

# 地震予知研究ノート No.4

佃 為成  
(東京大学地震研究所 地震地殻変動観測センター)

2009年1月

## 目次

		ページ
地震予知の研究体制	佃 為成	2～7
地震研究所の予知研究	佃 為成	8～11
地震研究所改組の経過	佃 為成	12～17
付録：地震研究所改組試案（1992年）	佃 為成	18～25
付録：懇談会議事録（1992年）	佃 為成	26～36
微小地震分布	佃 為成	37
破壊の結合確率モデルと地震の規模別頻度分布	佃 為成	38～57
共存する震源クラスターのサイズと分布間隔の関係	佃 為成	58～62
地鳴り観測		
佃 為成・大橋心耳・山下晃一・菅谷茂樹・酒井真雄・鶴 秀生		63～68
地下からのサインを追って ～ 水・電気・ガス・波	佃 為成	69～80
未来へ繋ぐ ～ たかが水温・されど水温	佃 為成	81～89

## 破壊の結合確率モデルと地震の規模別頻度分布

東京大学地震研究所 佃 為成  
〒113-0032 東京都文京区弥生1-1-1

Stochastic Connected Fracture Model and Magitude Distribution of Earthquakes

Tameshige Tsukuda  
Earthquake Research Institute, The university of Tokyo  
Yayoi 1-1-1, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0032, Japan

(Rvised April 3, 2003)

## Abstract

In response to building up of stresses within a medium like the crust of the Earth, fracturing may occur generating fractures distributed in the medium. We assume any fractured region is composed of fracture unit elements, which are fundamental fractured regions with a constant linear dimension. Fracture unit elements with their representative linear dimension  $d$  are assumed to be randomly distributed with a mean interval of  $L$ . By chance, two of the fracture unit elements occupy adjacent locations and are to be connected each other. A group of the fracture unit elements, which occupy a closed space discriminating from other unit elements outside the space, is important for our model. If the number of elements of the group is  $s$ , then we call it an  $s$ -group. The  $s$ -group domain is defined to be the space occupied by the  $s$ -group. A dense region of the elements in the  $s$ -group domain so that they are connected each other is defined to be a connected domain for the  $s$ -group. If all of the unit elements are connected and make a cluster, then it is called an  $s$ -cluster. The probability  $q$ , that a fracture unit element emerges in the connected domain for the  $s$ -group, is  $k/s$ , where  $k = L/d$ . The probability for the generation of an  $s$ -cluster is in proportion to  $(e/k)^s s^{-2/3}$ , where  $e$  denotes the exponential constant. This formula was first presented by Petrov(1978). The present paper reconstructs the framework of this theory and presents a method of deriving the above formula, whose descriptions were insufficient in the Petrov's paper. This theory involves the parameters in the medium structure, whereas other models based on branching process model or percolation model do not. The power law probability distribution at the critical state, i.e.  $k = te$ , is discussed in relation to the Gutenberg-Richter's law in earthquake magnitude distribution. The size  $s$  of the  $s$ -cluster is here assumed to be in proportion to the area of the dislocation surface produced by fracturing. When the elements are distributed homogeneously in the three dimensional space, the  $b$  value of the Gutenberg-Richter's law is 0.75. If the elements are complicatedly configurated at the end of the generated fractured region, the fractal dimension becomes higher and the  $b$  value will accordingly increase. As the fractal dimension increases up to 4, the  $b$  value rises up to 1.

Key words: fracture unit element,  $s$ -cluster, Galton-Watson branching process, percolation theory, connection process of fractures, Gutenberg-Richter distribution.

## §1. まえがき

地震のような破壊現象には、生成される破壊領域が存在する。この破壊領域には基本的な単位があり、それらが集まって全体の領域を形成していると考え、この破壊単位を素材にして簡単な破壊の成長モデルを構築することができる。大塚 (1971b) が提案した“基石モデル”に始まる分枝過程モデルや浸透モデル [丸山 (1978)] はその具体的な表現である。その考え方の概要を Fig.1a 示す。ある媒質の領域は潜在的な単位領域で敷き詰められている。これを破壊単位と呼ぼう。まず、ある破壊単位が破壊を起こしたとし、それが隣接する破壊単位に浸透して破壊領域が拡大する。連鎖を示す枝を図に示した。より詳しくは §2 にて説明する。

一方、破壊単位は或る空間にいわばゲリラ的に発生するというモデルも考えられる。発生した破壊単位の分布の密なところは結合し、疎なところは結合しない。単純に、たまたま隣り合って生成された破壊単位同士は結合していると、多数結合した場合が大きな破壊領域を形成すると考える (Fig.2b)。これは Petrov (1978) が示した考えである。彼は破壊現象について、熱力学に基づく多くのことを論じているが、破壊単位の結合に関する部分は、短い簡単な文章でしか表現しておらず、結果の式をどのように導いたのかをわれわれが理解することは極めて困難である (詳しくは §6. に解説する)。しかし、Petrov の問題の立て方は分枝過程モデルなどとは全く異なる点において大いに注目すべきである。そこで、この小論では、独自の定義や仮定を考え論理を組み立てて、Petrov(1978;1979) と同じような結果を導くことを試みた。本論文ではこれを破壊単位結合確率モデルあるいは簡単に破壊の結合モデルと呼ぶことにする (§3)。

この小論の目的は、破壊の結合モデルによる破壊単位のクラスター生成の確率を導出し、その漸近的な解が Gutenberg-Richter の地震規模別頻度分布を導くことを示し、さらに、分枝過程モデルや浸透モデルの場合の確率と比較し、その類似点や相違点を論ずることである。破壊の結合モデルは分枝過程モデルなどと同等の意義をもつ上に、パラメータの物理的意味が明確で、簡単に漸近的解を求めることができるメリットがある。

本論文を通じて、破壊領域の単位について「破壊単位」という名称を用いる。この特性の定義はモデルによって若干異なる。詳しい定義はそれぞれのモデルの記述の際に述べる。また、論理構造を明確にするため、本論文で仮定したり定義したことは、各節において番号を附して明記した。

