後の本格的かつ継続的な実験的研究が1970年代なかばからすすむにつれて、このような簡単なモデルではうまく説明できない現象が発見されてきたのである。(5)-(7)

まず、高温における基礎的物理量の測定からいくつかの矛盾があらかとなった。モデルハミルトニアン(1-5)式にもとづいて、高温でのふるまいを高温展開の方法でもってしらべることにする。帯磁率および圧力の高温展開の表式はつぎのようになる。

$$\chi^{-1} = T - \Theta + \frac{B}{T} \quad (1-7)$$

$$P = \frac{e_2}{8T} + \left( \frac{\mu r H}{2T} \right)^2 \times \frac{\Theta}{2} \quad (1-8)$$

ただし、この式のなかで  $\Theta$  は体積についての微分をあらわす。これらの式のなかにあらわれている  $\Theta$ 、 $B$ 、 $e_2$  は交換積分  $J$  とつぎのような関係式でむすびつけられる。

$$\Theta = 4J \quad (1-9)$$

$$B = 4J^2 \quad (1-10)$$

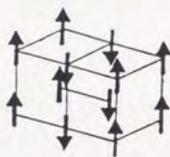
$$e_2 = 12J^2 \quad (1-11)$$

まず、帯磁率の高温展開におけるキュリー・ワイス則からのずれ  $B$  は(1-10)式によると正になってしまうが、実験的には負であることがわかっている。さらに、キュリー・ワイス温度から(1-9)式をつかってもとめられる  $J$  の値と磁場中での圧力の測定からえられる  $J$  の値、つまりモル体積の違ういくつかの試料について(1-8)、(1-9)、(1-11)式からもとめられる  $J$  の値には

かなりおおきなくいちがいがみられる。高温領域におけるこれらの矛盾はモデル(1-5)式の妥当性をうたがわせるに十分といえるであろう。

系の温度を上げていくと磁氣的秩序状態に転移するが、この相転移は転移の前後でのエントロピー変化が  $0.41xR\ln 2$  にもなるつよい一次転移である。そもそもモデルハミルトニアン(1-5)式からは一次転移は不可能である。さらに、1980年に決定された基底状態のスピンの構造は単純な反強磁性構造とはまったく異なるものであった。この構造はU2D2とよばれていて、図1-2にしめしてあるように強磁性的な配列をした平面、たとえばz-x面がy方向に up, up, down, down とならんだ配置をとる。このU2D2スピンの構造の発見におよんで、最近接相互作用型のハイゼンベルグ反強磁性モデルは見直しを余儀なくされるようになった。

図 1-2



U2D2

低磁場相の磁気構造

こうしたあたらしい実験データを矛盾なく説明できる模型はリング状多粒子置換の模型である。それは(1-4)式のなかでPが(12)、(123)、(1234)型のそれぞれ、対、三粒子クラスター、四粒子クラスターの場合のみ考慮するものである。この仮定からつぎのような現象論的ハミルトニアンがえられる。

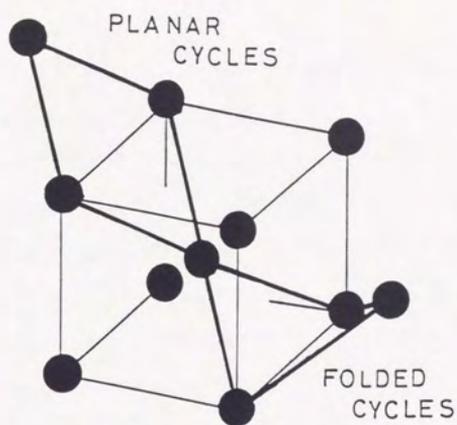
$$H = - \sum_n \sum_{(i,j)} 2J_n(S_i \cdot S_j) - \sum_{ijkl} 4K_p S_{ijkl} \quad (1-12)$$

$$S_{ijkl} = (S_i \cdot S_j)(S_k \cdot S_l) + (S_i \cdot S_k)(S_j \cdot S_l) + \lambda (S_i \cdot S_l)(S_j \cdot S_k) \quad (1-13)$$

特にロジェー、デリユ、ヘザリントンによる2パラメータモデルは固体ヘリウム3の多くの磁気的性質を説明できるためこの分野では標準的な役割を果たすようになっている。(8)-(14)このモデルでは、(1-4)式のなかの $J_p$ は、三粒子置換と四粒子置換のふたつの交換過程によるものだけにかぎられるとしている。最近接対の $J_p$ もゼロとかんがえる。

BCC格子のばあい近接粒子対だけからなる四粒子クラスターは二種類あって、図1-3に示めたようにそれぞれプラナー型、フォールデッド型とよばれている。

図 1-3



4粒子クラスター（プラナー型、フォールド型）

ロジェー、デリユ、ヘザリントンの2パラメータモデルではこのうちとくにプラナー型の四粒子クラスターをとりあげている。したがってそのモデルハミルトニアンは

$$H = \sum J_t ( P_t + P_t^{-1} ) + \sum K_p ( P_k + P_k^{-1} ) \quad (1-14)$$

となる。そして、現象論的ハミルトニアン(1-12)式と(1-14)式との関係は、

$$J_1 = -6J_t + 3K_p \quad (1-15a)$$

$$J_2 = -4J_t + K_p \quad (1-15b)$$

$$J_3 = K_p/2 \quad (1-15c)$$

$$\lambda = -1 \quad (1-15d)$$

であたえられる。そして、彼らは実験データを整理することによって  $J_t$  と  $K_p$  のパラメータをつぎのように提案したのであった。

$$J_t = -0.13 \quad \text{mK} \quad (1-16)$$

$$K_p = -0.385 \quad \text{mK}$$

さらに、ロジェーはこれらのパラメーターの値をおおまかな方法ではあるが第一原理から計算して、(1-16)式の値とそれほど矛盾がないと主張している。

リング状多粒子置換モデルはさしあたりの成功をおさめたとされてきた。ところが、この解析のなかにはsub-K領域での $T_1$ 、 $T_2$ の交換相互作用による線幅減少の議論がぬけていた。これらはかつて最近接型反強磁性体モデルでよく説明されていたものである。それが4スピン相互作用 $K_p$ に主役がかわった。 $K_p$ がおおきいとすると線幅減少がおおきくなりすぎてしまって、かつて成功していた理論的解釈が破綻してしまう心配もでてくる。この問題は5章で議論される。

高密度HCP相についてはあまり多くのことはわかっていない。ロジェーは交換相互作用のおおきさを第一原理からかなりおおまかな計算をした結果、HCP $^3$ Heについては三粒子置換が支配的であり、したがってHCP $^3$ Heは強磁性的近接相互作用のみのハイゼンベルグ強磁性体であるとしている。(15)

強磁性的核スピンの配列は $\mu$ Kのオーダーであるとされていて、これを確かめるにはかなりの設備と資金を要する。ところで、高温領域では、核磁気緩和時間 $T_1$ 、 $T_2$ についての豊富なデータがすでに蓄積されている。(16)-(35)これらのデータは最近接スピン相互作用モデルでうまく説明できるのであろうか。単結晶のHCP $^3$ Heにおける $T_2$ はかける磁場の結晶軸(c軸)からのずれによって異なった値をしめす。かりにHCP $^3$ HeでもBCCの時とおなじように四粒子置換が小さくないと仮定したら緩和時間 $T_1$ 、 $T_2$ の値やその異方性はどうなるであろうか。この研究では、あるかぎられた範囲ではあるが、実際に緩和時間、そしてその異方性の計算がなされる。

さらに、この研究では現象論的モデルの範囲内ではあるが、HCP相の基底状態について、ある可能性が追求される。高密度HCP相についての実験的研究はこれから本格化するとかんがえられるので、近い将来の発展を射程にいれた本研究はこの分野の研究の流れをさきどりしたものと見えるであろう。

ここでこの論文の概略を説明して、この章をとじることにする。まず2章でNMRの基

本的事実について解説がなされたのち、バンプレックの四次のモーメント $M_4$ についての公式をみちびく。つづいて3章では、具体的に単結晶HCP $^3\text{He}$ について $M_4$ が計算される。

4章では、まったく別の視点からモデルをたててそれがあたえる結果をみちびいてみる。キュリー・ワイス温度が正であることと、基底状態が反強磁性的であることが両立するということがあっても不自然ではないということが主張される。5章では3章でもとめた $M_4$ をBC C $^3\text{He}$ に適用し多粒子置換理論にもとずいたモデルは測定されている $T_1$ をうまく説明することがしめされる。

最後の章ではこの研究分野にかんしてのいくつかのコメントと今後の展望がのべられる。

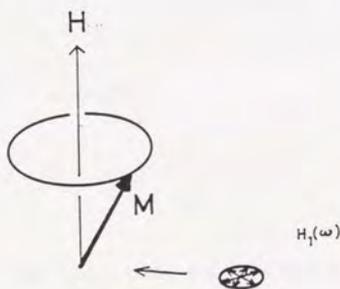
## 2章 $T_1$ および $T_2$ にかんする理論

この章では、いわゆるヒートバスモデルにもとずいて $T_1$ 、および $T_2$ にかんする公式をみちびきだす。これらの結果は一般によく知られているもので、本研究の基礎となっているものである。

### 2-1 ヒートバスモデル

前章ですでにのべたように、この研究の目的は固体ヘリウム3の緩和時間を計算することである。まず、縦緩和時間 $T_1$ および横緩和時間 $T_2$ の説明からはじめることにする。次のような状況を想定してみよう。試料にたいして $z$ 方向に磁場 $H$ がかかっているとす。試料の全磁化 $M$ は図2-1にしめさるるように $H$ のまわりに才差運動をする。このとき回転の角振動数はラーモア振動数 $\omega = \gamma H$ である。ここで $\gamma$ はヘリウム3の磁気回転能率で、 $\gamma/2\pi = 3.24 \times 10^3$  Hz/G という値をとる。

図 2-1

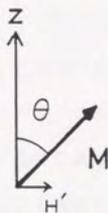


全磁化の才差運動

このように磁化が自由才差運動している試料に、 $x-y$ 面内で回転する微小な交流磁場をくわえてみる。この時、くわえる微小交流磁場の振動数がラーモア振動数 $\omega = \gamma H$ と一致した時には共鳴的な吸収が起こる。

ラーモア振動数で回転している回転系に座標を変換してみると、磁化は図2-2のような静的な磁場をうけているとみなすことができる。

図 2-2



回転座標系での静的磁場

この静的な磁場によって磁化はトルクをうけるので、適当な時間の後には磁化は  $xy$  面内にたおれて  $M_z=0$  となる。そこで、交流磁場をきると磁化は  $M_z=0$  から出発して熱平衡値  $M(T, H)$  へむかって緩和していく。この緩和を特徴づける時間として  $T_1$  が定義される。式でかくと、

$$M_z(t) = M(T, H)(1 - \exp(-t/T_1)) \quad (2-1)$$

となる。

同様に磁化の  $x$  成分  $M_x$  について、それが熱平衡値  $M_x=0$  へ緩和してゆく時間として  $T_2$  が定義される。

$$M_x(t) = M_x(0)\exp(-t/T_2) \quad (2-2)$$

この緩和という現象は非平衡現象であるので、ミクロな力学からの完全な理論によって記述することはたいへんむずかしい。そこで、現象論ではあるが本質をとらえているヒートバスモデルをもちいるのが適当である。このモデルでは、対象としている系がいくつかの熱平衡にある系に分割できて、それら間での熱エネルギー授受を通して全体が最終的な熱平衡に達するとかんがえられている。この時、重要な仮定は全体として熱平衡にいたる途中のそれぞれの瞬間で磁化は熱平衡状態によって定まる値をたもちながら変化すると仮定されることである。したがって理論としては試料の温度に着目しておいて、微小な交流磁場パルスをくわえることによる核スピンのゼーマン系の温度の上がりか、その後まわりの熱浴の温度にもどっていく過程を計算すればよいことになる。(36)

いまかんがえている系ではハミルトニアンは主要部分は交換項とゼーマン項からなっている。そして、高周波によるスピンの逆転を含むゼーマン系は、その中で熱平衡がすみやかに成立して、やはり熱平衡にある交換相互作用の系よりも温度が高くなっていると仮定する。そのあいだのエネルギー授受を引き起こすのは双極子相互作用である。その大きさは、エネルギーとしては交換相互作用やゼーマンエネルギーよりも小さい。全ハミルトニアンはそれらの和であるから、

$$H = H_{ex} + H_z + H_{dip} \quad (2-3)$$

とかける。双極子相互作用を摂動項とした摂動論を適用することにより、系の時間発展をしらべることができる。その結果  $T_1$  はつぎの式であらわされる。

$$\frac{1}{T_1} = \frac{\text{Tr} \int dt \{ [I_z, \text{Hdip}] [\text{Hdip}'(t), I_z] \}}{\text{Tr} \{ I_z^2 \}} \quad (2-4)$$

ここで、 $I_z$  は核スピンの z 成分の和  $I_z = \sum I_{i,z}$  である。核磁気共鳴に関する文献では  $S_z$  ではなく  $I_z$  がしばしばもちいられる。なお、(2-4)式の導出では、高温でなりたつ近似が用いられている。

## 2-2 スペクトル関数による公式

つぎに(2-4)式をよりあつかいやすい形に書き直すことを考える。そのためには双極子相互作用の具体的な表式が必要となる。双極子相互作用の表示としては関与する2つのスピンの z 成分のあげさげに注目して行列要素を表示する。すなわち、

$$\text{Hdip} = \sum_{\mathbf{m}} G_{\mathbf{m}} \quad (2-5)$$

$$= -\gamma^2 \hbar \sum_{\mathbf{m}} \frac{F_{\mathbf{m},i,j}}{r_{i,j}^3} T_{\mathbf{m},i,j} \quad (2-6)$$

