レイノルズ応力モデルの改良と
三次元非等方性乱流解析に関する研究

平成2年2月

杉山　均

レイノルズ応力モデルの改良と

レイノルズ応力モデルの改良と三次元非等方性乱流解析に関する研究

平成2年2月

杉山　均

目次

記号表

A： 偏微分係数より成る行列
a： 温度伝導率
a_{ij}^{mj}： 圧力・歪相関項中の4次相関テンソル
b_{ij}^{*}： 圧力・温度勾配相関項中の3次相関テンソル
CURV： 三次精度の風上差分中の補正項
C： 時間平均スカラー量
c： 時間変動スカラー量
c_1, c_2, c_1', c_2'： 圧力・歪相関項中の経験定数
c_1^*, c_2^*
$c_{1T}, c_{2T}, c_{1T}', c_{2T}'$： 圧力・温度勾配相関項中の経験定数
$c_{1T,w}, c_{2T,w}$
c_ψ： 勾配型拡散モデル中の経験定数
c_p： 定圧比熱
c_μ： 渦動粘性係数に関する定数
D_{iff}： 輸送方程式中の拡散係数
D_h： 水力直径
D： 代表長さ
D_{ij}： 圧力・歪相関項中の速度勾配より成る変数
D_k： 乱流エネルギ輸送方程式中の拡散項
$D_{T'^2}$： 温度変動輸送方程式中の拡散項
$\vec{e}_i$： デカルト座標系での基底ベクトル
E： 対数分布則中の普遍定数
F_e, F_w, F_n, F_s： 界面を通る流束
$f(L/x_w)$： 壁面の影響を示す関数
G_S： 渦動粘性係数を用いた乱流エネルギの生成率
g： 重力加速度
g_i, l_i, m_i, n_i： 計量テンソル
h： 格子間隔
h_1, h_2, h_3： 偏微分係数の二乗和平方根
J： ジャコビアン
k： 乱流エネルギー
K_1： 流れの非等方性を示すパラメータ
L： 特性長さ（第2章）,偏微分係数より成る行列（第3章）
M： 乱流格子間隔（第4章）,偏微分係数より成る行列（第3章）
Nu： ヌセルト数
P： 時間平均圧力

$\mathbb{P}$： 対数温度則中の関数
P_k： レイノルズ応力を用いた乱流エネルギの生成率
P_{ij}： レイノルズ応力$\overline{u_i u_j}$の生成項
P_r： プラントル数
P_{rt}： 乱流プラントル数
$P(\xi,\eta,\zeta)$： 計算格子を制御する変数
$Q(\xi,\eta,\zeta)$
$R(\xi,\eta,\zeta)$
P_T： 温度変動輸送方程式中の生成項
P_{iT}： 乱流熱流束方程式中の生成項
p： 圧力時間変動
q： 熱流束
R： 時間スケール比
Re： レイノルズ数
$S\phi$： 従属変数の生成項ϕ
T： 時間平均温度
T'： 温度時間変動
t： 時間
U_i： i軸方向の時間平均速度
u_i： i軸方向の速度時間変動
$\overline{u_i T'}$： i軸方向の乱流熱流束
$\mathbb{U},\mathbb{V},\mathbb{W}$： 反変速度成分
U,V,W： デカルト座標上でのｘ，ｙ，ｚ方向平均速度成分
U_τ： 摩擦速度
x_i： i方向座標軸
x,y,z： デカルト座標での座標軸
x_w： 任意の点から壁面までの距離

ギリシャ文字

$\alpha,\beta,\gamma,\zeta,\eta,\upsilon$： 圧力・歪相関項中の定数（第2章）
α_{ik}： 格子生成に関するラプラス方程式中の係数
δ_{ij}： クロネッカのデルタ
δ^*： 境界層排除厚さ
ε： 速度変動に対する散逸
ε_T： 温度変動に対する散逸
ε_{iT}： 乱流熱流束に対する散逸
ζ,η,ξ： 一般曲線座標系の座標軸
$\vec{\zeta},\vec{\eta},\vec{\xi}$： 一般曲線座標系での基底ベクトル
κ： カルマン定数

λ： 熱伝導率（第2章,第5章）,渦粒子寸法（第4章）

μ： 粘性係数

ν： 動粘性係数

ν_t： 渦動粘性係数

π_{ij}： 圧力・歪相関項（再配分項）

$\pi_{ij,1}$： 圧力・歪相関項中の純粋な乱れによる影響を含む項

$\pi_{ij,2}$： 圧力・歪相関項中の平均流による影響を含む項

π_{iT}： 圧力・温度勾配相関項

ρ： 密度

σ_k： 乱流エネルギ方程式中の拡散項定数

σ_ε： 乱流散逸方程式中の拡散項定数

τ： せん断応力

ϕ： 一般従属変数

ω： 渦度

添え字

av： 平均量に関する量

b： 混合平均に関する量

c： 中心部に関する量

cb： 対角線上に関する量

e,w,s,n： コントロールボリュームの境界面（第2章）

in： 入口部に関する量

n,nor： 垂直方向に関する量

slip： すべり流に関する量

T： 温度に関する量

t： 乱流に関する量

vol： 体積に関する量

w： 壁面に関する量

wb： 左右対称軸に関する量（第2章）

$-$： 時間平均を示す

Δ： 微小変化量を示す量

第１章　序論

１．１　非等方性乱流解析の必要性

工業上対象となる多くの流れは三次元乱流であり，従って乱流現象を正確に把握することは，各種の設備設計あるいは性能向上等の面から重要かつ不可欠である．また乱流が影響を及ぼす分野は機械工学に留まることなく，化学，航空，原子力，土木，環境，気象，生体工学と多岐にわたっている．例えば，化学工学において，反応速度は乱流の特徴の一つである拡散現象と深いかかわり合いを持ち，航空工学では乱流により生じた摩擦抵抗をいかに小さくするかに設計者は努力する．原子力工学では熱交換器等に代表される伝熱現象は乱流挙動と深く関係するしまた土木工学においては，河川の氾濫による影響を加味して堤防の構築を考えなければならない．

このように各分野に影響を及ぼす乱流とは何かを定義することは非常に難かしいが，乱流の持つ一般的性質は次のような点に特徴付けられる．まず第１点として，（１）不規則性を持つことがあげられる．熱線風速計の測定結果にみられるように乱流は常に不規則な速度変動を伴なう．第２点としては，（２）高レイノルズ数であることがあげられる．これは慣性力が大きく，従って非線形性が大きいことを意味している．第３点としては，（３）乱流は大小様々な渦の集合体であることがあげられる．これは，前述した非線形性と関係があり，運動方程式中の慣性項の速度に例えば，$a \sin kx$（a:振幅，k:波数）を代入すれば，$(a^2k \sin 2k)/2$ となり，最初の波数の２倍の波数が作られ，大きな渦が分裂し小さな渦を作ることに対応している．第４点としては，（４）拡散現象があげられる．これは層流などの分子拡散とは異なり，規模の大きな混合運動であり，工学の各分野において特に問題となるのはこの拡散現象である．第５点目としては，（５）エネルギーの伝達は大きな渦より小さな渦へと行なわれ，やがて粘性により消滅するという過程をとる点があげられる．（例えば Tennekes-Lumley(1972)，石垣(1984)）．

乱流を数値的に予測しようとする場合，支配方程式を閉じた系で扱うことが必要であり，その際以上のような乱流の性質を踏まえての仮定や簡略化を導入し系を閉じなければならない．これが乱流の完結問題(closure problem)あるいは乱流のモデル化とも言われ，乱流解析の上で重要な要因となってくる．現在，工業的に利用される乱流モデルは，乱流輸送方程式モデルであり，これは乱流特性量に関する輸送方程式をナビエ・ストークス方程式より導出し解くことにより乱流の状態を予測しようとするものである．このモデルは，輸送方程式の数より０方程式モデル，１方程式モデル，２方程式モデルと分類されている．０方程式モデルは，輸送方程式を導入せず渦動粘性係数を表現したモデルであり，１方程式モデルは，乱流エネルギーｋに関する輸送方程式を導入し，渦動粘性係数をｋの関数として表現したモデルである．２方程式モデルにおいては，乱流エネルギーｋの他に，第２変数を導入し，その変数によりまた分類されるが，現在良く用いられるのは乱流散逸量ε に関する方程式を導入し，渦動粘性係数をｋとεの関数としたｋ－ε２方程式モデルである．

しかし，これらのモデルは渦動粘性係数を等方的として扱ったモデルであり非等方性乱流解析には適用できない．しかも現実の流れは三次元非等方性乱流であり，より正確に流

れ場を把握するには，この非等方性を予測することが必要となる．この非等方性乱流解析はレイノルズ応力方程式を解くことにより解析が可能となるが，この方程式は直接解くことはできず，何らかのモデル化が必要となり，この種に関する研究が不可欠である．他に，非等方性乱流を解析できるモデルとして，小さな渦のみをモデル化し，大きな渦はそのまま非定常三次元として計算するＬＥＳモデル(Large eddy simulation)，あるいはモデル化を導入することなくナビエ・ストークス方程式を直接解くＤＳモデル（Direct numerical simulation）などがあるが，多大の計算格子と計算時間が必要であり，現在，計算例も簡単な流れに限られ工学上への応用には問題がある．また，流れ場だけでなく温度場においても，実際の流れを正確に表現する意味から，非等方性を考慮することが必要であるが，現在，解析例は少なく解析手法の確立が必要である．

以上のように工学上対象となる流れは，多くの場合三次元乱流であり，非等方性を強く持つ流れである．またこのような三次元乱流の速度場，および温度場解析の際用いられる解析手法は，現在流れを等方性として扱うものが多く，実際の流れを表現しているとは言い難い．従って，非等方性を考慮した熱流動解析手法を確立することは，今後多くの分野より要求されることであり，意義あるものである．

１．２　従来の研究

１．２．１　非等方性乱流に関する研究

非等方性乱流に関する研究は，等方性乱流の研究と相まって古くより行なわれている．等方性乱流に対しては，乱流統計理論の創始者である Taylor(1935) が格子乱流の流れに対して理論的解析を行ない，また，Dryden-Schubauer(1937)らは，この等方性乱流の代表的流れである格子乱流に熱線風速計を用いて測定を最初に行なっている．その後，この種の格子乱流の後流に関する研究が数多くなされている．Batchelor-Townsend(1948)は，格子下流の乱流エネルギーの減衰を測定し，格子のメッシュをMとすれば，格子下流 20M 程度で，格子の影響のない，一様な等方性乱流が得られると報告している．また，乱れは，格子位置からの距離の－1乗に比例して減衰していくとしている．

このような等方性乱流の解析が行なわれる中，1950年代に入ると，非等方性に関する研究が行なわれている．Townsend(1952)は，各方向の速度分布変化により，各乱れ成分がどのような挙動を示すかを，格子を通して等方性乱流とした流れを，速度が亜流方向に変化する風洞を用いて実験を行なった．実験によれば，等方性乱流として流入した各成分の乱れは，風洞に入ると非等方性乱流となり，乱流構造に速度分布化が大きく影響することを示した．このことは，レイノルズ応力方程式中に表われる，圧力・歪相関項（再配分項）によるものと解釈される．すなわち，乱れエネルギーが，この項を通して，各方面に配分しされた結果と理解できる．

このTownsendの非等方性乱流を扱った実験に対して，Ribner-Tucker(1952)，Batchelor-Proudman(1954) は理論的な考察を行ない，各垂直応力成分を予測する式を導出した．しかし，彼らの理論式は，粘性の影響，渦の干渉等を考慮していないため，非常に速度変化が急激に変化するような流れに対してのみ良好な予測値を示し，このため彼らの理論は“rapid distortion theory ”と呼ばれたりもしている．

1960年代に入ると，等方性乱流の研究としてはUberoi(1963)の研究がある．彼は格子乱流において乱流エネルギーはBatchelor らの格子位置からの距離の－1乗に比例して減衰するという報告に対して，－1.2乗に比例して減衰するとしている．またエネルギースペクトルを用いて乱流エネルギーの伝達の様相を明らかにした．すなわち，波数の小さい規模の大きな渦は，波数の大きい規模の小さな渦へエネルギーを伝達し，その規模の小さな渦は粘性によって熱に変換されるという，渦の消長の過程を明らかにした．このエネルギー輸送は，何段にも連なったカスケード（小さな滝）に似た過程とみなされることよりカスケード過程とも呼ばれる（例えばRotta(1972)）．さらに，Uberoi-Wallis(1966)は，格子乱流は，厳密には等方性乱流とは言いがたく，$\overline{u_2^2}=\overline{u_3^2}\simeq\overline{u_1^2}/1.4$（$\overline{u_1^2}$は主流方向乱れ，$\overline{u_2^2}$，$\overline{u_3^2}$は亜流方向乱れ）の関係があることを指摘している．彼らは風洞に縮流部を設け，強制的に等方性乱流を作って下流における$\overline{u_1^2}/\overline{u_3^2}$の値の変動を調べたが,下流に行くに従がい，格子乱流後流の値の1.4に漸近していくことを報告している．Comte-Bellot-Corrsin (1966)は，格子形状を変えて，乱流エネルギーの減衰挙動を明らかにしている．その結果乱流エネルギーの減衰は,格子位置からの距離の－1.25乗に比例すると報告しておりUberoi(1963)の結果に近いものとなっている．さらに彼らは，Uberoi-Wallisと同様，風洞の一部に縮流部を設けて等方性乱流とする実験を行なっているが，下流に行くに従がい等方性が崩れてくるとしたUberoi-Wallis の現象は認められないと報告している．

このような等方性乱流に関する研究が行なわれる中で， Tucker-Reynolds (1968) は，Townsendの示した非等方性乱流に関する実験を，Townsendが与えた速度変動より大きな変動を課して実験を行ない，各方向の垂直応力成分の変化，並びに非等方性を示すパラメータ$K_1=(\overline{u_2^2}-\overline{u_1^2})/(\overline{u_2^2}+\overline{u_1^2})$の変動等について，Townsendの実験と比較しながら考察を加えている．Tuckerらの実験に見られるように風洞形状を変えることにより速度分布に歪を与え，非等方性乱流とし速度変動とその乱流構造の相関を解析する手法とは異なり，非円形断面形状を持つ管内流における，非等方性乱流に関する研究も同時に数多く研究されている．この種の非等方的流れに対するよく知られた興味ある特徴的な流れとして第二種二次流れが上げられる．この第二種二次流れの存在は古くより知られており，Nikuradse(1926,1930)の染料による可視化実験以来，数々の実験が報告されている．図1-1に示すものは Nikuradseの文献中に説明されている第二種二次流れである．この第二種二次流れは，例えば曲り管内流などに見られる二次流れとは，発生要因を異にするものである．後者が，管路断面の主流方向への変化による外力，体積力による圧力勾配によるものであるのに対し，前者は，乱流応力の非等方性に起因するものであり，Prandtl(1925)は曲り管路等で見られる二次流れ（第一種二次流れ）と区別して第二種二次流れ(Secondary flow of the second kind)と定義した．またこの第二種二次流れは，乱流成分の非等方性の強い，非円管路の四隅部に発生することより，コーナー流れ(corner flow)とも呼ばれる．

この第二種二次流れに対する実験的な解析としては，Hoagland(1960)が最初であり，続いて，Brundrett-Baines(1964)，Gessner-Jones(1965)，Launder-Ying(1972)，Melling-Whitelaw(1976)，Gessner-Emery(1981) などは正方形管路内を対象として実験を行なっている．最近Fujita(1988)らは上下壁において面粗度が異なる場合の正方形管路内を対象とした実験を行なっている．またTracy(1965)は長方形管路での，Aly-Trupp-Gerrard(1978)は三角形断面を有する管路での第二種二次流れの測定を行なっている．各々の実験の特徴

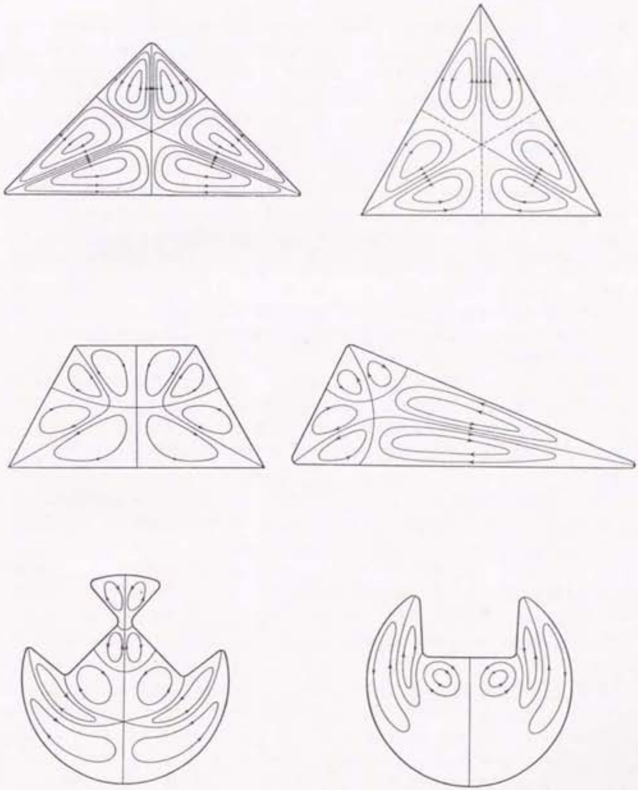


図1-1　非円形断面形状における第二種二次流れ（Nikuradse(1930)）

を明確にするために測定内容，測定手法，助走区間長さ等について整理したものを表1-1に示す．

各実験を比較して，特徴的な実験としてMelling-Whitelawの実験が上げられる．彼らは，発達しつつある正方形断面管路内の実験を行ない，各乱流応力成分を含めた詳細なデータを主流方向に入口より，5.6 D_h，36.8D_h（D_hは水力直径を示す）離れた点において測定している．彼らはレーザ．ドップラ流速計を用いて，対角線対称を検証する意味より，1/4断面にして測定しており，従来の実験が，熱線風速計を使用し，1/8断面にて測定している点で他の実験とは異なる．また，Brundrett-Bainesは，完全発達乱流場を対象として実験を行ない，助走区間長さを260D_hとした．Launder-Yingは69D_h，Gessner-Jonesは60D_hであり，それらと比較しても十分長い距離を確保してあり，完全発達乱流と考えられる．彼らは，熱線風速計を用いて，第二種二次流れの発生要因となる亜流方向の垂直応力の差，およびせん断応力の測定を行なっているが，この測定結果に対して Perkins(1970)は，その測定精度に問題のあることを指摘している．Gessner-Emery は，正方形断面管内の対角線上，左右対称線上における，乱流応力成分を測定している点で他の実験とは異なっている．この第二種二次流れの実験解析と同時に数値解析による予測も種々行なわれてきた．この第二種二次流れに対する数値予測を最初に行なったのは，Launder-Ying(1973)であり，比較的最近になってからである．この第二種二次流れは，渦拡散係数を等方的として扱ったモデルでは予測できないため,彼らは,レイノルズ応力方程式のモデル化に際し,Hanjalic-Launder(1972) のモデルを適用し垂直応力，せん断応力に対し簡略化された輸送方程式を立てて予測を行なった．その後この種に関する数値予測が種々行なわれている．

この第二種二次流れの計算において，それを正確に予測するためには，各乱流応力成分を解くこと，すなわちレイノルズ応力方程式を解くことが必要となる．その際，圧力変動を含む項など直接的に解けない項に対しては，何らかのモデル化が必要となってくる．特にそのモデル化の上で問題となるのは，圧力・歪相関項（再配分項）であり，この項は，特定の垂直応力が極端に大きくならないよう抑制する役割と，作り出された乱流エネルギーを等方化しようとする役割を果たし，モデル化の上で常に問題となってくる．

次に問題となってくるのは，レイノルズ応力方程式中の対流項，および拡散項である．これらの項は，特に数値計算の上から問題となる．レイノルズ応力に関する輸送方程式を考えると，対称性により，6成分に関する方程式を連立させて解くことが必要となり，多大の計算時間を要することとなる．

これらの問題点に着目して，Launder-Ying以降のこの種の数値計算法について，整理したものを表1-2に示す．この表より，再配分項のモデル化において，Launder-Reece-Rodi(1975)は壁面による影響の効果を加味している点で，Launder-Yingのモデルより厳密なものとなっている．他に，壁面による影響を加味したモデルとしては，Gibson-Launder(1978)のモデルが上げられるが，彼らは，Shir(1973) により提唱されたモデルを適用している．このGibson-Launderモデルは，Launder-Reece-Rodiのモデルより簡略化されたモデルで，実験結果を比較的良好に予測できるとして，良く使用されている．

Naot-Shavit-Wolfstein(1974) のモデルは，壁面の影響は含まれないものの，再配分項のモデル化に際し，二点相関テンソルを用いて，モデル化を行なった．彼らは，Launderらの示したモデル化とは異なる手法を用いたにも拘らず，結果は，Launder-Reece-Rodi

表1-1　第二種二次流れに対する実験解析

年代	著　者	特　　徴	測定手法	助走区間長さ	対象流れ
1930	Nikuradse	流れの可視化法により第二種二次流れを確認	染料による可視化		台形、三角形等の非円形断形状を持つ管
1960	Hoagland	第二種二次流れの測定を最初に実施			
1964	Brundrett Baines	矩形管流れにて垂直応力の差、せん断応力を測定	熱線風速計 1/8断面にて測定	260〜80D_h	正方形、台形矩形断面管路について報告
1965	Gessner Jones	第二種二次流れの速度分布について測定 Re数の増加に従い二次流れは減少することを報告	熱線風速計 1/8断面にて測定	正方形管路の場合40D_h 矩形管路の場合60D_h	正方形、矩形断面管路
1965	Tracy	1:6のアスペクト比を持つ矩形管における第二種二次流れ乱流応力を測定	熱線風速計 コーナ部のみ測定	約40D_h程度	矩形管内流れ
1972	Launder Ying	Gessner-Jonesらの実験において第二種二次流れがRe数に依存するのは主流中心速度にて無次元化した為である事を指摘	熱線風速計 1/8断面	69D_h	正方形断面管路内流れ
1976	Melling Whitelaw	発達しつつある流れの乱流応力分布を詳細に測定	ﾚｰｻﾞｰﾄﾞｯﾌﾟﾗｰ流速計 1/4断面	5.6D_h、36.8D_hにて測定	正方形断面管路内流れ
1978	Aly Trupp Gerrard	第二種二次流れ分布、乱流応力分布圧力分布、摩擦係数などを測定	熱線風速計 1/6断面	130D_h	三角形断面形状管路内流れ
1981	Gessner Emery	第二種二次流れ速度、乱流応力分布を対角線上、左右対称線上にて測定	熱線風速計	8D_h〜84D_hの間にて測定	正方形断面管路内流れ

表1-2　第二種二次流れに対する数値解析

年代	著　者	レイノルズ応力方程式		特　徴	計算対象
		対流項・拡散項	再配分項		
1973	Launder Ying (LY)	省　略	レイノルズ応力方程式中の生成項を0として、Hanjalic-Launderのモデルを適用	一方程式モデルにBuleevの混合距離を用いた	発達した正方形管内流
1975	Tatchell	(省　略)	基本的にLYモデルを使用	二方程モデルを導入することにより混合距離を理論的に決定	複雑断面形状を持つ管内流
1975	Launder Reece Rodi (LRR)	考　慮 (微分形として)	純粋な乱れによる影響、平均流による影響、壁面による影響を加味	再配分項中に壁面の影響を考慮した	自由せん断流 (jet,wake, mixing layer)
1976	Reece	考　慮 (微分形として)	LRRモデル	6つのレイノルズ応力を微分形として解いた	発達しつつある正方形管内流
1977	Gessner Emery	省　略	Hanjalic-Launderのモデルを基本としている	0方程式モデルにより混合距離を決定している	発達した、発達しつつある任意 矩形管内流
1978	Gibson Launder (GL)	省　略	平均流による影響、壁面による影響のモデル化においてLRRモデルと異なる	再配分項に壁面の影響を考慮した	大気境界層 (atmospheric boundary layer)
1981	Gessner Emery	省　略	Hanjalic-Launderのモデルを基本としている	三次元混合距離モデルを導入	発達しつつある任意矩形断面流れ
1982	Naot Rodi	省　略	LRRモデルを簡略化したものを使用	自由水面、壁面の影響を考慮	発達した開水路流れおよび正方形管内流
1983	Nakayama Chow Sharma	省　略	Gessner-Emeryモデルを拡張	定数系にはLYモデルのものを使用	発達した、発達しつつある正方形管内流
1984	Demuren Rodi	省　略	LRRモデルを簡略化したものを使用	壁の影響を定数を変化させて考慮	発達しつつある正方形管内流

の示したモデルと同一となっているのは興味深い.

Gessner-Emery(1981), Nakayama-Chow-Sharma(1983), Demuren-Rodi(1984)は, 正方形管路断面を有する発達しつつある管内乱流場の解析を行ない, 実験結果との比較を行なっているが, Melling-Whitelawの実験結果との比較を行なったのはNakayamaらであり, 平均流, 各乱流応力成分とも比較的良好な一致を示すものの, 完全発達状態において, 亜流方向垂直応力の差, およびせん断応力の値が, 実験結果と 1 order程度異なるという矛盾を内包している. Gessner-Emery, Demuren-Rodiは主に, 断面内の対角線上, 左右対称線上で, 各乱流応力成分の比較を行なっており, 断面全体での等値線図分布による比較は行なっていない. 再配分項のモデル化に際しては, GessnerおよびNakayama は, 同一のモデルでありHanjalic-Launder(1972)の理論をもとにモデル化を行なっているが, 6つの乱流応力成分を対象とする応力成分以外の他の応力成分を含まず, 速度勾配を関数とする陽な形として表現した点で他のモデルと異なる.

Gessner-Eppich(1981)は, 再配分項のモデル化に際して, 再配分項の中で4次の相関テンソルとして表現される平均流の影響による項に, Launder-Reece-Rodi(1975)の使用した制約条件とは異なる制約条件を設けてモデルの構築を行なった. また, 再配分項中に表われる各定数の決定に際しても, 正方形管内発達乱流場の対角線上, あるいは, 左右対称線上での乱流応力成分値を根拠として定数の決定を行なっている. 他のモデルにおいては, モデル化されたレイノルズ応力方程式を単純せん断流, あるいは壁面近傍流れに適用し定数の決定を行なっており, この点においても, Gessner-Eppichモデルは他のモデルとも異なる. このモデル中に表われる定数の決定は, モデルの構築とともに重要な要素であり, Arnal-Cousteix(1981)は, Launder-Yingモデルを用いて, モデル中に表われる定数を変えることにより, 第二種二次流れの消長を検討しており, 特に再配分項中の平均流の影響を含む項で使用される定数の値により第二種二次流れの発達が大きく変化することを報告している. 一方, 三角形断面形状を持つ, 完全に発達した乱流場の第二種二次流れの流動解析をGosman-Rapley(1978)は行ない, Aly-Trupp-Gerrard(1978)の実験結果との比較を行なっている.

以上のように第二種二次流れの数値予測が可能になたのは, レイノルズ応力方程式中の圧力・歪相関項に対するモデル化が適正に行なわれたためであるが, この圧力・歪相関項に関する先駆的な研究を行なったのは, Chow(1945)およびRotta(1951) である. 彼らは, 圧力・歪相関項が純粋な乱れによる影響, 平均速度勾配による影響, および壁面による影響により構成されることを, 圧力変動に関する楕円方程式を数学的操作を加えて明らかにした. Rotta は, 純粋な乱れに対するモデル化を "returu to isotropy" の概念を基にモデル化を行なっているが, 平均速度勾配による影響の項に対しては, それが4次の相関テンソルで示され制約条件を伴なうことを示しただけでモデル化は行なわなかった. また圧力・歪相関項に表われた他の項についても, テンソル表示するのみで具体的なモデル化は行なっていない.