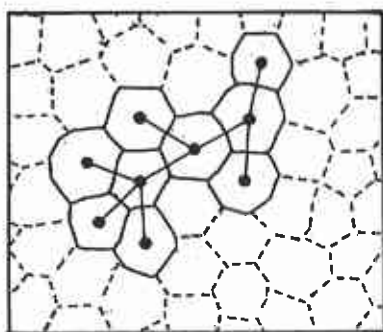
## §2. 分枝過程確率モデル

まず、地震の物理的モデルから数学的な分枝過程モデルにたどり着いた経過を概観して置こう。断

層のすべりで地震が発生することを考えてみる。大きな地震の場合、震源断層の全域で一様なすべりが起きることは考えにくい。媒質の不均質性を考慮するならば、小さな領域のすべりが連鎖的に発生して、すべり領域を拡大すると考えるのが自然である。大塚 (1971a) は、すべり摩擦機構とバネ機構 (岩石の弾性的特性) を組み合わせた機械的なモデルを組み上げ、その数値シミュレーションを試みた。さらに、この物理モデルをもとにして数学的な確率モデル、いわゆる“基石モデル”を考案した [大塚 (1971b)]。基石を断層面、基石に引かれた格子網の格子点のうち白い基石が置かれた格子点はすべりが起きた場所で、その周囲のすべりが起きていない格子点には黒い基石が置かれている。

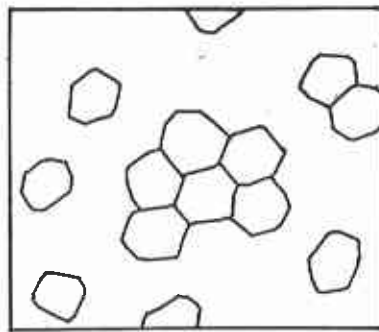
一つのゲーム (試行) を考える。最初是一个の白い基石が基盤上の或る格子点に置かれている。次の時間ステップにおいて、隣接する四方の格子点に白か黒の基石を置く。どちらを選ぶかは予め与えた確率の値に従って決める。白石の隣の格子点がいっているかぎり時間ステップを進めてこのゲームを続ける。最終的に白石が占める領域を地震の震源域と考えるのである。これはいわゆる浸透モデルの一つに他ならない [大塚 (1975)]。

Branching Process Model  
Percolation Model



(a)

Stochastic Connected Fracture Model



(b)

Fig. 1. Schematic view of the distribution of fracture unit elements for (a) the branching process model or percolation model and (b) the stochastic connected fracture model. For the branching process model, branches for connecting fracture unit elements are shown, and the potential fracture unit elements are indicated by broken lines. For the stochastic connected fracture model, the fracture unit elements are assumed to emerge randomly with a Poissonian statistical law.

大塚 (1971b) は、基石モデルを簡単な分枝過程モデルに置き換え、数値シミュレーションをおこなったが、丸山 (1978) はこの単純化されたモデルの問題を解析的に解き、連鎖がどこまで進行するかについての確率を求めた。また、分枝過程の1種である、浸透理論の樹木状浸透モデルについてもその確率の解析解を導いた。これらの数学的なモデルは、大塚 (1971a) のような物理モデルよりも広い範囲に適用できる。すなわち、すべり領域の単位は任意のタイプの破壊の単位と考えてもよいし、その破壊領域は1枚の断層面に分布する必要はなく、3次元的な分布を考えてもよい。形成される破壊単位の結合体の大きさを地震の規模に対応させ、その結合体の発生確率を地震規模別頻度分布と見なせば、上記2種類のモデルの解はいずれも漸近的に同形の Getenberg-Richter のベキ乗則を得る [丸山 (1978)]。すなわち地震の規模の統計的性質は簡単な確率法則に支配されているという考えを支持している。

大塚の数学的モデルは、名家の家系の子孫が絶えることが多いのはなぜかという問題を解くために考案され、その後宇宙線のシャワーの問題などに応用された Galton-Watson 分枝過程モデル [Harris (1969)] の特別な場合に相当し、丸山 (1978) に従って“単純化した大塚のモデル”と呼ぶことにする。基本となる仮定と定義は以下の通りである。

<仮定 2-1> 破壊には単位があり、いくつもの単位が連結して大きな破壊となる。

<定義 2-1> 破壊の単位を「破壊単位」を命名する。この破壊の単位の空間分布において、その位置を示す点を「破壊単位」と見なす。

<仮定 2-2> 隣り合って連結した破壊単位の間には仮想的な「枝」を想定する。Fig. 2 に示したように、分枝は各階層で最大 $\sigma$ 本とする。各過程において確率 $p$ で次の世代の破壊単位が生じる。つまり、 $\sigma$ 本のうち $p\sigma$ 本だけの枝が発生する。

このモデルでは $\sigma$ と $p$ がパラメータである。浸透理論で取り扱われる Fig.3 の樹木状モデル（このことを別名ベータ格子モデルともいう）[例えば Stauffer (1985)] では、一番始めの格子点については最大 $\sigma+1$ 本の分枝となる。それ以外は前者と同等である。これらのモデルでは、 $\sigma$ または $\sigma+1$ の各分枝において破壊が繋がる確率が $p$ と考えてもよい。一つの破壊単位から連鎖的に生じる破壊単位の数は平均 $p\sigma$ 個となる。この値が1より大きければ破壊の連鎖的拡大は止まらず、格子空間全域まで達してしまう。1以下であれば破壊の進行がいつかは停止する。その境界に当たる $p\sigma=1$ を満たすときは、臨界状態と呼ばれる [Stauffer(1985)]。

<定義 2-2> 分枝を繰り返し、総体として $s$ 個の破壊単位が連結したとき、それを $s$ -クラスターと呼ぶ。

$s$ -クラスターが生成される確率を“単純化した大塚のモデル” [丸山 (1978)] の場合に  $P_s^0$ 、ベータ

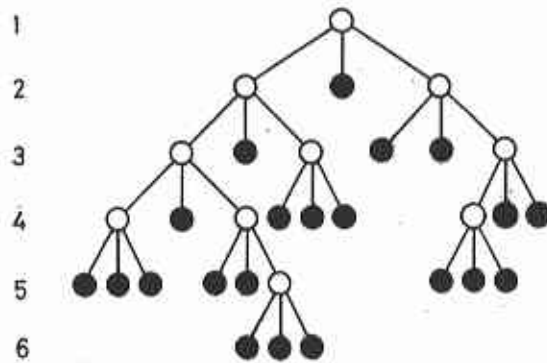


Fig. 2. Branching process model ( $\sigma = 3$ ) by Otsuka(1971b). The domain occupied by open circles represents fractured area. The solid circle shows the end of the branching process. The generation number is attached to each generation.