と双極子相互作用を分解しておく。空間座標にかんする部分は球面調和関数  $Y_{2m}$  をもちいてつぎのようにかきあらわされる。

$$F^m = (6/5) \cdot \sqrt{4\pi} Y_{2m} \quad (2-7)$$

具体的には、

$$F_0 = \sqrt{3/2} \cdot (3\cos^2\theta - 1) \quad (2-7a)$$

$$F^{\pm 1} = \mp 3\sin\theta \cos\theta \exp(\pm i\phi) \quad (2-7b)$$

$$F^{\pm 2} = (3/2)\sin^2\theta \exp(\pm 2i\phi) \quad (2-7c)$$

である。スピン空間に作用する演算子の部分はずぎのようになる。

$$T_0 = (1/\sqrt{6})\{ 3I_1^2 I_2^2 - (I_1 \cdot I_2) \} \quad (2-8a)$$

$$T_{\pm 1} = \frac{1}{2}\{ I_1^{\pm} I_2^2 + I_1^2 I_2^{\pm} \} \quad (2-8b)$$

$$T_{\pm 2} = \frac{1}{2} I_1^{\pm} I_2^{\pm} \quad (2-8c)$$

これらの表式を(2-6)式に代入し、(2-4)式にもちいると、 $1/T_1$ がつぎのようにあらわされる。

$$\frac{1}{T_1} = \sum_{\mathbf{m}} m^2 \int d\tau \frac{\text{Tr} G_{-\mathbf{m}} G_{\mathbf{m}}(t) \exp(i\mathbf{m}\omega)}{\text{Tr}\{I_z^2\}} \quad (2-9)$$

ただし、

$$I_z = \sum_i I_i^2 \quad (2-10)$$

で、 $G_n(t)$ は

$$G_n(t) = \exp(i\omega t)G_n \exp(-i\omega t) \quad (2-11)$$

と定義される演算子である。さらに、ここで相関関数  $g_n(t)$  をつぎのように定義しておく。

$$g_n(t) = \frac{\text{Tr}\{[I_z, G_n][G_n^\dagger(t), I_z]\}}{\text{Tr}\{I_z^2\}} \quad (2-12)$$

この相関関数 $g_n(t)$ のフーリエ変換としてスペクトル密度関数  $J_n(\omega)$  を導入する。

$$J_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt g_n(t) e^{-i\omega t} \quad (2-13)$$

このスペクトル密度関数をつかうと、 $T_1$  はつぎのようにあらわすことができる。

$$\frac{1}{T_1} = J_1(\omega) + 4J_2(2\omega) \quad (2-14)$$

これは、よく知られた公式である。

### 2-3 $T_2$

$T_2$  についても  $T_1$  とおなじくヒートバスモデルにもとづいて公式をみちびくことができる。すでに前の節でのべたように横緩和時間  $T_2$  は磁化の  $x$  成分の時間変化からもとめられる。磁化はラーモア振動数の角速度で回転しているので、回転座標系にのった場合に観測される磁化の  $x$  成分を  $\langle I_x \rangle$  として、

$$\frac{d}{dt} \langle I_x \rangle = - \frac{1}{T_2} \langle I_x \rangle \quad (2-15)$$

となる。ただし、 $T_2$  はつぎの公式によってあたえられる。

$$\frac{1}{T_2} = \Sigma \frac{\int dt \exp(i\omega t) \text{Tr}\{[I_X, G_n(t)][G_{-n}, I_X]\}}{\text{Tr}\{I_X^2\}} \quad (2-16)$$

つぎに(2-16)式を  $T_1$  のときとおなじくスペクトル密度関数をもちいてあらわすためにはつぎのような関係式に注意すればよい。

$$[I_X, T_0] = \sqrt{3/2} (T_1 + T_{-1}) \quad (2-17a)$$

$$[I_X, T_1] = T_2 + \sqrt{3/2} T_0 \quad (2-17b)$$

$$[I_X, T_2] = T_1 \quad (2-17c)$$

こうして、 $1/T_2$  をスペクトル密度関数であらわすと、

$$\frac{1}{T_2} = \frac{3}{2} J_0(0) + \frac{5}{2} J_1(\omega) + J_2(2\omega) \quad (2-18)$$

となる。

さて、この表式において、磁場をおおきくしていった極限をかながえてみよう。そのときには、(2-18)式における二、三項目は小さくなってしまい、一項目の $(3/2)J_0(0)$ だけが残る。この残った部分をとくに、断熱的 $T_2$ とよんで、 $T_2'$ とかく。つぎの3章ではこの断熱的 $T_2'$ が、くわしくしらべられる。

## 2-4 バンブレックのモーメント

前節までの議論から緩和時間をもとめるためには結局、スペクトル密度関数、あるいは相関関数 $g_0(t)$ をもとめればよいことがわかった。この相関関数を計算するためには、以下に述べた方法がよくつかわれている。まず、 $g_0(t)$ を $t$ が小さいとして展開してその係数を $M_{2n}$ とおく。

$$\begin{aligned} g_0(t) &= 1 - \frac{M_2 t^2}{2!} + \frac{M_4 t^4}{4!} - \frac{M_6 t^6}{6!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{M_{2n} t^{2n}}{(2n)!} \end{aligned} \quad (2-19)$$

この展開係数 $M_{2n}$ はバンブレックのモーメントと呼ばれているもので(2-12)式より二次、四次のモーメントはそれぞれつぎのようにかきあらわせることができる。

$$M_2 = - \frac{\text{Tr}\{[G_0, Ix]^2\}}{\text{Tr}\{Ix^2\}} \quad (2-20)$$

$$M_2 = \frac{\text{Tr}\{[\text{Hex}, [G_0, Ix]]^2\}}{\text{Tr}\{Ix^2\}} \quad (2-21)$$

つきに、スペクトル密度関数がガウス型であることを仮定し、総和則、

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{T_1} d\omega = \pi M_2 \quad (2-22)$$

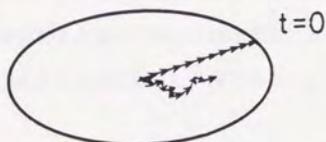
が成立することに注意すると、断熱的  $T_2'$  はつぎのようにもとまる。

$$\frac{1}{T_2'} = \sqrt{(\pi/2)} \left( \frac{M_2}{M_4} \right)^{3/2} \quad (2-23)$$

これがこの節の主要な結果である。こうして、実際に問題となるのは(2-20)、(2-21)式であらわされるモーメントであるということがわかった。このモーメントの計算が本研究のオリジナルな部分で、つぎの章でくわしく計算される。

この章の最後に、スペクトル密度関数をガウス型に仮定することについて述べておきたい。いまかんがえているのは、 $M_x$  でこれはヘリウム原子がそれぞれもっている磁気モーメントの和から成り立っている(図2-3)。いまひとつのスピンの注目してみると双極子相互作用はこのスピンにあたかもランダムにはたらいっているようにみせそうである。すると図に示めしてあるように時間がたつにつれてスピンはそれぞれかってな方向をむいてしまい、このときスピンの矢印は平面上であたかもランダムウォークのようにふるまうようにみえる。したがって時間相関がガウス型であることは実際の系がこういった状況に近いことを想像させる。

図 2-3



磁化の横成分の振舞い

### 3章 高密度相HCPヘリウム3における $T_2$ の異方性

この章では、単結晶HCPヘリウム3に関する $T_2$ の断熱的部分を求め、とりわけ単結晶をとりあげる理由は、HCP格子の場合、 $T_2$  につよい異方性が観測されているからである。そこで、この章では、磁場の角度による $T_2$ の変化を理論的に求めておいて実験結果と比較しようというわけである。

#### 3-1 HCP単結晶における $T_2$ の断熱的部分

大きな圧力をかけて固体 $^3\text{He}$ のモル体積をちいさくすると、原子の交換はおこりにくくなる。したがって、高密度HCP相においては交換相互作用のおおきさは劇的にちいさくなって、モル体積  $19.4\text{cm}^3/\text{mol}$  のとき、およそ  $10\mu\text{K}$  の程度になる。

そうすると、HCPヘリウム3の磁性をしらべようとするならば、それだけの超低温まで試料をひやすさねばならない。ところが動的現象をとらえるNMRをもちいるとかなり高温の領域でも、小さいはずの交換相互作用の効果の片鱗を見ることができる。もし十分な測定精度で測定がなされるならば、本来なら超低温でしか得られないようなマイクロな情報を得ることができるかもしれない。

HCP格子の場合、かける磁場の方向はc軸にたいする角度 $\Theta$ と方位角 $\Phi$ によって指定できる。緩和時間は、かけた磁場の方向に大きく依存して変化するであろう。実際、この異方性は1976年に観測されているが、いままでに理論的にじゅうぶんな分析はなされていない。ただし、近接相互作用のみを考慮したモデルについての計算は最近、マランとネルソンによっておこなわれた。(37)この章ではこの異方性をより一般的な相互作用についてくわしくしらべる。

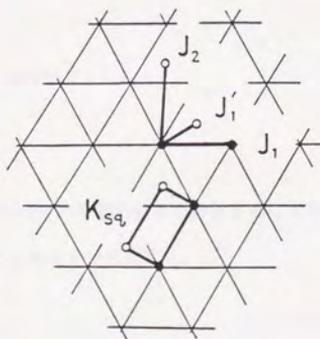
まずはじめに、モデルハミルトニアンについてふれておく。この研究ではリング状多粒子置換モデルを考察の対象にするので、現象論的な次のハミルトニアンをかながえる。

$$\text{Hex} = -\sum_n \sum_{\langle i, j \rangle} 2J_n(I_i \cdot I_j) - \sum 4K_{sq} S_{ijkl} \quad (3-1)$$

$$S_{ijkl} = (I_i \cdot I_j)(I_k \cdot I_l) + (I_i \cdot I_k)(I_j \cdot I_l) \\ + \lambda(I_i \cdot I_l)(I_j \cdot I_k) \quad (3-2)$$

ここで、 $J_n$  は  $n$  番目のペア型相互作用で、ここでは二つの型の近接相互作用、すなわち基底面内および基底面外の近接相互作用、さらには次近接相互作用が考慮される。 $K_{sq}$  は正方形のかたちの四体クラスター相互作用である。これら相互作用のようすは図3-1 にしめておいた。この図のなかで、黒丸は基底面にある原子をあらわしており、白丸は基底面より一層上面にある原子をさしている。

図 3-1



HCP格子におけるいくつかの相互作用:

黒丸は基底面にある原子を指し、白丸は1段上の原子層にある原子をしめす。

この章ではこのハミルトニアン(3-1)式にもとづいて、バンプレックの二次と四次のモーメントを計算する。

### 3-2 バンプレックの二次のモーメント

まずはバンプレックの二次のモーメントをもとめる。これに関しては前の章ですでもとめた公式がある。くり返すと、

$$M_2 = - \frac{\text{Tr}\{[G_0, I_x]^2\}}{\text{Tr}\{I_x^2\}} \quad (3-3)$$

ここで、 $I_x = \sum I_i^x$  である。ヘリウム3の核スピンは1/2であることに注意して、この公式の分母を計算する。原子数をNとして、

$$\text{Tr}\{I_x^2\} = N \times \text{Tr}\{I_i^2\} = N/4 \quad (3-4)$$

となる。つぎに(3-3)式の分子も簡単に計算することができる。分子のなかにある交換子については、つぎのような関係式が成立する。

$$[G_0, I_x] = \sqrt{\frac{3}{2}} (T_i + T_{-i}) \quad (3-5)$$

ここで、右辺にあらわれている $T_1$ 、 $T_{-1}$ は(2-8b)式で定義されている演算子である。結局、(3-4)、(3-5)式を(3-3)式に代入して、二次のモーメントはつぎのようにもとまる。

$$M_2 = \gamma^4 \hbar^2 \frac{3}{8} \sum F_{aij} \frac{1}{r_{ij}^6} \quad (3-6)$$

さらに、(3-6)式のなかで空間に依存する部分をかきくすために、つぎの球面調和関数の結合公式をもちいる。

$$Y_{1,1} m_1(\theta, \phi) Y_{1,2} m_2(\theta, \phi) =$$

$$\sum_1 \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)} C(l_1, l_2, l; m_1, m_2) C(l_1, l_2, l; 0, 0) Y_{l, m_1+m_2}(\theta, \phi)$$

(3-7)

ここで $C(l_1, l_2, l; m_1, m_2)$ はクレブシューゴルダン係数である。こうして、(3-6)式はつぎのように書きかえられる。

$$\begin{aligned}
M_2 = & (9/4)\gamma^4 \hbar^2 \left[ (1/5) \sum 1/r_j^6 \right. \\
& + (1/7) \sum (3\cos^2 \theta_j - 1)/r_j^6 \\
& \left. + (9/140) \sum (35\cos^4 \theta_j - 30\cos^2 \theta_j + 3)/r_j^6 \right] \quad (3-8)
\end{aligned}$$

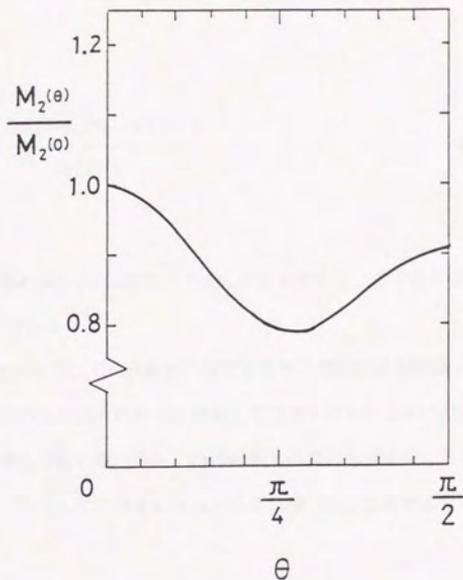
だし、角度 $\theta_j$ は格子点ベクトル $r_j$ と磁場のなす角である。

ここであらわれた格子点についての和は計算機を使って直接的に計算する。HCP格子についての磁場の角度依存性については実質的には3項目が支配して

$$\begin{aligned}
M_2 = & \left( \frac{9}{20} \right) \times 14.45 \frac{(\gamma \hbar)^2}{d^6} \\
& \times \{ 1 + 0.022 (35\gamma_z^4 - 30\gamma_z^2 + 3) \} \quad (3-9)
\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\gamma_z$ は磁場のc軸についての方向余弦である。図3-2にはこうして求められた $M_2$ の $\theta$ 依存性がしめしてある。なお、 $M_2$ は方位角によっては変化しない。もちろんこれは格子の対称性のためである。

図 3-2



M2の角度変化

### 3-3 バンプレックの四次のモーメント

つぎにバンプレックの四次のモーメントをもとめることにする。これはこの研究での主要な結果である。二次のモーメントと同様に四次のモーメントについても公式を前の章でみちびいておいた。くり返すと、

$$M_4 = \frac{\text{Tr}\{[\text{Hex}, [G_0, I_x]^2]\}}{\text{Tr}\{I_x^2\}} \quad (3-10)$$