平均速度勾配による影響および壁面による影響は, 純粋な乱れによる影響の項と同程度に重要であることは, Townsendの実験等より明らかなことであるが, これらの項に対するモデル化に対して, Hanjalic-Launder(1972), Launder-Reece-Rodi(1976)まで待たなければならない. このようにモデル化が遅れた原因としてLaunder(1979)は, Turbulent Shear

Flows I の中で，まず論文がドイツ語で書かれたこと，ならびにHinze(1975)の著わしたTurbulenceの中で，純粋な乱れ成分による影響のみ，"return to isotrony" の概念とともに強調して書かれたため，他の項に対する考慮が薄れたことによると述べている．

Hanjalic-Launder(1972)は，4次相関テンソルで示される平均流による影響の項を数値解析として取扱うことができるところまでモデル化を行ない，さらにLaunder-Reece-Rodiは一部修正を加え，壁面による影響を加味した．表1-2に示した再配分項に対するモデル化は，これら二つのモデルのうち，いずれかをモデルの基礎として，各モデラーによる理論による改良が加えられたモデルと解釈できる．

次に表1-2の対流項，拡散項の点に注目すると，各モデラーは，これらの項を省略して計算していることがわかる．唯一，Reece(1976)は，再配分項に，Launder-Reece-Rodi モデルを用いて，対流項，拡散項を省略することなく完全な微分形として計算を行なってFull Reynolds stress modelと定義し，一方，対流項，拡散項を省略することにより，元の微分形より，各レイノルズ応力成分が代数式として表現されるモデルを，Algebraic stress model（代数応力モデル）として定義している．この代数応力モデルは，レイノルズ応力の輸送が小さい場合など妥当な近似であると思われるが，他方，レイノルズ応力の諸量を単に代数式で置き換えることによる，近接空間での物理量の相互依存性が薄れてしまうという問題を内包しているのも事実である．しかし多くのモデラーにより，代数応力モデルが用いられていることは，それからの欠点を補うに余りある優位性，例えば計算時間，プログラミング，計算収束性等があるものと思われる．

対流項，拡散項を完全に無視する場合と，省略しない場合の中間に位置するものとして，対流項，拡散項に対するRodi(1976)近似がある．このRodi近似は，代数応力モデルの特徴を生かしながら，多少とも対流項，拡散項の影響を，レイノルズ応力方程式中に取り込もうとするものであり，乱流応力成分が流れ方向に比較的緩慢に変化するという仮定の基に成立している．このRodi近似を設いている例は比較的少なくLeslie(1980)は，単純せん断流れに，Rodi近似を用いて Harris-Graham-Corrsin(1977)の実験データと比較を行ない，Rodi近似が妥当なものであることを報告している．またGessner-Eppichは，正方形管路の完全発達乱流に適用している．以上のようにこのRodi近似は，対流項，拡散項の項を無視することなく多少ともその影響を乱流応力成分に反映させるという点で従来の手法と比較して有益な手法と思われるが，表1-2からもわかるように利用されることが少ない．

非等方性乱流を扱えるレイノルズ応力方程式について，その研究経過をこれまで述べてきたが，Yoshizawa(1984)は，渦動粘性係数に非等方性を考慮したモデルを提唱しており，非等方性流れに特徴的なこの第二種二次流れは，非等方性を考慮した k-ε 二方程式モデルに依っても予測されている．笠木-明(1989)は，乱れスケールに理論的考察を加えた二方程式モデル（明-笠木(1987)）を非等方性に拡張しこの流れを予測している．

温度場に対する非等方性を扱った乱流熱流束方程式についても，同様にモデル化が行なわれ，各種流れへの適用が検討されているが，速度場ほどの研究は行なわれていない．乱流熱流速方程式をモデル化する上で特に問題となるのは，圧力・温度勾配相関項であり，レイノルズ応力方程式の圧力・歪相関項に対応しるものである．この圧力・温度勾配相関項に最初にモデルを導入したのはMonin(1965)である．圧力・温度勾配相関項も，純粋な乱れによる影響を含む項，平均温度勾配による影響を含む項，壁面による影響を含む項，そ

して浮力による影響を含む項とから構成されるが，Moninはこのうちの純粋な乱れによる影響をRottaの理論を用いてモデル化を行なった．

これに対し Lumley(1975),Launder(1975)は純粋な乱れによる影響の項に対しては，その項に表われる定数は，レイノルズ応力の非等方性を含むものとしてモデル化を行なった．また平均温度勾配による影響ならびに浮力による影響も重要であると認識してモデルを提示し,Webster(1964)の実験との比較を行なった．またLumleyも平均温度勾配による影響の項をモデル化しているが，Launderの示したモデルとほぼ同型のモデルとなっている．

Gibson-Launder(1976) は，乱流熱流束方程式の対流項，拡散項に Rodi近似を用い，浮力の影響も加味して，平板後流(plane turbulent wake)，平板噴流(plane jet),平板混合層(plane mixing layer)に適用し実験との比較を行なっている．圧力・温度勾配相関項のモデルは Launder(1975)のものを使用している．圧力・温度勾配相関項に，壁面による影響を考慮した解析例としては，Launder-Samaraweera(1979)の平板噴流，平板後流への計算があるが，壁面による影響を壁からの距離の関数となるよう定義し，壁からの距離を周囲の壁面までの距離の積分値で代表させている．

前川(1979)らは，平均温度勾配の影響を含む項が，３次の相関テンソルで示されることよりモデル化を行ない定数決定に際しては，温度勾配を持つ単純せん断乱流場の乱流熱流束を規定することにより行なっている．同時に温度変動に対する散逸方程式のモデル化についても言及しており，モデル定数についても実験的に決定している．この温度変動の分散およびその散逸に関する方程式を，Elghobashi-Launder(1981)は一様な乱れの中の温度変動の拡散問題に適用し解析を行ない，Keffer-Olsen-Kawall(1977) の実験と比較を行なっている．その際，乱流熱流束は，速度場における時間スケールと，温度場における時間スケールとの比，すなわち時間スケール比(time-scale-ratio)を導入し，この時間スケール比とレイノルズ応力との比を温度拡散係数としてモデル化を行なっている．この時間スケール比がほぼ一定となることは，Beguier-Dekeyser-Launder(1978)の実験あるいは前川(1977)らの実験においても明らかにされている．Elghobashi-Launder，前川らの解析は，いずれの場合も自由乱流中の温度場の解析であり，伝熱問題では特に問題となる壁面上に沿う熱伝達現象を扱ったものではない．この点に関して，長野－金(1987)は，温度拡散係数を，温度変動，温度散逸によりモデル化し，それら二方程式を解くことにより壁面近傍乱流まで解析可能な，温度場における二方程モデルの提唱した．ただし速度場における二方程モデルと同時，等方的な温度場の仮定の基に成立している．その他，乱流熱伝達現象を扱った実験的解析，および数値解析についてはHirata(1982)ら，Launder(1978)らが解かりやすくまとめており一読の価値あるものである．以上のように温度場における非等方性問題を乱流熱流束方程式をモデル化して解析する手法は，レイノルズ応力方程式同様，比較的近年になってからである．しかしその手法の有用性を考慮すると今後複雑な熱流動問題の提起に対して，モデルの妥当性等を含めて，精力的な研究がなされるものと思われる．

一方，温度変動，温度散逸方程式のモデル化，ならびに非等方性温度場へのそれらの方程式の適用，乱流熱流束方程式との連立など，これらの方程式に対する解析も始められたばかりである．実験的にはWarhaft-Lumley(1978)の乱流格子後流の温度変動減衰に関する解析が報告されている．熱流動現象をより詳細に検討することが要求される将来において，温度変動，温度散逸に関する解析も不可欠になるものと思われる．

1．2．2　境界適合座標系に関する研究

複雑形状を数値的に解析する上で特に問題となるのは，境界条件の設定である．すなわち，一般に物理平面上の座標軸と境界面とは必ずしも一致することなく，境界上にない格子点については何らかの近似が必要となり，計算精度，あるいはプログラムの上からも問題となる．さらに変化の大きい領域に格子点を集中することが必要となる．これらの条件を満足する数値解析手法として，境界適合座標系(Boundary-Fitted Coordinate Systems)による方法がある．表1-3は境界適合座標系による解析を年代順に調べたものである．この手法は Thames-Thompson-Mastin-Walker(1977)により航空機の流体解析法として開発され，流体以外の工学の分野への応用範囲を広げつつある．Thamesらは，この境界適合座標を用いて，平板境に凹凸のある岩石まわりの流れ（レイノルズ数Re=500）の解析を行なっている．またThompson-Thames-Mastin(1977)は，格子生成に関するプログラムコードTOMCATについて紹介し，格子生成理論について詳細な検討を行なっている．この解析手法は，支配方程式を解くに先立ち，楕円型方程式を格子点生成のため解くことが必要となるが，この格子生成については，Winslow(1967)，Barfield(1970)の研究がある．Barfieldは楕円型偏微分方程式中に表われる定数により生成される格子がどのように変化するかについて言及している．この格子生成理論について，Thompson(1984)は詳細な解説を行なっており，特に格子生成の際の誤差，解適合格子等について解説し，今後この解適合格子を用いた計算手法が必要であろうと結論づけている．また中村(1985)も，格子形成法の最近の動向について解説している．

Chen-Vanka-Sha(1980)は，この境界適合座標系を用いて，円柱が規則的に並んだ流れ場を二次元層流として解している．彼は同時に乱流への拡張の必要性を説いている．Reggio-Camarero(1987)は，凸状の障害物を有するダクト内流れ，正方形断面を有する曲り管，曲り円管，ねじりを伴なう屈曲管に対して解析を行ない，境界適合座標系の適用範囲の広い点を示している．ただし，いずれの計算も，層流として計算を行なっている．Ramanathan-Kumar(1988)は，境界適合座標系と，有限要素法とを熱伝導問題に適用して両計算手法の得失について検討を加えている．その結果境界適合座標系の方が効率的に決算できるとしている．武本(1987)は90°曲り管内流に対してレイノルズ数$Re=10^3$，5×10^4の計算を乱流モデルを導入することなく解いている．また，梅垣-三木(1987)は，槽内の回転翼による周期的回転流れをレイノルズ数Re=250～2400の範囲で解析を行なっている．これら熱流動に対する境界適合座標系の適用例を表にまとめて示す．また，最近山本-荒川-田古里(1989)は，一般曲線座標系に低レイノルズ数型のレイノルズ応力モデルを用いてターボファンエンジン内のローブ・ミキサ流の解析を報告しているのは興味深い．

境界適合座標系は，以上のように1970年代後半に開発されたものであり，二次元，及び三次元層流場での適用例はみうけられるものの，非等方性を考慮した三次元乱流場，並びに温度場への適用例はあまりみられない．しかし，先に述べたように将来的視野に立つと，複雑形状流路に対する乱流場における熱流動現象の解析は，工業上の要求と相まって不可欠であると思われこの種の研究は非常に有意義なものと思われる．

表1-3　境界適合座標系による熱流動解析

年代	著　者	計　算　対　象	レイノルズ数	特　　徴
1977	Thames Thompson Mastin Walker	平板境界層流れ ｹﾞｯﾁﾝｹﾞﾝ625翼型 岩石回りの流れ	500-2000	境界適合座表系を確立 二次元流れ
1980	Chen Vanka Sha	規則的に円柱が 並んだ流れ	224-748	原子力の制御棒回りの 流れ解析 二次元流れ
1986	Reggio Camarero	ﾁｬﾝﾈﾙ流れ 障害物のあるﾁｬﾝﾈﾙ 流れ	10-100	二次元流れ
1987	Reggio Camarero	ﾀﾞｸﾄ内流れ 曲がりﾀﾞｸﾄ内流れ 曲がり円管内流れ ねじりを伴う屈曲管	80-1093	三次元流れ
1987	武本	90度曲がり円管内流れ	1000-50000	乱流ﾓﾃﾞﾙを用いず解析 三次元流れ
1988	Ramanathan Kumar	矩形断面、円形断面 などの熱伝導		境界適合座表系と有限要 素法との比較検討 二次元流れ
1988	Guan Yan	河川流れ		複雑形状河川流れに適用 二次元流れ
1988	梅垣 三木	攪はん槽内流れ	250-2400	回転方向の正転、逆転を 考慮した流れ場を解析 二次元流れ

1．3　本研究の目的

非等方性乱流を正確に把握する場合には，レイノルズ応力方程式を解くことが必要となるが，それらの方程式に理論的解釈が加えられ同時にモデル化され数値予測が可能となったのはごく近年になってからである．この手法は，流れを等方的なものと仮定して計算を行なう従来の手法より優れているものの，実際の流れ場を追従できるか否かはモデルの妥当性，実験データに基づく定数系の妥当性などの要因に大きく左右されるのも事実である．現在，レイノルズ応力モデルの提唱は，各モデラーにより行なわれるものの，これらの妥当性に関する差異分析を行なった例はなく，前述の点を考えればモデルの差異分析を行なうことは有意義な研究と思われる．

さらに非等方性乱流モデルは，そのモデルが要求される複雑な流れに適用してこそ，初めてその真価を発揮できるものであり，従って複雑三次元形状内流れに対し，非等方性乱流場の解析ができるような数値解析手法について確立しておくことも，同時に重要な課題であると考えられる．

本研究においては，前述のような従来の研究の動向を考慮しつつ，将来的な動向に対応可能なよう以下の点を明確にする．あるいは確立することを主な目的とする．まず第１点として，レイノルズ応力方程式に対し提案されているモデルの差異分析を行ない，モデルの特徴を明確にする．同時に差異分析結果を踏まえての改良モデルについての検討を加える．第２点としは，境界適合座標系を導入することにより，任意形状空間において非等方性乱流場への適用も可能な数値解析手法を確立する．第３点としては，確立された計算手法を用いて，複雑形状を持つ三次元非等方性乱流場を解析し，計算手法，及びモデルの妥当性に対して考察を加える．

本論文の構成は以下の通りである．非等方性乱流現象を解析する場合，レイノルズ応力方程式のモデル化は重要である．第２章では，これら代表的なレイノルズ応力モデルを取り上げ計算を行い，その特徴を実験結果と比較することにより明らかにする．同時に新たなモデルの提唱を行ない，正方形断面管路内完全発達乱流，及び発達しつつある正方形断面管路内流れに適用しモデル検討を行なう．

第３章では，複雑形状への適用が可能な境界適合座標系についての格子生成理論，座標変換理論を説明し，各支配方程式を境界適合座標系にて表現する．また，方程式の離散化についても言及する．

第４章では，非等方乱流で，形状の複雑な計算供試空間として Tucker-Reynolds(1968) の実験を取り上げ数値解析を行なう．実験との比較により，境界適合座標系で示された乱流モデルの妥当性について検討すると同時に，等方的流れが非等方性流れへと変化する流動現象についても解析を加える．

以上各章で得られた諸見解を第５章の結論とする．

第２章　乱流解析

２．１　緒言

乱流熱流動解析を行なう上で，現象を支配する各基礎方程式の成り立ちを知ることは，現象と数式の相関を理解する上で重要なことである．同時にそれらの支配方程式は，その厳密形のまま解くことは難かしく何らかのモデル化が必要となる．特に，レイノルズ応力方程式中，乱流熱流束方程式中に含まれる，圧力・歪相関項，圧力・温度勾配相関項は非等方性と深くかかわり合う項でありモデル化する上でも重要となる．

本章では，これら支配方程式，乱流モデルについて検討を加えることを目的とする．第２．２節においては，本研究で用いた各支配方程式の導出，ならびに一般的なモデル化について説明を加える．また，温度に関する乱流熱流束方程式，温度変動輸送方程式，温度散逸輸送方程式等についても説明を加えた．第２．３節においては，レイノルズ応力方程式に対して現在提唱されている代表的なモデルについて，圧力・歪相関項の構成，及び定数系の決定手法等の検討を加え，それらのモデルを正方形断面管路の発達乱流に適用し，Brundrett-Baines(1964)の実験結果と比較することにより各モデルの差異分析を行ない各モデルの特徴を明確にする．同時にそれらの差異分析を踏まえて新たなモデルを提唱し先の正方形断面管路の完全発達乱流，及び発達しつつある正方形断面管路に適用しMelling-Whitelaw(1976)の実験結果と比較することにより，モデルの妥当性の検討を行なう．

２．２　支配方程式

２．２．１　運動方程式，エネルギー方程式

本研究では非圧縮性，物性値一定のニュートン流体を取扱う．本節では本研究にて使用する支配方程式を，連続の式，ナビエ・ストークス方程式より導く．基礎方程式は，デカルト座標系にて書き記述する．質量，運動量，エネルギーの保存則は各々次の方程式で書き表わされる．

$$\frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x_i}=0 \tag{2-1}$$

$$\frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{U}_i\widetilde{U}_k)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial x_i}-g_i\gamma(\widetilde{T}-T_\infty)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\nu\frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x_k}) \tag{2-2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{T}\widetilde{U}_k)=\frac{\partial}{\partial x_k}(a\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_k}) \tag{2-3}$$

上式は，Einstein 総和規約を用いて記述してある．例えば，同一項における添字kの繰り返しは，k=1,2,3についての総和を表わす．また～（ウイグル）記号は，瞬間値であることを意味している．さらに上式には，体積力，熱源の項が省略されている．

(2-1)～(2-3)式は層流であるか乱流であるかの制限は設けられておらず，従って流れの状態を問わず，数値的に解が得られるはずであり，乱流モデル導入の必要性もなく流動解

析を行うことが可能であり，こうした直接シュミレーションによる解析例もある．しかし多くの計算時間と記憶容量を必要とし，工業的な見地からすると，現状のところ非現実的である．

工業的には，瞬間的な構造より時間平均的な現象に興味が持たれる．こうした要求に対処するためには，瞬時値に対する式でなく，時間平均操作を施した方程式を用いるのが合理的である．そこで，各瞬時値と，時間平均物理量と変動成分物理量とに分離して考える．すなわち，

$$\widetilde{U}_i = U_i + u_i \qquad \widetilde{P} = P + p \qquad \widetilde{T} = T + T' \tag{2-4}$$

これらを(2-1)~(2-3)式に代入し，時間平均をとると次式が得られる．

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2-5a}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(U_i U_k) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} - g_i \gamma\,(T - T_\infty) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k}\right) \tag{2-5b}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(T U_k) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a \frac{\partial T}{\partial x_k} - \overline{u_k T'}\right) \tag{2-5c}$$

ただし，－は，瞬時平均値を示す．また(2-1) ~ (2-3)式から(2-5a)~(2-5c)式を差引くと，瞬時値に対する各物理量の輸送方程式が得られ次式のように示される．

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2-6a}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(U_i u_k + u_i U_k + u_i u_k) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - g_i \gamma T' + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k}\right) \tag{2-6b}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(U_k T' + u_k T + u_k T') = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a \frac{\partial T'}{\partial x_k} + \overline{u_k T'}\right) \tag{2-6c}$$

2．2．2　乱流エネルギー方程式

乱流エネルギーに関する輸送方程式の厳密形は，(2-6b)式に示す輸送方程式に u_i を乗じた後，時間平均をとることにより導かれ，浮力の項を省略し次のように示される．

$$\frac{Dk}{Dt} = -\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{\left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho}\right) u_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_k}\right) - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \tag{2-7}$$

左辺第１項より対流項，右辺第１は乱流エネルギーの生成項，第２項，第３項は，各々乱れと粘性による拡散を示す．粘性拡散は乱れレイノルズ数が高い場合には，乱流拡散と比較して無視できるが，乱れレイノルズ数が高い領域では重要な項となる．第４項は散逸項を示し，瞬間的な歪速度の２乗和平均であるから常に正である．したがって第４項は，k の変化に対して常に負の寄与をなすことが解る．上式の各項のうち，拡散項，散逸項は未知であり，これらの項に対してモデル化が必要となる．乱流エネルギー方程式は，速度の瞬時値に対する輸送方程式ばかりでなく，先に示した，レイノルズ応力方程式からも導出

可能であり，従って，レイノルズ応力方程式における拡散項に対するモデル式を縮約することにより得られる．Hanjalic-Launder(1972)の拡散項に対するモデル化は次のように表現される．

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{\left(\frac{u_i u_i}{2}+\frac{p}{\rho}\right)u_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(c_s'\frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u_i u_l}\frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_l}+\overline{u_k u_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right)\right) \qquad (2\text{-}8a)$$

Daly-Harlow(1970) のモデルを用いると次のように示される．

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{\left(\frac{u_i u_i}{2}+\frac{p}{\rho}\right)u_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(c_s\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right) \qquad (2\text{-}8b)$$

また，Prandtl は，拡散項に対して次の勾配型拡散モデルを用いて次のようにモデル化を行なった．

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{\left(\frac{u_i u_i}{2}+\frac{p}{\rho}\right)u_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_k}\right) \qquad (2\text{-}8c)$$

ここで（ν_t/σ_k）は乱流拡散係数と定義されるものであり，σ_k は実験より決定される定数である．このσ_kは，種々の実験結果よりほぼ一定の値を取り$\sigma_k=1.0$ が良く用いられている．この値は，σ_k に影響を与えると思われる浮力の伴なう流れ場においてもほぼ一定値をとる．またν_tは乱流渦動粘性係数と呼ばれるものでありBoussinesq よりレイノルズ応力をモデル化するため次のような式により導入された．

$$-\overline{u_i u_j}=\nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}k\,\delta_{ij} \qquad (2\text{-}9)$$

ν_t は動粘性係数νのような流れの物性値とは異なり，乱流の状態に強く支配される因子である．さらにν_t は分子運動論の考察より次式に示すように，特性速度Ｖ，および特性流さＬの積に比例する形として表現される．

$$\nu_t \propto VL \qquad (2\text{-}10)$$

ここで，特性速度Ｖ，特性長さＬの選定によりν_tは数種の型に表現される．Prandtlは流体の運動量交換が，混合長距離 l（特性長さ）をもって行なわれるものと考え，特性速度を l $|\partial U/\partial y|$ と評価しν_tを次のように表わした．

$$\nu_t = l^2\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| \qquad (2\text{-}11)$$

上記混合長モデルは l を仮定することになり，ν_t を直接的に仮定したことと等価とも思えるが長さの次元を持つ混合長は，流れ場と直接関係づけやすい利点がある．また流れ場によっては混合長を容易に予想できる．しかしこのモデル化は上式よりわかるように速度勾配が零となると$\nu_t=0$となり現実と一致しない点，また乱れの輸送が重要な問題に対してはうまく予測できないなどの欠点を有する．

前述の問題を解決するモデルとして，特性速度に$\sqrt{k}$を選んでν_tを次のようにモデル化した．

$$\nu_t = c_\mu\sqrt{k}\,L \qquad (2\text{-}12)$$

このモデルではｋに対する輸送方程式は考慮したものの，特性長さＬについては定数としているため，この点についての考慮が必要と思われる．また自己保存系の流れに対しては先に示したモデルと変わらず必ずしも優位なモデルとも言えない．

そこで，特性長さには乱流散逸εを，特定速度には$\sqrt{k}$を選んでν_t を次元解析により

次のように定義したモデルがJones-Launder(1972)より提唱されている．

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{2-13}$$

以上のように特性長さL，特性速度Vの選定により種々のν_tに関するモデル化が考えられる．L，Vを単に定数と置いてν_tを定義するのか，特性速度Vに関する輸送方程式を導入しν_tを定義するか，さらに特性長さLに関する輸送方程式を導入してν_tを定義するかにより，各々０方程式，１方程式，２方程式モデルと分類できる．現在，工業的にも良く用いられるのは，Jones-Launder(1972) により提唱されたk－ε２方程式モデルである．特性長さLは，種々の変数が考えられるが，ε方程式が用いられるのは，測定が可能な物理量であり，εの輸送方程式は他の変数の輸送方程式と比較すると項が少なくて済むなどの理由によるものと思われる．

Boussinesq近似により乱流エネルギー方程式を書き改めると次のように示される．

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) + \nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon \tag{2-14}$$

２．２．３　乱流散逸方程式

乱流散逸に関する輸送方程式の厳密形は，速度に関する瞬時値の輸送方程式(2-6b)式に$2\nu(\partial u_i/\partial x_j)(\partial/\partial x_j)$の演算を行なった後その時間平均を取ることより得られる．

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -2\nu\overline{\frac{\partial u_i \partial u_i \partial u_k}{\partial x_k \partial x_j \partial x_j}} - 2\overline{\left(\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_k \varepsilon'} + \overline{\frac{2\nu}{\rho}\frac{\partial u_k \partial p}{\partial x_j \partial x_j}} - \nu\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right)$$

$$-2\nu\left(\overline{\frac{\partial u_i \partial u_k}{\partial x_j \partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_j \partial u_j}{\partial x_i \partial x_k}}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - 2\nu\,\overline{u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \tag{2-15a}$$

$$\varepsilon' = \nu\frac{\partial u_i \partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{2-15b}$$

右辺第１項は渦の伸長作用による乱流散逸の生産を，第２項は粘性による散逸を表わしている．第３項は拡散項を示しており，拡散項中の最初の２つは乱流拡散を示し，３つ目の値は粘性拡散を表わしている．第４項および第５項は平均速度場による乱流散逸の生産に対応している．レイノルズ数の高い領域においては，第１項と第２項とが支配的な項であり，それらの差が，第３項の拡散項とほぼ釣合うことになる．

Hanjalic-Launder(1972)は，拡散項の粘性拡散，第５項目の平均速度場による乱流散逸の生産を無視して各項を次のようにモデル化している．

$$2\nu\overline{\frac{\partial u_i \partial u_i \partial u_k}{\partial x_k \partial x_j \partial x_j}} + 2\overline{\left(\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2} = c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{2-16a}$$

$$\overline{u_k \varepsilon'} = -\frac{c_\varepsilon k}{\varepsilon}\overline{u_k u_j}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \tag{2-16b}$$

$$2\nu\left(\overline{\frac{\partial u_i \partial u_k}{\partial x_j \partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_j \partial u_j}{\partial x_i \partial x_k}}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \tag{2-16c}$$

これより乱流散逸に関する輸送方程式は次のように示される．

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = c_\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_j}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) - c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{2-17}$$

一方，Jones-Launder(1972) は，拡散項に対しては勾配型拡散モデルを用い，拡散係数には，乱流エネルギー方程式で定義されたν_t を導入して次のようなモデル化を行なっている．

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) - c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} \qquad (2\text{-}18)$$

これらのモデル式は高レイノルズ数流れを対象としているが，壁面近傍まで拡張したモデルについても，乱流エネルギー方程式も含めて種々提案されている．

2．2．4　レイノルズ応力方程式

各レイノルズ応力の輸送を支配するレイノルズ応力方程式の厳密形はナビエ・ストークス方程式より導出でき次のように示される．

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \underbrace{-\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{P_{ij}\text{ : production}} + \underbrace{\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}}_{\pi_{ij}\text{ : pressure-strain correlation}}$$

$$\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u_i u_j u_k} - \nu\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} - \overline{\frac{p}{\rho}(\delta_{jk}u_i + \delta_{ik}u_j)}\right]}_{\text{diffusion}} \underbrace{-2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}}_{\varepsilon_{ij}\text{ : dissipation}} \qquad (2\text{-}19)$$

この式は，ナビエ・ストークス方程式にu_j を乗じた式と，その式において，iとjとを入れ換えた式の和の時間平均を考えることにより得られる．(2-19)式の左辺第１項は対流項，右辺第１項は生成項，第２項は圧力・歪相関項（再配分項），第３項は拡散項，第４項は散逸項を示している．Bradshaw(1981)らは，これら各項の関係を図式的に説明している．

レイノルズ応力方程式を，このままの形で解くことは不可能であり，モデル化が必要となる．この際，応力方程式を難解とし，数値計算の上からも障害となるのは，左辺の対流項，および右辺の拡散項である．一般的に，この意味より，対流項，拡散項は無視されることが多い．生成項に関しては，モデル化する必要はなく，計算が可能でありこの項を直接扱えるのはレイノズル応力方程式の強みである．

レイノズル応力方程式をモデル化する際，特に問題となるのは，圧力・歪相関項であり，種々のモデルが提唱されている．各種モデルの検討については第２．３節にて説明する．

2．2．5　乱流熱流束方程式

乱流熱流束方程式の厳密型は，速度，温度の瞬時値に対する方程式(2-6b)式および(2-6c)式にu_i,T' を乗じた式の和の時間平均をとることにより得られ，次のように示される．ただし浮力に関する項は省略した．

$$\frac{D\overline{u_i T'}}{Dt} = \underbrace{-\overline{u_i u_j}\frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{u_j T'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{P_{iT}\text{ : production}} + \underbrace{\overline{\frac{p}{\rho}\frac{\partial T'}{\partial x_i}}}_{\pi_{iT}\text{ : pressure-temperature gradient correlation}}$$

$$\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i u_j T'} + \overline{\frac{p}{\rho}T'\delta_{ij}}\right)}_{\text{diffusion}} \underbrace{-(\nu + a)\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}_{\varepsilon_{iT}\text{ : dissipation}} \qquad (2\text{-}20)$$