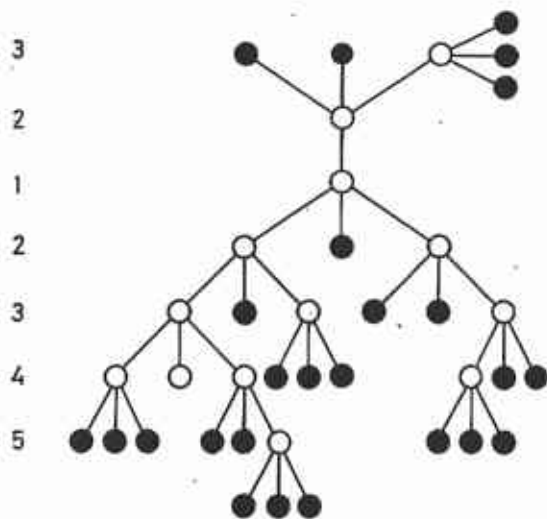


Fig. 3. Bethe lattice (or Cayley tree)( $\sigma = 3$ ) as similarly as Fig. 2. The generation numbers are attached.



格子モデルの場合に  $P_s^B$  と記せば,  $s \rightarrow \infty$  としたときの漸近解は, それぞれ,

$$P_s^O \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \frac{1}{p\sigma} \left(\frac{\sigma-p\sigma}{\sigma-1}\right) \gamma^s s^{-3/2} \quad (1)$$

$$P_s^B \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma+1}{\sqrt{\sigma(\sigma-1)}} \frac{1}{p\sigma} \left(\frac{\sigma-p\sigma}{\sigma-1}\right)^2 \gamma^s s^{-3/2} \quad (2)$$

ただし,

$$\gamma = p\sigma \left(\frac{\sigma-p\sigma}{\sigma-1}\right)^{\sigma-1} \quad (3)$$

と表される [丸山 (1978)]. 厳密な式に対して Stirling の公式 [§3 の式(14)を参照] を適用しているが,  $s$  の値の広い範囲でよい近似を与える. 上記モデルのパラメータ  $\sigma$  と  $p$  が媒質のどのような性質と結びつくのかについては §4 で検討する.

### §3. 破壊単位結合確率モデル

ある媒質空間に加わる応力が増加すると, 多数の破壊が発生するであろう. 破壊は媒質内に破壊領域を形成するが, それらが結合あるいは連結するか, しないかという問題を確率論的に取り扱う. この確率モデルの骨格を明確にするため, まず, いくつかの仮定を示し, また概念や用語の定義を行う.

<仮定 3-1> 破壊領域は, ほぼ同じ大きさをもつ或る単位で構成されている.

<定義 3-1> その単位のことを「破壊単位」と名付ける.

<仮定 3-2> 破壊単位のサイズをさしわたしの長さで表現すれば, その平均値が存在し  $d$  と表す (Fig. 4). 仮定 3-1 により, 平均値のまわりの揺らぎは小さいので, すべての破壊単位のサイズを  $d$  と見なす.

<仮定 3-3> 破壊単位は, 空間にランダムに出現し分布するが, その数密度の平均値が存在する (つまり Poisson 的である). その密度を表現するのに, 各破壊単位の中心間の距離を指標にする. その間隔の平均を  $L$  とする (Fig. 4). なお, 異なる破壊単位は重なったり, 同一の場所を占めないとする.

<定義 3-2> 破壊単位のサイズ  $d$  に対する, その空間分布のパラメータ  $L$  の比  $k = L/d$  を新たなパラメータとして定義し, 破壊単位分布の指標とする. この値が小さいほど破壊領域の分布濃度が高い.

<定義 3-3> 破壊単位同士が隣接するとき, これらは結合している, あるいは連結しているという. 互いに結合している破壊単位の数を  $s$  とするとき, その結合体を  $s$ -クラスターと呼ぶ.

<定義 3-4> 全空間内の或る閉じた空間領域を占める破壊単位の群を考える. その数が  $s$  個のとき, その群を  $s$ -グループと呼ぶ. それが占める空間を  $s$ -グループ領域と呼ぶ.

<定義 3-5> ある空間の破壊単位が  $N$  個存在するとき, その破壊単位を見つける確率は同等である

と考える。その内1つを見つける確率を以下のように定義する。

$$p_0 = 1/N \quad (4)$$

この確率は、一つの破壊単位の出現確率と考えてもよい。それぞれの破壊単位が出現する確率は同一で、その総和は

$$\sum_{i=1}^N (1/N) = 1 \quad (5)$$

となり、確かに確率と考えてよいことがわかる。この確率のことをこの論文では「存在確率」と呼ぶことにする。  $N$  個の破壊単位が存在することに関係が深いからである。

以上で、主要な概念と用語がそろった。ある一定の時間内に、破壊単位は、ある空間の中に**仮定 3-3**に従ってランダムに出現する。平均的な濃度は決まっているが、場所によって濃淡がある。連結した破壊単位群がどれくらいの確率で出現するかをこれから考察する。すなわち、 $s$ -クラスターが出現する確率を求めることにする。