である。まず分母は前の節の(3-4)式で、すでにもとめてある。分子を計算するにはやはり前節の(3-5)式が部分的につかえる。

分子を計算するためには、(3-5)式と交換相互作用との交換子を計算する必要がある。そのため、ハミルトニアンの中のそれぞれに対応して交換子をいくつかにわけてかんがえることにする。まず二体の相互作用の部分をも  $S_1$ 、四体の相互作用の部分をも  $S_2$ 、そしてそれらの積からなる部分をも  $S_3$  とする。こうして、分子にあらわれる交換子は、つぎのようになる。

$$[\text{Hex}, [G_0, I_x]] = S_1 + S_2 + S_3 \quad (3-11)$$

ここで、 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  の表式を得るのに以下の関係式をもちいる。

$$[(I_i \cdot I_j), T_{i+j} + T_{-i-j}] = 0 \quad (3-12)$$

$$\begin{aligned}
& [(I_i \cdot I_j), I_i^Z I_k^Y + I_i^Y I_k^Z] \\
& = i \{ (I_i^X I_j^Y - I_i^Y I_j^X) I_k^Z + (I_i^Z I_j^X - I_i^X I_j^Z) I_k^Z \} \quad (3-13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(I_i \cdot I_j)(I_k \cdot I_l), I_i^Z I_k^Y + I_i^Y I_k^Z] \\
& = i/4 \{ (I_i^X I_j^Y - I_i^Y I_j^X) I_l^Y + (I_i^Z I_j^X - I_i^X I_j^Z) I_l^Z \\
& \quad + (I_k^X I_l^Y - I_k^Y I_l^X) I_i^Y + (I_k^Z I_l^X - I_k^X I_l^Z) I_i^Z \} \quad (3-14)
\end{aligned}$$

$S_1, S_2, S_3$  はそれぞれ以下のようになる。

$$S_1 = \sum_{(ijk)} \{ R_1(i:j|k) + R_1(k:i|j) + R_1(j:k|i) \} \quad (3-15)$$

$$S_2 = \sum_{(ijkl)} \{ [R_2(i:j|k|l) + R_2(k:l|j|i) + R_2(j:i|l|k) + R_2(l:k|i|j)]$$

$$+ [R_2(i:k|j|l) + R_2(j:l|k|i) + R_2(k:i|l|j) + R_2(l:j|i|k)]$$

$$+ \lambda [R_2(i:l|k|j) + R_2(k:j|l|i) + R_2(l:i|j|k) + R_2(j:k|i|l)] \}$$

(3-16)

$$S_3 = \sum_{(ijkl:m)} \{ R_3(i:j|m|kl) + R_3(k:l|m|ij)$$

$$+ R_3(i:k|m|jl) + R_3(j:l|m|ik)$$

$$+ \lambda [ R_3(i:l|m|jk) + R_3(j:k|m|il) ] \}$$

(3-17)

ただし、ここででてきた  $R_1, R_2, R_3$  のオペレーターは

$$M_{ij} = \frac{F_{\theta_{ij}}}{(r_{ij}/d)^3} \quad (3-18)$$

によって定義された記号  $M_{ij}$  を用いて、

$$R_1(i: j|k) = -\sqrt{(3/2)} \gamma^2 \hbar / d^3 (2J_{ij})(M_{ij} - M_{jk})$$

$$\times [(I_i^X I_j^Y - I_i^Y I_j^X) I_k^Z + (I_i^Z I_j^X - I_i^X I_j^Z) I_k^Y] \quad (3-19a)$$

$$R_2(i: j|k|l) = -\sqrt{(3/2)} \gamma^2 \hbar / d^3 \times K_{ijkl} (M_{ik} - M_{jk})$$

$$\times [(I_i^X I_j^Y - I_i^Y I_j^X) I_k^Z + (I_i^Z I_j^X - I_i^X I_j^Z) I_k^Y] I_l^Z \quad (3-19b)$$

$$R_3(i: j|m|k|l) = -\sqrt{(3/2)} \gamma^2 \hbar / d^3 \times 4K_{ijkl} (M_{im} - M_{jm})$$

$$\times \{ [(I_i^X I_j^Y - I_i^Y I_j^X) I_m^Z + (I_i^Z I_j^X - I_i^X I_j^Z) I_m^Y] (I_k \cdot I_l) \} \quad (3-19c)$$

である。ただし、 $d$  は近接原子間の距離である。

次に(3-11)式にあらわれている  $S_1$ 、 $S_2$  を変形する。スピンのトレースをとることを考えて和のとりかたをかえてみる。スピンについてのオペレータが注目している型のみになるように整理してみる。こうすると  $S_1$ 、 $S_2$  はそれぞれ次のように変形される。

$$S_1 = \sum_{(ijk)} \{ S_1(i:j:k) + S_1(j:k:i) + S_1(k:i:j) \} \quad (3-20)$$

$$S_2 = \sum_{(ijkl)} \{ S_2(i:jk|l) + S_2(l:jk|i) + S_2(j:il|k) + S_2(k:il|j) \} \quad (3-21)$$

ただし、この表式のなかに現れているオペレーターはそれぞれ

$$S_1(i:j:k) = -2\sqrt{(3/2)}x\gamma^2\hbar/d^3 \{ J_{ij}(M_{ik}-M_{jk}) + J_{ik}(M_{ij}-M_{jk}) \}$$

$$x \left( \frac{X_y Y}{I_i I_j I_k} - \frac{X_z Z}{I_i I_j I_k} \right) \quad (3-22a)$$

$$S_2(i:jk|l) = -\sqrt{(3/2)} \chi \gamma^2 \hbar / d_3 \times K_{ijkl} \times$$

$$\{ (2M_{j1} - M_{j1} - M_{k1}) (I_j^x I_j^y I_k^y - I_j^x I_j^z I_k^z) \\ + ((1+\lambda)M_{j1} - \lambda M_{k1} - M_{i1}) (I_j^x I_k^y I_l^y - I_j^x I_k^z I_l^z) \\ + ((1+\lambda)M_{k1} - \lambda M_{j1} - M_{i1}) (I_k^x I_j^y I_l^y - I_k^x I_j^z I_l^z) \}$$

(3-22b)

である。もうひとつの項  $S_3$  については(3-19c)式をそのままの形で使うことにする。

さて、ここまで変形しておくとな実際にトレースをとることができて、その結果バンプレックの四次のモーメントはつぎのような形にまとめることができる。

$$M_4 = \frac{\text{Tr}\{(S_1+S_2+S_3)^2\}}{\text{Tr}\{I_x^2\}} \quad (3-23)$$

$$= X_1 + X_2 + X_3 + X_{12} \quad (3-24)$$

ただし、ここでの各項はつぎのような、内容をもっている。

$$X_1 = 1/N \{ \sum \{ L_1(ij:k) + L_1(jk:i) + L_1(ki:j) \} \} \quad (3-25)$$

$$L_1(ij:k) = (3/4) \gamma^4 \kappa^2 / d^6$$

$$\times \{ 2J_{ij}^2 (M_{ik} - M_{jk})^2 + 2J_{ij} J_{jk} (M_{ik} - M_{jk})(M_{ik} - M_{ij}) \} \quad (3-26)$$

$$X_2 = (3/8N) \gamma^4 \kappa^2 / d^6 \sum K_{sq} \{ 6(M_{ii} + M_{jk})$$

$$+ 2(1 + \lambda + \lambda^2)(M_{ij} + M_{ki} + M_{ik} + M_{ji})$$

$$- 3(M_{ii} + M_{jk})(M_{ij} + M_{ki} + M_{ik} + M_{ji})$$

$$+ (1 - 2\lambda - 2\lambda^2)(M_{ij} + M_{ki})(M_{ji} + M_{ik}) \} \quad (3-27)$$

$$\begin{aligned}
X_3 = \Sigma (3/8N) \gamma^4 \kappa^2 / d^6 \text{ Ksq} \{ & (8+4\lambda+3\lambda^2)(M_{i_1}^2+M_{j_1}^2+M_{k_1}^2+M_{i_2}^2) \\
& + (4-8\lambda-6\lambda^2)(M_{i_1}M_{i_2}+M_{j_1}M_{j_2}) \\
& - 10(M_{i_1}M_{j_2}+M_{k_1}M_{i_2}+M_{i_1}M_{k_2}+M_{j_1}M_{i_2}) \} \quad (3-28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{12} = \Sigma (3/4N) \gamma^4 \kappa^2 / d^6 \text{ Ksq} \\
\{ & (2(1+2\lambda)J_{i_1} - (1-\lambda)(J_{k_1}+J_{j_1})) M_{i_1} M_{i_2} \\
& + (2(1+2\lambda)J_{j_1} - (1-\lambda)(J_{k_1}+J_{i_1})) M_{i_1} M_{j_1} \\
& + (2(1+2\lambda)J_{i_1} - (1-\lambda)(J_{i_1}+J_{j_1})) M_{j_1} M_{k_1} \\
& + (2(1+2\lambda)J_{j_1} - (1-\lambda)(J_{i_1}+J_{j_1})) M_{i_1} M_{k_1} \\
& - 2( (1+2\lambda)(J_{i_1}+J_{j_1}) + (2+\lambda)(J_{i_1}+J_{j_1}) ) M_{i_1} M_{k_1} \\
& - 2( (1+2\lambda)(J_{i_1}+J_{j_1}) + (2+\lambda)(J_{i_1}+J_{k_1}) ) M_{i_1} M_{j_1} \\
& + ( (5+\lambda)J_{i_1} + (1-\lambda)J_{j_1} ) M_{i_1} M_{i_2} + ( (5+\lambda)J_{i_1} + (1-\lambda)J_{j_1} ) M_{j_1} M_{i_2} \\
& + ( (5+\lambda)J_{j_1} + (1-\lambda)J_{k_1} ) M_{i_1} M_{j_2} + ( (5+\lambda)J_{j_1} + (1-\lambda)J_{i_1} ) M_{k_1} M_{i_2}
\end{aligned}$$

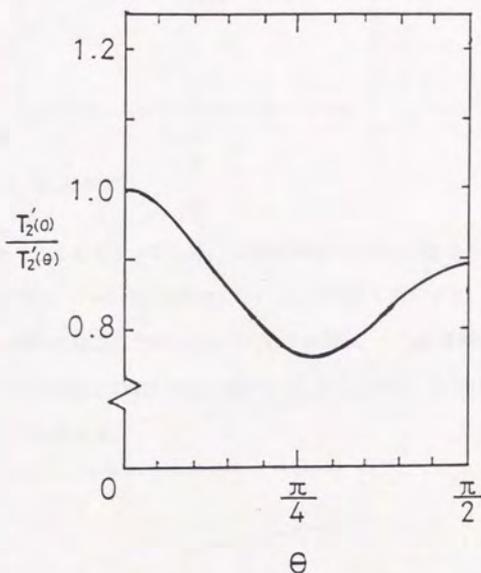
$$\begin{aligned}
& + ( (5+\lambda)J_{ki}+(1-\lambda)J_{ji} )M_{ik}M_{jk} + ( (5+\lambda)J_{ki}+(1-\lambda)J_{ik} )M_{ji}M_{ij} \\
& + ( (5+\lambda)J_{ik}+(1-\lambda)J_{ki} )M_{ij}M_{ji} + ( (5+\lambda)J_{ik}+(1-\lambda)J_{ij} )M_{ki}M_{jk} \\
& - 6( J_{ij}+J_{ki}+J_{ik}+J_{ji} )M_{ij}M_{jk} \quad \} \\
\end{aligned} \tag{3-29}$$

こうして、 $M_4$  についての公式を得ることができた。実際にはこれを数値的に評価して最終的な結果を得ることができる。

### 3-4 数値計算の結果

前節でもとめた公式、(2-37)式をつかって  $T_2'$  を具体的にもとめることができる。ここでは、いくつかのパラメータの値について、天頂角  $\theta$  をかえていったようすを図にまとめてみた。まず、図3-3では代表的なモデル ( $J_1=J_1'=1$ ) についての計算値が実線によって、しめされている。

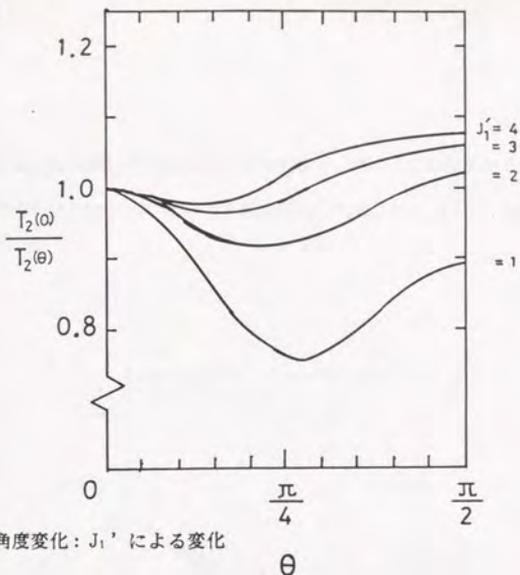
図 3-3



1 /  $T_2'$  の角度変化: 近接相互作用のみのハイゼンベルグ模型 ( $J_1=J_1'$ )

この図では、 $\theta=0$  の値で規格化した様子がしめされている。この様子はパラメータをかえることにより、変化する。もっとも単純な場合、つまり  $J_1$  を固定しておいて  $J_1'$  をかえていったようすが図3-4にしめされている。

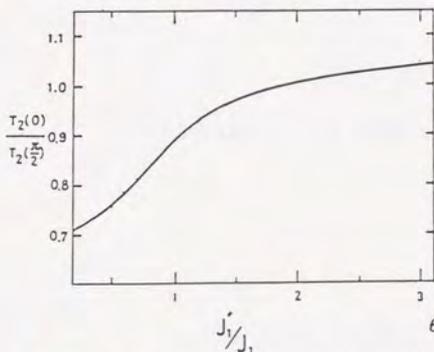
図 3-4



$1/T_2'$ の角度変化:  $J_1'$  による変化

このように $J_1'$ をかえることによって、 $T_2'$ の全体的なふるまいはかなり変わることがわかる。すぐに、気が付くように、 $\theta = \pi/2$ での値は $J_1'$ によって大きく変化する。モデルの妥当性を検討したり、定量的な議論をおこなう時には $\theta = \pi/2$ での値が、一つの指標となるであろう。パラメータを変えていった時のこの値の変化は図3-5にしめしてある。 $J_1'$ を大きくしていくとこの値は1.04あたりに収束する。