上式において右辺第１，第２項は平均速度，平均温度勾配と乱れの干渉による生産を表わし，第３項は圧力・温度勾配相関項と呼ばれる項である．第４項は拡散項で速度変動，温度変動による拡散を示している．高レイノルズ数，プラントル数の下では分子拡散は微小であり，第５項に示す散逸は無視できる．従って，$\overline{u_i T'}$の実質的な消滅は乱流混合よりなされ，圧力・温度勾配相関項がそれを表わしている．この項はモデル化の上で特に問題となる項であり，レイノズル応力方程式中の圧力・歪相関項同様に，特定の乱流熱流束が極端に大きくならないよう抑制し生成された乱流熱流束を分配する役割を持つ．この乱流熱流束方程式のモデル化に関する研究例は比較的少ない．

２．２．６　温度変動輸送方程式

一般スカラー量の分散に対する方程式は，Corrsin(1952) により紹介されている．導出手法はスカラー量に対する瞬時値の方程式に変動成分を掛けて，その時間平均をとることにより輸送方程式を得ることができる．Corrsin(1952) は変動スカラー量c，平均スカラー量Cに対して次式を示した．

$$\frac{D\overline{c^2}}{Dt} = -2\overline{u_j c}\frac{\partial C}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j c^2} - \gamma\frac{\partial \overline{c^2}}{\partial x_j}\right) - 2\gamma\overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}\frac{\partial c}{\partial x_j}} \tag{2-21a}$$

上式にならって温度の分散に対する方程式を，温度に関する瞬時値の方程式(2-6c)式を用いて書き改めると次の式を得る．

$$\frac{D\overline{T'^2}}{Dt} = -2\overline{u_j T'}\frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j T'^2} - a\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_j}\right) - 2a\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j}\frac{\partial T'}{\partial x_j}} \tag{2-21b}$$

上式の右辺第１項は生成項で，乱流熱流束と温度勾配の積で示される．拡散項のうち最初の項は速度変動による拡散を，２番目の項は温度変動による拡散を示している．第３項は温度変動の散逸を示す．

温度乱れの分散の方程式は，乱流エネルギーの方程式と似た形となっているが，拡散項中に温度変動の方程式は圧力項を含まない点で異なっている．また(2-21b)式を数値的に解こうとする場合には，モデル化が必要となる．Wyngaard(1975)は次のような勾配型拡散モデルを提案している．

$$-\overline{u_j T'^2} = c_\phi \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_j u_l}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_l} \tag{2-22a}$$

一方，Spalding(1971)は次のようなモデルを提案している．

$$-\overline{u_j T'^2} = c_\phi \frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_j} \tag{2-22b}$$

さらに散逸項に対するモデル化も必要であり，この項に対しては速度場における時間スケールと温度場における時間スケールの比はほぼ一定値Ｒを取るという実験結果より次のように散逸項をモデル化する．

$$\varepsilon_T = \overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j}\frac{\partial T'}{\partial x_j}} = \frac{\overline{T'^2}}{2kR}\varepsilon \tag{2-23}$$

Spalding(1971)は，時間スケール比Rに対し0.5 としているが，Wyngaard(1975)は0.71，Launder(1978)は0.8が最適としている．以上のようなモデル化により温度変動を求めることができるが，別の手法とし，散逸ε_Tに関する輸送方程式を導入し解くことも可能であり，より実際の流れに適合した解を得ることができる．速度場において，乱流エネルギーk およびその散逸εを解いて流れ場の解析を行なったが，上述の手法は温度場へ拡張したものと解釈できる．

2．2．7　温度散逸輸送方程式

スカラー量Cに対する散逸ε_cについも一般形を求めることができる．スカラー量に対する瞬時値の方程式に演算子 $2\gamma(\partial c/\partial x_l)(\partial/\partial x_l)$を乗じて全体の時間平均をとると次のように示される．

$$\frac{D\varepsilon_c}{Dt}=-2\gamma\overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}}\frac{\partial C}{\partial x_l}-2\gamma\overline{u_l\frac{\partial c}{\partial x_j}}\frac{\partial^2 C}{\partial x_j\partial x_l}-2\gamma\overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}\frac{\partial c}{\partial x_l}}\frac{\partial U_l}{\partial x_j}$$
$$-2\gamma\overline{\frac{\partial c}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\frac{\partial c}{\partial x_l}}-2\left(\gamma\overline{\frac{\partial^2 c}{\partial x_j\partial x_l}}\right)^2-\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\overline{\varepsilon_c' u_l}-\gamma\frac{\partial\varepsilon_c}{\partial x_l}\right) \qquad (2\text{-}24a)$$

上式を温度散逸ε_Tに適用すると次のように示される．

$$\frac{D\varepsilon_T}{Dt}=-2a\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}}\frac{\partial T}{\partial x_k}-2a\overline{u_k\frac{\partial T'}{\partial x_j}}\frac{\partial^2 T}{\partial x_k\partial x_j}-2a\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j}\frac{\partial T'}{\partial x_k}}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}$$
$$-2a\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial T'}{\partial x_l}}-2\left(a\overline{\frac{\partial^2 T'}{\partial x_j\partial x_k}}\right)^2-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\varepsilon_T' u_k}-a\frac{\partial\varepsilon_T}{\partial x_k}\right) \qquad (2\text{-}24b)$$

ここで，ε_T'は次のように定義される．

$$\varepsilon_T'=a\frac{\partial T'}{\partial x_j}\frac{\partial T'}{\partial x_j} \qquad (2\text{-}24c)$$

上式において右辺第１項から第３項までは平均温度勾配，平均速度勾配により生成項を表わしている．第４項は乱れ成分による生成項を，第５項は散逸を示している．第６項は乱れ成分による拡散を示している．

高レイノルズ数流れの場合，第１項から第３項までは，ほぼ無視できる値となり，支配的な項は第４項の乱れにより生成項，および散逸項となる．ε_T に関する方程式は，乱流散逸ε方程式と似た形となっているが，温度乱れの分散の場合と同様に拡散項に圧力による拡散効果を含まない点で異なっている．

数値的に上式を解こうとする場合モデル化が必要となるが，モデル化する場合には，２つの時間スケールk/ε，$\overline{T'^2}/\varepsilon_T$ を含むことになり，乱流散逸εに対するモデル化よりも複雑である．ε_T の生成項に関しては，乱れ場および平均スカラー場において大きく変化することより，$G\varepsilon_T/k$，$\varepsilon_T P_{iT}/\overline{T'^2}$（Gは乱流エネルギーの生成項，$P_{iT}$は乱流熱流束の生成項）などの項によりモデル化されている．一方散逸項は速度および時間スケールに大きく依存していることより$\varepsilon\varepsilon_T/k$，$\varepsilon_T^2/\overline{T'^2}$ の諸量によりモデル化されている例が多い．

2．3　レイノルズ応力方程式による解析

レイノルズ応力方程式のモデル化の際，特に問題となる項として，対流項，拡散項，および圧力・歪相関項がある．第１章で示したように，対流項，拡散項にに対しては従来無視することより計算の簡略化を図っているが，本研究では，その計算の簡略化をそこなうことなく，各項の物理的意味を持たせる意味よりRodi(1976)近似を用い解析を行なった．

また圧力・歪相関項のモデル化に際しては，現在よく採用されている，あるいは特徴的なモデルを取り上げ検討を行なった．検討したモデルは，Launder-Reece-Rodi(1975)モデル，(以降ＬＲＲモデルと略す)，Gibson-Launder(1976)モデル(以降ＧＬモデルと略す)，Gessner-Eppich(1981)モデル(以降ＧＥモデルと略す），Nakayama-Chow-Sharma(1983)モデル(以降ＮＣＳモデルと略す）である．

次に各項に対するモデル化を，各モデルの特徴に合わせて説明する．同時にモデル化と同様に重要な要因である定数決定法についても検討を加えた．

さらに，正方形断面を有する完全発達乱流管路に各モデルを適用し，その差異分析をBrundrett-Baines(1964)の実験結果と比較すると同時に発達しつつある正方形管路乱流場への解析も行ない，Melling-Whitelaw(1976) の実験と比較検討を行なう．

2．3．1　レイノルズ応力方程式のモデル化

レイノルズ応力方程式を構成する各項について検討を加える．特に問題となる圧力・歪相関項に関しては前述した各モデル化についてその特徴を明確にするため詳細に検討する．さらに各項のモデル化とともに重要となる定数の決定についても言及する．

2．3．1．1　対流項，拡散項のモデル化

対流項は特にモデル化する必要はないが，６成分のレイノルズ応力を連立させて解くことが必要となり，多くの計算時間を費やす．拡散項のモデル化に対しては，粘性による拡散，圧力変動による拡散は小さいものと仮定し，拡散項第１項の三重速度相関項に対してモデル化が行なわれる．

Hanjalic-Launder(1972) は次のようなモデルを提唱した．

$$-\overline{u_i u_j u_k} = c_s' \frac{k}{\varepsilon}\left[\overline{u_i u_l}\frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l}\frac{\partial \overline{u_k u_i}}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l}\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l}\right] \qquad (2\text{-}25a)$$

c_s'は定数で$c_s'=0.11$と示される．

また，Daly-Harlow(1970) の提唱したモデルも，多くのモデラーにより使用されており次のように示される．

$$-\overline{u_i u_j u_k} = c_s \frac{k}{\varepsilon}\left[\overline{u_k u_l}\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l}\right] \qquad (2\text{-}25b)$$

定数c_sは 0.25 とされているが，Launder-Morse(1979)は，0.22が適当であるとしている．

以上のように拡散項をモデル化したことにより，対流項も含めて計算可能となるが，前述のように，６つのレイノルズ応力方程式を運動方程式と連立させて解くことが必要となり，多くの計算時間を要することとなる．これは，レイノルズ応力を微分形として扱い対流項，拡散項の省略のないことより完全なレイノルズ応力モデル（Full Reynolds stress model)と呼ばれる．

これに対し，対流項，拡散項を無視するか，それらの項を代数式で置き換えることより，各レイノルズ応力は微分形より代数式に変換され，式としてより扱いやすい形となる．また計算時間の面からも非常に有利となる．このような手法によるレイノルズ応力モデルは，代数応力モデル（Alegebraic Reynolds stress model）と呼ばれ，先の省略のない完全なレイノルズ応力方程式とは区別される．しかし，このような代数応力モデルにおいては，物理量の相互依存性が代数式の置き換えにより薄れるという問題を内包する点も認識する必要がある．

この代数応力モデルの一つとして，Rodi(1976)により提案されたものがある．Rodiは拡散項にDaly-Harlow(1970) の近似を用い，拡散項，対流項に以下の操作を加えた．

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt}=\frac{\overline{u_i u_j}}{k}\frac{Dk}{Dt}+k\frac{D(\overline{u_i u_j}/k)}{Dt} \tag{2-26}$$

拡散項に対しては，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Diff}_{ij}&=c_s\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_l}\frac{\partial\overline{u_i u_j}}{\partial x_l}\right)=c_s\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_l}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(k\frac{\overline{u_i u_j}}{k}\right)\right)\\
&=c_s\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_l}\left[k\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k}\right)+\frac{\overline{u_i u_j}}{k}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right]\right\}\\
&=\frac{\overline{u_i u_j}}{k}\mathrm{Diff}_k+c_s\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{k^2}{\varepsilon}\overline{u_k u_l}\frac{\partial\overline{u_i u_j}/k}{\partial x_l}\right)\\
&\qquad+\frac{k}{\varepsilon}c_s\overline{u_k u_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\left(\frac{\partial\overline{u_i u_j}/k}{\partial x_k}\right)
\end{aligned} \tag{2-27}$$

ここで，Diff_k は乱流エネルギー方程式の拡散項を示しており，乱流エネルギー方程式は次のように示される．

$$\frac{Dk}{Dt}=c_s\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right)-\overline{u_k u_l}\frac{\partial U_k}{\partial x_l}-\varepsilon \tag{2-28}$$

Diff_k;diffusion　　P_k;production　dissipation

(2-26),(2-27)式中の（$\overline{u_i u_j}/k$）の勾配が小さいものとし，これら項を無視し(2-26)式と(2-27)式とを差し引くと次の関係式を得る．

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt}-\mathrm{Diff}_{ij}=\frac{\overline{u_i u_j}}{k}\left(\frac{Dk}{Dt}-\mathrm{Diff}_k\right)=\frac{\overline{u_i u_j}}{k}(P_k-\varepsilon) \tag{2-29a}$$

$$P_k=-\overline{u_k u_l}\frac{\partial U_k}{\partial x_l} \tag{2-29b}$$

この関係式より解るように，対流項，拡散項は微分形より代数形に置き換えられる．しかし，以上の導出で解かるように Rodi 近似は，$\overline{u_i u_j}/k$の値が流れ方向に緩かに変化する時は，比較的良い近似であると考えられ，Rodi近似を使用する場合には，この点を考慮することが必要であろう．

2．3．1．2　圧力・歪相関項のモデル化

圧力・歪相関項は，生成項を“収入”に例えるならば，“税金”にあたるもので，金持ちから取った収益を，貧乏人に分配する役割をしている．この意味から，圧力・歪相関項

は，再配分項（redistribution term)とも呼ばれる．特定の乱れ成分が極端に大きくならないよう抑制するこの項の働きは，乱流の維持に大きな役割を果している．しかし，再配分項は，変動圧力pを含むため測定することができず，応力方程式のモデル化においてて最も問題となる項である．変動圧力pに関しては，ナビエ・ストークス方程式の発散を求め連続方程式を考慮し，かつ時間平均速度と変動速度成分を考えると変動圧力pに関するポアソンの方程式が得られる．すなわち，

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}=-\left\{\frac{\partial^2\left(u_i u_j-\overline{u_i u_j}\right)}{\partial x_j \partial x_i}+2\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\} \tag{2-30a}$$

さらに Greenの定理を適用しChou(1945)は圧力・歪相関項に関して次の式を導出した．

$$\overline{\frac{p}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}=\frac{1}{4\pi}\int_{vol}\left\{\underbrace{\overline{\left(\frac{\partial^2 u_l u_m}{\partial x_l \partial x_m}\right)'\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}_{\pi_{ij,1}}+\underbrace{2\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\right)'\overline{\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right)'\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}}_{\pi_{ij,2}}\right\}\frac{dVOL}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}+S_{ij} \tag{2-30b}$$

ここで，( )'は$\boldsymbol{y}$における，ついてないものは$\boldsymbol{x}$における値を示す．S_{ij}は表面積であり固体壁の影響が小さい場合には無視できる．上式は，再配分項が二つの作用を含んでいることを示唆している．一つは，変動速度成分間の相互作用による部分（純粋な乱れによるもの，$\pi_{ij,1}$），もう一つは，変動速度勾配と平均速度勾配の相乗効果により生じる部分（平均流の影響を含む，$\pi_{ij,2}$）である．$\pi_{ij,1}$のモデルに対しては，Rotta(1951) によるモデルが良く用いられており次のように示される．

$$\left(\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}\right)=-c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j}-\frac{2}{3}k\,\delta_{ij}\right) \tag{2-31}$$

この式は，極端に大きな垂直応力に対しては，（$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}$）の値は負として作用し，逆に小さな値を持つ垂直応力に対しては，正と作用し，大きな値を持つ垂直応力は小さく，小さな値を持つ垂直応力に対しては大きく作用する働きを持つ．この作用は，乱流の場を等方的にしようとする作用（return to isotropy）に他ならない．また，せん断応力に対しては，（$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}$）は負の値をとり，せん断応力を常に減少させる方向に働く．この頃に関する物理的考察に関しては，Hinze(1975) に詳細に述べられている．圧力・歪相関項の$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}$に関しては，多くのモデラーが上式を使用しており，本解析で検討した三つのモデルにおいても同様に上式を使用している．

一方，圧力・歪相関項の平均流の影響を含む項（$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}$）のモデル化に関しては，各モデラーにより大きく異なる．本解析においては，ＬＲＲモデル，ＧＬモデル，ＧＥモデル，ＮＣＳモデルについて検討を行ない，差異分析を行なった．次に各々の平均流のモデル化について説明する．

(1) ＬＲＲモデル

圧力・歪相関項の第２項は次のように表わすことができる．

$$\pi_{ij,2}=\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\right)a_{ij}^{ml} \tag{2-32a}$$

$$a_{ij}^{ml}=-\frac{1}{2\pi}\int_{vol}\overline{\frac{\partial^2 u_m' u_i}{\partial \xi_l \partial \xi_j}}\frac{dVOL}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{2-32b}$$

ξは，ベクトル$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$のCartesian 座標上での成分を示す．(2-32b)式は(2-30b)式におい

て二次微分項を無視し乱れ場が一様乱流（homogeneous)であることを仮定して導出される．a_{lj}^{mi}は，4次のテンソルを示し，Rotta(1951）は系の対称性，連続則，ならびにグリーンの定理より次の制約条件を設けた．

$$a_{lj}^{mi} = a_{lj}^{im} = a_{jl}^{im} \tag{2-33a}$$

$$a_{li}^{mi} = 0 \tag{2-33b}$$

$$a_{jj}^{mi} = 2\overline{u_m u_i} \tag{2-33c}$$

制約条件(2-33)式より，4次のテンソルを，レイノルズ応力の線形結合として表現したのは，Hanjalic-Launder(1972)であるが，ＬＲＲモデルにおいては，Hanjalic-Launderのものを一部変更し次のように表現できる．

$$\begin{aligned} a_{lj}^{mi} = {} & \alpha\delta_{lj}\overline{u_m u_i} + \beta\left(\delta_{ml}\overline{u_i u_j} + \delta_{mj}\overline{u_i u_l} + \delta_{il}\overline{u_m u_j} + \delta_{ij}\overline{u_m u_l}\right) \\ & + c_2\delta_{mi}\overline{u_l u_j} + \{\eta\delta_{mi}\delta_{lj} + \upsilon\left(\delta_{ml}\delta_{ij} + \delta_{mj}\delta_{il}\right)\}k \end{aligned} \tag{2-34}$$

ここで，α，β，c_2，η，υは定数であり，上の制約条件(2-33a)～(2-33b)式の関係式を用い，α，β，η，υはc_2の関数として表現できる．制約条件(2-33b)式より

$$\begin{aligned} a_{li}^{mi} = {} & \alpha\delta_{li}\overline{u_m u_i} + \beta\left(\delta_{ml}\overline{u_i u_i} + \delta_{mi}\overline{u_i u_l} + \delta_{il}\overline{u_m u_i} + 3\overline{u_m u_l}\right) \\ & + c_2\delta_{mi}\overline{u_l u_i} + \{\eta\delta_{mi}\delta_{li} + \upsilon\left(3\delta_{ml} + \delta_{mi}\delta_{il}\right)\}k \\ = {} & (2\beta + \eta + 4\upsilon)\delta_{ml}k + (c_2 + \beta)\delta_{mi}\overline{u_l u_i} + (\alpha + \beta)\delta_{li}\overline{u_m u_i} + 3\beta\overline{u_m u_l} \\ = {} & (2\beta + \eta + 4\upsilon)\delta_{ml}k + (5\beta + \alpha + c_2)\overline{u_m u_l} \\ = {} & 0 \end{aligned} \tag{2-35a}$$

制約条件(2-33c)式より

$$\begin{aligned} a_{jj}^{mi} = {} & \alpha\delta_{jj}\overline{u_m u_i} + \beta\left(\delta_{mj}\overline{u_i u_j} + \delta_{mj}\overline{u_i u_j} + \delta_{ij}\overline{u_m u_j} + \delta_{ij}\overline{u_m u_j}\right) \\ & + c_2\delta_{mi}\overline{u_j u_j} + \{\eta\delta_{mi}\delta_{jj} + \upsilon\left(\delta_{mj}\delta_{ij} + \delta_{mj}\delta_{ij}\right)\}k \\ = {} & (3\alpha + 4\beta)\overline{u_m u_i} + (2c_2 + 3\eta + 2\upsilon)\delta_{mi}k \\ = {} & 2\overline{u_m u_i} \end{aligned} \tag{2-35b}$$

(2-35a)式，(2-35b)式より

$$\begin{aligned} &\alpha + 5\beta + c_2 = 0 \qquad && 2\beta + 4\upsilon + \eta = 0 \\ &3\alpha + 4\beta = 2 && 2c_2 + 3\eta + 2\upsilon = 0 \end{aligned} \tag{2-35c}$$

これより各定数は次のように示される．

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{1}{11}(4c_2 + 10) \qquad && \beta = -\frac{1}{11}(2 + 3c_2) \\ &\eta = -\frac{1}{55}(50c_2 + 4) && \upsilon = \frac{1}{55}(20c_2 + 6) \end{aligned} \tag{2-35d}$$

一方，平均流の影響を含む項$\pi_{ij,2} + \pi_{ji,2}$の最終形は次のように示される．

$$\begin{aligned} (\pi_{ij,2} + \pi_{ji,2}) = {} & -(\alpha + \beta)\left(P_{ij} - \frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right) + (\eta + \upsilon)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)k \\ & + (4\beta + \alpha)\left(D_{ij} - \frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right) \end{aligned} \tag{2-36a}$$

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \qquad D_{ij} = -\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u_j u_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \tag{2-36b}$$

$$P_k = -\overline{u_k u_l}\frac{\partial U_k}{\partial x_l} \tag{2-36c}$$

ここでP_kは，乱流エネルギーの生成率を表わす．

平均流による影響を含む項（$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$）の各項は物理的に次のように解釈できる．第一項目は，垂直応力成分の乱れによる生成項が，等方的になろうとすることを意味している．例えば，ある方向での垂直応力が大きいとこれにより生成されるエネルギーは，他のエネルギー生成に配分されることになり，純粋な乱れの相関項による垂直応力成分の等方化と対応関係にある．第２項，第３項は，速度勾配と乱れ成分との相関により，各レイノルズ応力成分に再配化されるエネルギーを支配する項と解釈できる．特に第２項は，乱流エネルギーとの相関を示しているが，kは常に正となるため，速度勾配のみにより支配されることがわかる．

さらに壁面近傍の流れを考えると，(2-30b)式中のS_{ij}の表面積分が無視できなくなる．壁面近傍においては，壁面に垂直に作用する垂直応力は，壁面効果により抑制されるのに対し，壁面に平行な垂直応力は大きくなる傾向を示す．すなわち，壁面の効果は垂直応力に対しては，非等方的に作用し，せん断応力に対しては減少させるように作用する．この圧力・歪相関項に対する壁面の効果は，Rotta により示唆されており，ＬＲＲモデルにおいては次のように表わした．

$$(\pi_{ij}+\pi_{ji})_w = \left\{ c_1'\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}\right) + \frac{\partial U_l}{\partial x_m}\left(b_{ij}^{ml} + b_{ji}^{ml}\right) \right\} f\left(\frac{L}{x_2}\right) \tag{2-37}$$

前述のように壁面の効果は “return to isotropy” とは逆の効果をもたらすため，上式の第１項は，$\pi_{ij,1}$の項と異符号をとる．第２項目のb_{ij}^{ml}はa_{ij}^{ml}と同様に次のように示される．

$$\begin{aligned} b_{ij}^{ml} = {} & \alpha'\delta_{ij}\overline{u_m u_l} + \beta'\left(\delta_{mi}\overline{u_l u_j} + \delta_{mj}\overline{u_l u_i} + \delta_{li}\overline{u_m u_j} + \delta_{lj}\overline{u_m u_i}\right) \\ & + c_2'\delta_{ml}\overline{u_i u_j} + \left\{\eta'\delta_{ml}\delta_{ij} + \upsilon'\left(\delta_{mi}\delta_{lj} + \delta_{mj}\delta_{li}\right)\right\} k \end{aligned} \tag{2-38}$$

この４次のテンソルに対しても，先の制約条件$b_{ii}^{ml}=0$ を満足しなければならず次の関係式を得る．

$$\alpha' + 5\beta' + c_2' = 0 \qquad 2\beta' + 4\upsilon' + \eta' = 0 \tag{2-39}$$

さらに$\overline{u_3^2}$について壁面の影響を受けていないとして，$b_{13}^{23}=0$ の条件を課すと平均流の影響を含む部分については，次式のように示される．

$$\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\left(b_{ij}^{ml} + b_{ji}^{ml}\right) = c_2'\left[P_{ij} - D_{ij}\right] + \zeta' k\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{2-40}$$

ここで$\zeta' = \upsilon' + \eta'$である．

また f （L／x_2）は壁の影響を表わす関数であり，Lは特性距離である．f （L／x_2）は壁近傍で１となること，ならびに f （L／x_2）は（L／x_2）に比例することを仮定し，局所平衡（local equilibrium)が成立することを考慮すると，理論的に f （L／x_2）は求

められ，次のように示される．

$$f\left(\frac{L}{x_w}\right)=\frac{c_\mu^{3/4}k^{3/2}}{\kappa\varepsilon}\frac{1}{x_w} \qquad (2\text{-}41a)$$

ここでκは，カルマン定数である．x_wに関しては，Buleev(1963)の混合長理論を適用し次のように定義した．

$$\frac{1}{x_w}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{s} \qquad (2\text{-}41b)$$

これは図2-1に示すように，周囲の壁までの距離の積分平均を示すものである．

表2-1は以上ＬＲＲモデルにおける圧力・歪相関項のモデル式を整理したものである．

(2) ＧＬモデル

Gibson-Launder による圧力・歪相関項のモデル化は，ＬＲＲモデルと比較しても単純であり，かつ物理的にも理解しやすいため，広く利用されている．例えば，Leslie(1980)は，ＧＬモデルを用いて，Harris-Graham-Corrsin(1977) の実験データの解析を行なっている．

純粋な乱れによる影響の項$\pi_{ij,1}$に関しては，ＬＲＲモデル同様，Rotta により提唱された式によりモデル化を行なっている．平均流の影響を含む項に関しては，ＬＲＲモデルの第一項が主要項であるとして次のようにモデル化を行なっている．

$$(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2})=-c_2\left(P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}P_k\right) \qquad (2\text{-}42)$$

この近似は Noat-Shavit-Wolfshtein(1970) も示しており，純粋な乱れによる影響を示す$\pi_{ij,1}$と同様の考え方より，生成項が等方的になろうとすることを意味している．

ＧＬモデルにおいては，壁面の影響を，純粋な乱れ相関への影響（$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}$）$_w$と，平均流の影響を含む項への影響（$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$）$_w$とに分けて，Shir(1973)により提唱されたモデルを（$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}$）$_w$については踏襲し，（$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$）$_w$については，Shirのモデルを拡張しモデル化を行なった．モデル式は次のように示される．

$$(\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1})_w=c_1'\frac{\varepsilon}{k}\left\{\overline{u_n^2}\delta_{ij}-\frac{3}{2}\left(u_nu_i\delta_{nj}+u_nu_j\delta_{ni}\right)\right\}f\left(\frac{L}{x_w}\right) \qquad (2\text{-}43a)$$

$$(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2})_w=c_2'\left\{[\pi_{nn,2}+\pi_{nn,2}]\delta_{ij}-\frac{3}{2}\left([\pi_{ni,2}+\pi_{in,2}]\delta_{nj}+[\pi_{nj,2}+\pi_{jn,2}]\delta_{ni}\right)\right\}f\left(\frac{L}{x_w}\right) \qquad (2\text{-}43b)$$

上式で，nは壁に垂直な方向を，f（L／x_w）は，ＬＲＲと同様，壁の効果を示す関数であり，Ｌは特性距離，x_wは壁からの距離を表わす．また，上式の各係数は縮約すれば，圧力・歪相関項は零でなければならず，これを満足させるため導入されたものである．壁面近傍乱流においては，壁に垂直方向の乱れが壁の存在により抑制され，壁に平行な成分に抑制された分が，配分されるが，この現象を（$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}$）$_w$は数式化したものである．同様に（$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$）$_w$は，平均流の影響を含む項，すなわち生成項は，壁の存在により抑制され，その抑制された生成項は，壁に平行な生成項へ配分されるものと解釈できる．