まず、 $s$ -グループを取り出す。それらは  $N/s$  個存在し得る。**定義 3-5**によると、その逆数が存在確率であるから、全空間の中から  $s$ -グループを見つける確率  $p_1$  は

$$p_1 = s \cdot p_0 \quad (6)$$

である。ここで、式(4)を用いた。

つぎに、 $s$ -グループが結合して  $s$ -クラスターを生成する確率を求める。その前に、定義を行う。

**<定義 3-6>** 連結した  $s$  個の破壊単位は、ある密度が高い領域を占めるが、この領域は破壊単位が結合してクラスター（結合体）ができる空間である。これを  $s$ -グループ領域内の結合領域と名付ける。

結合領域の連結した  $s$  個の破壊単位にそって曲線を当てはめることができる (Fig. 5)。この曲線はどんな形でもよく、 $s$ -クラスターの内部を一筆書きでなぞるか、あるいは Fig. 6 のように分岐した曲線群を考える。いずれの場合も全体の曲線の長さは  $sd$  である。実際の媒質には平均距離  $L$  ごとに破壊単位が存在する。したがって、クラスターを形成する空間には平均して  $sd/L$  個の破壊単位が存在することになる。この考察から、**定義 3-5** に準じて、次の仮定が許されるだろう。

**<仮定 3-4>**  $s$ -クラスターを生じさせる結合領域にそれぞれの破壊単位が出現する確率  $q$  を

$$q = L/(sd) = k/s, \quad (7)$$

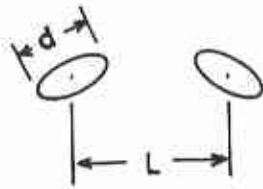


Fig. 4. The mean interval  $L$  of the distributed fracture unit elements and the representative size  $d$  of a fracture unit element for the stochastic connected fracture model.

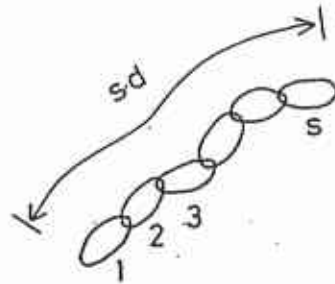


Fig. 5. An  $s$ -cluster with connected fracture unit elements is shown for one-dimensional configuration.

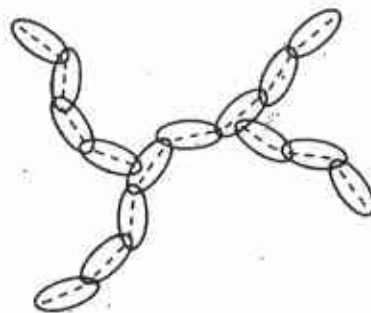


Fig. 6. Branching connection of fracture unit elements. The total length of the broken curves corresponds to the length  $sd$ .

と近似する。ここで、定義 3-2 の  $k$  を用いた。また、

$$k \geq 1 \quad (8)$$

と仮定する。ただし、 $s = 1$  のときは  $q = 1$  とする。また、 $s$  が小さい範囲で  $q = k/s > 1$  となり得るが、この場合は別の確率の系を考える必要がある (定義 3-7)。

$s$ -グループが結合して  $s$ -クラスターをなすには次の 2 つの条件を満たさなければならない。

- 1) 各破壊単位が出現する確率  $q$  は、式 (7) で示される。これは、結合領域に出現することを要求している。
- 2) 同時に  $s$  個出現する。これは、出現する個数が揃わなければならないことを要求している。

条件 1) と 2) を考慮すると、1組の  $s$  個の破壊単位が結合領域を占める確率は  $q^s$  である。各破壊単位が占める位置はどれも対等で、そのグループの破壊単位のどれかと入れ替わってもよい。 $s$  個から  $s$  個を並べ替える仕方の数は  $s!$  であるから、結局、 $s$ -クラスターができる確率は

$$p_2 = s!q^s \quad (9)$$

となる。

$s$ -グループを見いだす確率 (存在確率)  $p_1$  に、このグループが  $s$ -クラスターをなす確率  $p_2$  をかけると、式(6), (9) を用いて全空間での  $s$ -クラスターの存在確率  $p_3$  が次のように求められる。

$$p_3 = p_1 p_2. \quad (10)$$

ここで全空間における  $s$ -クラスターの総数  $N_s$  は、定義 3-5 に準じて

$$N_s = 1/p_3 \quad (11)$$

である。したがって、 $s$ -クラスターの生成確率  $P_s$  は、

$$P_s = \frac{N_s}{\sum_{s'=1}^{\infty} N_{s'}} \quad (12)$$

となる。

式(6),(9), (10),(11) より、

$$N_s = \frac{1}{s p_0 s! q^s} \quad (13)$$

と書くことができる。ここで Stirling の公式

$$s! = \sqrt{2\pi s} s^{s+1/2} e^{-s} [1 - O(s^{-1})] \quad (14)$$

を適用する。ここで、 $e$ はexponential,  $O(\epsilon)$ は $\epsilon$ のオーダーの微小量(正の値)を表す。この値は $s$ が10よりも大きいならば、だいたい $1/12s$ 程度である。式(14)および式(4)を用い、 $q$ の代わりに定義3-2の $k$ を用いて記述すれば、式(13)より

$$\frac{N_s}{N} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e/k)^s s^{-3/2} [1 + O(s^{-1})] \quad (15)$$

が得られる。ここの $O(\epsilon)$ は式(14)におけるものとほぼ同一と見なしてよい。式(12)により、式(15)は $P_s$ に比例する。式(12)は、“簡単化された大塚のモデル”やベータ格子モデルの漸近解(1), (2)と類似の解である。

以上でこの節の理論はほぼ完結するのであるが、 $s$ -グループが $s$ -クラスターをつくらない場合については何も述べていない。 $s$ -グループのうち結合しないものが出現する確率や小さいクラスターの出現確率はどうなるのだろうか。仮定3-4の考えでは、 $s$ -クラスターが生成するとき、それぞれの破壊単位が出現する確率を $s$ の関数としての $q$ と解釈した。小さいクラスターの生成のときや結合しないときの破壊単位の出現確率をどのようにモデル化すればいいのだろうか。これはたいへん難しい問題である。そこで、問題を極めて単純化して次の仮定を設けて理論を先に進めてみる。

<仮定3-5>  $s$ -グループに属する破壊単位について、結合領域に出現する確率が式(7)によって定義された $q$ と同一とし、また、結合しない領域に出現する確率を $r$ とする。これらの確率は $s$ および $k$ だけの関数である。 $s$ -グループ領域の外部に出現する確率は、 $1 - q - r$ ということになる (Fig. 7a)。定義3-6における結合領域は、ここでは、パッチ状にいくつかに分かれて分布する場合も許すとする (Fig. 7b)。それぞれのパッチには2個以上の破壊単位の結合体ができる。