図 3-5

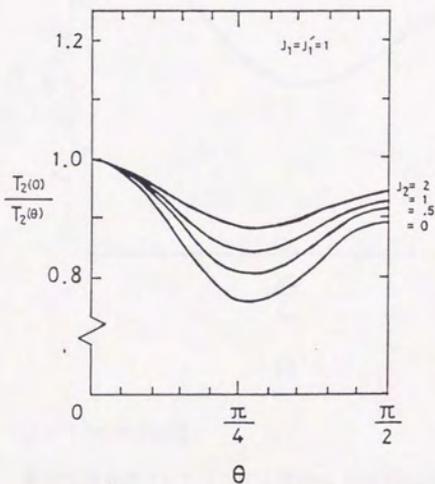


$\theta = \pi/2$  の値の $J_1'$  による変化

それではほかの相互作用の効果はどうであろうか。次近接相互作用 $J_2$ をかえていったようすは図3-6にしめされている。これより次近接相互作用については異方性にかんしてそれほど

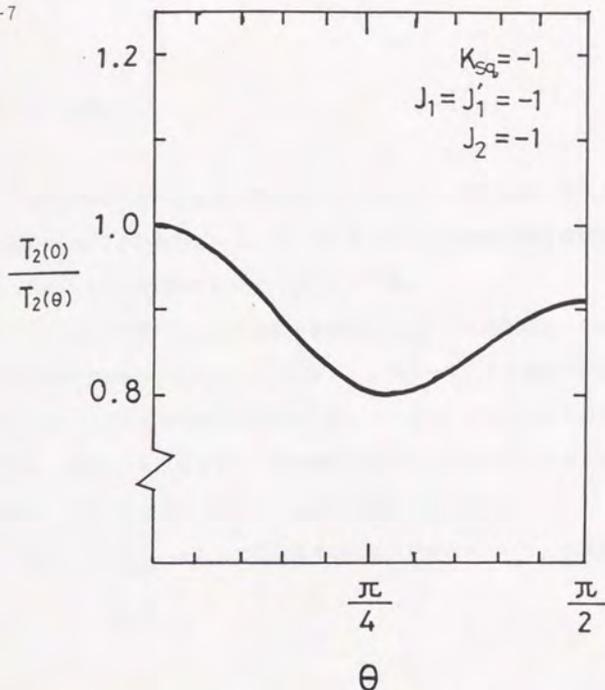
おきな影響はおよぼしそうにないことがわかる。図3-7にしめされているように四粒子交換過程のみを考慮下場合についてもおなじ傾向がみられる。Ksq は  $T_2'$  の異方性にほとんど寄与しない。

図 3-6



1 / T<sub>2</sub>'の角度変化: J<sub>2</sub>による変化

図 3-7



1/T<sup>2</sup>の角度変化:

粒子交換過程としてリング状置換の  $K_{sq}$  のみがあるとした。

ここで、実験データとの関係についてコメントしておきたい。単結晶 HCP<sup>3</sup>He の緩和時間の異方性を測定したものとしてはデビルの実験がある。(38)、(39)

しかし、デビルの論文での  $\theta$  には任意性があり、ここでの結果とは直接比較はできないことに注意したい。将来、HCP<sup>3</sup>He において、c 軸を決定したのちに緩和時間を系統的に測定することが望まれる。

なお、方位角方向の変化は原理的には存在するが数値的にはきわめて小さい。

### 3-5 多結晶平均

多粒子置換モデルによると高密度HCP相では、三粒子置換が量子力学的トンネル運動の主な部分であるといわれている。すると、HCP<sup>3</sup>Heは強磁性的な近接相互作用のみをもつ単純なハイゼンベルグモデルで記述されることになる。

しかし、いままでのところこれを直接的にたしかめた実験はないといえるので、より高次の交換過程の存在はまだ否定されていない。したがって、より複雑ではあるが、次近接相互作用にくわえて四体置換の効果もとりのれたモデルを考えることもそれほど無意味ではない。ここでは、このモデルにもとずいて緩和時間の値をもとめてみる。すなわち、前の節で求められた結果、(3-24)式をHCP格子について多結晶平均してみる。

まず、二次のモーメントの多結晶平均はHCP格子について、つぎようになる。

$$\langle M^2 \rangle = \left( \frac{9}{20} \right) \times 14.45 \frac{(\gamma \hbar)^2}{d^6} \quad (3-30)$$

さらに、四次のモーメントについても、計算が可能である。多結晶平均をおこなうにはつぎの関係式に注意する。

$$\langle M_{ij} M_{kl} \rangle = \frac{3}{5} \frac{(3 \cos^2 \theta_{ij,kl} - 1)}{(r_{ij}^3 r_{kl}^3 / d^6)} \quad (3-31)$$

ただし、 $\theta_{ij,k}$  は  $r_{ij}$  と  $r_{kj}$  のなす角である。こうして多結晶平均された  $M_4$  を  $\langle M_4 \rangle$  とかくと、(3-24)式の各項をパウダー平均して、

$$\langle M_4 \rangle = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} \quad (3-32)$$

となる。ただし、

$$u_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} \quad (3-33)$$

と定義しておく、

$$Y_i = (9/10N) \gamma^4 \kappa^2 / d^6$$

$$\times \sum [ \{ J_{ij}^2 (u_{ik}^2 + u_{jk}^2) + u_{ik} \cdot u_{jk} (3 \cos 2\theta_{kj} - 1) \}$$

$$i \neq j \neq k$$

$$+ J_{ij} J_{jk} \{ (u_{ik}^2 + (1/2)u_{ij} \cdot u_{jk}) (3 \cos^2 \theta_{ijk} - 1) \}$$

$$-(1/2)(u_{ij} \cdot u_{ik}(3\cos^2 \theta_{jik}-1)+u_{jk} \cdot u_{ik}(3\cos^2 \theta_{ikj}-1) \} ] \quad (3-34)$$

$$Y_2 = (9/4N) \gamma^4 \kappa^2 \sum_{(ijkl)}^2 Ksq$$

$$\begin{aligned} & \times [ (6/5)(u_{i1}^2+u_{j2}^2) + (2/5)(1+\lambda+\lambda^2)(u_{ij}+u_{ki}+u_{ik}+u_{ji}) \\ & - (3/10)\{u_{i1}(u_{ij}(3\cos^2 \theta_{jji}-1)+u_{ki}(3\cos^2 \theta_{iik}-1) \\ & \quad +u_{ik}(3\cos^2 \theta_{kii}-1)+u_{ji}(3\cos^2 \theta_{ijj}-1) \} \\ & + u_{jk}(u_{ij}(3\cos^2 \theta_{ijk}-1)+u_{ki}(3\cos^2 \theta_{jki}-1) \\ & \quad +u_{ik}(3\cos^2 \theta_{ikj}-1)+u_{ji}(3\cos^2 \theta_{kji}-1) \} ] \\ & + (1/10)(1-2\lambda-2\lambda^2)\{u_{ij} \cdot u_{ji}(3\cos^2 \theta_{iji}-1)+u_{ij} \cdot u_{ik}(3\cos^2 \theta_{jik}-1) \\ & \quad +u_{ki} \cdot u_{ji}(3\cos^2 \theta_{jik}-1)+u_{ki} \cdot u_{ik}(3\cos^2 \theta_{iki}-1) \} ] \end{aligned} \quad (3-35)$$

$$\begin{aligned}
Y_3 &= \sum_{(ijkl:m)} (3/8N) \gamma^4 \kappa^2 / d^6 Ksq^2 \\
&\times [ (6/5)(8+4\lambda+3\lambda^2)(u_{im}^2+u_{jm}^2+u_{km}^2+u_{im}^2) \\
&+ (3/5)(4-8\lambda-6\lambda^2)(u_{im}u_{in}(3\cos^2\theta_{im1}-1)+u_{jm}u_{kn}(3\cos^2\theta_{jmk}-1)) \\
&- 6(u_{im}u_{jn}(3\cos^2\theta_{ijn}-1)+u_{km}u_{in}(3\cos^2\theta_{kmi}-1) \\
&+ u_{im}u_{kn}(3\cos^2\theta_{ink}-1)+u_{jm}u_{in}(3\cos^2\theta_{jmi}-1) ) ]
\end{aligned}$$

(3-36)

$$\begin{aligned}
Y_{12} &= \sum (9/20N) \gamma^4 \kappa^2 / d^6 Ksq \\
&\{ ( 2(1+2\lambda)J_{ji} - (1-\lambda)(J_{ki}+J_{ji}) ) u_{ij} \cdot u_{ik} (3\cos\theta_{jik}-1) \\
&+ ( 2(1+2\lambda)J_{jk} - (1-\lambda)(J_{ki}+J_{jk}) ) u_{ij} \cdot u_{ji} (3\cos\theta_{jji}-1) \\
&+ ( 2(1+2\lambda)J_{ji} - (1-\lambda)(J_{ji}+J_{jk}) ) u_{ji} \cdot u_{ki} (3\cos\theta_{jik}-1) \\
&+ ( 2(1+2\lambda)J_{jk} - (1-\lambda)(J_{ji}+J_{ji}) ) u_{ik} \cdot u_{ki} (3\cos\theta_{iki}-1)
\end{aligned}$$

$$- 2( (1+2\lambda)(J_{i1}+J_{jk}) + (2+\lambda)(J_{ik}+J_{j1}) )u_{ij} \cdot u_{ki}(3\cos\theta_{ij,ki}-1)$$

$$- 2( (1+2\lambda)(J_{i1}+J_{jk}) + (2+\lambda)(J_{ij}+J_{k1}) )u_{ik} \cdot u_{j1}(3\cos\theta_{ik,j1}-1)$$

$$+ ( (5+\lambda)J_{ij}+(1-\lambda)J_{j1} )u_{ik} \cdot u_{i1}(3\cos\theta_{k1i}-1)$$

$$+ ( (5+\lambda)J_{ij}+(1-\lambda)J_{ik} )u_{j1} \cdot u_{jk}(3\cos\theta_{kji}-1)$$

$$+ ( (5+\lambda)J_{j1}+(1-\lambda)J_{k1} )u_{ij} \cdot u_{jk}(3\cos\theta_{ijk}-1)$$

$$+ ( (5+\lambda)J_{j1}+(1-\lambda)J_{ij} )u_{k1} \cdot u_{i1}(3\cos\theta_{i1k}-1)$$

$$+ ( (5+\lambda)J_{k1}+(1-\lambda)J_{j1} )u_{ik} \cdot u_{jk}(3\cos\theta_{ikj}-1)$$

$$+ ( (5+\lambda)J_{k1}+(1-\lambda)J_{ik} )u_{j1} \cdot u_{i1}(3\cos\theta_{i1j}-1)$$

$$+ ( (5+\lambda)J_{ik}+(1-\lambda)J_{k1} )u_{ij} \cdot u_{i1}(3\cos\theta_{j1i}-1)$$

$$+ ( (5+\lambda)J_{ik}+(1-\lambda)J_{ij} )u_{k1} \cdot u_{jk}(3\cos\theta_{jki}-1)$$

$$- 6( J_{ij}+J_{k1}+J_{ik}+J_{j1} )u_{i1} \cdot u_{jk}(3\cos\theta_{i1,jk}-1) \}$$

(3-37)

である。

さらに多結晶平均された $\langle M_i \rangle$ を具体的に求めるためには(3-32)式にあらわれる各項をHCP格子にたいして計算しなければならない。そのためにはそれぞれの項をグラフをもちいて分類するのが便利である。

まず、二体のペア型相互作用項については、図3-8にしめされている。これらのグラフは(3-34)式をみれば対応はあきらかとおもわれる。ただし、この図のなかで実線は交換相互作用、波線は双極子相互作用をあらわしている。これらの各項の和は数値的にもとめることができ、結果は表3-1にまとめられている。

図 3-8

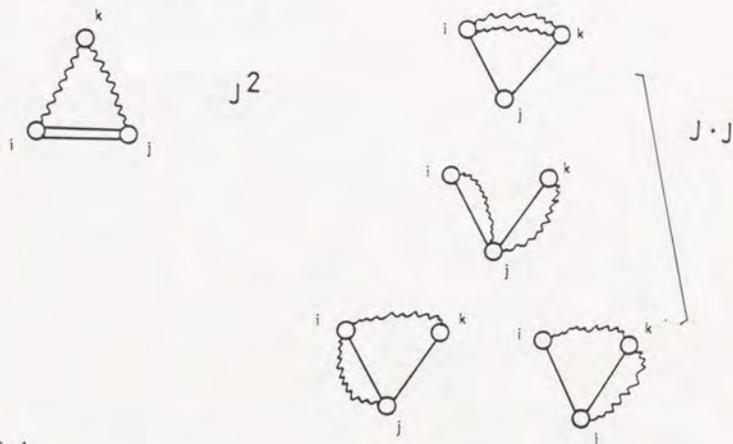


表 3-1

type	lattice sum	no. n.	contribution
J12	22.45	6	13.47
J1'2	22.46	6	13.47
J22	30.20	6	18.12
J1·J1	$1.125x^2 - 0.33x^2 + 0.77$	6	1.42
J1'·J1'	$-0.51 + 1.125x^2 + 0.313x^2$	6	1.42
J2·J2	$0.011 - 0.069x^2 - 0.007x^2$	6	-0.084
J1·J1'	$1.125x^2 - 0.329x^2 - 0.552x^2$	12	0.587
J1'·J2	$-0.174x^2 + 1.5x^2 + 0.007x^2$	12	3.2
J1'·J2	$1.5x^2 - 0.19x^2 - 0.174 + 0.205$	12	3.18

四体の交換相互作用、すなわち $K_{sq}$ については図3-9および図3-10に計算結果がしめされて

いる。対応する式は、(3-35)、(3-36)式である。二体の相互作用と四体の相互作用が結合した項は(3-37)式であらわされており、その結果は表3-2で示されている。

$$\text{図 3-9} \quad \frac{6}{5} \left( \begin{array}{c} \square \\ \diagup \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \diagdown \\ \square \end{array} \right) = 0.25$$

$$\frac{2}{5} (1 + \lambda + \lambda^2) \left( \begin{array}{c} \square \\ \text{cap} \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \text{cup} \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \text{cap} \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \text{cup} \\ \square \end{array} \right) = 4$$

$$-\frac{3}{10} \left( \begin{array}{c} \square \\ \diagup \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \diagdown \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \diagup \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \diagdown \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \diagup \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \diagdown \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \diagup \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \diagdown \\ \square \end{array} \right) = 1.414$$

$$\frac{1}{10} (1 - 2\lambda - 2\lambda^2) \left( \begin{array}{c} \square \\ \text{cap} \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \text{cup} \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \text{cap} \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \text{cup} \\ \square \end{array} \right) = -4$$

$$\text{図 3-10} \quad \frac{6}{5} (8 + 4\lambda + 3\lambda^2)$$

$$\begin{array}{c} \square \\ \text{cap} \end{array} \times 4 = 49.31$$

$$\frac{3}{5} (4 - 8\lambda - 6\lambda^2)$$

$$\begin{array}{c} \square \\ \text{cup} \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \text{cap} \end{array} = 0.922$$

$$-6$$

$$\begin{array}{c} \square \\ \text{cup} \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \text{cap} \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \text{cup} \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \text{cap} \end{array} = 16.40$$