ＧＬモデルにおいては，壁の効果を表す関数ｆ（Ｌ／x_n）は，次式に示すように定義さ

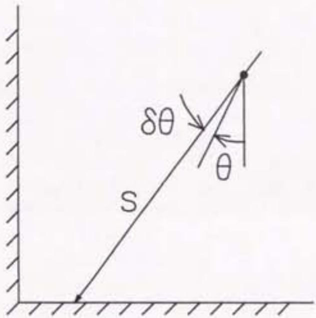


図2-1　ＬＲＲモデルの壁面効果

表2-1　ＬＲＲによる圧力・歪相関項のモデル化

$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}$	$-c_1\dfrac{\varepsilon}{k}(\overline{u_i u_j}-\dfrac{2}{3}k\delta_{ij})$
$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$	$-\dfrac{c_2+8}{11}(P_{ij}-\dfrac{2}{3}P_k\delta_{ij})-\dfrac{30c_2-2}{55}k(\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial U_j}{\partial x_i})$ $-\dfrac{8c_2-2}{11}(D_{ij}-\dfrac{2}{3}P_k\delta_{ij})$
$[\pi_{ij}+\pi_{ji}]_w$	$\{-0.125\dfrac{\varepsilon}{k}(\overline{u_i u_j}-\dfrac{2}{3}k\delta_{ij})+0.15(P_{ij}-D_{ij})\}\dfrac{k^{3/2}}{\varepsilon x_w}$

れる．

$$f\left(\frac{L}{x_n}\right)=\frac{c\mu^{3/4}k^{3/2}}{\kappa\varepsilon}\frac{1}{x_n} \tag{2-43c}$$

x_nは壁に対し垂直方向の距離を示し，ＬＲＲモデルが，周囲の壁の積分平均をx_nとして代表させたのに対し，垂直方向のみに着目している．表2-2にモデル化された式を示す．

(3) ＧＥモデル

Gessner-Eppich のモデルは，圧力・歪相関項のモデル化に際し，純粋な乱れ相関に関しては他のモデルと同様Rotta の “return to isotropy” の概念を導入し，平均流の影響を含む項に関しては，基本的にＬＲＲモデルを導入しているが，定数を新たに設定した点でＬＲＲモデルと異なる．また壁による影響に対しては，壁面を境とし，対称の位置に仮空の圧力変動を設置することにより壁面での圧力変動の勾配，$\partial P/\partial n$が常に零となるよう保障し，壁面の影響を示す関数$f\ (L/x_n)$を決定している．

純粋な乱れによる相関項に関しては次のようにモデル化される．

$$(\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1})=-c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_iu_j}-\frac{2}{3}k\delta_{ij}\right) \tag{2-44}$$

一方$(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2})$についてはＬＲＲモデルを基本としているが，ＧＥモデルでは次のように表わした．

$$(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2})=-(\alpha+\beta)\left(P_{ij}-\frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right)+\gamma\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)k$$
$$+(4\beta+\alpha)\left(D_{ij}-\frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right) \tag{2-45}$$

すなわち，ＬＲＲモデルでは$\gamma=\eta+\upsilon$で示され，η，υはc_2の関数として定義されたが，ＧＥモデルについては，新たな独立定数γを導入した．この定数γの導入については，後の代数応力モデル提唱の中で詳述する．α，βはＬＲＲモデルと同様にc_2の関数として表現される．

壁面の圧力・歪相関項への影響に関しては次のようにモデル化を行なった．

$$(\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1})_w=\left\{-c_{1,1}\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_iu_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k\right)\right\}+\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\left(b_{ij}^{ml}+b_{ij}^{ml}\right)\}\left(\frac{r}{r_1}\right)$$
$$+\left\{-c_{1,2}\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_iu_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k\right)\right\}+\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\left(d_{ij}^{ml}+d_{ij}^{ml}\right)\}\left(\frac{r}{r_2}\right)$$
$$+\left\{-c_{1,3}\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_iu_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k\right)\right\}+\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\left(g_{ij}^{ml}+g_{ij}^{ml}\right)\}\left(\frac{r}{r_3}\right) \tag{2-46a}$$

上式は矩形管流れを対象としてモデル化されたもので，r_1，r_2，r_3は図2-2に示すように，壁面を対称軸として設けられた圧力変動の仮想点までの距離を示している．従って$c_{1,1}$，$c_{1,2}$，$c_{1,3}$は各々の方向での定数，b_{ij}^{ml}，d_{ij}^{ml}，g_{ij}^{ml}は４次のテンソルであり，図2-2より解るように$c_{1,1}=c_{1,3}$，$b_{ij}^{ml}=g_{ij}^{ml}$である．壁面をはさんで仮想点が設られているのは，前述のように壁面上での圧力変動勾配が零となることを保障するためである．

表2-2　GLによる圧力・歪相関項のモデル化

$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}$	$-c_1\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_i u_j}-\frac{2}{3}k\delta_{ij})$
$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$	$-c_2(P_{ij}-\frac{2}{3}P_k\delta_{ij})$
$[\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}]_w$	$c_1'\frac{\varepsilon}{k}\{\overline{u_n^2}\delta_{ij}-\frac{3}{2}(\overline{u_n u_i}\delta_{nj}+\overline{u_n u_j}\delta_{ni})\}f(\frac{L}{x_n})$
$[\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}]_w$	$c_2'\{[\pi_{nn,2}+\pi_{nn,2}]\delta_{ij}-\frac{3}{2}([\pi_{ni,2}+\pi_{in,2}]\delta_{nj}$ $+[\pi_{nj,2}+\pi_{jn,2}]\delta_{nj})\}f(\frac{L}{x_n})$

また例えば(r/r_1)は次のように定義される．

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)=\frac{1}{V_1}\int_{v1}\frac{r}{r_1}\,dv=\frac{3}{4\pi L^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{L}\frac{r^3\sin\phi}{(r^2+4x_2 r\cos\phi+4x_2^2)^{1/2}}\,dr\,d\phi\,d\theta$$
$$=\frac{3L}{4x_2}\{\frac{(3-10x_2^*)}{12}(1+2x_2^*)^3-\frac{(3+10x_2^*)}{12}|1-2x_2^*|^3$$
$$+2x_2^{*2}((1+2x_2^*)^2-(1-2x_2^*)|1-2x_2^*|)-\frac{8}{3}x_2^{*4}\}$$
(2-46b)

ここで，$x_2^*=x_2/L$で定義され，$1\leqq x_2^*<\infty$の値をとることを考慮すると上式は次のように書き改められる．

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)=\frac{3L}{8x_2} \tag{2-46c}$$

同様に(r/r_2)に関しては次のように書き換えられる．

$$\left(\frac{r}{r_2}\right)=\frac{3}{8}\frac{L}{(x_2^2+x_3^2)^{1/2}} \tag{2-46d}$$

以上の各項により圧力・歪相関項はモデル化されるが，次のように定数系を定義して圧力・歪相関項を表わした．

$$\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}=(\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1})+(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2})+(\pi_{ij}+\pi_{ji})_w$$
$$=-c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_iu_j}-\frac{2}{3}k\right)+\frac{\partial U_l}{\partial x_m}(a_{lj}^{mi}+a_{li}^{mj}) \tag{2-47a}$$

$$a_{lj}^{mi}=\alpha\delta_{lj}\overline{u_mu_i}+\beta(\delta_{mi}\overline{u_lu_j}+\delta_{mj}\overline{u_lu_i}+\delta_{li}\overline{u_mu_j}+\delta_{lj}\overline{u_mu_i})$$
$$+c_2\delta_{mi}\overline{u_lu_j}+\{\eta\delta_{mi}\delta_{lj}+\upsilon(\delta_{ml}\delta_{ij}+\delta_{mj}\delta_{il})\}k \tag{2-47b}$$

$$c_1=c_1^*+c_{1,1}\left\{\left(\frac{r}{r_1}\right)+\left(\frac{r}{r_3}\right)\right\}+c_{1,2}\left(\frac{r}{r_2}\right)$$
$$c_2=c_2^*+c_{2,1}\left\{\left(\frac{r}{r_1}\right)+\left(\frac{r}{r_3}\right)\right\}+c_{2,2}\left(\frac{r}{r_2}\right) \tag{2-47c}$$
$$\gamma=\gamma^*+\gamma_1\left\{\left(\frac{r}{r_1}\right)+\left(\frac{r}{r_3}\right)\right\}+\gamma_2\left(\frac{r}{r_2}\right)$$
$$\alpha=\frac{4c_2+10}{11}\qquad\beta=\frac{-(3c_2+2)}{11}$$

定数として9個の定数が含まれるが，Gessnerらは，壁の影響を表わす関数$f(L/x_w)$を導入して以下のように定数を定めた．

$$c_1=c_1^*+c_1'\,f(L/x_w)$$
$$c_2=c_2^*+c_2'\,f(L/x_w) \tag{2-47d}$$
$$\gamma=\gamma^*+\gamma'\,f(L/x_w)$$

ここで

$$f\left(\frac{L}{x_w}\right)=\frac{c_\mu^{3/4}k^{3/2}}{\kappa}\left\{\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{c_f(x_2+x_3)^{1/2}}\right\} \tag{2-47e}$$

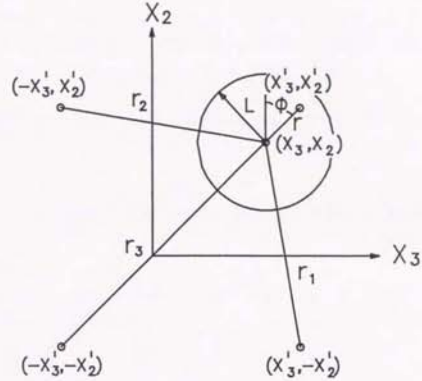


図2-2　ＧＥモデルの壁面効果

表2-3　ＧＥによる圧力・歪相関項のモデル化

$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}$	$-c_1\dfrac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_iu_j}-\dfrac{2}{3}k\delta_{ij}\right)$
$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$	$-\dfrac{c_2+8}{11}\left(P_{ij}-\dfrac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right)+\gamma k\left(\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$ $-\dfrac{8c_2-2}{11}\left(D_{ij}-\dfrac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right)$
$[\pi_{ij}+\pi_{ji}]_w$	$c_1=c_1^{\circ}+c_1'f\left(\dfrac{L}{x_w}\right)$, $c_2=c_2^{\circ}+c_2'f\left(\dfrac{L}{x_w}\right)$, $\gamma=\gamma^{\circ}+\gamma'f\left(\dfrac{L}{x_w}\right)$

上式でc_fは，実験的に-3.0と設定している．

表2-3にGessner-Eppichモデルの圧力・歪相関項に関するモデル式を示す．

(4) ＮＣＳモデル

Nakayama-Chow-Sharma(1983)による圧力・歪相関項のモデル化は基本的には，Gessner-Emery(1976)により提示されたものである．純粋な乱れ相関の項は次のモデル化を行なう．

$$(\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}) = -c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j}-\frac{2}{3}k\,\delta_{ij}\right) \tag{2-48}$$

平均流の影響を含む項$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$に関しては，４次の相関テンソルa^{mi}_{ij}を導入し以下のように表わした．

$$(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}) = (a^{mi}_{ij}+a^{mj}_{ii})\frac{\partial U_i}{\partial x_m} \tag{2-49a}$$

ただし４次相関テンソルは，Hanjalic-Launder(1972)が示したものを使用している．

$$\begin{aligned} a^{mi}_{ij} = {} & \alpha\,\delta_{ij}\,\overline{u_m u_i}+\beta\,(\delta_{mi}\,\overline{u_i u_j}+\delta_{mj}\,\overline{u_i u_i}+\delta_{ii}\,\overline{u_m u_j}+\delta_{ij}\,\overline{u_m u_i}) \\ & +\{\gamma\,\delta_{mi}\,\delta_{ij}+\eta\,(\delta_{mi}\,\delta_{ij}+\delta_{mj}\,\delta_{ii})\}\,k \\ & +c_2\,(\overline{u_m u_i}\,\overline{u_i u_j}-\overline{u_m u_j}\,\overline{u_i u_i}-\overline{u_m u_i}\,\overline{u_i u_j})\,/\,k \end{aligned} \tag{2-49b}$$

Hanjalicらは，次の制約条件

$$a^{mi}_{ii}=0 \qquad a^{mi}_{jj}=2\,\overline{u_m u_i} \tag{2-50a}$$

を満足するように定める．

$$\begin{aligned} a^{mi}_{ii} = {} & \alpha\,\delta_{ii}\,\overline{u_m u_i}+\beta\,(\delta_{mi}\,\overline{u_i u_i}+\delta_{mi}\,\overline{u_i u_i}+\delta_{ii}\,\overline{u_m u_i}+\delta_{ii}\,\overline{u_m u_i}) \\ & +\{\gamma\,\delta_{mi}\,\delta_{ii}+\eta\,(\delta_{mi}\,\delta_{ii}+\delta_{mi}\,\delta_{ii})\}\,k \\ & +c_2\,(\overline{u_m u_i}\,\overline{u_i u_i}-\overline{u_m u_i}\,\overline{u_i u_i}-\overline{u_m u_i}\,\overline{u_i u_i})\,/\,k \\ = {} & (3\beta-2c_2)\,\overline{u_m u_i}+(2\beta+\gamma+4\eta)\,k\,\delta_{mi}+(\alpha+\beta)\,\overline{u_m u_i}\,\delta_{ii} \\ = {} & (3\beta-2c_2+\alpha+2\beta)\,\overline{u_m u_i}+(2\beta+\gamma+4\eta)\,k\,\delta_{mi} \end{aligned} \tag{2-50b}$$

$$\begin{aligned} a^{mi}_{jj} = {} & \alpha\,\delta_{jj}\,\overline{u_m u_i}+\beta\,(\delta_{mj}\,\overline{u_i u_j}+\delta_{mj}\,\overline{u_i u_j}+\delta_{ij}\,\overline{u_m u_j}+\delta_{ij}\,\overline{u_m u_j}) \\ & +\{\gamma\,\delta_{mi}\,\delta_{jj}+\eta\,(\delta_{mj}\,\delta_{ij}+\delta_{mj}\,\delta_{ij})\}\,k \\ & +c_2\,(\overline{u_m u_i}\,\overline{u_j u_j}-\overline{u_m u_j}\,\overline{u_i u_j}-\overline{u_m u_j}\,\overline{u_i u_j})\,/\,k \\ = {} & 3\alpha\,\overline{u_m u_i}+2\beta\,\overline{u_m u_j}\,\delta_{ij}+2\beta\,\overline{u_i u_j}\,\delta_{mj}+(3\gamma+2\eta)\,k\,\delta_{mi} \\ & +c_2\,(2k\,\overline{u_m u_i}-2\,\overline{u_m u_j}\,\overline{u_i u_j})\,/\,k \end{aligned} \tag{2-50c}$$

(2-50c)式において　$c_2\neq 0$ である限り，制約条件(2-50a)を満足することはなく，従ってHanjalic-Launderは次の条件

$$\overline{u_m u_j}\,\overline{u_i u_j}=\overline{u_m u_i}\,k \tag{2-51}$$

を仮定し上式を次のように書き改めた．

$$a^{mi}_{jj}=(3\alpha+4\beta)\,\overline{u_m u_i}+(3\gamma+2\eta)\,k\,\delta_{mi}=2\,\overline{u_m u_i} \tag{2-52}$$

(2-50b)式，および(2-52)式より

$$\begin{aligned} & 5\beta+\alpha-2c_2=0 \qquad && 2\beta+\gamma+4\eta=0 \\ & 3\alpha+4\beta=2 && 3\gamma+2\eta=0 \end{aligned} \tag{2-53a}$$

であり，各係数はc_2の関数として次のように示される．

表2-4　ＮＣＳによる圧力・歪相関項のモデル化

$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}$	$-c_1\dfrac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j}-\dfrac{2}{3}k\delta_{ij}\right)$
$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$	$-\dfrac{-2c_2+8}{11}P_{ij}-\dfrac{6c_2-2}{11}(D_{ij}+2P_k\delta_{ij})$ $-\dfrac{6c_2-2}{55}k\left(\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)+2c_2\dfrac{\overline{u_i u_j}}{k}P_k$
$[\pi_{ij}+\pi_{ji}]_w$	

$$\alpha = \frac{-2}{11}(4c_2-5) \qquad \beta = \frac{2}{11}(3c_2-1)$$

$$\gamma = \frac{4}{55}(3c_2-1) \qquad \eta = -\frac{6}{55}(3c_2-1) \tag{2-53b}$$

平均流の影響を含む項のモデル化は次のように示される.

$$\begin{aligned}(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}) &= (a_{lj}^{mi}+a_{li}^{mj})\frac{\partial U_l}{\partial x_m} \\ &= -(\alpha+\beta)P_{ij}+(\eta+\gamma)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)k \\ &\quad -\beta(D_{ij}+2P_k\delta_{ij})+2c_2\frac{\overline{u_iu_j}}{k}P_k\end{aligned} \tag{2-54}$$

Gessner-Emery は, 矩形管内流れを想定し, 亜流速度U_2, U_3の勾配が非常に小さいものとしてこれら項を無視して上式のモデルを適用している.

ＮＣＳモデルにおいては, 壁面の影響は考慮していない. 表2-4に圧力・歪相関項に関するモデル式を示す.

2. 3. 1. 3　散逸項のモデル化

乱流散逸は一般に次の式で示される.

$$\varepsilon = \nu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}+\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}\right) \tag{2-55}$$

高レイノルズ数流れであるとすれば, 乱流場は局所等方的であり次の恒等式

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = \overline{\frac{\partial^2 u_iu_j}{\partial x_i\partial x_j}} - \overline{u_j\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_i}} - \overline{u_i\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j\partial x_i}} - \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = 0 \tag{2-56}$$

より乱流散逸εは次のように示される.

$$\varepsilon = \nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \tag{2-57a}$$

レイノルズ応力方程式中の散逸項において, i=jの時に, 2εに等しいことを考慮すれば, 散逸項は次のようにモデル化される.

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = \frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon \tag{2-57b}$$

2. 3. 1. 4　モデル定数決定

乱流のモデル化において, 支配方程式のモデル化と同様, 重要な因子としてモデル定数が上げられる. 定数値の決定は, 各モデラーにより異なり, 次に各々のモデルの定数決定法について述べる.

(1) ＬＲＲモデル

ＬＲＲモデルは, モデル化されたレイノルズ応力方程式を単純せん断流れ, および壁面近傍流れに適用し各定数を決定した. 実験データは, Champagne-Harris-Corrsin(1970)の

ものを使用した．表2-5にその実験値を示す．レイノルズ応力方程式のモデル化に際しては，対流項は省略せず，拡散項は Hanjalic-Launder(1972) のモデルを用い以下のようにモデル化した．

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt}=P_{ij}-c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j}-\frac{2}{3}k\delta_{ij}\right)+\left(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}\right)+\left(\pi_{ij}+\pi_{ji}\right)_w$$
$$+c_s'\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{k}{\varepsilon}\left[\overline{u_i u_l}\frac{\partial\overline{u_j u_k}}{\partial x_l}+\overline{u_j u_l}\frac{\partial\overline{u_k u_i}}{\partial x_l}+\overline{u_k u_l}\frac{\partial\overline{u_i u_j}}{\partial x_l}\right]\right\}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon \tag{2-58}$$

上式をせん断流れに適用する場合に次のに二つ仮定を設ける．

i) 対流項，拡散項は小さいものとして無視する．

ii) 局所平衡流れ，すなわち $P_k=\varepsilon$ が成立する．

以上の仮定より垂直応力に関する次の関係式を得る．この時 $f(L/x_w)=0$ である．

$$\left(\overline{u_1^2}-\frac{2}{3}k\right)/k=\frac{(8+12c_2)}{33c_1} \tag{2-59a}$$

$$\left(\overline{u_2^2}-\frac{2}{3}k\right)/k=\frac{(2-30c_2)}{33c_1} \tag{2-59b}$$

$$\left(\overline{u_3^2}-\frac{2}{3}k\right)/k=\frac{(-10+18c_2)}{33c_1} \tag{2-59c}$$

次に壁近傍流れに適用すると，$f(L/x_w)=1$とし次の関係式を得る．

$$\left(\overline{u_1^2}-\frac{2}{3}k\right)/k=\frac{1}{(c_1-c_1')}\left(2c_2'+\frac{4c_2+10}{11}-\frac{2}{3}\right) \tag{2-60a}$$

$$\left(\overline{u_2^2}-\frac{2}{3}k\right)/k=-\frac{1}{(c_1-c_1')}\left(\frac{30c_2-2}{33}+2c_2'\right) \tag{2-60b}$$

$$\left(\overline{u_3^2}-\frac{2}{3}k\right)/k=\frac{1}{(c_1-c_1')}\left(\frac{18c_2-10}{33}\right) \tag{2-60c}$$

$$-\frac{\overline{u_1 u_2}}{k}=\frac{1}{(c_1-c_1')^{1/2}}\left\{\left(1-\frac{c_2+8}{11}+c_2'\right)\frac{\overline{u_2^2}}{k}+\frac{30c_2-2}{55}-\left(\frac{8c_2-2}{11}+c_2'\right)\frac{\overline{u_1^2}}{k}\right\}^{1/2} \tag{2-60d}$$

(2-59a)式～(2-59c)式より，平衡せん断流れにおける実験データを参考に c_1， c_2を最初に決め，続いて(2-60a)式～(2-60d)式を用いて， c_1'， c_2' を決定した．定数は表2-6のように示される。

(2) GLモデル

GLモデルは，レイノルズ応力方程式のモデル化に際して，対流項，拡散項を無視して次のように表わした．

$$P_{ij}-c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j}-\frac{2}{3}k\right)+\left(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}\right)$$
$$+\left(\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}\right)_w+\left(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}\right)_w-\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon=0 \tag{2-61}$$

表2-5　定数決定のための実験データ（ＬＲＲモデル）

	$\overline{u_1^2}$／k	$\overline{u_2^2}$／k	$\overline{u_3^2}$／k	$-\overline{u_1 u_2}$／k
Homogeneous shear layer	0.97	0.485	0.545	0.33
Near wall turbulence	1.18	0.245	0.575	0.24

表2-6　ＬＲＲモデル定数

c_1	c_2	c_1'	c_2'
1.5	0.4	0.5	0.06

ＬＲＲ同様に，平衡せん断流れ，壁面近傍流れに上式を適用し，求めた式と，実験データより各定数を決定する．ＧＬの用いた実験データは表2-7に示す．

$f(L/x_u)=0$として平衡せん断流れに上式を適用すると次の関係式を得る．

$$\frac{\overline{u_1^2}}{k}=\frac{2}{3}\frac{(2+c_1-2c_2)}{c_1} \tag{2-62a}$$

$$\frac{\overline{u_2^2}}{k}=\frac{2}{3}\frac{(c_1+c_2-1)}{c_1} \tag{2-62b}$$

$$\frac{\overline{u_3^2}}{k}=\frac{2}{3}\frac{(c_1+c_2-1)}{c_1} \tag{2-62c}$$

さらに壁面近傍の流れに，モデル化されたレイノルズ応力方程式を代入すると次のように示される．

$$\frac{\overline{u_1^2}}{k}=\frac{1}{c_1}\left\{\frac{2}{3}c_1+\frac{4}{3}(1-c_2)+c_1'\frac{\overline{u_2^2}}{k}+\frac{2}{3}c_2c_2'\right\} \tag{2-63a}$$

$$\frac{\overline{u_2^2}}{k}=\frac{1}{(c_1+2c_1')}\left\{\frac{2}{3}(c_1+c_2-1)-\frac{4}{3}c_2c_2'\right\} \tag{2-63b}$$

$$\frac{\overline{u_3^2}}{k}=\frac{1}{c_1}\left\{\frac{2}{3}(c_1+c_2-1)+c_1'\frac{\overline{u_2^2}}{k}+\frac{3}{2}c_2c_2'\right\} \tag{2-63c}$$

$$-\frac{\overline{u_1u_2}}{k}=\frac{1}{(c_1+1.5c_1')^{1/2}}\left\{\frac{\overline{u_1^2}}{k}\left(1-c_2+\frac{3}{2}c_2c_2'\right)\right\}^{1/2} \tag{2-63d}$$

これらの関係式と，表2-7に示した実験データよりＧＬモデルでは，表2-8に示すように定数を決定した．

(3) ＧＥモデル

ＧＥモデルにおける定数決定は，先に示したＬＲＲ，ＧＬモデルとは異なり，正方形管路内の発達した乱流場において，正方形管路の対角線上（corner bisector）および，左右対称軸上(wall bisector)におけるレイノルズ応力成分の実験値，平衡せん断流れにおけるChampagne-Harris-Corrsin(1970)（以降ＣＨＣと略す）の実験値，およびHarris-Graham-Corrsin(1977)（以降ＨＧＣと略す）らの非等方性を扱ったせん断応力流れに関する実験値を用いることより各定数の決定を行なっている。

ＧＥモデルにおいては，対流項，拡散項のモデル化にRodiの近似を用いて，レイノルズ応力方程式を次のように表わしている．

$$\frac{\overline{u_iu_j}}{k}(P_k-\varepsilon)=P_{ij}+(\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1})+(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2})-\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon \tag{2-64}$$

再配分項に関する，$(\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1})$，$(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2})$は，表2-3に示すようにモデル化されている．上式を用いて，各レイノルズ応力を導出すると次のように整理される．

$$\frac{\overline{u_3^2}}{k}=\frac{1}{(c_1+\xi-1)}\left\{\frac{2}{3}(c_1-1)-2\xi(\alpha+2\beta-1)\right\} \tag{2-65a}$$

表2-7　定数決定のための実験データ（ＧＬモデル）

	$\overline{u_1^2}/k$	$\overline{u_2^2}/k$	$\overline{u_3^2}/k$	$-\overline{u_1 u_2}/k$
Homogeneous shear layer	0.96	0.52	0.52	0.34
Near wall turbulence	1.10	0.25	0.65	0.26

表2-8　ＧＬモデル定数

c_1	c_2	c_1'	c_2'
1.8	0.6	0.5	0.3

$$\frac{\overline{u_2^2}}{k}=\frac{1}{(c_1+\xi-1)}\{\frac{2}{3}(c_1-1)-2\xi\beta+2(c_2+\beta)\frac{\overline{u_2u_2}}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\} \tag{2-65b}$$

$$\frac{\overline{u_1^2}}{k}=\frac{1}{(c_1+\xi-1)}\{\frac{2}{3}(c_1-1)-2\xi\beta+2(c_2+\beta)\frac{\overline{u_1u_3}}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\} \tag{2-65c}$$

せん断応力項に関しては、次のように示される．

$$\frac{\overline{u_2u_3}}{k}=\frac{1}{(c_1+\xi-1)}\frac{k}{\varepsilon}\{((\alpha+\beta-1)\frac{\overline{u_2^2}}{k}+(\beta+c_2)\frac{\overline{u_3^2}}{k}+\gamma)\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+(\alpha+\beta-1)\frac{\overline{u_2u_1}}{k}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\} \tag{2-66a}$$

$$\frac{\overline{u_3u_1}}{k}=\frac{1}{(c_1+\xi-1)}\frac{k}{\varepsilon}\{((\alpha+\beta-1)\frac{\overline{u_1^2}}{k}+(\beta+c_2)\frac{\overline{u_3^2}}{k}+\gamma)\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+(\alpha+\beta-1)\frac{\overline{u_2u_1}}{k}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\} \tag{2-66b}$$

$$\frac{\overline{u_2u_1}}{k}=\frac{1}{(c_1+\xi-1)}\frac{k}{\varepsilon}(\beta+c_2)(\frac{\overline{u_2u_3}}{k}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\overline{u_2u_3}}{k}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}) \tag{2-66c}$$

ここで$\xi=P_k/\varepsilon$であり，$\xi=1$であれば平衡状態にあることを示す．対角線上では

$$P_k=-\overline{u_1u_2}\frac{\partial U_1}{\partial x2}-\overline{u_1u_3}\frac{\partial U_3}{\partial x_3} \tag{2-67a}$$

の関係，左右対称軸上では

$$P_k=-\overline{u_1u_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \qquad \frac{\overline{u_1^2}}{k}=0 \tag{2-67b}$$