上の仮定の意味するところは、 $s$ -グループ領域には、結合体が作られる領域とそうでない領域があって、それぞれの領域には、決まった確率によって破壊単位が発生しているというモデルに置き換えようというわけである。今、ある $s$ -グループを考える。 $s$ -グループ領域内の破壊単位に番号がふられており、Fig. 8では、それを並べたイメージで描いてある。これを破壊単位を受け入れるために $s$ 個の席が用意された容器と考える。これらの席は2つの領域に区分される。1つは $m$ 個からなる結合領域(いくつかのパッチに分かれている場合もある)で、それ以外の席はもう1つの領域に属する。仮定3-5によって、 $s$ 個の破壊単位のそれぞれが、結合領域の席に出現する確率が $q$ 、Fig. 8における空の席(白丸)に出現する確率は $r$ となる。 $s$ 個の席のうち、結合領域に $m$ 個、その外部に $s - m$ 個が出現する確率を求めると $m!(s - m)!q^m r^{s - m}$ である。ここで、階乗の計数は、2つのそれぞれの領域の席を破壊単位が占

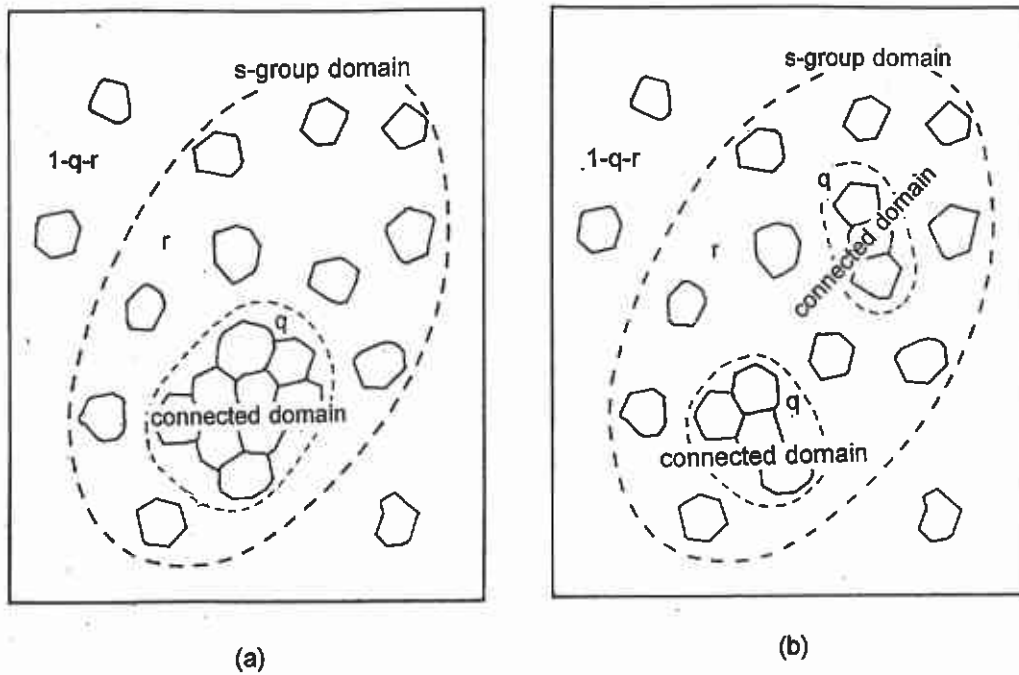


Fig. 7. (a) An s-group domain, where  $s$  fracture unit elements emerge in a group, and the connected domain, where the elements are connected each other in a body. The disconnected domain in the s-group domain is also shown. The occurrence probabilities for the connected, disconnected and outside the s-group domain are  $q$ ,  $r$ , and  $1-q-r$ , respectively. (b) An s-group domain with two patches for the connected domain.

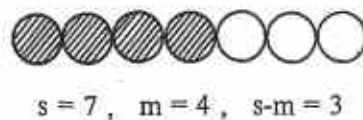


Fig. 8 An s-group of fracture unit elements is shown for one dimensional configuration.  $m$  unit elements (shaded circle) are connected, while other  $s - m$  unit elements (open circle) are disconnected.

める仕方の場合の数である。ちなみに  $s$  のすべてが破壊単位で占められた場合の確率が式(9)である。この問題において可能性のあるすべての場合の確率の総和が1になるべきことから、

$$\sum_{m=0}^s m!(s-m)!q^m r^{s-m} = 1 \quad (16)$$

として  $r$  の値が  $q$  の関数として決まる。ただ、どのような  $q(\leq 1)$  の値にたいしても  $r(\leq 1)$  が存在しない場合がある。それは  $s$  が小さい範囲で発生する。仮定 3-4 に述べたように、 $q$  そのものも定義できない場合もある。 $s$  が小さい範囲では別の確率の体系が必要である。その体系の作り方には任意性があるが、一つのモデルとして以下のように定義する。

<定義 3-7>  $s$  が或る  $s_0$  以下の小さいときは、一定の値の  $q_0(\leq 1)$  を与える。ここで、 $s_0$  や  $q_0$  は以下のように決定する。 $s=1$  のときは当然  $r=0$  である。今、式(7)の  $q$  が  $r \leq 1$  および式(16)を満たす  $s$  の最小値を  $s=s_0 > 1$  とする。そのとき、 $s=2, 3, \dots, s_0-1$  に対して  $q$  として、式(16)を満足させるように一定の値  $q_0(\leq 1)$  を選ぶ。