表 3-2

$$\begin{aligned}
 &4x((2(1+2\lambda)J_2-(1-\lambda)(J_1+J_1'))x)16x(-1) \\
 &-2x(4(1+2\lambda)J_2+2(2+\lambda)(J_1+J_1'))x)16x2 \\
 &4x6(J_1+J_1')(1/\sqrt{2})3x)13x(1/2) \\
 &-6x2(J_1+J_1')x(1/\sqrt{2})6x(-1)
 \end{aligned}$$

こうして、パウダー平均をおこなった結果は、

$$\begin{aligned}
 M_4 = & 9\left(\frac{(\gamma \bar{h})^2}{d^6}\right) \{ 14.9J_1^2 + 14.9J_1'^2 + 18.0J_2^2 \\
 & + 0.59J_1 \cdot J_1' + 3.20J_1 \cdot J_2 + 3.18J_1' \cdot J_2 \\
 & + (48.0 + 30.8\lambda + 23.6\lambda^2)Ksq^2 \\
 & - [(0.94 + 1.80\lambda)(J_1 + J_1') + (3.60 + 7.20\lambda)J_2]Ksq \}
 \end{aligned}$$

(3-38)

この結果をもちいれば、いくつかのパラメータの組について $T_1$ をもとめることはできる。しかし、HCPの場合、こうしてもとめた結果がいま現在、なにがしかの有用な情報をもたらすわけではないので、ここで具体的な議論はしない。もちろん、近い将来HCP<sup>3</sup>Heの研究が

盛んになれば、そのときには(3-38)式はたいへん有用になるとおもわれる。

#### 4章 HCPヘリウム3における基底状態の分析

この章ではこの研究の主題をおきなうものとして高密度相HCPヘリウム3の基底状態に関する考察をすすめてみたい。もうすでに説明したように低密度相BCCヘリウム3の場合については、基底状態のスピン配列は $U2D2$ であることが知られている。ところがHCPヘリウム3については基底状態はまだ知られていない。この章では、近い将来実験的な研究が活発になるであろうと予想される高密度相HCPヘリウム3の基底状態スピン配列について、前章の議論にもちいられた拡張された現象論的ハミルトニアンにもとずいて考察を進めることにする。そして、得られた結果をミクロな立場から支持するようなモデルが考察される。

##### 4-1 現象論的モデルハミルトニアン

この節では高密度相HCPヘリウム3の秩序相についての現象論が展開される。その結果としてHCPヘリウム3は高温無秩序相においては正のキュリー・ワイス温度をあたえながら低温度領域においては反強磁性的に秩序化することもあり得ることが指摘される。この可能性は従来の高密度相HCPヘリウム3の研究のなかでは見過ごされてきたものである。さらに、いくつかの反強磁性的スピン構造が提示され、それぞれの構造について双極子相互作用エネルギーが計算される。その結果としてそれぞれのスピン構造についての零磁場共鳴振動数があたえられる。この振動数は、ここで提案されるいくつかの秩序状態を見わけるのに重要な役割を果たすであろうことが期待される。

この論文の1章で、すでにのべたように、固体ヘリウム3の研究の進展につれて、すくなくとも現象論的には四体の交換相互作用が重要であることが明らかにされてきた。実際、低密度相BCCヘリウム3の磁性を説明するためにはすくなくともブラナー型の四体交換相互作用が必要である。しかし、多粒子置換のモデル以外のメカニズムによっても現象論的ハミルトニアンに現れる四体の交換相互作用を説明する可能性はあるかもしれない。つぎの節ではその試

みとしてリング状置換モデルとはまったく異なるメカニズムがしらべられる。

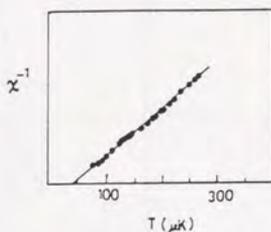
この節では、つぎのような現象論的ハミルトニアンを調べることにする。

$$H = \sum 2J_1(S_i \cdot S_j) + \sum 2J'_1(S_i \cdot S_j) - \sum 2J_2(S_i \cdot S_j) \quad (4-1)$$

ここで  $J_1$ ,  $J'_1$ ,  $J_2$  は、それぞれ基底面内の近接相互作用、基底面外の近接相互作用、そして第二近接相互作用の大きさをあらわしている。そして、ここでは  $J_1, J'_1, J_2 > 0$  の場合を考察することにする。三粒子置換のモデルでは  $J_1, J'_1 < 0, J_2 = 0$  である。HCP格子でのこれらの相互作用の配置はすでに図3-1 にしめされている。

ここで、実験的な状況にふれておこう。超低温度領域でHCP<sup>3</sup>Heの帯磁率を測定するという困難な実験が1980年代のなかごろ行なわれた。(40)その測定の報告によれば、キュリー・ワイス温度はモル体積  $19.4 \text{ cm}^3/\text{mol}$  の試料にたいして  $60 \mu\text{K}$  であるとされている。この測定データは図4-1 に転載しておいた。データはキュリー・ワイス則によくのっている。しかし、それだけでは基底状態が完全強磁性の状態であるということは保証できない。

図 4-1



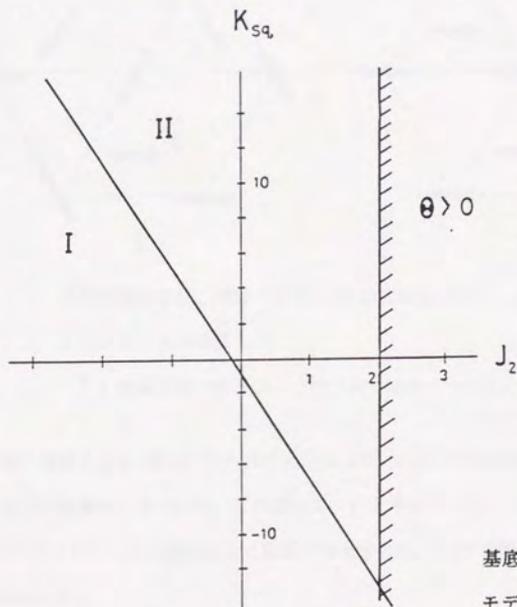
HCP<sup>3</sup>Heの帯磁率の逆数 対 温度のプロット (実験データ) : 文献(40)より転載

さて、このモデルすなわち(4-1)式についてキュリー・ワイス温度を導出してみる。最低次の高温展開よりこれは簡単にもとめられて、結果はつぎのようになる。

$$\Theta = -3J_1 - 3J_1' + 3J_2 \quad (4-2)$$

これからすぐわかるように、もし  $J_2 > J_1 + J_1'$  が満たされるならば、 $\Theta > 0$  が結論できる。この条件がみたされる領域は、図4-2 では斜線でしめされた領域になる。図4-2は本来、基底状態の相図であり、くわしくは後で説明される。

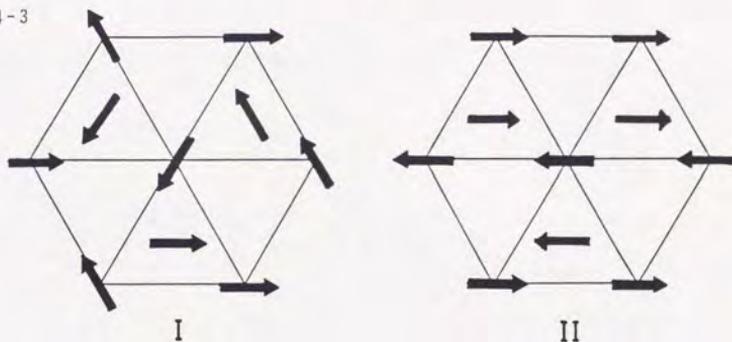
図 4-2



基底状態の相図：  
モデル(4-1)式についての結果。

つぎに基底状態のスピンの配列についてしらべてみよう。ここでは、フーリエ変換を用いる方法をつかうことにする。この方法ではスピンを古典的にあつかうということになってしまうが、今の場合、スピンの量子的ゆらぎは無視することにする。基底状態のスピンの構造を決定するためには、 $J_1, J_1', J_2$  などのパラメータをきめておいて、基底状態エネルギーが最低になるスピンの配列をさがしだせばよい。これは、数値的におこなわれて、二つの場合がみいだされた。これらのスピンの構造はそれぞれ 図4-3 にしめされている。第一のものは、二次元の反強磁性体によくみられ構造でしばしば  $120^\circ$  構造とよばれているが、ここでは I型の構造とよぶことにする。二つめは II型とよぶことにするが、強磁性的にそろった面がある特別の一方、たとえば  $y$  方向に交互にならんだ構造をしている。

図 4-3



基底状態のスピンの構造 (モデル(4-1)式にもとづく) :

I ;  $120^\circ$  構造

II ; 強磁性的な配列が一つの方向に2列づつ交互にならぶ。

基底状態の相図である 図4-2 をみればわかるように、このII型の構造は基底状態の相図のなかでかなり広い領域をしめている。したがって、いま考えているモデル、すなわち (4-2)式が高密度HCPヘリウム3の磁性をよく記述するとすれば、この II型のスピンの配列が基底状態の有力な候補となる。

さて、つぎに基底面外の四粒子クラスターについてのリング状置換相互作用  $K_{sq}$  を BCC の場合にならって導入することにする。この相互作用の幾何学的な形についてもすでに図3-1でしめしてある。転移点に比較的近いと思われる高温側無秩序相におけるキュリー・ワイス法則からのずれはこのタイプの相互作用の効果によるのかもしれない。(41)

ここでは、この拡張されたハミルトニアンがより現実的に適切であるとかんがえて、基底状態エネルギーを平均場近似で計算する。結果は、つぎようになる。

$$E_l = - \frac{3}{4} J_1 - \frac{1}{16} K_{sq} (9 + \lambda) \quad (4-3)$$

$$E_{ll} = - \frac{1}{2} (J_1 + J_1') - \frac{3}{2} J_2 - \frac{3}{4} K_{sq} (2 + \lambda) \quad (4-4)$$

この結果より得られる基底状態の相図が 図4-2 である。そして、この図のなかでキュリー・ワイス温度が正である領域は斜線でしめされた領域である。こうしてみると、高温側の帯磁率でキュリー・ワイス温度が正であるという事実だけから基底状態が強磁性的であるとは、断定できないことがわかる。

ここで注意しておきたいことは、こうしたモデルをとるかぎり強磁性的スピン配列はありえないことである。もちろんこれは平均場近似の範囲内でのことではあるが、量子補正は反強

磁性的スピン秩序に有利なので、この結論はここでかんがえたモデルについては厳密に成立するとかんがえられる。

つづいて双極子相互作用を計算してみよう。ハミルトニアン(4-1)式は異方性を含んでいないので、スピン配列は空間的には等方的である。ところが実際には固体ヘリウムの場合交換相互作用に比べると圧倒的に小さいけれども( $\sim 10^{-6}K$ )空間的等方性を破る双極子相互作用があつて、スピン配列の格子に対する空間的配位を決定しているはずである。スピン配列がきまってしまうと双極子相互作用のエネルギーは簡単に計算できて、スピンの配列が空間的にも完全にきまることになる。じつは図4-3にはこうして求められた空間的配位にしたがってスピンのならべられていた。

さらに、それぞれのスピン構造にたいして零磁場共鳴振動数をもとめることもできる。HCP格子にたいしては零磁場共鳴振動数  $\Omega_0$  はつぎの公式であらわされる。

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = 11.6x \left( \frac{T_m}{1\mu K} \right)^{1/2} \times \lambda_0^{1/2} \times \psi \quad (4-5)$$

ここで  $T_m$  は垂直帯磁率の大きさに相当する温度で、 $\psi$  はスピンの縮みである。スピン配列が完全に決定されているので、この計算も簡単におこなうことができる。まず、I型については双極子和  $\lambda_0$  がスピン配列の対称性から小さくなるので、 $\Omega_0 \sim 0$  が結論される。ところが、II型については、空間的対称性がやぶれているのでおおきな零磁場共鳴振動数が期待できる。大きっぱに評価してみると、194kHzという値が計算された。この計算ではモル体積として  $19.4\text{cm}^3/\text{mol}$ 、スピンの縮みは  $\psi=0.85$  が仮定されている。さらに、秩序相での帯磁率の逆数は高温相での帯磁率の測定値より、 $100\mu K$ と推定されている。

この節ではHCP<sup>3</sup>Heについて反強磁性的秩序状態が存在する可能性が指摘され、いくつかの候補が提案された。また、それらを実験的に区別するため零磁場共鳴振動数が計算された。

#### 4-2 現象論的結果を再現するミクロな模型

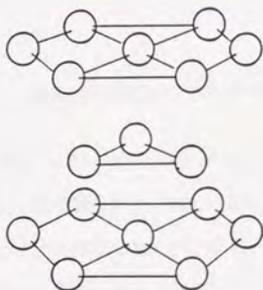
前節での議論は現象論的模型(4-1)式に完全に依存していたので説得力にかける面があるといえる。そこで、この節では(4-1)式にもとづいた結果と同じ結果がみちびきだせるある簡単な交換過程を考察してみることにする。よりミクロな模型をかんがえて前節での結論を補強しようというわけである。(42), (43)

固体ヘリウムの磁性を考える際、考慮しなければならない特徴は、大きなハードコアの存在である。その結果、ヘリウムのもつ大きな量子性にもかかわらず交換相互作用の大きさは劇的に小さくなっている。

さて、注目している原子対の交換過程を想像すると、回りの原子が邪魔になってなかなか位置を交換することができない。ところが、回りの原子がたまたま零点振動で注目している原子対より離れたとき原子対の交換は容易になるであろう。

HCP<sup>3</sup>Heは理想的四面体からなっているので、基底面については、原子は三角格子をなしている。図4-4にはHCP格子の三つの基底面についてのようすがしめされている。