の関係が成立することに留意して，(2-65a)式～(2-66c)式を対角線上，左右対称軸上に適用すると，係数に関する次の諸式を得る．

$$c_{1,wb}=1-\xi+4\xi\ \{12(\frac{\overline{u_3^2}}{k})_{wb}+3(\frac{\overline{u_2^2}}{k}-\frac{\overline{u_1^2}}{k})-8\}^{-1} \tag{2-68a}$$

$$c_{2,wb}=\frac{1}{16}\{4-11\frac{(c_{1,wb}+\xi-1)}{\xi}(\frac{\overline{u_2^2}}{k}-\frac{\overline{u_1^2}}{k})_{wb}\} \tag{2-68b}$$

$$\gamma_{,wb}=-\frac{(c_{1,wb}+\xi-1)}{\xi}(\frac{\overline{u_3u_2}}{k})^2-\frac{(15c_{2,wb}-1)}{22}(\frac{\overline{u_3^2}}{k})_{wb}-\frac{(c_{2,wb}-3)}{22}\{2+(\frac{\overline{u_2^2}}{k}-\frac{\overline{u_1^2}}{k})_{wb}\} \tag{2-68c}$$

$$c_{1,cb}=1-\xi+4\xi\ \{12(\frac{\overline{u_3^2}}{k})_{cb}+6(\frac{\overline{u_2u_1}}{k})_{cb}-8\}^{-1} \tag{2-68d}$$

$$c_{2,cb}=\frac{1}{16}\{4-22\frac{(c_{1,cb}+\xi-1)}{\xi}(\frac{\overline{u_2u_1}}{k})_{cb}\} \tag{2-68e}$$

$$\gamma_{*cb}=-2\frac{(c_{1,wb}+\xi-1)}{\xi}\left(\frac{\overline{u_3u_2}}{k}\right)^2_{cb}-\frac{(15c_{2,cb}-1)}{22}\left(\frac{\overline{u_3^2}}{k}\right)_{cb}$$
$$-\frac{(c_{2,cb}-3)}{22}\left\{2+2\left(\frac{\overline{u_2u_1}}{k}\right)_{cb}\right\} \qquad (2\text{-}68f)$$

上の対角線上，左右対称軸上での式においてＧＥモデルでは，次の関係式を導入している．

$$\left(\frac{\overline{u_3^2}}{k}\right)_{cb}=\left(\frac{\overline{u_3^2}}{k}\right)_{wb} \qquad (2\text{-}69a)$$

$$\left(\frac{\overline{u_2u_3}}{k}\right)_{cb}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\overline{u_2u_3}}{k}\right)_{wb} \qquad (2\text{-}69b)$$

$$\left(\frac{\overline{u_2u_1}}{k}\right)_{cb}=\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{u_2^2}}{k}-\frac{\overline{u_1^2}}{k}\right)_{wb} \qquad (2\text{-}69c)$$

この関係式を導入することより，対角線上の定数と，左右対称軸上での定数が等しくなり，先に示した(2-68)式が，次の(2-70)式のように表現されることとなる．ＧＥモデルでは，(2-70)式の関係を Re ＝250,000，120,000，50,000の正方形管路内の発達乱流において実験的に検証している．

ＧＥモデルに於て，(2-65b)式，(2-65c)式より

$$\left(\frac{\overline{u_2^2}}{k}-\frac{\overline{u_1^2}}{k}\right)=\frac{-4\xi\ (4c_2-1)}{11\ (c_1+\xi-1)} \qquad (2\text{-}70a)$$

なる関係式を導びき，上式がξの関数となることに注目し，上式を次のように表わした．

$$\left(\frac{\overline{u_2^2}}{k}-\frac{\overline{u_1^2}}{k}\right)=\{\lambda^*+\lambda'f\ (L/x_w)\}\ \xi \qquad (2\text{-}70b)$$

この関係式，および表2-9に示すＣＨＣ，ＨＧＣの乱流応力成分の実験値より，$c_1{}^*=1.4$，$\gamma^*=-0.12$，$\lambda^*=-0.12$を決定し(2-68a)式～(2-68f)式より導出された次の関係式と，正方形管路の発達乱流流れにおける実験データより各定数の決定を行なっている．

$$c_2=\frac{1}{16}\{4-11\ (\lambda^*+\lambda'f\ (L/x_w))\ \xi\ (c_1+\xi-1)\} \qquad (2\text{-}71a)$$

$$c_1'=4\left\{12\left(\frac{\overline{u_3^2}}{k}\right)_{wb}+3\left(\frac{\overline{u_2^2}}{k}-\frac{\overline{u_1^2}}{k}\right)_{wb}-8\right\}^{-1}-c_1{}^* \qquad (2\text{-}71b)$$

$$\lambda'=\left(\frac{\overline{u_2^2}}{k}-\frac{\overline{u_1^2}}{k}\right)_{wb}-\lambda^* \qquad (2\text{-}71c)$$

$$\gamma'=\left\{\frac{\lambda_{,wb}}{128}(48-11\lambda_{,wb})-\left(\frac{\overline{u_3u_2}}{k}\right)^2_{wb}\right\}(c_1{}^*+c_1)$$
$$+\frac{1}{48}\left(8+15\lambda_{,wb}-\frac{2}{c_1{}^*+c_1{}'}\right)-\gamma^* \qquad (2\text{-}71d)$$

ＧＥモデルにおける定数系は表2-10のように示される．($\overline{u_3{}^2}$／k）の値が Re 数の関数となるため，($\overline{u_3{}^2}$／k）を含む項は，Re数の関数値として表現されている．

表2-9　CHC、HGCによる実験データ

	$\overline{u_1^2}/k$	$\overline{u_2^2}/k$	$\overline{u_3^2}/k$	$-\overline{u_1 u_2}/k$
Chmpagne Harris Corssin(1970) (P_k/ε=1.0)	0.94	0.48	0.58	0.33
Harris Graham Corrsin(1977) (P_k/ε=1.55)	1.00	0.44	0.60	0.30

表2-10　GEモデル定数

Re	c_1^*	λ^*	γ^*	c_1'	λ'	c_2^*	c_2'
50,000	1.4	-0.12	-0.12	0.0	-0.08	0.37	-0.101
120,000	1.4	-0.12	-0.12	-0.57	-0.08	0.37	-0.109
250,000	1.4	-0.12	-0.12	-0.87	-0.08	0.37	-0.113

(4) ＮＣＳモデル

ＮＣＳモデルの定数決定に際しては，純粋な乱れ相関項に表われる定数c_1に対しては，Rotta(1951)の提唱したものを，平均流の影響を含む項中の定数c_2に関しては，流れ場が局所平衡状態にあることを仮定して決定している．モデルにおいては，対流項，拡散項を無視しているため，レイノルズ応力方程式は次のように示される．

$$P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon+(\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1})+(\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2})=0 \tag{2-72}$$

ここで，主流方向の速度勾配が，亜流速度勾配より大きいことを仮定して，各レイノルズ応力を上式より算出すると次のように示される．

$$-\overline{u_1^2}=-c'_{k\theta}k \tag{2-73a}$$

$$-\overline{u_1u_2}=c_D{}'\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \tag{2-73b}$$

$$-\overline{u_1u_3}=c_D{}'\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \tag{2-73c}$$

$$-\overline{u_2^2}=c'c_D{}'\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2-c'_k k \tag{2-73d}$$

$$-\overline{u_3^2}=c'c_D{}'\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2-c'_k k \tag{2-73e}$$

$$-\overline{u_2u_3}=c'c_D{}'\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) \tag{2-73f}$$

ここで，上式の定数は次のようにc_1，c_2で示される．

$$c'_{k\theta}=\frac{2(11c_1-12c_2+4)}{33(c_1-2c_2)} \tag{2-74a}$$

$$c'_k=\frac{2(11c_1-18c_2-5)}{33(c_1-2c_2)} \tag{2-74b}$$

$$c'=\frac{4(3c_2-1)}{11(c_1-2c_2)} \tag{2-74c}$$

$$c_D{}'=\frac{2(22c_1-64c_2-11c_1c_2-18c_2^2+5)}{165(c_1-2c_2)^2} \tag{2-74d}$$

ＮＣＳモデルにおいては，c_1は前述のようにRottaによるものを使用し，$c_1=2.6$としている．c_2に関しては，流れを局所平衡流れと仮定すると，$c_D{}'=0.09$となることが実験的に確かめられており，(2-74d)式よりc_2を算出すると$c_2=0.366$を得る．このc_2の値はLaunder-Ying(1972)の示した$c_2=0.365$に非常に近い値を示しており，ＮＣＳモデルでは，Launder-Ying(1972)にならって$c_2=0.365$を採用した．表2-11にＮＣＳモデルの各定数系の値を示す．

２．３．２　代数応力モデル提唱

先に示した４種類の圧力・歪相関項に対するモデル化を整理すると次のように整理できる．圧力・歪相関項のモデル化に際しては，純粋な乱れによる影響$\pi_{ij,1}$平均流による影

表2-11　ＮＣＳモデル定数

c_1	c_2	c^*	c_k^*	c_D^*
2.6	0.365	0.0185	0.552	0.09

響 $\pi_{ij,2}$，壁面による影響$\pi_{ij,w}$に対するモデル化が必要となる．$\pi_{ij,1}$に関しては，検討したどのモデルにおいても，“return to isotropy”の概念を導入したRotta による次のモデルにより構成されている．

$$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}=-c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j}-\frac{2}{3}k\delta_{ij}\right) \tag{2-75}$$

$\pi_{ij,2}$に対しては，$\pi_{ij,2}$に含まれる速度変動に対する勾配が２次テンソルとなることに留意して各モデルとも次のような形に置き換えた．

$$\pi_{ij,2}=\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\right)a_{ij}^{ml} \tag{2-76a}$$

$$a_{ij}^{ml}=-\frac{1}{2\pi}\int_{vol}\frac{\overline{\partial^2 u_m' u_l}}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\frac{dVOL}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{2-76b}$$

ここでa_{ij}^{ml}は４次相関テンソルを示す．この４次相関テンソルに対しては，現在２種のモデル化が行なわれており，その一つが，Hanjalic-Launder (1972)，もう一つが Launder-Reece-Rodi(1975)によるものである．Hanjalic-Launderは４次相関テンソルを次のように表わした．

$$\begin{aligned}a_{ij}^{ml}=&\alpha\delta_{ij}\overline{u_m u_l}+\beta\left(\delta_{ml}\overline{u_i u_j}+\delta_{mj}\overline{u_i u_l}+\delta_{il}\overline{u_m u_j}+\delta_{ij}\overline{u_m u_l}\right)\\&+\{\gamma\delta_{ml}\delta_{ij}+\eta(\delta_{ml}\delta_{ij}+\delta_{mj}\delta_{il})\}k\\&+c_2\left(\overline{u_m u_l}\,\overline{u_l u_j}-\overline{u_m u_j}\,\overline{u_i u_l}-\overline{u_m u_l}\,\overline{u_i u_j}\right)/k\end{aligned} \tag{2-77a}$$

これに対し，ＬＲＲモデルは，次のように定義している．

$$\begin{aligned}a_{ij}^{ml}=&\alpha\delta_{ij}\overline{u_m u_l}+\beta\left(\delta_{ml}\overline{u_i u_j}+\delta_{mj}\overline{u_i u_l}+\delta_{il}\overline{u_m u_j}+\delta_{ij}\overline{u_m u_l}\right)\\&+c_2\delta_{ml}\overline{u_l u_j}+\{\eta\delta_{ml}\delta_{ij}+\upsilon(\delta_{ml}\delta_{ij}+\delta_{mj}\delta_{il})\}k\end{aligned} \tag{2-77b}$$

さらにこの４次相関テンソルは次の制約条件を満足する．

$$a_{ij}^{ml}=a_{ij}^{lm}=a_{ji}^{lm} \tag{2-78a}$$

$$a_{ii}^{ml}=0 \tag{2-78b}$$

$$a_{jj}^{ml}=2\overline{u_m u_l} \tag{2-78c}$$

ＬＲＲモデルは上の制約条件の基に彼らの提示した４次相関テンソルをモデル化したモデルであり，ＮＣＳモデルは Hanjalic-Launderの４次相関テンソルを同様の制約条件の基にモデル化したモデルである．ＧＬモデルはＬＲＲモデルを基本とし，複雑に示された４次相関テンソルに簡略化を行なったモデルと考えられる．

これらに対しＧＥモデルでは，４次相関テンソルに対してはＬＲＲの提示したものを使用しているが，制約条件に対しては，上の制約条件の２番目の条件に対し次の条件を用いてモデル化を行なった．

$$a_{ii}^{ml}\frac{\partial U_l}{\partial x_m}=0 \tag{2-79}$$

以上のように，平均流の影響を含む項$\pi_{ij,2}$のモデル化に際しては，Hanjalic-Launder，ＬＲＲモデルにより示された，いずれかの４次相関テンソルを用い，(2-78)式に示す制約

条件よりモデル化している．

壁面による影響を示す項$\pi_{ij,w}$に対しては，この項に対するモデル化が最近になり行なわれるようになった点からも，各モデラにより各様のモデル化が行なわれている．共通している点は，壁の影響を示す関数ｆを導入し，壁面近傍で１，壁から離れるに従い徐々に減少する値をとるよう関数ｆを定義している点である．ＬＲＲモデルの場合，周囲壁面までの距離を積分し平均したものを壁面からの代表長さとし関数ｆを定義しているのに対し，ＧＬモデルでは周囲壁面からの垂直距離を代表長さとして関数ｆの定義を行なっている．また関数ｆの減少する勾配等については各モデルとも異なり今後検討されるべき点であると思われる．

各モデル定数の決定に際しても各モデルとも異なった手法によりその定数決定を行なっている．ＬＲＲモデル，ＧＬモデルは，ほぼ同様の考え方に立ってモデル定数を決めている．すなわち，得られたレイノルズ応力方程式モデルを，単純せん断流れ，壁面近傍流れに適用し，各乱流応力を導出し，この式と実験により得られた乱流応力値より定数を決定している．その際，未知数である定数値の個数と既知である実験値との個数は必ずしも一致することなく，従って実験値を全体的に満足するよう試行錯誤的に定数を決定することになる．ＮＣＳモデルの場合は，局所平衡流れにおける実験値より定数決定を行なっており，これは Launder-Ying(1972)のモデル定数と一致したものを使用している．ＧＥモデルにおいては，正方形管路の発達乱流に関する対角線上，左右対称線上の各乱流応力成分値を実験的に求め，モデル定数の決定を行なっている点で他のモデルと異なる．

以上の点を考慮して，本研究では次のようなモデルを提唱し検討する．$\pi_{ij,1}$に対しては本研究においてもRotta によるモデル化を用いる．

$$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}=-c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j}-\frac{2}{3}k\delta_{ij}\right) \tag{2-80}$$

次に平均流による影響を表す項$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$のモデル化に際しては，４次相関テンソルとしてＬＲＲモデルに於いて示されたのものを用い，その制約条件としては，ＧＥモデルに示された(2-79)式を用いて書き改めるものとする．すなわち制約条件としては次の式を適用する．

$$a_{ij}^{mi}=a_{ij}^{im}=a_{ji}^{im} \tag{2-81a}$$

$$a_{li}^{mi}\frac{\partial U_l}{\partial x_m}=0 \tag{2-81b}$$

$$a_{jj}^{mi}=2\overline{u_m u_i} \tag{2-81c}$$

これは(2-76a)式に示すように，平均流の影響を含む項$\pi_{ij,2}$は平均速度勾配の積として表現されるため，$\pi_{ij,2}$と４次相関テンソルの結合を強くする意味より(2-79)式を制約条件としてモデル化を行なった．これよりＬＲＲモデル化で示した(2-35a)式は次のように書き改められる．

$$a_{li}^{mi}\frac{\partial U_l}{\partial x_m}=(2\beta+\eta+4\nu)\,k\,\delta_{ml}\frac{\partial U_l}{\partial x_m}+(5\beta+\alpha+c_2)\,\overline{u_m u_l}\frac{\partial U_l}{\partial x_m} \tag{2-82}$$

上式中右辺第１項目は，m=1の時，連続の式を満足することとなり常に0 となる．従って，ＬＲＲモデルに示される(2-35c)式の最初に示されたような条件は成立しない．またＬＲＲ

モデルにおいて(2-33c)式の制約条件より，$2c_2+3\eta+2\upsilon=0$ の条件を付加しているが，(2-35b)式を見て解るように$m\neq i$ であることより常に$\delta_{mi}=0$ が成立し，$3\alpha+4\beta=2$ だけが満足する条件となる．従って上式に示す制約条件においては次の関係式が導かれる．

$$5\beta+\alpha+c_2=0 \tag{2-83a}$$

$$3\alpha+4\beta=2 \tag{2-83b}$$

ここで，新たな定数$\zeta=\eta+\upsilon$を導入すると，平均流の影響を含む項$\pi_{ij,2}$の最終形は次のように示される．

$$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}=-(\alpha+\beta)\left(P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}P_k\right)+\zeta k\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$
$$+(4\beta+\alpha)\left(D_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}P_k\right) \tag{2-84a}$$

$$\alpha=\frac{1}{11}(4c_2+10)\ ,\ \beta=-\frac{1}{11}(2+3c_2) \tag{2-84b}$$

壁面による影響に対しては，モデル式中に表われる定数，c_1，c_2，ζが壁からの距離の関数となるよう次のように設定する．

$$c_1=c_1^{\cdot}+c_1^{\prime}f\left(\frac{L}{x_w}\right) \tag{2-85a}$$

$$c_2=c_2^{\cdot}+c_2^{\prime}f\left(\frac{L}{x_w}\right) \tag{2-85b}$$

$$\zeta=\zeta^{\cdot}+\zeta^{\prime}f\left(\frac{L}{x_w}\right) \tag{2-85c}$$

$f(L/x_w)$は，壁の影響を示す関数であり壁近傍で 1，壁から離れるにつれ減少する値をとり，次のように定義した．x_nは壁面までの垂直距離である．

$$f\left(\frac{L}{x_w}\right)=\frac{c\mu^{3/4}\ k^{3/2}}{\kappa\ \varepsilon}\frac{1}{x_w} \qquad \frac{1}{x_w}=\frac{\Sigma\,(1/x_n)^2{}_i}{\Sigma\,(1/x_n)_i} \tag{2-85d}$$

図2-3は壁面による影響を示した図であるが（a）は単一壁に対しhだけ離れた点の壁面による影響を示すと次のように示される．Fは，壁面により最大となる圧力変動値とする．

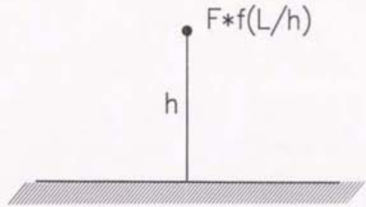
$$Ff\left(\frac{L}{h}\right)=F\frac{c\mu^{3/4}\ k^{3/2}}{\kappa\ \varepsilon}\frac{1}{h} \tag{2-86a}$$

（b）は，平行平板間の場合であるが，各々の壁よりh_1，h_2 だけ離れた点の影響を，上の単一壁の理論をそのまま適用すると次のように示される．

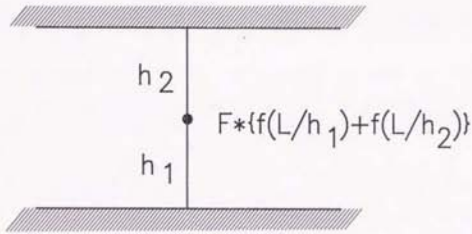
$$Ff\left(\frac{L}{h_1}\right)+Ff\left(\frac{L}{h_2}\right)=F\frac{c\mu^{3/4}\ k^{3/2}}{\kappa\ \varepsilon}\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right) \tag{2-86b}$$

LRRモデル，GLモデルはこの種の表現を用いているが，この表現では，いずれの位置においても最大圧力変動は変わらないという矛盾を生ずる．そこで（c）に示すように最大圧力変動は，各々の壁面の影響を受けるものとしてF_1，F_2 を定義し壁面による影響を次のように定める．

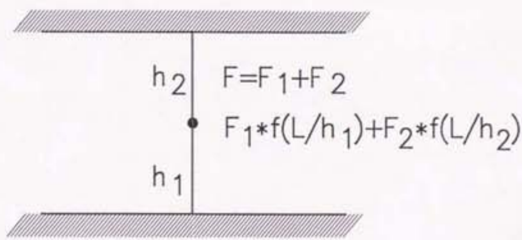
$$F_1f\left(\frac{L}{h_1}\right)+F_2f\left(\frac{L}{h_2}\right)=F\frac{c\mu^{3/4}\ k^{3/2}}{\kappa\ \varepsilon}\left(\frac{h_2}{h_1+h_2}\frac{1}{h_1}+\frac{h_1}{h_1+h_2}\frac{1}{h_2}\right)$$



(a)　単一壁の場合



(b)　平行平板壁の場合



(c)　本解析モデルの場合

図2-3　壁面による影響

表2-12　提唱モデルによる圧力・歪相関項のモデル化

$\pi_{ij,1}+\pi_{ji,1}$	$-c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j}-\frac{2}{3}k\delta_{ij}\right)$
$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$	$-\frac{c_2+8}{11}\left(P_{ij}-\frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right)+\zeta k\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$ $-\frac{8c_2-2}{11}\left(D_{ij}-\frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right)$
$[\pi_{ij}+\pi_{ji}]_w$	$c_1=c_1^*+c_1' f\left(\frac{L}{x_w}\right)$, $c_2=c_2^*+c_2' f\left(\frac{L}{x_w}\right)$, $\zeta=\zeta^*+\zeta' f\left(\frac{L}{x_w}\right)$

表2-13　提唱モデルの定数

c_1^*	c_2^*	ζ^*	c_1'	c_2'	ζ'
1.4	0.44	-0.16	-0.35	0.12	-0.1

$$= F \frac{c_\mu^{3/4} \; k^{3/2}}{\kappa \varepsilon} \left\{ \frac{(1/h_1)^2 + (1/h_2)^2}{1/h_1 \; + \; 1/h_2} \right\} \qquad (2\text{-}86c)$$

$$F_1 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} F \qquad\qquad F_2 = \frac{h_1}{h_1 + h_2} F \qquad (2\text{-}86d)$$

この関係式を用いて本解析においては検討を行なった．

散逸項に対しては流れが高レイノルズ数流れであり，局所等方性を仮定して他のモデル同様次のようにモデル化を行なう．

$$2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \qquad (2\text{-}87)$$

次にモデル定数を決定することが必要となるが，モデル化されたレイノルズ応力方程式をさきに示した仮定をもとに単純せん断流れに適用すると次の垂直応力，及びせん断応力に関する関係式を得る．

$$\frac{\overline{u_1^2}}{k} = \frac{22(c_1 - 1) + (30 + 12 c_2)\lambda}{33(\lambda - 1 + c_1)} \qquad (2\text{-}88a)$$

$$\frac{\overline{u_2^2}}{k} = \frac{22(c_1 - 1) + (24 - 30 c_2)\lambda}{33(\lambda - 1 + c_1)} \qquad (2\text{-}88b)$$

$$\frac{\overline{u_3^2}}{k} = \frac{22(c_1 - 1) + (12 + 18 c_2)\lambda}{33(\lambda - 1 + c_1)} \qquad (2\text{-}88c)$$

$$-\frac{\overline{u_1 u_2}}{k} = \left[\frac{\left\{ \frac{\overline{u_2^2}}{k} \left(1 - \frac{c_2 + 8}{11}\right) + \zeta - \frac{\overline{u_1^2}}{k} \frac{8 c_2 - 2}{11} \right\} \lambda}{(\lambda - 1 + c_1)} \right]^{1/2} \qquad (2\text{-}88d)$$

上式中λは，$\lambda = P_k / \varepsilon$と定義され局所平衡状態の程度を示すパラメータである．c_1，c_2，ζは(2-85)式に示す通りである．$f = 0$とし壁面の影響がないものとし，Champagne-Harris-Corrsin(1970)，およびHarris-Graham-Corrsin(1977)の実験値を用いて定数c_1^*，c_2^*，ζ^*を決める．その際，各定数は $\lambda = 1.0$ ，および1.55の実験値に近くなるよう試行錯誤的に決定する．次に$f = 1$ とし，壁面近傍における各乱流応力実験値を参照し残りの定数，c_1'，c_2'，ζ'を決定する．

以上，圧力・歪相関項に対するモデル化，および定数決定法について説明したが，各々について整理をしたものを表2-12，表2-13に示す．

2．3．3　単純せん断流れ場におけるモデル比較検討

各モデル，および本提唱モデルについてのモデル構築および定数決定手法について検討してきたが，これらのモデルの多くは単純せん断流れに対する実験データより定数決定をおこなっている．そこで，単純せん断流れに各モデルを適用しレイノルズ応力値等について検討してみる．この時乱流特性量を予測する上で重要な要素で(2-13)式に示す渦動粘性係数中の定数c_μ，並びに垂直応力値，せん断応力値に着目し，P_k / εに対するこれらの値

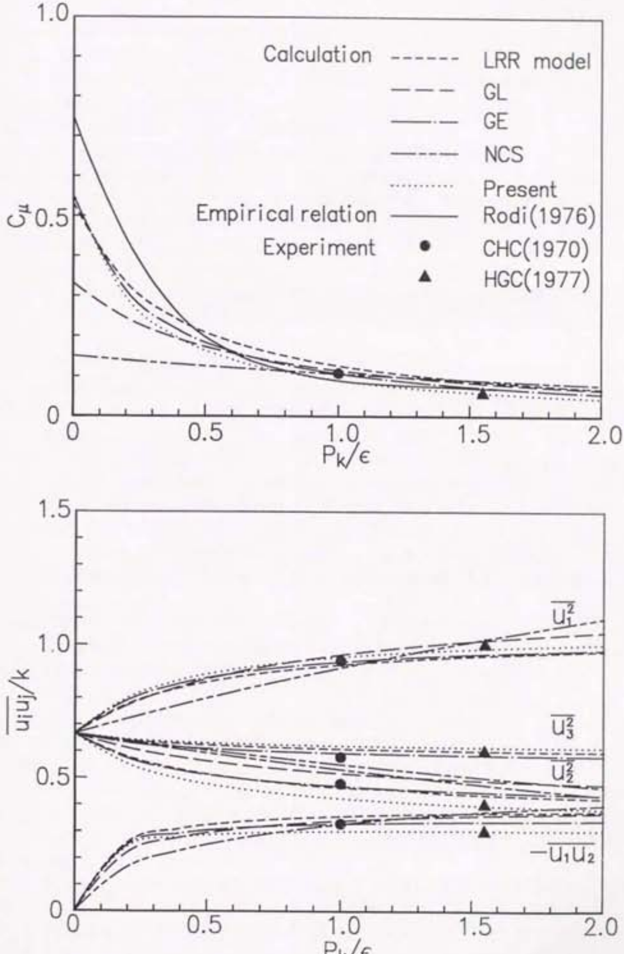


図2-4　単純せん断流れに於ける各モデル比較

の変化を，各モデルにて比較することを試みた．Rodi(1976)は，c_μとP_k/εとの関係を実験式とし提示しており，またChampagne-Harris-Corrsin(1970)，Harris-Graham-Corrsin(1997)の実験よりc_μ，及び垂直応力，せん断応力値を算出し比較検討を行なった．ＣＨＣ，ＨＧＣの実験よりc_μを求める際には，乱流エネルギー，乱流散逸，速度勾配，せん断応力値を実験データより読み取ることにより算出した．

図2-4にその比較検討結果を示す．上段の図は，c_μのλに対する変化を，下段の図には垂直応力，せん断応力値の変化を示してある．c_μの変化に注目するとＧＥモデル，提唱モデルはモデル構造が似ているため同じような変化を示すが，局所平衡状態が崩れる$P_k/\varepsilon=1.55$においては提唱モデルの方が実験値を良好に捕捉している．P_k/ε が0.5より小さい領域においてＧＬ，ＮＣＳモデルはRodiにより提示された実験式より大きく離れているのが特徴的である．この内ＮＣＳモデルは，最もかけ離れた結果となっているがこれは定数系に起因するものと思われる．この点ＬＲＲモデルはこの領域においてはRodiの実験式に最も近い値を示しているが0.5以上の領域においては，ＣＨＣ，ＨＧＣの実験値からも離れる結果となっている．このc_μ値はよく使われる$k-\varepsilon$二方程式モデルにおいては，P_k/εの値にかかわらず一定値0.09を取ることになる．