このようにして、 $s$  に対して一貫した確率モデルを作ることができた。

#### §4. モデルの比較

分枝過程の確率モデルでは、§2で述べたように、臨界状態においては  $p=1/\sigma$  であった。一方、§3の破壊単位結合モデルにおいては、式(12)と式(15)より  $k=e$  である場合に対応すると考えられる。その理由は、 $k < e$  ならば、 $s \rightarrow \infty$  のとき、 $N_s$  や  $P_s$  は発散し、 $k > e$  ならば、逆にその確率は0に収束するからである。つまり、このモデルでは臨界のとき  $q=e/s$  である。結局、臨界状態の場合、式(1),(2)および(12)または(15)で表される漸近的な確率は、それぞれ、

$$P_s^O \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-1}} s^{-3/2} \quad (17)$$

$$P_s^B \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma+1}{\sqrt{\sigma(\sigma-1)}} s^{-3/2} \quad (18)$$

$$P_s \propto \frac{N_s}{N} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s^{-3/2} \quad (19)$$

となる。式(17)、式(18)において、 $\sigma \rightarrow \infty$  のときは、これらは式(19)とまったく同じ形になってしまう。

次に、分枝過程モデルの式に次のような漸近化を試みしてみる。すなわち、 $\sigma \rightarrow \infty$  かつ  $p \rightarrow 0$  であるが、 $p\sigma$  は或る有限の値をもつ場合を考える。そのとき、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/x)^x = e$  の公式を用いると次の近似式が得られる。

$$P_s^O \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (p\sigma)^{s-1} e^{(1-p\sigma)s} s^{-3/2} \quad (20)$$

$$P_s^B \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (p\sigma)^{s-1} e^{(1-p\sigma)s} s^{-3/2} \quad (21)$$

このような表記の場合は、これらと式(15)の対応がより明確で、 $s$  が大きいところでは

$$(p\sigma)^{s-1} e^{(1-p\sigma)s} \sim (e/k)^s \quad (22)$$

のように等値して考えることができる。このように、 $p\sigma$  と  $k$  は互いに対応関係にあると言える。以上のように分枝過程確率モデルと破壊単位結合確率モデルそれぞれの  $s$ -クラスター確率分布は、近似的には互いに等価であるが、前者のパラメータ ( $\sigma, p$ ) が破壊単位について抽象的にしか表現していないのに対し、後者のパラメータ ( $k = L/d$ ) は破壊単位についての幾何学的意味が具体的である。後者の場合、ある大きさの破壊単位がどのような密度で存在（あるいは出現）するかを調べれば、 $s$ -クラスターの出現確率を推定することができる。

### §5. Gutenberg-Richter の規模別頻度分布

式(17)~(19)より、分枝過程モデル（浸透モデル）においても破壊単位結合モデルにおいても、臨界の場合には  $s$ -クラスターの発生頻度は同じ形の  $s$  のべき関数になる。 $s$  に対する数密度を  $n(s)$  とすれば、 $c_1$  を定数として、

$$n(s)ds = c_1 s^{-3/2} ds. \quad (23)$$

今、以下の2式で示すような仮定を置く。

$$s = c_2 L^D \quad (24)$$

$$L = c_3 \times 10^{\alpha M} \quad (25)$$

ただし、 $L$  は、ここでは、破壊単位の集合である破壊領域の大きさ、あるいは、震源域の代表的な長さ（§3 の  $L$  とは異なる）を表し、 $M$  は地震のマグニチュードである。また、 $c_2, D, \alpha, c_3$  は定数である。式(24), (25)より、 $s$  は結局、

$$\log_{10} s = c_4 + \alpha DM \quad (26)$$

と表される。ここで、 $c_4 = \log_{10}(c_2 c_3^D)$ 。

式(23),(26)より、

$$n(s)ds = c_5 \times 10^{-\frac{\alpha D}{2} M} dM \quad (27)$$

ただし、 $c_5 = (\ln 10) \alpha D c_1 c_2^{-1/2} c_3^{-D/2}$ 。



$n(s)ds = n(M)dM$  となるように  $M$  に対する数密度を  $n(M)$  と記すことにすれば、上式より、

$$n(M) = c_5 \times 10^{-bM} \quad (28)$$

ただし、

$$b = \frac{\alpha D}{2} \quad (29)$$

である。この  $b$  はいわゆる  $b$  値である。Utsu (1969) によれば、マグニチュード  $M$  と余震面積  $S$  の間には、

$$\log_{10} S = 1.0M - 4.1 \quad (30)$$

の関係があり、 $S \propto 10^M$  となる。この余震面積を震源域の面積と見なす。 $S \propto L^2$  であるから、結局、

$$L \propto 10^{\frac{1}{2}M} \quad (31)$$

つまり、式(25)より、 $\alpha = 1/2$  ということである。次に、 $D$  について考察しよう。式(24) の右辺はフラクタル次元  $D$  の空間の大きさを示している。結合した破壊単位分布が  $s$  の増加に応じて 3 次元的に相似であるならば、 $D = 3$  である。その場合は、 $b = 3/4$  となり、実際の多数の地震データの場合に知られている  $b \sim 1$  よりやや小さい値となる。破壊単位結合による枝分かれが先端ほど混み合う状態では、 $s$  の増加率が 3 次元の容積の増加率を上回り、 $D \sim 4$  ぐらいの値も考えられるので、この場合は  $b \sim 1$  となる。

## §6. 議論

小論における破壊単位結合モデルを考えた発端は次のようなものであった。ある空間に多くの破壊単位が出現するとき、互いに隣接する場合があるであろう。隣り合った、つまり結合した  $s$  個の破壊単位は何組形成されるであろうか。このような問題を最初に採り上げたのは Petrov(1978) である。彼の論文では、わずか数行の文章説明の後、偶然隣り合う  $s$  個の破壊単位（ここではクラックと記述されている）の数を式(15)と類似の式（表記法は本論文と異なる）で記述している。その式を導き出す方法については全く触れられていない。また解説図もない。この式がもたらす結果として Petrov(1978, 1979) は、定義 3-2 の  $k$  に対し、 $k < e$  であれば、クラスターのサイズ  $N_s$  が  $s$  が大きくなると発散することに注目した。つまり、平均的に破壊単位の分布が  $k < e$  となるような密度が高い場合に、大きなクラスターが出現すると予言した。このように重要な結果をもたらすので、魅力的な問題の設定とともに、この論文は著者の注目を引いたのである。