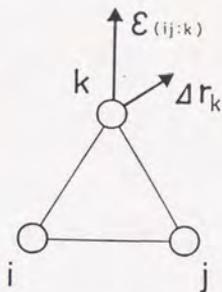
図 4-4



HCPの格子構造

いま、近接原子対  $i, j$  の交換を考えてみると、その交換トンネルは  $i, j$  対のまわりの原子が零点振動でこの対よりはなれた時、強められるとし、その度合は回りの原子の平衡位置からのずれに比例するとしよう。このメカニズムを図解したものが、図4-5である。まわりの原子  $k$  の平衡状態での位置からのずれを  $\Delta r_k$  とすると、 $i, j$  間の交換相互作用を強める効果は  $\Delta r_k \cdot \varepsilon(ij;k)$  ととることができる。ここで、 $\varepsilon(ij;k)$  は三成分の単位ベクトルで、 $i, j$  原子のあいだを結ぶ線分の中点から  $k$  原子にむかうようにとる。こうすると  $k$  原子が  $i, j$  原子対からはなれる変位は  $i, j$  の交換運動を強めるように働くことがわかる。

図 4-5



交換相互作用が回りの原子の零点振動によって強められるメカニズム

第二の仮定として  $\Delta r_k$  はアインシュタインモデルによって記述されるとする。この仮定は原子の運動についての相関を取り入れていないことになるのでいささか不満足ではあるが、モデルを単純化するために採用することにする。こうして、われわれはつぎのハミルトニアンを考察の出発点とすることができる。

$$H = H_L + H_S + H_{LS} \quad (4-6)$$

ここで、 $H_L$  は格子の弾性エネルギーで、 $H_S$  はもともと存在していた交換運動による相互作用とゼーマンエネルギーである。さらに、 $H_{LS}$  はうえて考察した交換運動の増強された分である。これらの具体的な形はそれぞれつぎのようになる。

$$H_L = \sum_k \hbar \omega b_k^\dagger b_k \quad (4-7)$$

$$H_S = \sum_{(i,j)} J P_{ij} - \sum_i \mu H S_i^z \quad (4-8)$$

$$H_{LS} = \sum 2J\alpha \left( \frac{\hbar}{2m\omega} \right) (b_k^\dagger + b_k) \cdot \varepsilon(ij;k) P_{ij} \quad (4-9)$$

ここで、 $P_{ij}$  は置換の演算子である。1章の(1-6)式によりスピン演算子と直接関係づけられている。 $b_k^\dagger$ 、 $b_k$  は格子点  $k$  でのフォノンの生成、消滅の演算子で、 $x, y, z$  方向のそれぞれについての三成分からなっている。

ここでふたつばかりコメントしておきたい。ここでのモデルが直接  $\text{HCP}_3\text{He}$  の磁性を完全に説明するとは期待すべきではない。われわれが期待できるのは、この簡単なモデルが示す、定性的な振舞いが  $\text{HCP}_3\text{He}$  の基本的側面を表現している可能性があるということである。

もうひとつは、ここで考えるメカニズムはリング状置換理論とはまったくことなるものであることを強調しておく。リング状置換理論では近接の三粒子のみが交換過程の際に考慮される。その時ほかの粒子は三角形の入れ物を形づくっているにすぎない。このリング状置換のメカニズムでは交換相互作用は近接原子間に限られてしまうことはあきらかであろう。一方、ここで提案するメカニズムは実効的には次近接、第三近接、第四近接相互作用を生み出す。

ここで、考慮されたメカニズムが $\text{HCP}^3\text{He}$ についてもそのままの形ではないにせよ当てはまると仮定すると、前節の議論がそのまま成立して、 $\text{HCP}^3\text{He}$ は従来信じられているほど単純なものではないという結論がえられる。それでは、以下にそれを見てみよう。

交換運動による置換とフォノンの相互作用項は正準変換をほどこすことによって見かけ上消去してしまふことができる。しかしながら、このような変換は厳密ではない。ここでは、簡単な有効ハミルトニアンを得るためスピンの非可換性を無視することにする。こうすると、変換されたハミルトニアンは簡単にかきくだせて、

$$\bar{H} = \exp(-D)H\exp(D)$$

$$= H - [D, H] + \frac{1}{2}[D, [D, H]] \quad (4-10)$$

$$= H_L + H_{eff} \quad (4-11)$$

となる。ただし、

$$H_{\text{eff}} = H_0 + H_4 \quad (4-12)$$

$$H_4 = - (K/2) \sum \epsilon(ij;k) \epsilon(lm;k) P_{ij} \cdot P_{lm} \quad (4-13)$$

$$D = - \sum \left( \frac{2J\alpha}{\hbar\omega} \right) \left( \frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon(ij;k) (b_k - b_k^\dagger) P_{ij} \quad (4-14)$$

$$K = \frac{(J\alpha)^2}{m\omega^2} \quad (4-15)$$

である。

この有効ハミルトニアンはわれわれのモデルシステムをその低エネルギーレベルについては十分よく記述していると思われるので、以下の解析はこの有効ハミルトニアンについておこなうことにする。そして、ハミルトニアンのなかにあるスピン変数を以下では量子力学的変数として扱う。

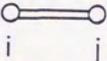
有効ハミルトニアン(4-12)式を具体的に書き下すことを考えよう。まず、(4-13)式のなかにはあらわれる  $P_{ij} \cdot P_{lm}$  をつぎのようにかいておく。

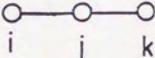
$$P_{ij} \cdot P_{lm} = (S_i \cdot S_j) + (S_l \cdot S_m)$$

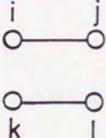
$$+ 4(S_i \cdot S_j)(S_l \cdot S_m) + \text{const} \quad (4-16)$$

つぎに、(4-13)式に現れるたくさんの項を 図4-6 に示してあるようなグラフで表して、分類する。

図 4-6

(1)  0

(2)   $2[(ij) + (jk) + (ik)]$

(3)   $[(ij) + (kl) + 4(ij)(kl)]$

実効的相互作用の分類

図4-6 に示してあるように、それらの項はおおまかには3つのタイプにわけられる。タイプ1については、(4-16)式は、つぎのようになる。

$$2(S_i \cdot S_j) + 4(S_i \cdot S_j)^2 \quad (4-17)$$

じつは、(4-17)式は次の恒等式をつかえば、定数になってしまう。

$$(S_i \cdot S_j)^2 = 3/16 - 1/2(S_i \cdot S_j) \quad (4-18)$$

したがってタイプ1の項は有効ハミルトニアン(4-12)式には寄与しない。つぎにタイプ2について同様に(4-16)式をみってみる。この場合に現れる $(S_i \cdot S_j)(S_j \cdot S_k)$ の形の項は、やはりスピン $\pm$ の場合に成立する恒等式

$$(S_i \cdot S_j)(S_j \cdot S_k) + (S_k \cdot S_j)(S_j \cdot S_i) = \pm(S_i \cdot S_j) \quad (4-19)$$

をもちいて二体の相互作用に帰着できる。結局タイプ2については、(4-16)式はつぎのようになる。

$$2[ (S_i \cdot S_j) + (S_j \cdot S_l) + (S_i \cdot S_l) ] \quad (4-20)$$

残された、タイプ3の場合は、いままでのように単純化はできなくて(4-16)式をそのままのかたちでもちいることになる。こうして、結果的には、ハミルトニアン(4-12)式は、つぎの形にまとめることができる。

$$\begin{aligned}
 H_{\text{eff}} = & \sum_{\gamma} 2J_{\gamma} (S_i \cdot S_j) + \sum_{\lambda} K_{\lambda} (S_i \cdot S_j)(S_k \cdot S_l) \\
 & - \mu H \sum S_i^z \qquad \qquad \qquad (4-21)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\gamma$ および $\lambda$ は相互作用の型を区別する添え字で、二体の相互作用については  $\gamma=1, 2, \dots$  などがそれぞれ近接、次近接の相互作用をあらわしている。とくに原子ペアの距離はひとしいけれども幾何学的に等価でない場合の区別も考慮されているとする。

このハミルトニアンのなかに現れている相互作用の大きさは、それぞれの項について直接計算できてしまう。したがって、物理量などの具体的な計算は図4-7、図4-8、図4-9を用いておこなわれることになる。ここでとくに重要なのは、(4-21)式の一項目、すなわち、二体の相互作用の部分である。そこで、その部分だけを計算してみた結果を示す。

图 4-7

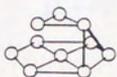


$\varepsilon \varepsilon \quad j \quad k$

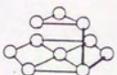
0



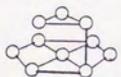
$\frac{5}{6} \times 1 \times 2 \times (2\oplus + \oplus)$



$\frac{5}{6} \times 2 \times 1 \times (2\oplus + \oplus)$



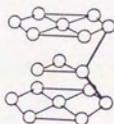
$\frac{5}{6} \times 2 \times 2 \times (\oplus \cdot \oplus \cdot \oplus)$



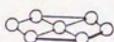
$\frac{2}{3} \times 4 \times 2 \times (\oplus \cdot \oplus \cdot \oplus)$

图 4-8

$\varepsilon \cdot \varepsilon \quad j \quad k$



$\frac{5}{9} \times 3 \times 2 \times (2\oplus + \oplus)$



$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times (2\oplus + \oplus)$



$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times (\oplus + \oplus' + \oplus')$

表 4-1

$2x\textcircled{1}$		$\textcircled{1} + \textcircled{1}'$		$2x\textcircled{1}'$	
$\varepsilon \varepsilon$	$N \lambda$	$\varepsilon \varepsilon$	$N \lambda$	$\varepsilon \varepsilon$	$N \lambda$
-1/2	4	-5/6	16	1/3	4
-1	2	-2/3	16	-1/9	4
-1/3	8	-1/6	16	-1/6	4
1/6	16	3/18	16	-11/18	4
1/3	8	-3/18	16	-1/2	4
-1/6	16	2/3	16	-17/18	4
-7/9	2	-7/18	16	-11/18	4
-17/18	4			-1/6	4

$$J_1 = J + (19/18)K \quad (4-22a)$$

$$J_1' = J' + (11/18)K \quad (4-22b)$$

$$J_2 = - (8/3)K \quad (4-22c)$$

$$J_3 = - (5/3)K \quad (4-22d)$$

$$J_4 = - (1/2)K \quad (4-22e)$$

$$J_4' = - (1/2)K \quad (4-22f)$$

さて、よく見てみるとこうして得られた、ハミルトニアン(4-21)式は前の節すなわち4-1節で議論された二体だけのものを多少変形させたものになっていることに気が付く。二体の相互作用項については第三近接、第四近接相互作用も含んでいて、さらに四体の部分についてはかなり複雑な相互作用を含んでいるが、実効的な近接相互作用は反強磁性的で、次近接お

よび第三、第四近接相互作用などは強磁性的である。したがって、このハミルトニアンの基本的性質は前節でかんがえたものと同じであると思われる。実際、このハミルトニアンにもとずいても4-1節で展開された議論はそのまま成立する。高温の場合と絶対零度のふたつの温度領域にわけてかんがえることにする。高温の無秩序相では高温展開の方法で、キュリー・ワイス温度を導出してみると、

$$\Theta = -3(J + J') + (55/6)K \quad (4-23)$$

となる。この結果からこの簡単な模型に関しては  $J, J'$  にくらべて  $K$  が十分に大きければキュリー・ワイス温度が正であることがわかる。

ところが、この模型については基底状態は強磁性的ではない。まず、強磁性状態はいつでもハミルトニアンの固有状態であるから強磁性状態のエネルギーは簡単に求めることができる。つぎに、仮想的にどれかひとつのスピンをひっくり返してみた状態をかんがえてみよう。もちろんこの状態はハミルトニアンの固有状態ではない。しかし、とにかく、この状態でもってハミルトニアンの期待値をとってみると、強磁性状態とのエネルギー差はつぎのようになることがわかる。

$$\Delta E_{\text{ferro}} = -6(J + J') - (353/3)K \quad (4-24)$$

したがって、ここでかんがえた状態でのエネルギー期待値は強磁性状態でのエネルギーより必ず低くなることがわかる。さて、さきほども述べたようにこの状態は固有状態ではないので少

し注意が必要である。いま考えている状態はあきらかに、全スピンの  $(N/2-1)$  の空間に属している。であるから、ほかのスピンをやはり仮想的に1個だけひっくりかえした状態をすべて集めてきて、全スピンの  $(N/2-1)$  の固有状態を作ることができるであろう。このときの固有状態でのエネルギーはスピンを1個だけひっくりかえした状態によるエネルギー期待値よりも低いはずである。ゆえに、強磁性状態よりも低いエネルギーをもつ固有状態の存在が確かめられたことになる。したがって、この模型については基底状態は強磁性的ではありえないことが結論できる。こうして、4-1節でのべた結論がミクロなモデルにもとずいて、実際にもおこりうる可能性があることが基礎づけられたといつてよいであろう。

## 5章 BCCヘリウム3における $M_2$ の計算

3章で求められたバンプレックのモーメントに関する公式は一般的なものである。したがって、3章で議論された単結晶における $T_2$ の磁場方向依存性のほかにも応用が考えられる。この章では、そのひとつの応用例として、低密度相BCC $^3\text{He}$ の核磁気緩和時間 $T_1$ の交換相互作用による線幅減少がとりあげられる。結果としてわかったことは、現在広く受け入れられている2パラメータあるいは3パラメータの多粒子置換モデルにもとづいて、観測されている $T_1$ をうまく再現することができることである。(44)

### 5-1 二次と四次のモーメント

固体 $^3\text{He}$ の磁気的な性質は、初期の頃の文献では反強磁性的近接相互作用のみのハイゼンベルグ模型で理解されていた。さらに、ここ10年余りの間にそういった単純な観点は正しくなくて、固体ヘリウム3の場合には、より高次の交換相互作用が重要であるということがだんだんに認識されるようになってきた。実際、BCC $^3\text{He}$ の熱平衡状態における諸性質は四体の相互作用項をうみだす交換過程を取り入れた多粒子置換モデルによってよく説明されている。

もし、こういった多粒子置換という観点がただしいのであるならば、2パラメータあるいはまたは3パラメータモデルにもとづいて、BCC $^3\text{He}$ の動的な性質をも説明することが要求される。こうした観点より、この章では現在広く受け入れられている2パラメータモデルあるいは3パラメータモデルによって、多結晶平均の縦緩和時間 $T_1$ が計算される。