一方，垂直応力値，せん断応力値についてみると，特徴的なこととしてＧＬモデルの場合$\overline{u_3^2}=\overline{u_2^2}$となり単純せん断流れにおける亜流方向の非等方性は，表現できないことが解る．この事は，(2-62b),(2-62c)式より理解される．これらの二式より$\overline{u_3^2}=\overline{u_2^2}$であり亜流方向の非方性は表現されない．しかし，壁面近傍に適用した(2-63b),(2-63c)においては，$\overline{u_3^2}\neq\overline{u_2^2}$であり，壁面による影響を含む項により非等方性が表現されている．従ってＧＬモデルの場合，亜流方向の非等方性は壁面による影響の項により誘起されることを示している．この点に関し，Leslie(1980)も同様な見解を示している．ＮＣＳモデルに於いては，亜流方向の非等方性は表現されるものの，ＬＲＲモデル，ＧＥモデル，本提唱モデルほどは非等方性を表現していない．ＮＣＳモデルの場合は，ＧＬモデルと異なりD_{ij}項を含むことにより非等方性を表現できてわいるが，定数決定が不適切であったためこのような結果になったものと考えられる．また，いずれのモデルに於いても，$\overline{u_1^2}>\overline{u_3^2}>\overline{u_2^2}$となる単純せん断流れに於ける特徴を捕らえているが，局所平衡状態が崩れるＨＧＣの実験結果を、比較的良好に予測しているのは本提唱モデルであると言える．

２．３．４　完全発達乱流場におけるモデル比較検討

第二種二次流れは，流れの非等方性に起因する流れとして特徴的な流れである．この種の研究については第１章に示した表1-1，及び表1-2に整理した如くGessner-Jones(1965)や，Brundrett-Baines(1964)により発達流について，Melling-Whitelaw(1976)により助走区間流れについて実験的解析が行なわれている．一方数値解析においては Launder-Ying に始まり，各モデラーにより多くの解析が行なわれているが，多くの場合において対流項，拡散項を省略して計算している．

本研究では，この点を考慮しかつ各乱流応力をより精密に扱うべく，対流項，拡散項に対しては Rodi(1976) による近似を用い代数応力方程式をモデルとして解析を進める．圧力・歪相関項に対しては，先に示したモデルを検討するものとし，第二種二次流れを対象とし各モデルの差異分析を行なう．特徴を明確にするため、他の実験や計算との比較が可

能な十分に発達した正方形管内流を扱う．実験結果としてはBrundrett-Baines(1964)のものを取り上げ各モデルの計算結果との比較を行なう．数値解析はＬＲＲモデル，ＧＬモデル，ＧＥモデル，および提唱モデルに対して行ない．ＮＣＳモデルに対しては彼らの計算結果との比較を行なう．

基礎方程式の導入に際して流れは定常非圧縮であるとし，また発達流であることから，圧力以外のx_1方向の勾配を零とする．時間平均を取った一般従属変数をϕとし，一般保存方程式で以下のように示す．

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(U_j\phi)=D_{iff}\phi+S\phi \tag{2-89}$$

この時各方程式でのϕ，$D_{iff}\phi$，$S\phi$は，表2-14のように示される．k，εは乱流特性量であり各々乱流エネルギーおよび乱流散逸を示す．また表中のP_kは乱流エネルギーの生成率であり次のように示される．

$$P_k=-\overline{u_iu_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \tag{2-90}$$

表2-15には乱流エネルギー方程式，乱流散逸方程式で使用した定数系を示す．これらの方程式の他に，レイノルズ応力方程式が必要であり，先に示したようなモデル式を用いて数値計算を行う．

2．3．4．1　解析手法

数値解析手法としては，Patankar-Spalding(1972) による有限体積法に依った．この手法はコントロール・ボリューム内で方程式を積分しかつ離散化することにより解くべき方程式を得ようとする手法で，簡単化のため二次元輸送方程式について考えると，方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho U_1\phi)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho U_2\phi)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Gamma\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)+S\phi \tag{2-91a}$$

これを図2-5に示すコントロール・ボリューム内で積分すると

$$\int_{vol}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho U_1\phi)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho U_2\phi)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Gamma\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)\right]d\,vol=\int_{vol}S\phi\,d\,vol \tag{2-91b}$$

となる．Gaussの発散定理を用いて左辺の体積積分を面積積分に変換すると次のように示される．

$$F_e-F_w+F_n-F_s=\int_{vol}S\phi\,d\,vol \tag{2-92a}$$

添字のe，w，n，sは図2-5の各点に対応している．F_e，F_nについて示すと次のようになる．

$$F_e=\int_s^n\left[\rho U_1\phi-\Gamma\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right]_e dx_2$$
$$\simeq(\rho U_1)_e\Delta x_{2,ns}\phi_e-\frac{\Gamma\phi_{,e}}{\Delta x_{1,EP}}\Delta x_{2,ns}(\phi_E-\phi_P) \tag{2-92b}$$

表2-14　支配方程式の各項

Equation	ϕ	$\mathrm{Diff}\,\phi$	$S\phi$
Density	1	0	0
Momentum	U_i	$\nu \dfrac{\partial^2 U_i}{\partial x_j{}^2}$	$-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i} - \dfrac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_j}$
Turbulent Energy	k	$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\{(\nu \delta_{ik} + c_s \dfrac{k}{\varepsilon}\overline{u_i u_j})\dfrac{\partial k}{\partial x_j}\}$	$P_k - \varepsilon$
Turbulent Dissipation	ε	$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\{(\nu \delta_{ik} + c_\varepsilon \dfrac{k}{\varepsilon}\overline{u_i u_j})\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\}$	$\dfrac{\varepsilon}{k}(c_{1\varepsilon} P_k - c_{2\varepsilon}\varepsilon)$
Reynolds Stress	$\dfrac{\overline{u_i u_j}}{k}(P_k - \varepsilon)$		$P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \pi_{ij,1} + \pi_{ij,2} + \pi_{ij,w}$

表2-15　乱流エネルギー、乱流散逸方程式の定数

c_s	c_ε	$c_{1\varepsilon}$	$c_{2\varepsilon}$
0.22	0.18	1.44	1.92

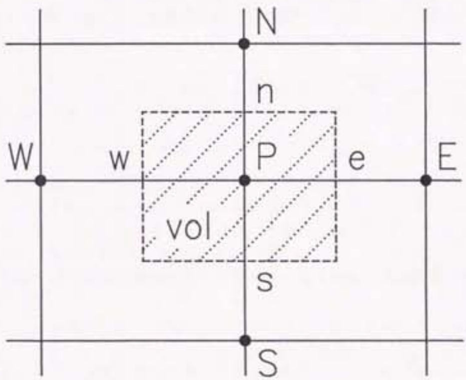


図2-5　有限体積法によるコントロール・ボリュームの定義

$$F_n = \int_w^e \left[\rho U_2 \phi - \Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right]_n d x_1$$

$$\simeq (\rho U_2)_n \Delta x_{1,ew} \phi_n - \frac{\Gamma \phi_{,n}}{\Delta x_{2,NP}} \Delta x_{1,ew} (\phi_N - \phi_P) \qquad (2\text{-}92c)$$

ここで，eならびにn等の点上には，格子点にはないため，例えば ϕ_1 などは，ϕ_E，ϕ_P などの点より近似することが必要となるが，これが差分化において最も問題となる．これは非線形項の差分化として古くより議論されてきた問題であるが，本解析においては対流項の速度成分に対しては，三次精度の風上差分であるＱＵＩＣＫ(Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics)を，乱流特性量のk，εに対してはべき乗法（ＰＬＤＳ：Power Law Differential Schem）を用いた．ＱＵＩＣＫはTaylor展開より求められるスキームであるのに対し，べき乗法は拡散項の厳密解がべき乗の形となることより，セルPeclet数の値により差分式をべき乗で表わしたスキームである．従ってＱＵＩＣＫは数学的根拠より導出されたものに対し，べき乗法は物理的根拠より導出されたスキームと解釈できる．

これらの差分スキームを用いて各境界面での諸量を格子点のもので近似すれば，次のような各格子点でのϕに関する代数式に書き改めることができる．

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + \int_{vol} S_\phi \, d\,vol \qquad (2\text{-}92d)$$

この操作を計算領域の各格子点について行なうことにより，ϕに関する連立一次元方程式が得られることとなる．これを Gauss の消去法等に代表される連立一次元方程式の数値解法を用いて解くことにより解が得られる．本解析においては，ＴＤＭＡ（Tri Diagonal Matrix Algorithm）法を用いて計算を行なった．

圧力の解法に対しては，連続の式より圧力補正式を導き，連続の式を満足するよう速度，圧力を補正するＳＩＭＰＬＥ法（Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation）を用いた．この解法についてはPatankar(1980)により著わされた著書の中に詳述されている．

また数値計算の収束性，安定性の上で特に注意すべき点としてレイノルズ応力の運動方程式への取り込み方がある．単にレイノルズ応力を運動方程式に取り込むと，計算の安定性が悪化するという問題が生じる．これを避けるため，レイノルズ応力を変形し，一部を拡散項に取り込む手法を用いる．これはレイノルズ応力を疑似的に拡散項中の粘性係数として扱うため Pseudo-Viscosity とも呼ばれている．この手法は以下のようにして行なわれる．運動方程式はテンソル表示にて

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \qquad (2\text{-}93a)$$

となる．一方レイノルズ応力$\overline{u_i u_j}$については次の形にて表わす．

$$a \overline{u_i u_j} + b \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = c \qquad (2\text{-}93b)$$

(2-93a)式と(2-93b)式より$\overline{u_i u_j}$を消去すれば，レイノルズ応力を拡散項中の粘性係数の一部として次のような形で表現できる．

$$\frac{DU_i}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(\nu+\frac{b}{a})\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{c}{a}\right\} \tag{2-93c}$$

物理的解釈からも（b／a）は正の符合を取るため，計算に際しても（b／a）は常に正となるよう工夫することが必要である．

境界条件の設定に関し特に問題となるのは，乱流エネルギーk，乱流散逸ε に対する境界条件であるが，本解析で扱ったk－ε方程式は高レイノルズ数に対するモデルであり，壁面近傍の低レイノルズ数流れには適用できない．そこで計算第１点目にて局所平衡を仮定し，かつ壁法則が成り立つものとすると次の関係式を得る．

$$k=\frac{U_\tau^2}{\sqrt{c\mu}} \qquad \varepsilon=\frac{U_\tau^3}{\kappa y} \qquad U_\tau=\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} \tag{2-94}$$

U_τは摩擦速度，τ_wは壁面せん断応力を示す．また用いた壁法則は平板に対するものを用い次に示す通りである．

$$\frac{U}{U_\tau}=\frac{1}{\kappa}\ \ln\frac{U_\tau y}{\nu}+E, \qquad \kappa=0.4 \qquad E=5.5 \tag{2-95}$$

計算対象は，十分発達した直管内流れであるので系の対称性を考慮して1／4断面について解析を行なった．使用した座標系を図2-6に示す．また計算格子としては Staggered格子を用い，スカラー量の物理量は格子点上に，ベクトル量は境界面上に設置した．各変数の配置を図2-7に示す．計算格子数については，Nakayama-Chow-Sharma(1983)は格子配列9 ×9 および 15 ×15を用いて Re=83,000の十分発達した流れにおける主流速度および乱流エネルギーの等値線図，ならびに二次流れベクトル図の比較を行ない，格子配列間に顕著な差が認められないことを報告している．また Launder-Ying(1973)は格子配列11×11および 15 ×15にて計算を行ない，両者における摩擦係数の相違が 1%程度と大きな差が認められないことより，多くの計算を格子配列11×11で行なっている．以上の点を考慮して本計算においては，14×14の格子点を用いて計算を行なった．

計算手順は，最初に応力方程式を解き，次に速度成分を算出した後に圧力補正式を解いて速度および圧力を補正する．その後，乱流特性量k，εを解いて１回の計算を終了する．これを収束条件を満足するまで繰返す．収束条件としては，乱流エネルギーk方程式をサンプルとして方程式の誤差が，k方程式のSource項の10^{-6}以下になることを目安とした．

２．３．４．２　計算結果と差異分析

計算パラメータは，Brundrett-Baines(1964)の実験結果，中山らの計算結果と比較するため Re=83,000とした．本解析においては，ＬＲＲモデル，ＧＬモデル，ＧＥモデル，および本提唱モデルの４種類について計算を行なった．

ここで，第二種二次流れの発生機構について考えてみる．その発生機構について種々議論されているが，ここでは渦度輸送方程式より考察する．十分発達した流れを対象とし，主流方向であるx_1方向に関する勾配を零とすれば，渦度輸送方程式は次式に示すように乱流応力項を含む形で整理される．

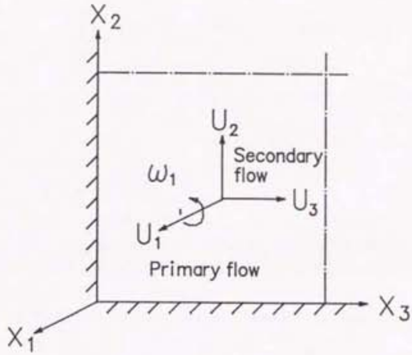


図2-6　座標系

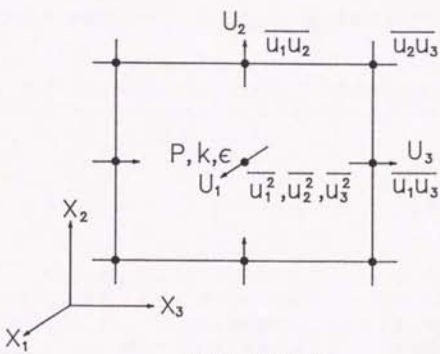


図2-7　変数の配置

$$\underbrace{U_2\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3}}_{A_1}=\underbrace{\nu\left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_3^2}\right)}_{A_2}$$

$$+\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\overline{u_3^2}-\overline{u_2^2}\right)}_{A_3}\underbrace{-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\overline{u_2 u_3}}_{A_4} \qquad (2\text{-}96a)$$

ここで

$$\omega_1=\frac{\partial U_2}{\partial x_3}-\frac{\partial U_3}{\partial x_2} \qquad (2\text{-}96b)$$

Gessner-Jones(1965)の実験結果より考えると，第二種二次流れは以下のような機構により発生すると言える．上式において乱流応力項A_3およびA_4が主要項であり，粘性項A_2は壁のごく近く，特に角の部分以外では無視できる．また主要な部分でA_3とA_4は符合が逆であることから，この項の差が移流項A_1とほぼ釣合うことにより平衡している．すなわち，第二種二次流れは，渦度輸送方程式中の乱流応力項A_3およびA_4の差によって生じることとなる．逆に第二種二次流れが発生しない条件はω_1=0として

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\overline{u_3^2}-\overline{u_2^2}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\overline{u_2 u_3}=0 \qquad (2\text{-}96c)$$

となるが，非円管路で上式が満足されることは期待できない．このことより多くの乱流場に程度の差はあれ類似の二次流れは存在する．

以上のように，乱流成分のうち垂直応力の差である（$\overline{u_2^2}-\overline{u_2^2}$）ならびにせん断応力$\overline{u_2 u_3}$がその発生要因に大きく寄与していることより，二次流れも含めてこれらのパラメータを主に実験結果と比較検討した．

図2-8から図2-12に計算結果を示す．各々上段に主流等値線図ならびに第二種二次流れベクトル線図を，下段には垂直応力の差，およびせん断応力分布を示す．各図において左側の図は，Brundrett-Bainesの実験結果の測定値を示しているが，主流速度の等値線図に関しては，Leutheusser(1963)の測定した結果である．各々の値については，摩擦速度U_τにより無次元化されている．ここで摩擦速度U_τは管壁周囲にわたり平均したもので，主流方向圧力勾配より次式に基づいて定めている．

$$-\frac{\partial P}{\partial x_1}\simeq\frac{4\tau_{av}}{D_h} \qquad (2\text{-}97)$$

ここでτ_{av}は，管壁周囲について平均した壁面せん断応力であり，摩擦速度はその定義より次のように示される．

$$U_\tau=\left\{\left(-\frac{\partial P}{\partial x_1}D_h\right)\frac{1}{4\rho}\right\}^{1/2} \qquad (2\text{-}98)$$

図2-8はＬＲＲモデルの結果であるが，第二種二次流れベクトルならびに主流速度の等値線図は比較的良好に一致している．主流速度等値線図の二次流れによる湾曲化も比較的良好にとらえている．しかしその第二種二次流れの発生要因となる垂直応力の差，せん断応力分布について見ると実験結果とは大きく異なる．垂直応力の差の分布に対しては，管中心部付近に負の領域が現われ実際の流れと異なる．同様の傾向がせん断応力分布についても

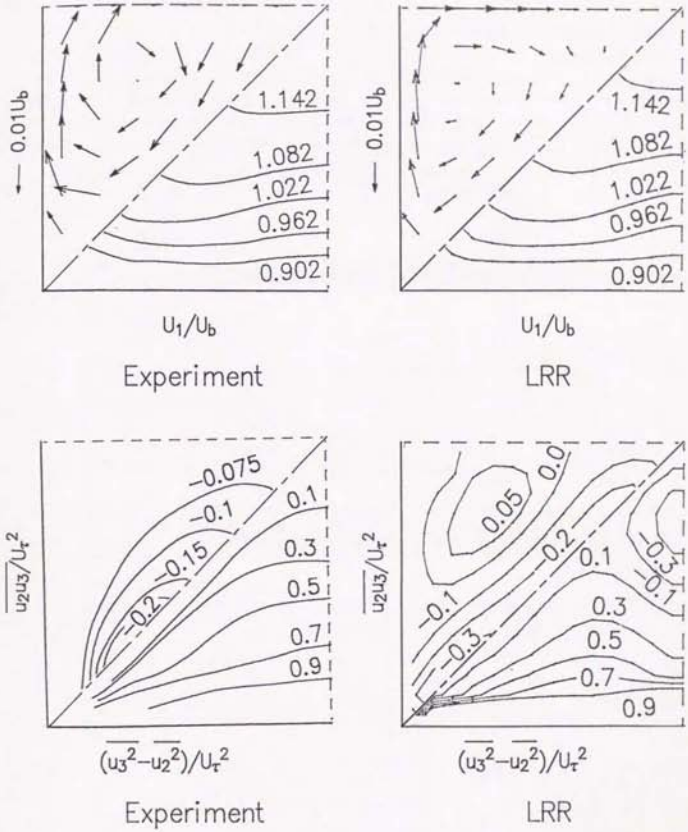


図2-8　ＬＲＲモデルによる解析結果

認められ，$\overline{u_2 u_3}$分布の正の領域が大きく張り出した形となり実験結果と大きく異なっている．図2-9はＧＬモデルによる解析結果であるが，特徴的な現象として第二種二次流れベクトルが実験結果より1 order程度低い値を示していることである．一方乱流応力分布について見ると，せん断応力値も実験値のそれより1 order程度低い値を示しているのに対し，垂直応力の差は比較的実験結果に近い値となっている．このようにＧＬモデルが，他のモデルと比較して二次ベクトル値が低くなる原因についてＬＲＲモデルと対比しながら考えてみる．表2-16，および表2-17は，ＬＲＲモデル，ＧＬモデルの平均流による影響$\pi_{ij,2}$および壁面による影響$\pi_{ij,w}$の項を書き下して示したものである．これらの表を参考に，（$\overline{u_2^2}-\overline{u_3^2}$）および，$\overline{u_2 u_3}$を求めると，ＧＬモデルに対しては次のように示される．

$$\overline{u_2 u_3}=\{1-c_2+\frac{3}{2}c_2' c_2(f_2+f_3)\}\left(-\overline{u_2^2}\frac{\partial U_3}{\partial x_2}-\overline{u_3^2}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)$$
$$\cdot\{P_k-\varepsilon+c_1\varepsilon+\frac{3}{2}c_1'\varepsilon(f_2+f_3)\}^{-1}k \qquad (2\text{-}99a)$$

$$\overline{u_2^2}-\overline{u_3^2}=\{(P_{22}-P_{33})(1-c_2)-3c_1'\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_2^2}f_2-\overline{u_3^2}f_3)$$
$$+3c_2c_2'(P_{22}f_2-P_{33}f_2)-2c_2c_2'P_k(f_2-f_3)\}\left(\frac{P_k-\varepsilon}{k}+c_1\frac{\varepsilon}{k}\right)^{-1} \qquad (2\text{-}99b)$$

ここで$f_i=f(L/x_i)$である．またＬＲＲモデルに対しても同様に求めると次のように示される．

$$\overline{u_2 u_3}=\{(1-\frac{c_2+8}{11}+0.015f)P_{23}+\frac{-30c_2+2}{55}k\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2}+\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)$$
$$+\left(\frac{-8c_2+2}{11}-0.015f\right)D_{23}\}(P_k-\varepsilon+c_1\varepsilon-0.125\varepsilon f)^{-1}k \qquad (2\text{-}100a)$$

$$\overline{u_2^2}-\overline{u_3^2}=\{(P_{22}-P_{33})(1-\frac{c_2+8}{11}+0.015f)+\frac{2(-30c_2+2)}{55}k\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3}-\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)$$
$$+(D_{33}-D_{22})\left(\frac{-8c_2+2}{11}-0.015f\right)\}\left(\frac{P_k-\varepsilon}{k}+c_1\frac{\varepsilon}{k}-0.125\frac{\varepsilon}{k}f\right)^{-1} \qquad (2\text{-}100b)$$

ここで

$$f=\frac{k^{3/2}}{\varepsilon x_w} \qquad (2\text{-}101a)$$

$$D_{33}-D_{22}=-2\overline{u_1 u_3}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}-2\overline{u_3 u_2}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}-2\overline{u_3^2}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}$$
$$+2\overline{u_1 u_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+2\overline{u_3 u_2}\frac{\partial U_3}{\partial x_2}+2\overline{u_2^2}\frac{\partial U_2}{\partial x_2} \qquad (2\text{-}101b)$$

$$D_{23}=-\overline{u_2 u_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}-\overline{u_2^2}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}-\overline{u_2 u_3}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}$$
$$-\overline{u_3 u_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}-\overline{u_3 u_2}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}-\overline{u_3^2}\frac{\partial U_3}{\partial x_2} \qquad (2\text{-}101c)$$

(2-99)式から(2-101)式を見て解るようにＧＬモデルの場合，各乱流応力成分値は，亜流速度U_2，U_3の速度勾配と壁面による影響f_1，f_2とに構成されているのに対して，ＬＲＲ

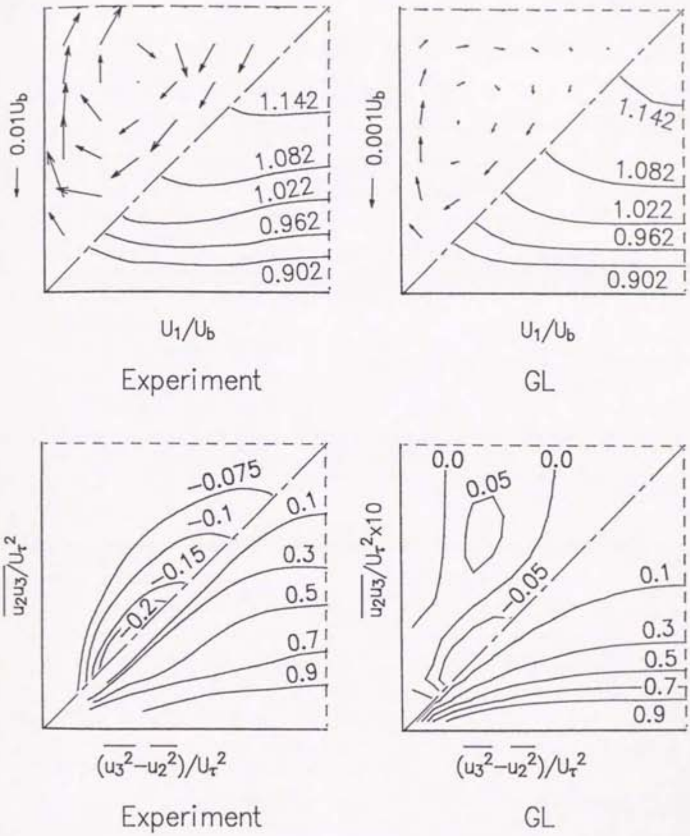


図2-9　ＧＬモデルによる解析結果

表2-16 LRRモデルによる$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$、$[\pi_{ij}+\pi_{ji}]_w$

$\overline{u_i u_j}$	$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$
$\overline{u_1^2}$	$-\frac{c_2+8}{11}(P_{11}-\frac{2}{3}P_k)-\frac{8c_2-2}{11}(-\frac{2}{3}P_k)$
$\overline{u_2^2}$	$-\frac{c_2+8}{11}(P_{22}-\frac{2}{3}P_k)-\frac{30c_2-2}{55}k(2\frac{\partial U_2}{\partial x_2})-\frac{8c_2-2}{11}(D_{22}-\frac{2}{3}P_k)$
$\overline{u_3^2}$	$-\frac{c_2+8}{11}(P_{33}-\frac{2}{3}P_k)-\frac{30c_2-2}{55}k(2\frac{\partial U_3}{\partial x_3})-\frac{8c_2-2}{11}(D_{33}-\frac{2}{3}P_k)$
$\overline{u_1 u_2}$	$-\frac{c_2+8}{11}P_{12}-\frac{30c_2-2}{55}k\frac{\partial U_1}{\partial x_2}-\frac{8c_2-2}{11}D_{12}$
$\overline{u_1 u_3}$	$-\frac{c_2+8}{11}P_{13}-\frac{30c_2-2}{55}k\frac{\partial U_1}{\partial x_3}-\frac{8c_2-2}{11}D_{13}$
$\overline{u_2 u_3}$	$-\frac{c_2+8}{11}P_{23}-\frac{30c_2-2}{55}k(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}+\frac{\partial U_3}{\partial x_2})-\frac{8c_2-2}{11}D_{23}$

$\overline{u_i u_j}$	$[\pi_{ij}+\pi_{ji}]_w$
$\overline{u_1^2}$	$[0.125\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_1^2}-\frac{2}{3}k)+0.015P_{11}]\frac{k^{3/2}}{\varepsilon x_w}$
$\overline{u_2^2}$	$[0.125\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_2^2}-\frac{2}{3}k)+0.015(P_{22}-D_{22})]\frac{k^{3/2}}{\varepsilon x_w}$
$\overline{u_3^2}$	$[0.125\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_3^2}-\frac{2}{3}k)+0.015(P_{33}-D_{33})]\frac{k^{3/2}}{\varepsilon x_w}$
$\overline{u_1 u_2}$	$[0.125\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_1 u_2}+0.015(P_{12}-D_{12})]\frac{k^{3/2}}{\varepsilon x_w}$
$\overline{u_1 u_3}$	$[0.125\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_1 u_3}+0.015(P_{13}-D_{13})]\frac{k^{3/2}}{\varepsilon x_w}$
$\overline{u_2 u_3}$	$[0.125\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_2 u_3}+0.015(P_{23}-D_{23})]\frac{k^{3/2}}{\varepsilon x_w}$

表2-17　ＧＬモデルによる$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$、$[\pi_{ij}+\pi_{ji}]_w$

$\overline{u_i u_j}$	$\pi_{ij,2}+\pi_{ji,2}$	$[\pi_{ij}+\pi_{ji}]_w$
$\overline{u_1^2}$	$-c_2\,(P_{11}-\frac{2}{3}P_k)$	$[c_1'\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_2^2}+c_2'\,(\pi_{22,2}+\pi_{22,2})\,]\,f(\frac{L}{x_2})$ $+\,[c_1'\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_3^2}+c_2'\,(\pi_{33,2}+\pi_{33,2})\,]\,f(\frac{L}{x_3})$
$\overline{u_2^2}$	$-c_2\,(P_{22}-\frac{2}{3}P_k)$	$[c_1'\frac{\varepsilon}{k}(-2\overline{u_2^2})+c_2'\,\{-2\,(\pi_{22,2}+\pi_{22,2})\}\,]\,f(\frac{L}{x_2})$ $+\,[c_1'\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_3^2}+c_2'\,(\pi_{33,2}+\pi_{33,2})\,]\,f(\frac{L}{x_3})$
$\overline{u_3^2}$	$-c_2\,(P_{33}-\frac{2}{3}P_k)$	$[c_1'\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_2^2}+c_2'\,(\pi_{22,2}+\pi_{22,2})\,]\,f(\frac{L}{x_2})+$ $[c_1'\frac{\varepsilon}{k}(-2\overline{u_3^2})+c_2'\,\{-2\,(\pi_{33,2}+\pi_{33,2})\}\,]\,f(\frac{L}{x_3})$
$\overline{u_1 u_2}$	$-c_2\,(P_{12})$	$[c_1'\frac{\varepsilon}{k}(-\frac{3}{2}u_1 u_2)+c_2'\frac{3}{2}(\pi_{12,2}+\pi_{21,2})\,]\,f(\frac{L}{x_2})$
$\overline{u_1 u_3}$	$-c_2\,(P_{13})$	$[c_1'\frac{\varepsilon}{k}(-\frac{3}{2}u_1 u_3)+c_2'\frac{3}{2}(\pi_{13,2}+\pi_{31,2})\,]\,f(\frac{L}{x_3})$
$\overline{u_2 u_3}$	$-c_2\,(P_{23})$	$[c_1'\frac{\varepsilon}{k}(-\frac{3}{2}\overline{u_2 u_3})+c_2'\frac{3}{2}(\pi_{23,2}+\pi_{32,2})\,]\,f(\frac{L}{x_2})$ $+\,[c_1'\frac{\varepsilon}{k}(-\frac{3}{2}\overline{u_2 u_3})+c_2'\frac{3}{2}(\pi_{23,2}+\pi_{32,2})\,]\,f(\frac{L}{x_3})$