この小論では、確率の考えに基づいて上の問題を解いた。§3 に示した仮定や定義のもとに理論を構築した。仮定 3-5 以降の展開は、ある意味では理論の内容を特殊化するものである。というのは、式 (9) の確率  $p_2$  で示された以外の確率については、実は様々なモデルが可能である。このままでは、確率が首尾一貫して論じられている分枝過程理論や浸透理論に比べて、確率論として不十分との印象を持たれる向きもあるかもしれない。そこで、仮定 3-5 を置くことによって非常に単純な確率モデルを作り、確率モデルとして一貫性を与える試みを行ったわけである。これについても、かなり技巧的だととの批判があるかもしれない。しかし、分枝過程理論や浸透理論においても、分枝の数  $\sigma$  を常に一定にしたり、分枝ないし浸透する確率の値をどの分枝についても一定にするなど、極めて技巧的で大胆な単純化を行っているのである。この理論の実用的価値は、実際のデータに適用してみた後に判明する。なお、仮定 3-5 以降の展開による確率モデルは、§4 や §5 での議論には不要である。

本論文で提示したモデルは、大きなクラスターの存在確率の漸近的表示において分枝過程モデルや浸透モデルとほぼ同じ形式をもつこと、つまり、理論の結果の同等性が明らかになった。その比較の上で破壊単位結合モデルの特徴は次の 2 点にある。

1) 物理的意味が明確である。現実の破壊単位について、その分布間隔に対するサイズの比  $k$  をパラメータとした  $s$ -クラスター確率分布が得られる。それに対し、分枝過程モデルや浸透モデルでは、分枝の数と分枝する確率の積が破壊単位結合モデルのパラメータ  $k$  に対応するが、現実空間における破壊単位の物理的な状況を表現できない。

2) 結果の式の導出が簡単である。それにもかかわらず分枝過程モデルや浸透モデルと同様な結果を得る。

分枝過程理論や浸透理論では、破壊単位が存在すべき位置が空間に或る自由度にて定められていて、その領域への浸透によって破壊領域を形成すると考える。その空間の構造については格子網構造以外の情報がない。格子網の幾何学的なパラメータは分枝に関するもの ( $\sigma$ ) である。枝の長さについては何も述べられていないし、 $\sigma$  がある程度大きくなれば、 $s$ -クラスターの発生確率は  $\sigma$  には依らずほぼ同一となり、ますます構造の情報量は少なくなるのである。§2 に述べたように、もとの物理の問題を極めて抽象化して“単純化した大塚のモデル”が作られたので、その理論は数学的には美しいが、物理的イメージが薄れてしまったのは仕方がないことである。これに対して、小論の方法では、破壊単位の大きさとその空間分布という構造を意識している。臨界状態がどのようなものであるかについても、活性化された破壊単位の空間密度と結びついているので、理解しやすい。分枝過程モデルでは、 $\sigma = 1/p$  が臨界の条件であった。分枝の数が大きいほど枝へ浸透する確率が小さくても破壊が拡大することを意味し

ているが、その確率と構造との関係は不明である。小論のモデルは構造のパラメータ  $k$  をもち、それが破壊単位の結合の確率を規定するところに特徴がある。

ところで、§3で述べたように、われわれの理論の弱点は  $s$  が小さいときは別の取り扱いをする必要があることであった。定義 3-7に基づいて、式 (13) を保証する  $s$  の下限  $s_0$  が実際どのくらいになるかを数値的に調べてみる。まず、 $k$  の値を変化させたときに、式 (15) がどのように変化するかを Fig. 9 に示した。横軸の  $\log_{10}s$  は、式 (26) で示されるように地震のマグニチュードと対応する。 $k$  が  $e$  よりわずかに小さい場合は、 $s$  が増加すると急激に発生確率が大きくなり、破滅的な大きな破壊が生じる。一方、 $k$  が  $e$  より大きくなると大きな破壊が抑制される。地震規模の大きな範囲で Gutenberg-Richter の法則が当てはまる場合には、 $k$  の値は  $e$  の極近傍である必要がある。 $k$  が  $e$  のとき、式 (16) を満たす  $q$  や、 $r$  が存在するためには、数値的に解くと、 $s_0 = 14$  でなければならない。 $s_0 = 14$  は、 $k$  が  $2.6 \sim 3.1$  の範囲で成立する。実用上では  $s \geq 14$  に対して式 (13) や式 (15) が成り立つ。 $s < 14$  に対しては、§3. で述べたように別の定義を  $q$  に与えればよい。