現象論的ハミルトニアンは、つぎのようである。

$$H = -\sum_i \sum_j J_{ij}(S_i \cdot S_j) - \sum_{\langle ijkl \rangle} K_{ijkl} S_i S_j S_k S_l \quad (5-1)$$

$$S_{ijkl} = (S_i \cdot S_j)(S_k \cdot S_l) + (S_i \cdot S_k)(S_j \cdot S_l) \\ + \lambda (S_i \cdot S_l)(S_j \cdot S_k) \quad (5-2)$$

ここで実効的な交換相互作用の大きさ  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  は、リング置換モデルにおけるパラメータ  $J_t$ ,  $K_p$ ,  $J_{NN}$  と次のような関係式で結ばれている。

$$J_1 = J_{NN} - 6J_t + 3K_p \quad (5-3a)$$

$$J_2 = -4J_t + K_p \quad (5-3b)$$

$$J_3 = K_p/2 \quad (5-3c)$$

$$\lambda = -1 \quad (5-3d)$$

つぎに、2章の2-1節で展開された  $T_1$  に関する表式を、 $BCC^3He$  に適用する。2-1

節の結果によると縦緩和時間  $T_1$  はつぎのようにかきあらわすことができる。

$$\frac{1}{T_1} = J(\omega) + 4J(2\omega) \quad (5-4)$$

ただし、ここで注意することは、パウダー平均をとってしまうとスペクトル関数  $J_{\text{M}}(\omega)$  は添え字  $\text{M}$  には、よらなくなってしまうことである。したがって(5-4)式のなかですでに添え字  $\text{M}$  は、はぶいてある。

(5-4)式で  $T_1$  を計算するためには、スペクトル密度関数の具体的な形が必要となる。ここでは、関数形としてガウス型の関数形を仮定する。実際、実験的にも弱磁場の極限で、ガウス型のスペクトル密度関数が観測されている。具体的な表式を求めるためには、 $T_1$  の総和則

$$\int \frac{1}{T_1} d\omega = \pi M_2 \quad (5-5)$$

をもちいて、 $J(\omega)$  の係数を定めておく。結局、ラーモア振動数  $\omega = \gamma H$  が零の極限での  $T_1$  はつぎの式であらわされる。

$$T_1 = \frac{3}{5\sqrt{2}\pi} \frac{M_1^{\frac{1}{2}}}{M_2^{\frac{1}{2}}} \quad (5-6)$$

こうして問題はBCC格子についての二次と四次のモーメントを計算することに帰着された。BCC格子についてバンプレックの二次のモーメントはつきのように求めることができる。

$$M_2 = \frac{9}{20} \times 29.05 \frac{(\gamma \hbar)^2}{d^6} \quad (5-7)$$

ここで、d は格子定数、つまり次近接格子点間の距離である。

M<sub>2</sub>の計算については、3章の3-3節でおこなったHCP格子についての場合とまったく平行におこなうことができる。二体の交換相互作用による部分は、図3-5であらわされているものと同じである。結果は表5-1にまとめておいた。

表 5-1

type	latticed sum	no. n.	contribution
J12	42.62	8	34.1
J22	53.39	6	32.03
J32	60.03	12	72.03
J1·J1	0.21x3-1.21x3+1.815	8	-0.947
J2·J2	-0.552x4+0.766	6	-0.865
J3·J3	-0.069x2+0.096 +0.141x4-0.041x4	12	0.427
J1·J2	3.16x3-0.326x3	16	13.6
J2·J3	3.16x3+0.133x3-0.239x6	16	6.399
J1·J3	1.5x4-0.174x4+0.0069x4	12	13.51

四体交換相互作用項については図5-1および図5-2に結果が示してある。二体と四体の結合した項については表5-2に示しておいた。

図 5-1

$$\frac{6}{5} \left( \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} \right) = 1.125$$

$$\frac{1}{5} (1 + \lambda + \lambda^2) \left( \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right) = 9.481$$

$$-\frac{3}{10} \left( \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} \right) = 2.177$$

$$\frac{1}{5} (1 + 2\lambda + 2\lambda^2) \left( \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right) = -6.321$$

図 5-2

$$\frac{6}{5} (8 + 4\lambda + 3\lambda^2)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \times 4 = 94.95$$

$$\frac{3}{5} (4 - 8\lambda - 6\lambda^2)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = 6.835$$

$$-6$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = 40.72$$

表 5-2

$$\begin{aligned}
& 2x(2(1+2\lambda)(J_2+J_3)-4(1-\lambda)J_1)x(2/\sqrt{3})6x(-2/3) \\
& -4x((1+2\lambda)(J_2+J_3)+2(2+\lambda)J_1)x(2/\sqrt{3})6x2 \\
& 4x6J_1x(2/\sqrt{3})3x(1/\sqrt{2})3x1 \\
& -6x4J_1x(1/\sqrt{2})3x13x(-1)
\end{aligned}$$

こうして、最終的な結果はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
M_s &= 9 \frac{(\gamma r)^2}{d^6} \{33.2J_1^2 + 31.2J_2^2 + 72.5J_3^2 \\
&+ 13.6J_1J_2 + 13.5J_1J_3 + 6.40J_2J_3 \\
&+(176.7 + 113.3\lambda + 86.9\lambda^2)Kp^2 \\
&- [(12.5 + 15.2\lambda)J_1 + (7.59 + 15.2\lambda)(J_2 + J_3)] Kp\} \quad (5-8)
\end{aligned}$$

結局、(5-7)、(5-8)式の結果を(5-6)式に代入して、(5-3)式をつかえば  $T_1$  が、 $J_{WN}$ 、 $J_1$  と  $K$  の関数として求まることになる。

## 5-2 実験データとの比較

上で求めた結果を実際に実験データと照らし合わせてみることにする。実験がおこなわれる温度は融解曲線付近のサンプルについては  $0.2K < T < 0.8K$  である。この温度領域では交換

相互作用による効果が双極子相互作用エネルギーのおもなモジュレーションであることがわかっている。

(5-3)式に2パラメータモデル、3パラメータモデルについての具体的な数値をいれて計算してみた結果はつぎのようになる。

### 2パラメータモデル

$$(J_t = -0.13\text{mK}, K_p = -0.385\text{mK})$$

$$T_1 = 370 \text{ msec} \quad (5-9)$$

### 3パラメータモデル

$$(J_{NN} = -0.377\text{mK}, J_t = -0.155\text{mK}, K_p = -0.327\text{mK})$$

$$T_1 = 350 \text{ msec} \quad (5-10)$$

いっぽう実験値のほうは、ある程度のばらつきがある。こういったばらつきの原因は、いろいろと考えられる。もともとの測定データから $T_1$ をもとめるさいのフィットの仕方によって結果にかなり違いがでるといわれている。その他にも、試料のモル体積の精度であるとか実際には小さいながらも有限の磁場で測定がなされるためにおこるものとかが考えられる。こういった誤差を文献から評価してみた結果を 表5-3 にまとめておいた。

表 5-3 誤差評価

理論	lattice sum	0.2%
	exchange J	6%
	molar volume	2.5%
	total	9% (26msec)
実験	T1≠T2	5.8%
	$\omega \rightarrow 0$	3.8%
	exp	10%
	total	20% (42msec)

文献からもとめた  $T_1$  の値をふるいデータから順にしらべてみると、

200 msec (1965) 文献(45)

$T_{1, \text{exp}} =$  290 msec (1971) 文献(16)

330 msec (1982) 文献(46)

(5-11)

となる。

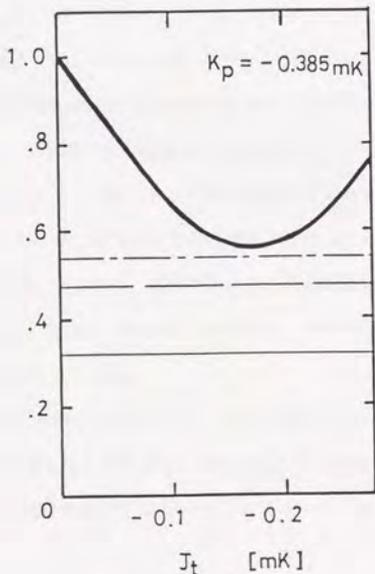
ここでは、いちばん新しいデータをとりあげることにはしたい。デボレーらの文献では広い範囲にわたってモル体積を変化させていった結果をもとに総合的に判断した結果といえるので、

信頼性はたかいと思われるからである。(46)そうすると、理論値と実験値の一致はきわめてよいと結論できる。

しかし、この結論は一見奇妙にも思える。まえにも説明したように、交換相互作用による線幅減少は、従来、反強磁性的近接相互作用のみをもつハイゼンベルグ模型で説明されていたわけである。四粒子の置換は二体の置換に比べて線幅減少により大きな効果をもつので、もし多粒子置換モデルにもとずくとすると $T_1$ の値は実験値よりかなりおおきくなることが予想される。こう考えると、多粒子置換モデルが実験と比較して大きすぎない理論値をあたえたことはどうしてなのだろうかという疑問が残る。

実は(5-9),(5-10)式のように予想に反して、あまり大きくない $T_1$ がえられたのは、 $J_t$ と $K_p$ の微妙なバランスによって引き起こされる相殺の結果なのである。このことを説明しているのが図5-3である。この図では $K_p$ を固定して、 $J_t$ を変化させていったとき $T_1$ がどのように変化するかが示してある。

図 5-3



$T_1$  の  $Jt$  による変化:

縦軸は  $Jt=0$  の時の  $T_1$  で規格化されている。

ただし、 $Jt=0$  での  $T_1$  の絶対値に関しては約610msecで、

測定値、約300msecのほぼ2倍である。

まず、 $Jt=0$  のときに注目してみると  $T_1$  は 約610msec にもなってしまう、実験値とは約2倍ものひらきがある。このことはいま述べたナイーブな予想と一致しているといえる。固体ヘリウム3が近接相互作用のみの反強磁性体であるとするならば、そのおおきさは 0.75mK と評価され  $T_1$  の実験データとの一致も満足すべきものとなっていた。すなわち、 $T_1$  の値は約300msec と計算されていた。ところがおおざっぱにかんがえてみて相互作用が  $Kp$  だけの時は、四粒子からなるクラスターが二体項をあたえる対を4つ含んでいるためその寄与は四倍くらいになるとかんがえられる。ところが、四体項の大きさそれ自身は  $Kp=-0.385mK$  と近接相互作用だけをかんがえた場合の 0.75mK の約半分であるから、結局は 300msec の約2倍である 約600msec という結果はもっともらしい。

いまのべた  $Kp$  がひきおこすおおきな  $T_1$  は  $Jt$  の導入によって打ち消されてしまうことが図5-3より見て取れる。そして、打ち消しの度合いがもっともおおきくなるところが  $Jt=-0.17mK$  で、これはちょうど多粒子置換モデルのパラメータ  $Jt=-0.13mK$  とたいへん近い値になっている。

ここでみたような  $K_p$  と  $J_t$  の相殺のメカニズムが、一般の四体のクラスター相互作用についても適用できるかどうかは自明ではない。だからたとえば 図5-4、図5-5 にしめされているようなさまざまなかたちの四体相互作用、すなわち  $K_f$ ,  $K_a$ ,  $K_b$ ,  $K_L$ ,  $K_s$  などの場合に、このような相殺がおこるかどうかをみてることは無意味なことではないと思われる。

図 5-4

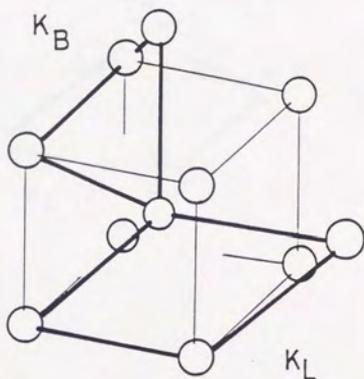
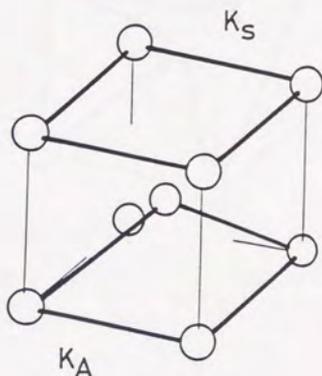


図 5-5



$T_1$  の  $K_p$  による値は  $J_t$  によって最大 4.3% も減らされることは 図5-3 から読み取れる。これを相殺の割合が 4.3% であるというぐあいに考え、ほかの四体交換相互作用についても同様に計算をおこなってみた。

その結果は 表5-4 にしめされている。次近接の原子対からなりたっている  $K_S$  の場合については、相殺の割合は小さくて約 1.4% に過ぎない。つまり  $K_S$  については相殺の機構がうまく働いていないといえるとおもわれる。さらに、三体置換を 図5-6 にしめされているような別の種類  $J_t'$  にとると、この相殺の割合は約 6.4% に増える。

図 5-6

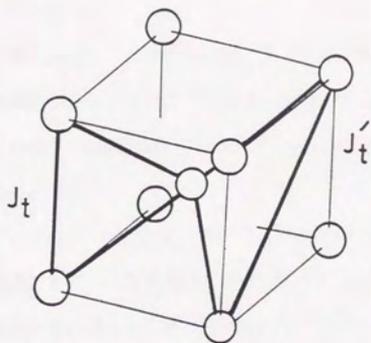


表 5-4

タイプ	相殺比率	
	$J_t$	$J_t'$
P	57%	
F	45%	
A	38%	
B	38%	
L	47%	
S	86%	64%

## 6章 まとめと将来の展望

本研究ではHCP<sup>3</sup>Heについての緩和時間が異方性を含めて計算された。将来、単結晶試料について精密なる測定がなされた時、この結果は重要な意味をもつようになる。緩和時間の詳しい研究により、HCP<sup>3</sup>Heの場合でもBCC<sup>3</sup>Heの時のように、より正確なモデルが確立されることが望まれる。

全般的に言って、HCP<sup>3</sup>Heに関しては、まだ十分な研究がなされているとはいいがたい。したがって、交換過程として、三粒子置換のみが支配的であるとする現在の理論的推察に縛られることはないと思われる。現在の状況はまだ流動的である。

この研究ではひとつの試みとしてフォノン・スピン混合モデルが考察された。HCP<sup>3</sup>Heの核磁性はこれからの問題であり、実験的な研究の進展しだいではここで考察された簡単なモデルが発展していったHCP<sup>3</sup>Heの磁性をよく説明することができるようになる可能性もある。