モデルは，それらの影響に加え，D_{ij}項を含み主流速度U_1の亜流方向への勾配により構成されている．第二種二次流れは，主流速度の数%程度であることを考えると，U_2，U_3はU_1より1 order程度低い値となり，従って亜流速度勾配により構成されるＧＬモデルの乱流応力値はＬＲＲモデルのそれと比較すると低い値を示すものと考えられる．ただし，ＧＬモデルにおいて，垂直応力の差の分布値は実験値に近い値を示しているのは(2-99ｂ)式の右辺に$(\overline{u_2^2}f_2-\overline{u_3^2}f_3)=\overline{u_2^2}f_2-(2k-\overline{u_1^2}-\overline{u_2^2})f_3$の項を含み，ｋの値は，ｋ－ε二次方程式モデルより算出するためorder 的には実験値に近いものになったと考えられる．
また，ＧＬモデルにおいて，亜流方向速度U_2，U_3を$U_2\simeq0$，$U_3\simeq0$と近似的に考えると，(2-99b)式は

$$\overline{u_2^2}-\overline{u_3^2}=-3c_1'\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_2^2}f_2-\overline{u_3^2}f_3)\left(-\frac{\varepsilon}{k}+c_1\frac{\varepsilon}{k}\right)^{-1} \qquad (2\text{-}102)$$

となり，壁面による影響のみで非等方性を表現していることとなり，ＧＬモデルの特徴とも言える．

このようにＬＲＲタイプとＧＬタイプとの結果に差が生じたのは，圧力・歪相関項のうち平均流の影響を含む項の$\pi_{ij,2}$のモデル化にあると考えられる．ＧＬタイプは，ＬＲＲらがモデル化を行なった$\pi_{ij,2}$の第１項のみが主要項として他の項を無視しているが，この無視した項中にD_{ij}項が含まれ，この結果ＧＬタイプでは前述のように亜流速度勾配により乱流応力が構成されることとなる．

従ってこの種の計算を行なう場合，特に主流速度勾配が流れに影響を及ぼす場合などは，ＬＲＲタイプのモデルにより検討することが必要と思われる．Pollard(1987)は，11種にわたる乱流モデルを検討し，ＬＲＲモデル中に含まれるD_{ij}項は垂直応力間のエネルギー交換の機構に関与する項であり，省略すべきではないとしている点，本解析でも同様の決論を得ている．

図2-10はＧＥモデルの計算結果である．ＧＥモデルの特徴としては，平均流の影響を含む項の４次相関テンソルのモデル化に際し，その制約条件に改良を加えモデル化を行なった点，ならびに定数決定に際して正方形断面を有する管路の実験値を根拠にしている点が上げられる．後者の点からすれば，正方形管内流に即したモデルと思えるが，計算結果を見るとせん断応力，垂直応力の差の分布は実験値と異なったものとなっている．せん断応力分布に関しては，ＬＲＲ，ＧＬタイプにみられるような異符合領域は認められないものの－0.2 の等値線が対角線上に 2個所現われ実験と異なる．垂直応力の差の分布に関してはその等値線図がゆがんだ形態となり，また管中心近傍に負の領域が発生している点など実験値と異なっている．一方，図2-12に示す提唱モデルは，４次相関テンソルのモデル化に際してはＧＥの考え方を取り入れ，定数決定に際してはＧＥと異なる手法をとり，比較的実験結果に近い分布を示していることを考えると，ＧＥタイプの場合，定数の選定に問題があるものと考えられる．

図2-11はＮＣＳタイプの計算結果である．ＮＣＳタイプの場合，主流速度等値線図の湾曲化など良好に実験結果を再現しているものの，乱流応力値分布は1order低い値となっており，垂直応力の差の等値線図などは大きく変形している．またせん断応力分布値も異符号領域が現われ実験と異なる．

この実験値との相違は，定数系の選定によるのものである．特に，純粋な流れによる影

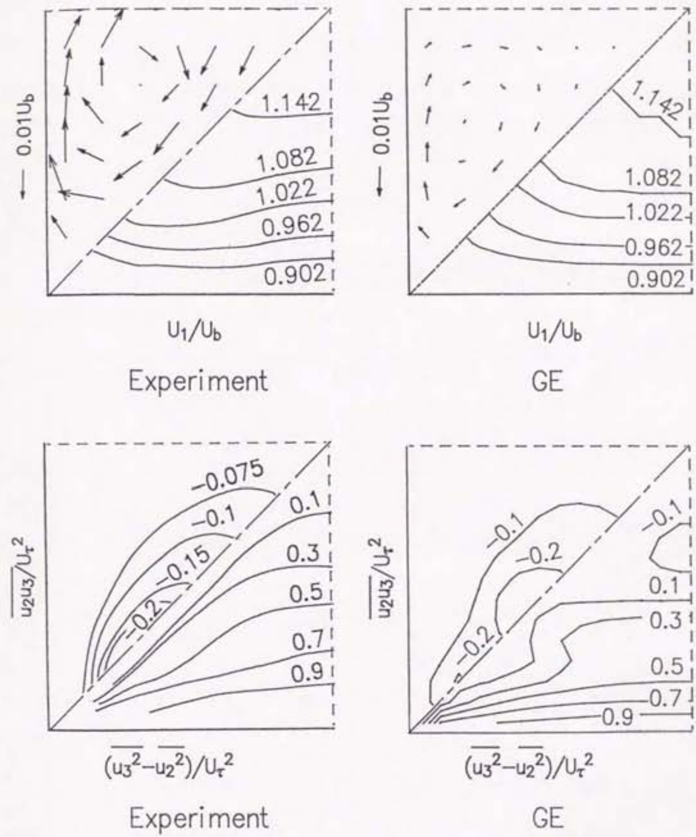


図2-10　ＧＥモデルによる解析結果

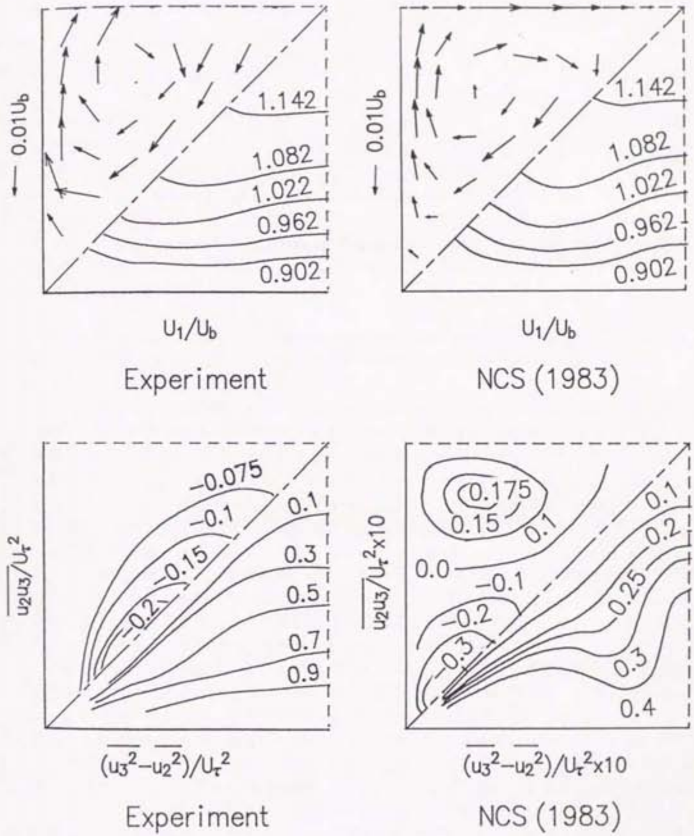


図2-11　ＮＣＳ(1983)モデルによる解析結果

響$\pi_{ij,1}$の項に含まれるc_1および平均流の影響を含む項$\pi_{ij,2}$に含まれるc_2の選定によるものと考えられる．今，せん断応力$\overline{u_2 u_3}$に関する式は(2-73f)式に示すように

$$-\overline{u_2 u_3} = c' c_D' \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) \qquad (2\text{-}103a)$$

と示される．ここで

$$c' = \frac{4}{11} \frac{3c_2 - 1}{c_1 - 2c_2} \qquad (2\text{-}103b)$$

ＮＣＳモデルの場合，$c_1=2.6$ ，$c_2=0.365$の値をとっているため上式より$c'=0.0185$となる．一方，ＬＲＲモデルでの$c_1=1.5$ ，$c_2=0.4$を取れば$c'=0.1038$，ＧＬモデルの$c_1=1.8$，$c_2=0.6$ をとると$c'=0.4849$，提唱モデルの$c_1=1.4$，$c_2=0.44$ を取れば$c'=0.2237$となり，ＮＣＳモデルはいずれのモデルと比較しても1 order低い値を取っており，従ってせん断応力値も実験値より低い値を示す結果となっいる．垂直応力の差の値に関しても

$$-\left(\overline{u_3^2} - \overline{u_2^2}\right) = c' c_D' \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left\{ \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 \right\} \qquad (2\text{-}104)$$

と表現されるためc'の値により実験値を比較して1 order低い値を示している．以上の考察からc'の値を大きくとって，乱流応力値を実験値に適合させることも考えられるが，このようにすると第二種二次流れが異常に発達してしまうという矛盾も内包している．

図2-12は提唱モデルの解析結果である．主流速度等値線図は，ＬＲＲタイプ，ＧＬタイプほどの湾曲は認められないものの，乱流応力値の分布は比較的良好な結果となった．垂直応力の差の分布においてもＬＲＲモデル，ＧＥモデルで管中心部に現われた負の領域は認められない．またせん断応力$\overline{u_2 u_3}$の分布において，等値零ラインは認められるもののＬＲＲ，ＧＬ，ＮＣＳモデルのように零ラインが大きく対角線に向って張り出す状況は認められず，他のモデルと比較して実験結果を比較的良好に表現している．

本提唱モデルは，平均流の影響を含む項のモデル化に対してはＧＥモデルの概念を導入し，定数決定に際しては，局所平衡状態$\lambda=P_k/\varepsilon=1$ および，$\lambda=1.55$の実験値，壁面近傍の流れに対する実験値を利用し決定している．また壁の影響を表わす関数に対しても改良を加えている．実験結果と計算結果とが図に示すように比較的良好に一致したことより，以上のような改良点が比較的妥当な近似であったと思われる．

本計算において，対流項，拡散項に対するモデル化として Rodi 近似を用いているが本計算例のごとき流れに適用した場合のRodi近似の妥当性について検討してみる．先の対流項，拡散項のモデル化にて明らかにしたように Rodi近似を成立させている条件は$(\overline{u_i u_j}/k)$勾配を含む各項が，他の項と比較して小さいという点にある．そこで，レイノルズ応力方程式中，order 的に支配的な生成項と，$(\overline{u_i u_j}/k)$の勾配を含む項とのorder比較を行なうと，各レイノルズ応力に対して概略，表2-18に示すような結果となる．この結果より解るように Rodi 近似により省略される項は，常に生成項より1～3桁小さな値を示しており，本解析例のような場合比較的妥当な近似と考えられる．ただし，厳密性という観点からすれば，$(\overline{u_i u_j}/k)$の勾配を加味した計算結果，すなわちレイノルズ応力方程式を省略のない完全微分形として解いた結果より，各項のorderを比較することが必要と思われる．

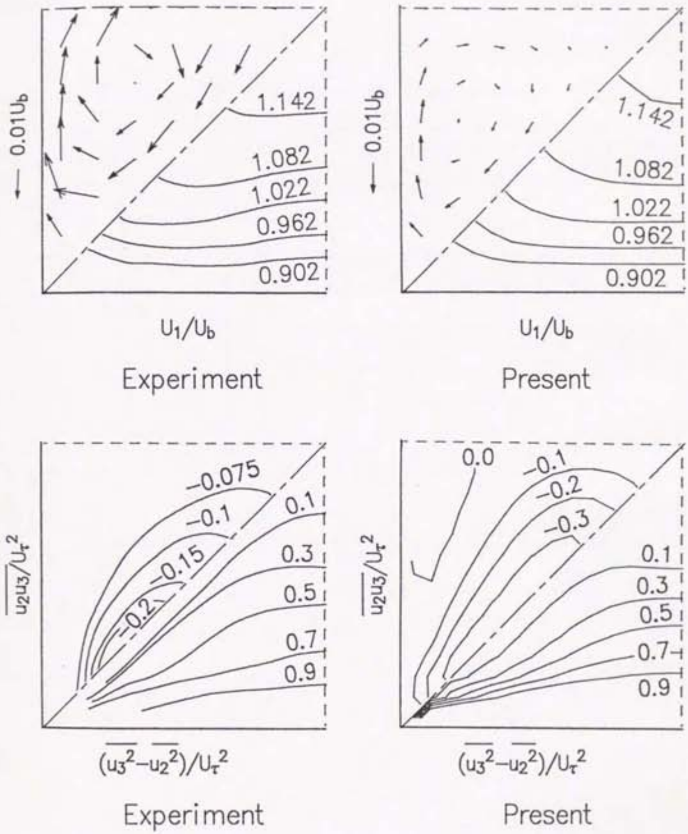


図2-12　提唱モデルによる解析結果

表2-18　Rodi近似における各項の値

	$-\overline{u_i u_k}\dfrac{\partial U_j}{\partial x_k}-\overline{u_j u_k}\dfrac{\partial U_i}{\partial x_k}$	$k\,\dfrac{D\overline{u_i u_j}/k}{Dt}$	$c_s\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{k^2}{\varepsilon}\overline{u_k u_l}\,\dfrac{\partial\overline{u_i u_j}/k}{\partial x_l}\right)$	$\dfrac{k}{\varepsilon}c_s\;\overline{u_k u_l}\,\dfrac{\partial k}{\partial x_l}\,\dfrac{\partial\overline{u_i u_j}/k}{\partial x_k}$
$\overline{u_1}^2$	10^{-4}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-7}
$\overline{u_2}^2$	10^{-5}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-7}
$\overline{u_3}^2$	10^{-5}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-7}
$\overline{u_1 u_2}$	10^{-4}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-7}
$\overline{u_1 u_3}$	10^{-4}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-7}
$\overline{u_2 u_3}$	10^{-5}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-7}

2．3．4．3　格子依存性

ここでは格子依存性を把握する意味より，10×10，12×12，14×14，16×16の4種類の計算格子配列を設けて計算を行なった．この時使用したモデルは提唱モデルを用いて行なうものとした．

本解析の場合，乱流特性量ｋ，εに対し高レイノルズ数のモデルを用いているため，壁近傍にて壁関数(Wall Function)による境界条件の設定手法を用いた．従って格子点配列は，壁最近傍の節点が粘性の影響を無視できる乱流領域に位置するよう配慮し行なった．計算格子配列10×10の場合には，壁最近傍点のy^+の値は67～99で，12×12の場合は55～83，14×14の場合は47～71，16×16の場合は41～62の間で変化している．図2-13(a)，(b)に計算結果を示す．格子数を増加すると主流方向等速度線図の1.142のラインが中心部より壁面へ向かって張り出す傾向がうかがえるが，14×14より変化がなくなっている．第二種二次流れのベクトル図については，その強度ならびに渦中心位置に大きな変化は認められない．またこの第二種二次流れの発生要因となる垂直応力の差，せん断応力値については，せん断応力値の0.0ラインが変化するものの，ＬＲＲモデルＧＥモデルで見られたようなせん断応力値の－0.1ラインの発生は認められず大きな変化は認められない．先のモデル差異分析においては，14×14の計算格子配列を用いているが，以上の計算結果より格子依存による影響は小さいものと考えられる．

2．3．5　助走区間発達乱流解析

正方形管路の助走区間発達乱流の実験解析として，Melling-Whitelaw(1976)は，発達しつつある断面にて各乱流応力成分の分布を詳細に検討した．本節においては，先に検討した提唱モデルを，この発達しつつある助走区間内流れに適用し，モデルの妥当性について検討を加えるものとする．計算座標系は図2-6と同様，主流方向をx_1,垂流方向をx_2，およびx_3と定義する．x_2方向は鉛直方向，x_3方向は水平方向としている．支配方程式は主流方向の拡散項を無視した三次元放物型方程式として解く．一般保存式は次のように置ける．

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(U_j\phi) = D_{iff}\phi + S\phi \qquad (2\text{-}105)$$

拡散項 $D_{iff}\phi$，$S\phi$ は表2-14に示した通りであるが，x_1 方向の拡散項が無視されるため，例えば運動方程式を例にとれば表2-19のように示されることとなる．乱流特性量のｋ，ε方程式に対しても同様の配慮が必要である．

2．3．5．1　解析手法

計算領域は系の対称性を考え， 完全発達乱流の場合と同様 1／4断面として計算を行ない，主流方向に 100D_h の助走区間を設けて，10×10×120 の計算メッシュにて解析を行なった．計算格子は Staggerd 格子を用い，その変数配置は図2-14に示す通りである．図では(i,j,k)点に対する変数を示してある．計算パラメータはMelling-Whitelawの実験結果と比較するため Re＝42,000とした．計算に際して入口条件が必要となるが，実験値が不明であるため，主流速度は，入口にて一定で，かつ等方性乱流とし乱流エネルギーｋ，乱流散逸εの値については$k = U_b^2 \times 10^{-5}$，$\varepsilon = k^{3/2}/D_h$とし計算を行なった．出口境界条

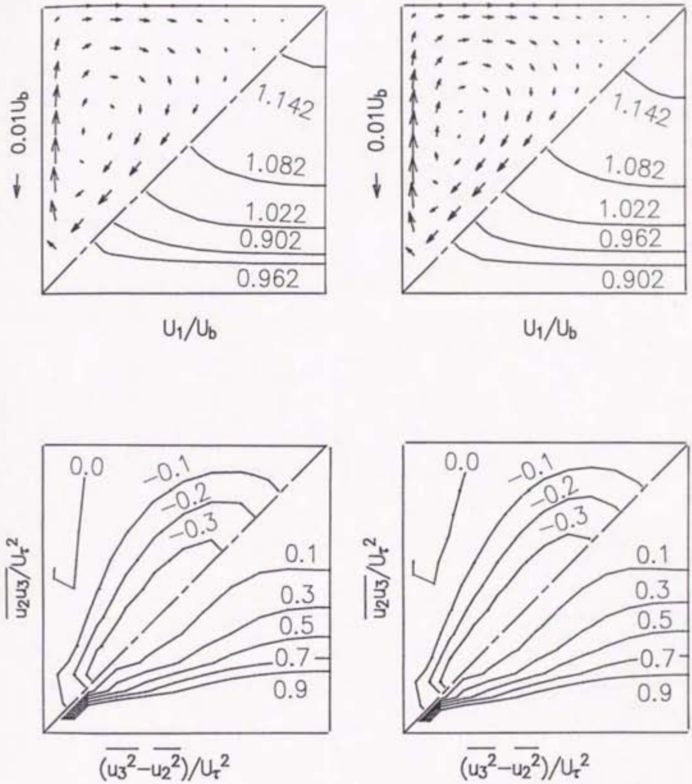


図2-13 (a) 計算格子配列による影響

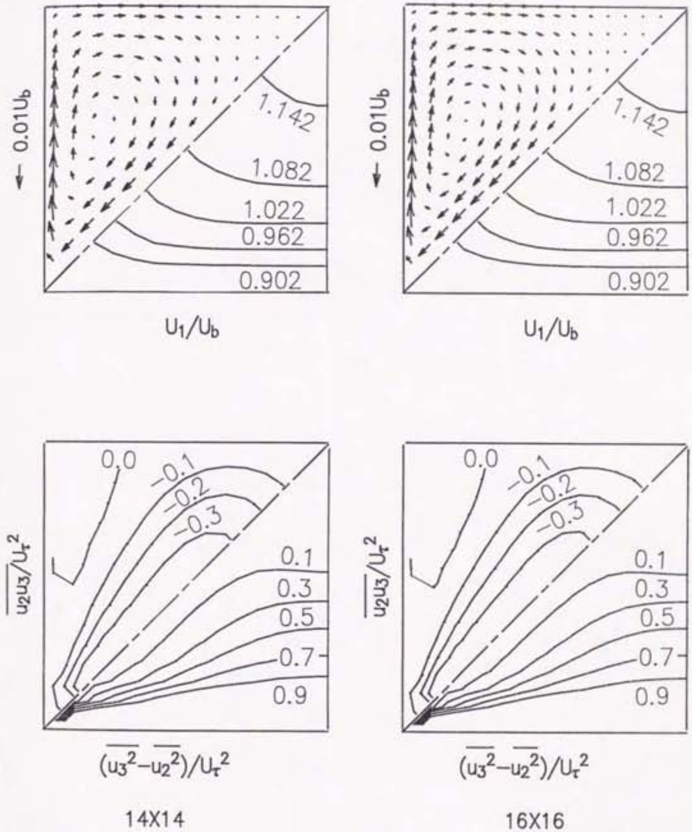


図2-13 (b) 計算格子配列による影響

表2-19　運動方程式中の各項

Equation	ϕ	Diff ϕ	S ϕ
Density	1	0	0
x_1-Momentum	U_1	$\nu \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2}$	$-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \overline{u_1 u_2}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \overline{u_1 u_3}}{\partial x_3}$
x_2-Momentum	U_2	$\nu \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2}$	$-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \overline{u_2^2}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \overline{u_2 u_3}}{\partial x_3}$
x_3-Momentum	U_3	$\nu \dfrac{\partial^2 U_3}{\partial x_3^2}$	$-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \overline{u_2 u_3}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \overline{u_3^2}}{\partial x_3}$

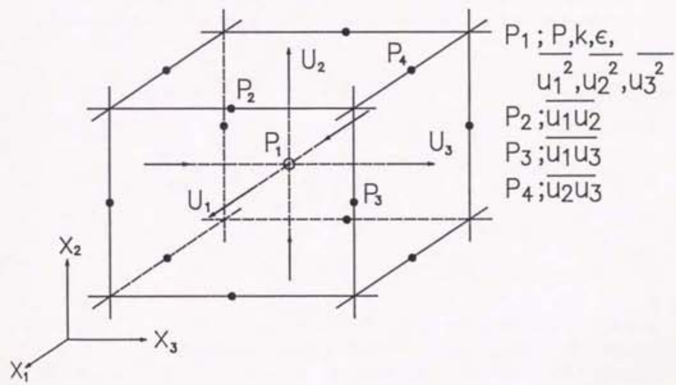


図2-14　三次元変数配置図

件に対しては，Neumann 境界条件を与えている．

2．3．5．2　解析結果

図2-15は管中心における主流速度U_cの発達を実験と比較したもので，混合平均速度U_bにて無次元化して示してある．また図2-16は，同様に管中心の乱流エネルギーの発達の過程を示したものである．図2-15より主流中心速度U_cは実験，計算ともピーク値をとる分布となっているが，これは境界層が流れ方向に徐々に発達していき管中心部まで各壁面の境界層が発達し互いに混合し合うことにより，このようなピーク値を持つものと解釈できる．その後干渉し合った境界層は運動量の交換を行ないながら一定値へと漸近していく．乱流エネルギーに関しても同様な過程を取る．すなわち，壁面近傍にて生成された乱流エネルギーは，主流方向に進むにつれ，移流項あるいは拡散項により徐々に管中心部へと輸送される．これら壁面より生成された乱流エネルギーはやがて管中心部に達し混合が行なわれて一定値へと漸近していく．主流中心速度 U_cは，実験結果より遅れて発達しており，一方乱流エネルギーは，その発達勾配は似ているものの増加開始点が約 15D_hほど下流に位置している．これらの相違点は，次の２つの要因に起因していると考えられる．第１の要因としては入口条件が不明であるため乱流エネルギー，乱流散逸に対し$k=U_b{}^2\times10^{-5}$，$\varepsilon=k^{3/2}/D_h$と小さな値を設定したこと．第２の要因としては，乱流エネルギー，乱流散逸方程式中の拡散項に含まれる定数の値を，小さく設定した点である．本解析の場合は，拡散項に対しては，Daly-Harlow(1970) の速度勾配型拡散モデルを用いており，その定数には Launder-Morse(1979)の提案した値を用いて計算している．ここで，主流速度，乱流エネルギーがどのような機構により発達していくかを明確にするため，放物型としての各々の方程式を書き下すと次のように示される．

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(U_1U_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(U_2U_1)+\frac{\partial}{\partial x_3}(U_3U_1)$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu\frac{\partial U_1}{\partial x_2}-\overline{u_1u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nu\frac{\partial U_1}{\partial x_3}-\overline{u_1u_3}\right) \quad \text{(2-106a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(U_1k)+\frac{\partial}{\partial x_2}(U_2k)+\frac{\partial}{\partial x_3}(U_3k)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\nu+c_s\frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u_1u_2}\frac{\partial k}{\partial x_1}+\overline{u_2^2}\frac{\partial k}{\partial x_2}+\overline{u_2u_3}\frac{\partial k}{\partial x_3}\right)\right\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\nu+c_s\frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u_1u_3}\frac{\partial k}{\partial x_1}\ \overline{u_2u_3}\frac{\partial k}{\partial x_2}+\overline{u_3^2}\frac{\partial k}{\partial x_3}\right)\right\}$$
$$+P_k-\varepsilon \quad \text{(2-106b)}$$

これらの式より，主流速度，乱流エネルギーの管中心部への輸送は対流項中の亜流速度，U_2，U_3あるいは，拡散項中のレイノルズ応力$\overline{u_1u_2}$，$\overline{u_2u_3}$ などを通して行なわれることが解る．U_2,U_3 の，すなわち第二種二次流れの値は，後述するように実測値と同程度の値を持ち，この第二種二次流れによる輸送が支配的であれば，計算と実験値との差は，図2-16に示すほど大きくはならないと思われ，従って拡散項による影響の方が大きいと考えられる．k方程式中の拡散項の定数c_sを大きくとることは，kの発達を促進させ，同時に各乱流応力値も増大させる結果，主流速度も同時に発達させることとなる．