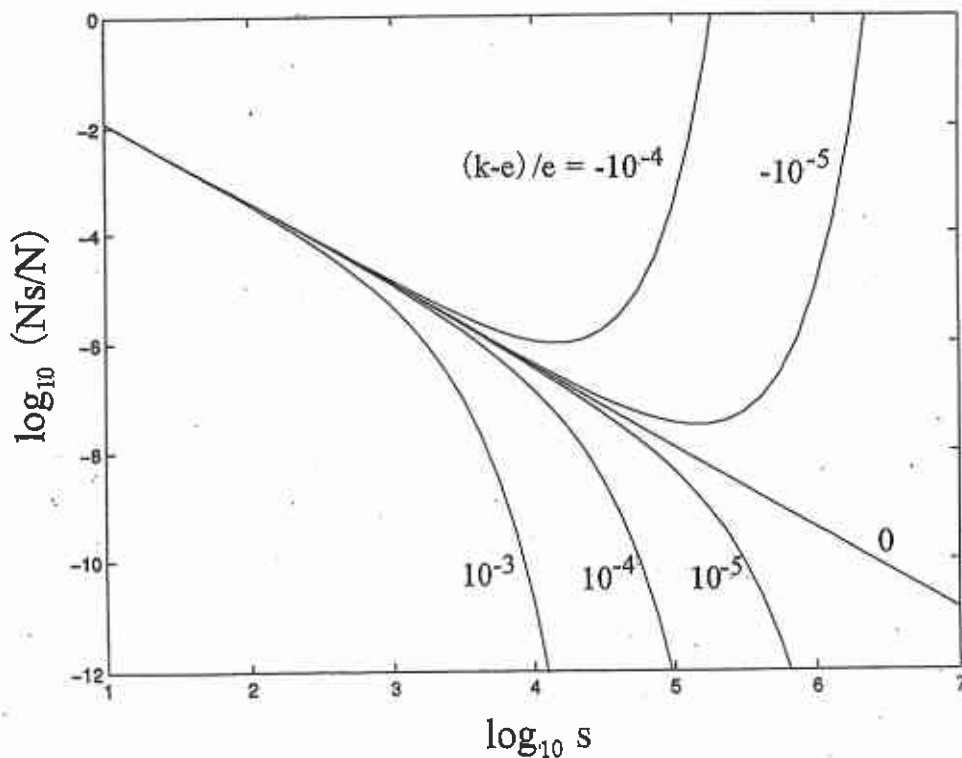


Fig. 9. Generation probability for the  $s$ -cluster in terms of the stochastic connected fracture model. The forms of Eq.(15) are shown for different values of  $k$  in the vicinity of the critical state  $k = e$ .

ここで、“破壊単位”について補足的な説明をしておく。破壊現象とは破壊領域の形成であると言える。破壊領域は或る単位から成ると考え（**仮定 3-1**），その用語を定義した（**定義 3-1**）。これは，“破壊領域の単位”を短くしたものと了解していただきたい。一方，分枝過程モデルや浸透モデルでは，破壊の単位は非常に抽象的であって，空間の上では，格子の点として表現され，生成される破壊領域などはとりあえず考慮外である。破壊現象の何かを意味するかを特定しなくても，“単位破壊”という抽象的な破壊を考えれば，これを単位として計数ができる。過去の研究において，丸山（1978）はこの“単位破壊”を用いた。この場合は，地震の規模別頻度分布を導出する際，破壊に対応する物理量として何を選ぶかについて新たな仮定を設ける必要がある。丸山（1978）は，地震波の放出エネルギーに比例する量を採用した。ところで地震現象の場合は，特別な場合を除き，破壊は或る面的な破壊領域を形成する。そうであるならば，小論のように地震現象では破壊単位として有限な面を考え，その面積を地震の規模に関する量として用いるのは極めて自然である。本論文で用いた“破壊単位”は，“破壊”の単位であると同時に，“破壊”がもたらす破壊領域の大きさという示量因子の単位でもある。

## §7. 結論

多数の破壊単位が或る空間に発生するとき，その連結の可能性について，簡単な確率モデルを構築して考察し，得られた確率解を分枝過程モデルや浸透モデルの解と比較した。さらに，地震の規模別頻度分布への応用を試みた。本論文の結論や成果は以下のようにまとめられる。

- 1) Petrov(1978) が最初に示唆した破壊単位結合によるクラスター成長の理論を構築した。この理論によってPetrov(1978, 1979)が明確な証明なしで示した結果と同等の結果を得ることができた。
- 2) 結合領域という概念を定義し，破壊単位の分布密度の段階的な分布変化を仮定することにより，モデルの特殊化ではあるが，確率モデルとしては一貫した簡単なモデルを構築した。これはPetrov(1977, 1978)の理論のさらなる展開の一つである。
- 3) クラスターが大きい場合の漸近的なクラスター発生確率は，破壊単位結合モデルと，分枝過程モデルや浸透モデルとが等価になることを示した。
- 4) 破壊単位結合モデルのパラメータには，分枝過程モデルないし浸透モデルには表現されていない破壊単位のサイズに関するもの（破壊単位の代表的な長さと分布の平均的な間隔）が存在し，物理的なイメージがより鮮明であることを示した。
- 5) クラスターが大きい場合の漸近的なクラスター発生確率は地震発生の規模別発生確率と見なすことができるが，破壊領域の面積とマグニチュードを関係づけて，Gutenberg-Richterの規模別頻度分布を導き

出した。従来の研究では、クラスタのサイズを地震波放出エネルギーに対応させたものであった。本理論では、破壊単位が3次元的に分布している場合は、Gutenberg-Richter の  $b$  値は 0.75 であり、破壊領域の先端部が込み合ってフラクタル次元が大きくなれば、 $b$  値も増加する。フラクタル次元が4次元であれば、 $b$  値は1である。

分枝過程理論や浸透理論、この小破壊単位結合確率理論のいずれも、ある破壊単位を考えてそれを基本として破壊が拡大するとした。ある特別の大きさをもつ破壊単位がそれより大きい破壊（領域）のサイズを決める。では、その破壊単位とは何か？ おそらく、この破壊単位は階層構造をなし、ある階層に注目した場合にこれらの理論が適用される。それより小さな階層、あるいは大きな階層ではまた、それぞれに見合った大きさの破壊単位を基準にしてモデルを立てる。実際の地震現象が階層的であるかどうかについての検証を含め、どのような階層構造が存在しているのかについての研究は今後の課題である。

## 謝辞

分枝過程モデルとの比較を行うことにしたのは気象研究所伊藤秀美氏の示唆によるものである。丸山卓男先生には原稿に目を通していただき式の誤りなどのご指摘をいただいた。これらの方々に深く感謝いたします。

## 文献

Harris T. E., 1963, The theory of branching processes, Springer-Verlag, 230pp.

丸山卓男, 1978, 分枝過程によって生ずる破壊の規模別度数分布 - 初等的解析, 地震研究所彙報, 53, 407-421.

大塚道男, 1971a, 地震の起こり方のシミュレーション 第一部 一つの機械的モデル, 地震2, 24, 13-25.

大塚道男, 1971b, 地震の起こり方のシミュレーション 第二部 地震の規模別頻度分布, 地震2, 24, 215-227.

大塚道男, 1975, 基石モデルと浸透理論, 地震2, 28, 96-97.

Petrov V. A., 1978, Macroscopic influence of thermofluctuational statistics on fracture, Publication of Institute of Physics and Technology, Leningrad (in Russian).

Petrov V. A., 1979, Mechanism and kinetics of macrofracture, Sov. Phys. Solid State, 21, 2123-2126.

Stauffer, D., 1985, Introduction to percolation theory, Taylor & Francis, 124pp.

Utsu, T., 1969, Aftershocks and earthquake statistics (1), J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. VII, 3, 129-195.