この研究で得られた緩和時間に関する表式はただちにBCC<sup>3</sup>Heについても応用することができる。その結果、多結晶平均された緩和時間T<sub>1</sub>は、現在ひろく受け入れられている多粒子交換モデルでうまく説明できることがあきらかとなった。

固体ヘリウムの磁性に関する研究は着実にすすめられており最近でもいくつかの点で発展がみられた。ここではこうした着実なる進展について述べてみたい。そして、その後に本論文のしめくりとして、この分野の発展を展望してみたいと思う。

1985年当時、固体ヘリウムに関して実験的に得られた物理量のあいだには、現象論的にみても矛盾があるようにみえた。ひとつはNMRの零磁場共鳴振動数についてで、もうひとつはその温度変化の大きさであった。(47)ところが、その後の研究によりこの矛盾は解消されたように思える。

1987年に京都で行われた国際会議LT18では、いままで使っていた超低温度領域での温度スケールが絶対温度をあらわしていなかったということが議論となった。(48)、(49)これ自体超低温物理学の発展におおきなインパクトをあたえたわけであるが、その影響は固体ヘリ

ウムにおける上へのべた矛盾にもおよんでいた。つまり、温度スケールの変更がこうした矛盾を解決にみちびいたのである。

もしあたらしい温度スケールを採用するとすると低磁場相での帯磁率の値の評価が違ってくる。この結果、零磁場共鳴振動数の値はかなり改善される。さらに、その温度変化についても正しい帯磁率の値と正しい評価によって、実験データとのあいだの矛盾はほぼ解消されたといつてよい。こんなわけでここ数年の精力的な研究により低密度BCO相については、実験的に得られてきたデータはかなりよく整理されてきている。(50),(51) そして、今後は低磁場秩序相では、スピンドYNAMIXが研究の主流になっていくと思われる。(52),(53) とくに、低磁場秩序相での磁区構造ならびに格子変位の観測はさしそめた研究テーマとなりつつあるようである。(54)

一方、理論的にはモデルの精密なる検証がこんごのテーマとなっていくであろう。たとえば、よく実験を再現するとされている3パラメータモデルにしても、 $H_x=0$ のとき転移点より高温側に高磁場相の領域がはみでているのが実際である。これはより正確な分析によってなくしてしまうことができるかどうか現時点ではよくわかっていない。(55) さらには、最近では6体の相互作用までとりいれたより実験データとあうモデルが提案されている。しかし、そのモデルについても、そのモデルにもとづいて得られた物理量がまだ限られているので、どこまで正しいのか見当がつかないのが現実である。(56),(57) さらに、実験的にたしかめられているモル体積の変化にたいする交換相互作用の普遍性については、基本的な段階からの理解はまだまだなされているようには思えない。リング状多粒子置換モデルによってこの事実を説明することはきわめて不自然な感じをあたえる。

ところで、高磁場相についてはいままでもそれほど多くのことがわかっているわけでない。近い将来には中性子散乱の実験がおこなわれるであろうし、そうなればこの問題にも発展が予想される。理論的に予想されているスピン構造が確かめられる日もそう遠くはないかもしれない。

固体ヘリウムの磁性について残された未知の領域としては、やはりこの研究でもおおきく

とりあげた高密度HCP相の問題がのこされているように思える。固体ヘリウムの研究は固体物理学のなかでも基本的な問題であるので、これからも継続的に続けていかなければならない。

#### 謝辞

長い間、浅学なる著者を辛抱よく指導して下さった伊豆山教授に、深い感謝の意をここにあらわしたい。

文献リスト

- (1) D. D. Osheroff, M. C. Cross and D. S. Fisher: Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 792.
- (2) D. D. Osheroff: Proceedings of the 16 th International Conference on  
Low Temperature Physics, LT-16 (Physica, B+C 109-110, 1982, 1461).
- (3) M. C. Cross: Proceedings of the 16 th International Conference on  
Low Temperature Physics, LT-16 (Physica, B+C 109-110, 1982, 1796).
- (4) N. Bernardes and H. Primakoff: Phys. Rev. 119 (1960) 968.
- (5) W. P. Kirk and E. D. Adams: Phys. Rev. Lett. 27 (1971) 392.
- (6) S. B. Trickey, W. P. Kirk, and E. D. Adams: Rev. Mod. Phys. 44 (1972) 668.
- (7) W. P. Halperin, C. N. Archie, F. B. Rasmussen, R. A. Buhrman,  
and R. C. Richardson: Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 927.
- (8) M. Roger, J. H. Hetherington, and J. M. Delrieu: Rev. Mod. Phys. 55 (1983) 1.
- (9) M. Roger, J. M. Delrieu, and A. Landesman: Phys. Lett. A62 (1977) 449.
- (10) M. Roger, J. M. Delrieu: Phys. Lett. A63 (1977) 309.

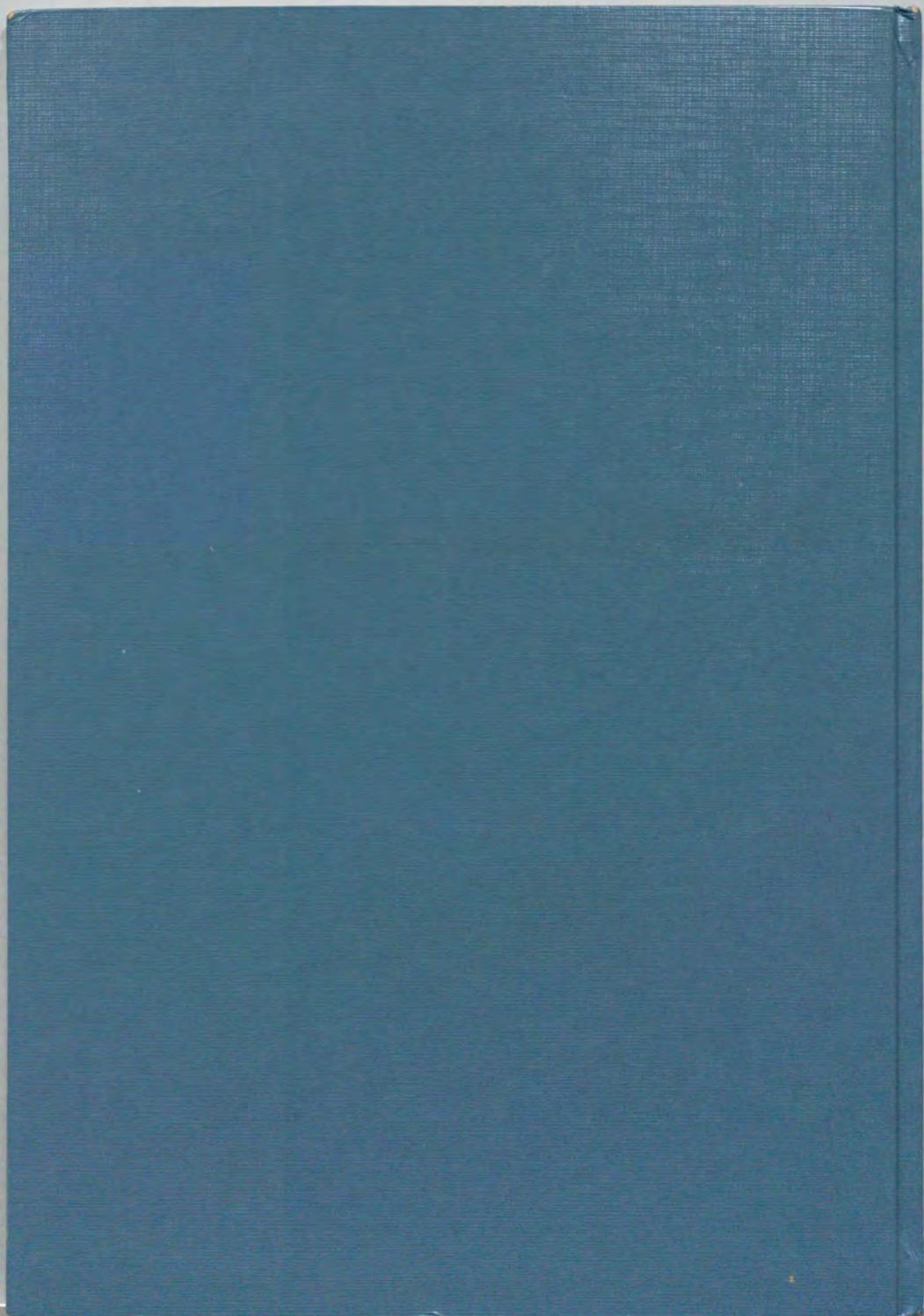
- (11) J. M. Delrieu, M. Roger, and J. H. Hetherington:  
J. de Phys. (Paris) Colloq. 41 C7 (1980) 231.
- (12) M. Roger, J. M. Delrieu, and J. H. Hetherington:  
J. de Phys. (Paris) Colloq. 41 C7 (1980) 241.
- (13) M. Roger, J. M. Delrieu, and J. H. Hetherington:  
Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 137.
- (14) M. Roger and J. M. Delrieu: Proceedings of the 17 th International Conference  
on Low Temperature Physics, LT-17, (North-Holland, Amsterdam, 1984, 857).
- (15) M. Roger: Phys. Rev. B30 (1984) 6432.
- (16) R. A. Guyer, R. C. Richardson, and L. I. Zane: Rev. Mod. Phys. 43 (1971) 532.
- (17) J. M. Goodkind and W. M. Fairbank: Phys. Rev. Lett. 4 (1960) 458.
- (18) J. M. Goodkind and W. M. Fairbank: in Helium Three, edit. J. G. Daunt  
(Ohio University Press, 1960).
- (19) H. A. Reich and W. N. Yu: Phys. Rev. 129 (1963) 630.
- (20) R. L. Garwin and A. Landesman: Phys. Rev. 133 (1964) A1503.

- (21) P. M. Richards: Phys. Rev. 137 (1965) A1327.
- (22) M. G. Richards, J. Hatton, and R. Giffard: Phys. Rev. 139 (1965) A19.
- (23) J. R. Thompson, E. Hunt, H. Meyer: Phys. Lett. 25A (1967) 313.
- (24) E. Hunt and J. R. Thompson: Phys. Rev. 163 (1967) 181.
- (25) W. Senghaphan and G. O. Zimmerman: Phys. Rev. Lett. 20 (1968) 371.
- (26) R. L. Garwin and H. A. Reich: Phys. Rev. Lett. 12 (1964) 354.
- (27) R. P. Giffard and J. Hatton: Phys. Rev. Lett. 18 (1967) 1106.
- (28) H. A. Reich: Solid State Comm. 7 (1969) 529.
- (29) R. P. Giffard, J. Hatton, and W. Truscott: J. Low Temp. Phys. 4 (1971) 153.
- (30) E. Hunt, R. C. Richardson, J. R. Thompson, R. A. Guyer, and H. Meyer:  
Phys. Rev. 163 (1967) 181.
- (31) M. Bernier and A. Landesman: Solid State Comm. 7 (1969) 529.
- (32) M. Bernier: Solid State Comm. 8 (1970) 2151.

- (33) R. C. Richardson, A. Landesman, E. Hunt, and H. Meyer:  
Phys. Rev. 146 (1966) 244.
- (34) H. A. Reich and W. N. Yu: Phys. Rev. 129 (1963) 1018.
- (35) D. S. Miyoshi, R. M. Cotts, A. S. Greenberg, and R. C. Richardson:  
Phys. Rev. A2 (1970) 870.
- (36) A. Abragam and M. Goldman: Nuclear magnetism: order and disorder  
(Oxford University Press, 1982)
- (37) W. J. Mullin and E. D. Nelson: Phys. Rev. B38 (1988) 2876.
- (38) G. Deville: J. de Phys. 37 (1976) 781.
- (39) N. Sullivan, G. Deville, and A. Landesman: Phys. Rev. B11 (1975) 1858.
- (40) Y. Takano, N. Nishida, Y. Miura, H. Fukuyama, H. Ishimoto, and S. Ogawa:  
Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 1490.
- (41) M. Roger, E. Suaudeau, and M. E. R. Bernier: Phys. Rev. B35 (1987) 2091.
- (42) Y. Y. Suzuki and T. Izuyama: J. Phys. Soc. Jpn. 52 (1983) 4248.
- (43) K. Matsumoto and T. Izuyama: J. Phys. Soc. Jpn. 53 (1984) 4300.
- (44) K. Matsumoto, T. Abe, and T. Izuyama: J. Phys. Soc. Jpn. 58 (1989) 1149.

- (45) R. C. Richardson, E. Hunt, and H. Meyer: Phys. Rev. 138 (1965) A1326.
- (46) M. Devoret, A.S. Greenberg, D. Esteve, N. S. Sullivan, and M. Chapellier:  
J. Low Temp. Phys. 48 (1982) 495.
- (47) M. C. Cross and D. S. Fisher: Rev. Mod. Phys. 57 (1985) 881.
- (48) D. S. Greywall: Phys. Rev. B33 (1986) 7520.
- (49) H. Fukuyama, H. Ishimoto, T. Tazaki, and S. Ogawa: Phys. Rev. B36 (1987) 8921.
- (50) M. C. Cross: Proceedings of the 18 th International Conference on Low  
Temperature Physics, LT-18 (Jpn. J. Appl. Phys. 26 Suppl. 26-3, 1987, 1855).
- (51) M. C. Cross and D. D. Osheroff: Physics Today 40 (1987) 35.
- (52) H. Namaizawa: Prog. Theor. Phys. 67 (1982) 1989.
- (53) Y. Sasaki, K. Sasayama, T. Mizusaki, and A. Hirai: Proceedings of the 18 th  
International Conference on Low Temperature Physics, LT-18  
(Jpn. J. Appl. Phys. 26 Suppl. 26-3, 1987, 417).
- (54) Y. Sasaki, Y. Hata, T. Mizusaki, and A. Hirai: Proceedings of the 18 th  
International Conference on Low Temperature Physics, LT-19,  
Physica B 165 & 166 (1990) 801.

- (55) K. Matsumoto: Proceedings of the 18 th International Conference on Low Temperature Physics, LT-19, Physica B 165 & 166 (1990) 829.
- (56) D. M. Ceperley and G. Jacucci: Phys. Rev. Lett. 58 (1987) 1648.
- (57) H. Godfrin and D. D. Osheroff: Phys. Rev. B38 (1988) 4492.



inches 1 2 3 4 5 6 7 8  
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

### Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak



Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

### Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