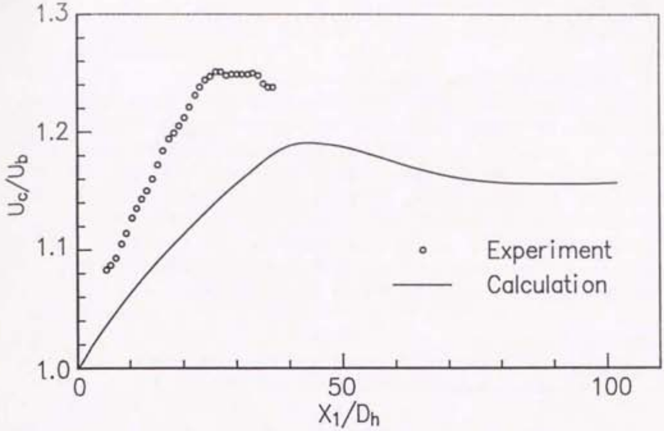


図2-15　主流中心速度の発達

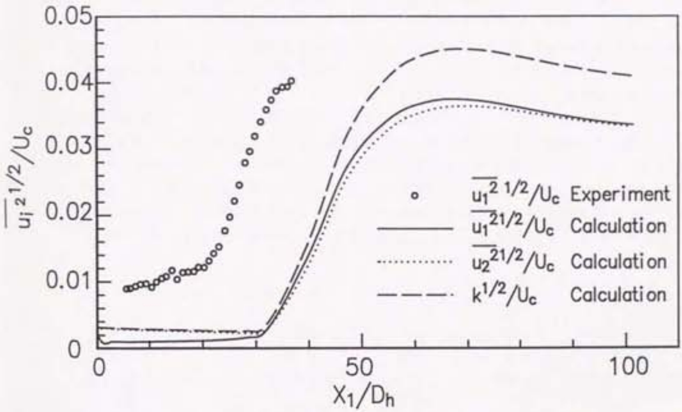


図2-16　乱流エネルギーの発達

以上の考察より，第2の要因は，拡散速度を左右する因子であり，この意味より第1の要因より発達への寄与率は大きいものと考えられる．

図2-17および図2-18は $x_1=5.6D_h$ における主流速度，乱流応力成分の等値線図である．左側に計算結果を，右側には実験結果を示してある．実験値において垂直応力 $\overline{u_1^2}$ あるいは $\overline{u_2^2}$ の等値線図に多少のコーナー部へ向かう歪みがあり，第二種二次流れの発生を思わせるが，計算の等値線図には認められない．せん断応力 $\overline{u_1u_2}$ の分布においては，解析結果では管中心部近傍に二つの零等値線がみられる．これに対し実験値においては，図2-18に示すように鎖線にて零ラインが提示され，またコーナー対角線近傍にみられる0.1の等値線より外側の領域では $\overline{u_1u_2}\simeq 0$ としていることより，計算結果はその傾向を比較的良好にとらえていると考えられる．また，垂直応力 $\overline{u_1^2}$ および $\overline{u_2^2}$ の発達の速度について考えてみると，例えば，$\overline{u_2^2}$ の壁面に最も近い等値線図の値が 0.06 に対し $\overline{u_1^2}$ においては0.08であることより $\overline{u_1^2}$ の方が，$\overline{u_2^2}$ より早く発達していることが，実験値，計算結果の両方から認められる．

図2-19は $x_1=36.8D_h$ における主流速度および第二種二次流れベクトルの等値線図の比較を示したものである．実験における主流速度は，第二種二次流れにより等値線の湾曲が $x_1=5.6D_h$ と比較すると顕著にみられるが，計算においては管中心に近い等値線では等値線の歪は認められるものの壁面近傍では認められない．これは，先に示したように計算結果の方が実験より遅れて発達していくことにも依ると思われるが，本モデルの特徴とも考えられる．第二種二次流れの強さは，実験，計算とも最大主流速度の1%程度となり，その渦中心も比較的実験値に近いところに形成されている．

次に，この第二種二次流れの発生要因となる垂直応力の差（$\overline{u_3^2}-\overline{u_2^2}$）およびせん断応力 $\overline{u_1u_3}$ の分布について比較検討する．図2-20に解析結果を示す．垂直応力の差（$\overline{u_3^2}-\overline{u_2^2}$）は，実験値において対称性を満足していないが，その対称性の崩れた領域を除けば，計算結果は実験結果の傾向を良く表わしていると言える．ＬＲＲモデル，ＧＥモデルは，完全発達乱流において，管中心部近傍に負の領域が形成されたが，提唱モデルは，発達しつつある流れにおいても，実験値同様負の領域は認められず，本提唱モデルの妥当性を示すものと思われる．また，このような発達しつつある流れに特有な現象として，せん断応力 $\overline{u_1u_2}$ あるいは $\overline{u_1u_3}$ の分布おける異符号領域の存在が指摘されている．これは第二種二次流れによる主流等速度線の歪により，主流速度 U_1 の x_2 方向，あるいは x_3 方向の速度勾配が場所により正または負の値をとるためと解釈できる．数式的解釈すると次のように説明できる．本提唱モデルを用いてせん断応力 $\overline{u_1u_3}$ を表現すると次のように示される．

$$
\begin{aligned}
&\overline{u_1u_3}\left\{\frac{P_k}{\varepsilon}-1+c_1+\frac{k}{\varepsilon}(1+3\beta)\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3}+\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)\right\}\\
&=\frac{k}{\varepsilon}(1-\alpha-\beta)\left(-\overline{u_2^2}\frac{\partial U_3}{\partial x_1}-\overline{u_1u_2}\frac{\partial U_3}{\partial x_2}-\overline{u_3u_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}-\overline{u_3^2}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)\\
&\quad+\frac{k}{\varepsilon}(4\beta+\alpha)\left(-\overline{u_1^2}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}-\overline{u_1u_2}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}-\overline{u_3u_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}-\overline{u_3^2}\frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right)\\
&\quad-\frac{\zeta k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}+\frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right)
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}107)
$$

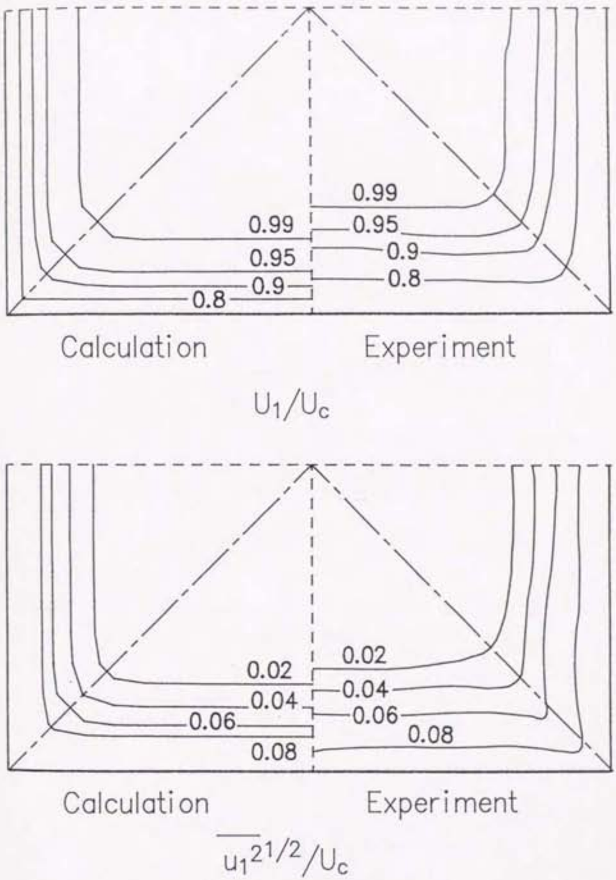


図2-17　主流速度U_1、垂直応力$\overline{u_1{}^2}^{1/2}$の等値線図　(x_1=5.6D_h)

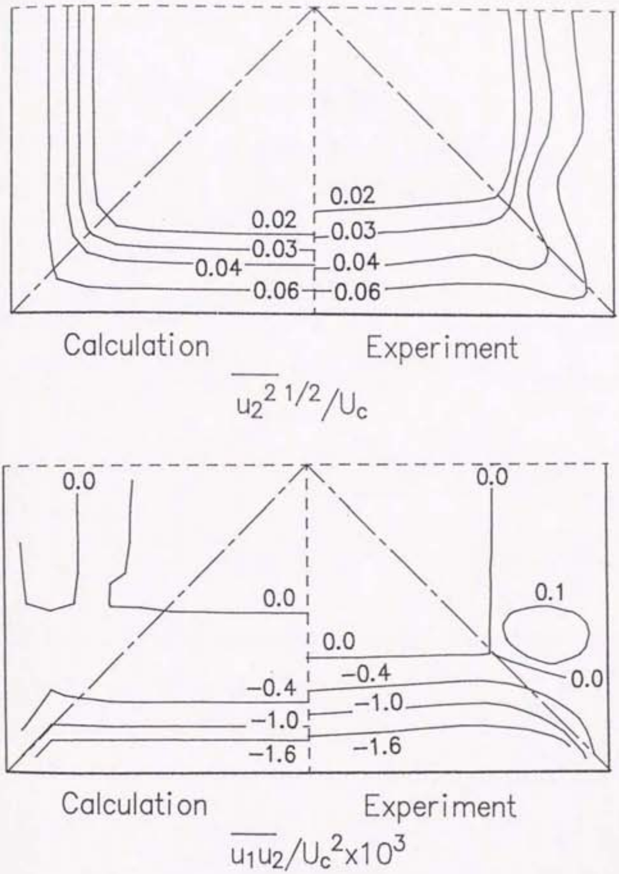


図2-18　垂直応力$\overline{u_2^2}^{1/2}$、せん断応力$\overline{u_1u_2}$の等値線図（x_1=5.6D_h）

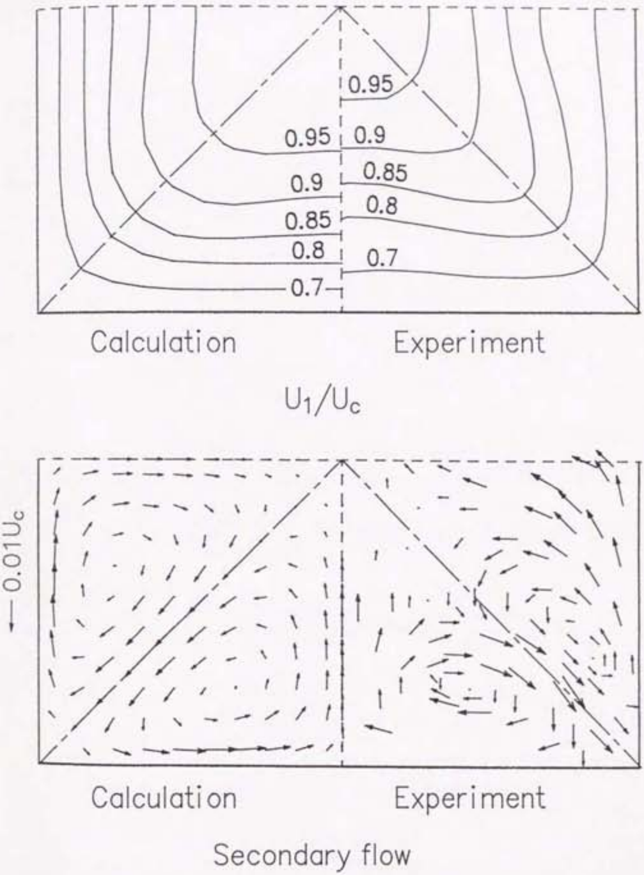


図2-19　主流速度U_1、第二種二次流れベクトル線図　(x_1=36.8D_h)

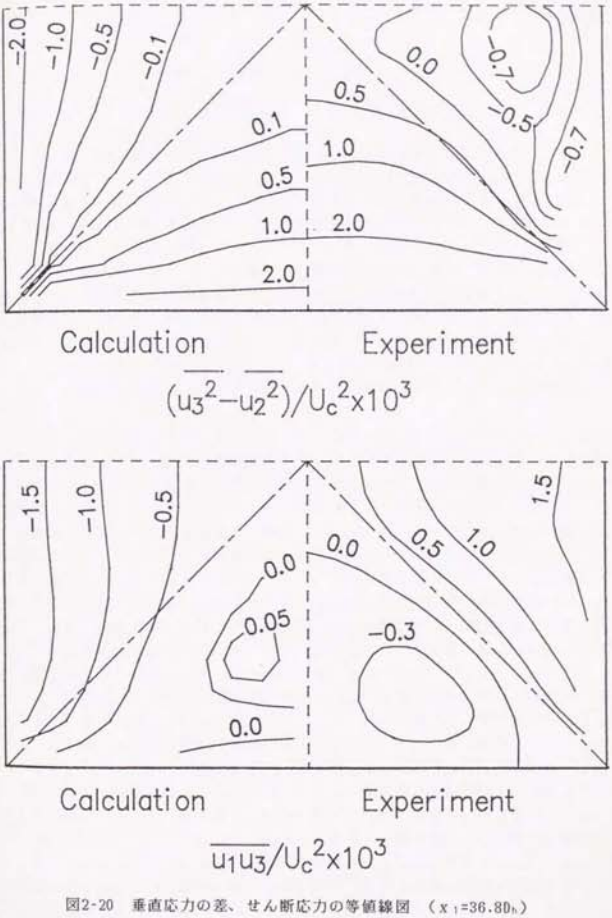


図2-20　垂直応力の差、せん断応力の等値線図　（x_1=36.8D_h）

上式において亜流速度U_2, U_3を含む項はU_1に比較して小さいと仮定し，それらの項を無視すると次のように書き改められる．

$$\overline{u_1 u_3}\left\{\frac{P_k}{\varepsilon}-1+c_1+\frac{k}{\varepsilon}(1+3\beta)\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right\}$$
$$=-\left\{\frac{k}{\varepsilon}(1-\alpha-\beta)\overline{u_3^2}+\frac{k}{\varepsilon}(4\beta+\alpha)\overline{u_1^2}+\frac{\zeta k^2}{\varepsilon}\right\}\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \qquad (2\text{-}108)$$

上式より，$\overline{u_1 u_3}$の値は$\partial U_1/\partial x_3$の値により正または負の値をとることが解る．

本計算においてもこの異符号領域は，$x_1=5.6D_h$においては明瞭でないものの，$x_1=36.8D_h$では十分認識できるが，その領域の大きさなどは実験値とは異なる．しかし，発達しつつある流れに特有なこのせん断応力値の異符号領域の発生を，本計算モデルは把握することができたことは，モデルの妥当性を示すものと思われる．

図2-21は，垂直応力$\overline{u_1^2}$，$\overline{u_3^2}$に関する等値線図である．$\overline{u_1^2}$，$\overline{u_3^2}$とも実験においては，第二種二次流れにより等値線がコーナー部へ大きく突出した様相を呈しているのに対し，計算結果においてはほとんど湾曲化せず実験値と異なる．このような傾向は，先に示した主流速度等値線図でも同様であり，本提唱モデルの改良すべき点であると思われる．また$x_1=5.6D_h$において$\overline{u_1^2}$の方が，$\overline{u_3^2}$より早く発達することを指摘したが$x_1=36.8D_h$においてはこの傾向がより大きく認められる．これは，実験ならびに計算両者について言える．

図2-22は，亜流速度および，乱流エネルギーの等値線図を示したものである．亜流速度U_2の分布については，計算，実験とも零ラインの外側に正の領域が内側に負の領域が存在する形となっており，またその値も大きくずれることなく計算結果は比較的良好な結果を示している．一方乱流エネルギーkの等値線図においては，実験においてはコーナー部への等値線の大きな突出しが観察されるのに対して，計算においては大きな変化は認められず実験と異なっている．今，乱流エネルギーkのx_2-x_3断面における輸送について考えると，対流項に含まれる亜流速度U_2，U_3，ならびに拡散項中に含まれる各レイノルズ応力が考えられるが，今まで示してきたように亜流速度U_2，第二種二次流れベクトル値に関しては実験値と大きく異なることはない．もし対流項が等値線図を歪ませる支配的な項であれば計算値も実験値に近い値となるべきであるが，そうなっていないことを考えると，支配的な項は拡散項であると考えられ，拡散項中に含まれる各レイノルズ応力，特にその中でも値的に大きな垂直応力による影響が大きいものと推察できる．これら垂直応力$\overline{u_1^2}$，$\overline{u_3^2}$の等値線図は，図2-21をみてわかるように，計算において等値線図の歪は認められず，結果的にkの等値線図も同様に変化が生じないものと思われる．

この垂直応力$\overline{u_1^2}$，$\overline{u_3^2}$等の等値線図が実験値と比較して変化しないのは，その対流項，拡散項に対しRodi近似を用いて代数式として各乱流応力を表現したことによるものと考えられ代数応力モデルの欠点がここに表われているのではないかと思われる．従って，レイノルズ応力方程式に対し，代数応力モデルを用いた場合このような問題が発生すると考えられる．Nakayama-Chow-Sharma(1983)の計算結果も同様の結果を示し，Launder-Ying(1973)の場合，比較的等値線図の突出しは認められるが，実験との同一等値線図を比較するとその変化はやはり少ない．これら垂直応力の歪を正確にとらえるには，レイノルズ応力の対流項，拡散項をより厳密な形とし計算に取り入れることが必要であると思われる．

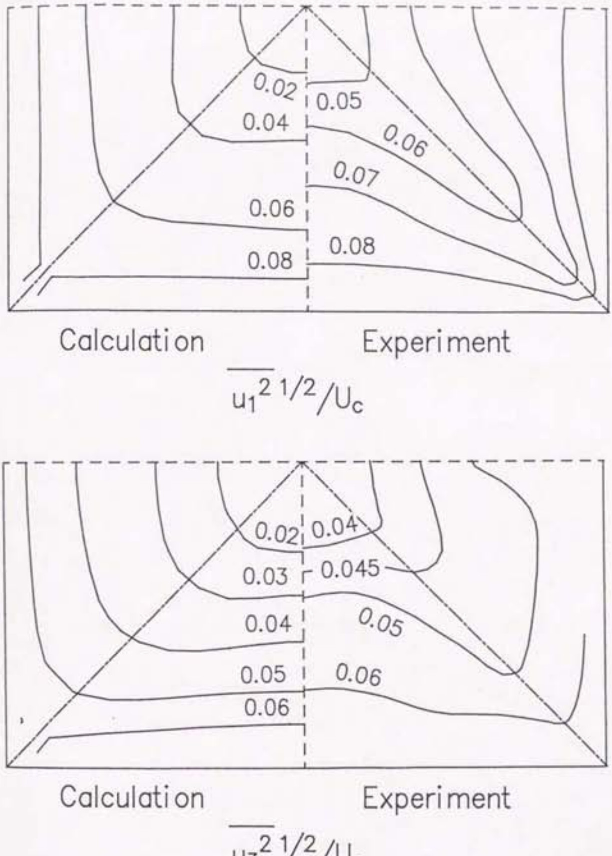


図2-21　垂直応力の等値線図　（x_1=36.8D_h）

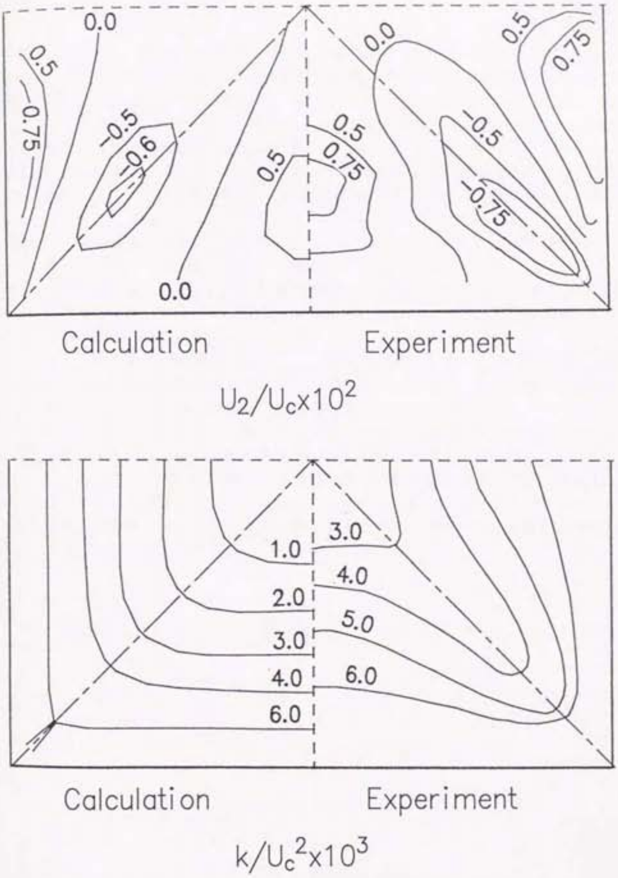


図2-22　亜流速度、乱流エネルギーの等値線図　（x_1=36.8D_h）

2．4 結言

本章では，レイノルズ応力方程式中の圧力・歪相関項に対する代表的なモデルに対し検討を行なった．同時にそれらの差異分析結果を踏まえて改良モデルの提唱を行った．得られた知見は，以下の通りである．

(1) ＬＲＲモデル，およびＧＬモデルによる完全に発達した正方形管内流の数値解析結果では，管断面に沿う垂直応力分布を除いて，ＬＲＲモデルの方が実験値に近い結果を示した．これは，ＬＲＲモデルがレイノルズ応力方程式の中の圧力・歪相関項において平均流の影響の項として，断面方向の主流速度勾配を含むためと考えられる．

(2) ＧＬモデルは，流れの非等方性を圧力・歪相関項中の壁面による影響の項により表現しており，ＧＬモデルの特徴とも言える．

(3) ＧＥモデルは，完全発達正方形管路内流れの結果において，垂直応力の差の分布に等値線の湾曲化がみられ実験と異なる結果となった．これは定数の決定手法に問題があるものと考えられる．

(4) ＮＣＳモデルは，垂直応力の差，せん断応力値とを１オーダ低い値を示し，定数を変えることにより値を実験値に近づけることはできるが，発達しつつある流れに適用した場合，第二種二次流れが急激に発達するという矛盾を持つ．

(5) ＧＥモデルを基本とし，定数決定を単純せん断流れ，壁面近傍流により行なった本提唱モデルは，比較的良好に完全発達正方形断面管路流れを予測している．

(6) Rodi近似による輸送項の簡略化は近接空間での物理量の相互依存性が薄れる作用があるという問題を内包するものの，本解析例の場合，Rodi近似により省略される項は，生成項の持つオーダより常に１～３桁低い値を示し，本解析例の場合比較的妥当な近似と思われる．

第３章　境界適合座標系解析

３．１　緒言

数値計算を行なう上で，数値解の精度，安定性，収束性の観点から特に問題となるのは，(1)境界条件の設定，(2)支配方程系の離散化，(3)計算格子点の設定などである．(1)については，支配方程式の書かれた物理座標で，その座標軸と境界を設定する軸とが一致すれば問題はないものの，一致しない場合には，周囲の格子点からの外挿により境界値を決めることが必要となり，計算を進める上で煩雑な作業となる．一般に工業的な面で熱流動解析を行なう場合には，後者のような場合が多く，この種の問題は数値計算を行なう上で常に考慮しなければならない問題である．さらに正確な境界条件の設定は，解の精度にも影響を及ぼす意味からも特に重要な項目である．

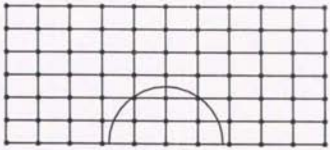
また，偏微分方程式を，離散化して解く場合には，計算領域が矩形の時に，離散式は最も簡単化されかつ計算の効率を高めることができる．この趣意に沿って支配方程式は離散化されるべきであるが,(1)の問題同様，物理座標の座標軸と境界軸とが一致しないような場合には，境界値近傍の離散化に際して工夫が必要である．

計算格子の設定に際しては，解析領域全体にわたりなめらかに格子を配置すること，あるいは物理量の大きく変化する領域に格子点を集中させることなどが必要である．

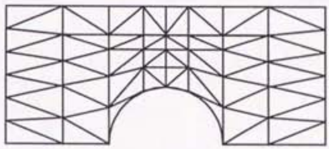
図3-1は座標格子の比較を示したものである．図中(ａ)は差分法による座標格子であるが，境界条件と格子点が一致しないため前述のように境界条件を近似する方法がとられ計算誤差を生ずる問題を内包する．このため差分法では,直方体領域には直交座標格子,円筒領域には円筒座標格子といったように解析形状に合った座標格子が採られている．(ｂ)は有限要素法によった場合であるが，有限要素法は複雑な形状への適用が可能であるが，三次元空間座標においての格子生成には多くの経験と作業量を必要とする．

(ｃ)は境界適合座標系(Boundary-Fitted Coordinate System) による計算方法を示したもので，物理平面上の解析領域を計算平面に座標変換し，計算平面内で物理現象を支配する偏微分方程式を解く手法である．計算平面においては，各座標軸が独立でありかつそれらの座標軸が直交するという二つの条件を満足することが必要である．各座標軸の関数がお互いに独立であるための必要かつ十分なる条件は，それらの関数の作るJacobian が0とならないことである．従って境界適合座標系を用いた計算においてはJacobian が0となる場合は数値的に計算不能となる．もう一つの条件として，計算平面上で各座標軸が互いに直交することが必要となるが，この条件を満足するためには，計算平面上の各座標関数が，物理平面上でラプラスの方程式を満足すればよい．この条件を満足する例として，流れ関数と等ポテンシャル線の関係がある．それらの関数値は，物理平面で，Cauchy-Riemannの関係式より導びかれる楕円型方程式を満足し，その結果，互いに直交する．

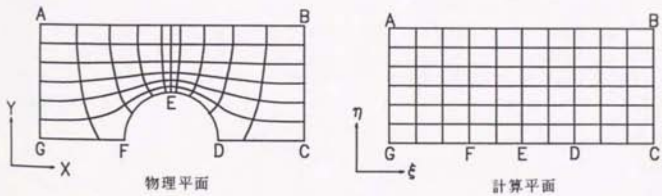
以上より解るように，境界適合座標系を用いた場合には，計算平面上の関数系が直交するという条件を満足するために，楕円型方程式を解くことが必要となり，物理平面上で，あるいは計算平面上でこの楕円型方程式を解くことにより計算格子が生成されることとなる．さらに生成された格子点の各点において，Jacobian が0とならないとゆう条件が必要となる．



(a) 差分法



(b) 有限要素法



(c) 境界適合座標系

図3-1 格子生成の比較

この格子生成の後に支配方程式を計算平面上で解くことになる．しかし支配方程式は一般に物理平面上の直交座標で表記されているため，境界適合座標系を用いた場合には計算平面上への変換が必要となり，方程式はより複雑な形となる．座標変換を要しない差分法による解法では，支配方程式は変換することはないが，境界の設定が煩雑となり，境界適合座標系を用いた場合とまったく逆の問題を有することとなる．

本章では，境界適合座標系を用いた場合の格子生成，座標変換理論について説明を加え，各方程式を境界適合座標系にて表現することを目的とする．第３．２節では，三次元形状に対する格子生成理論を説明し，格子生成を支配する楕円型方程式を導出する．第３．３節では各支配方程式の座標変換を行ない，境界適合座標上で各方程式を表現する．第３．４節では，前節で導出された方程式を数値計算する上で必要となる離散化の問題について検討を加える．さらに，座標変換を行なった計算平面での境界条件の設定方法についても検討を行なう．

３．２　格子生成

三次元空間における格子生成について考える．物理平面座標系を(x, y, z)とし，変換された計算領域における座標系を(ξ, η, ζ)とし，各々の関係を次のように定義する．

$$x=x(\xi, \eta, \zeta) \tag{3-1a}$$

$$y=y(\xi, \eta, \zeta) \tag{3-1b}$$

$$z=z(\xi, \eta, \zeta) \tag{3-1c}$$

逆に次のようにも定義できる．すなわち，

$$\xi=\xi(x, y, z) \tag{3-2a}$$

$$\eta=\eta(x, y, z) \tag{3-2b}$$

$$\zeta=\zeta(x, y, z) \tag{3-3c}$$

関数ξ，η，ζが(x, y, z)で偏微分係数を持ち，全微分可能であれば，数学定理

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \eta}+\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \zeta} \tag{3-3}$$

が成立する．ここでx_iは，x，y，zを示す．この数学定理を(3-1)式に適用すると，次の関数式を得る．

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{bmatrix} \tag{3-4}$$

ここで，$\xi_x=\partial \xi/\partial x$，$\xi_y=\partial \xi/\partial y$，$\xi_z=\partial \xi/\partial z$……等を示し，右下の添字で１回微分したことを意味する．(3-2)式に対しても同様の操作を行なうと次の関係式を得る．

$$
\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{bmatrix} \tag{3-5}
$$

AはLの逆行列であることを考慮すれば,

$$
A = \frac{1}{|L|} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ L_{12} & L_{22} & L_{32} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix} \tag{3-6}
$$

であり, L_{11}, L_{21}, L_{31} ……等はLの余因子行列であり, $|L| = J$とすれば次の関係式を得る.

$$
\begin{aligned}
\xi_x &= (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)/J \\
\xi_y &= (z_\eta x_\zeta - x_\eta z_\zeta)/J \\
\xi_z &= (x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta)/J \\
\eta_x &= (y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta)/J \\
\eta_y &= (x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi)/J \\
\eta_z &= (x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta)/J \\
\zeta_x &= (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)/J \\
\zeta_y &= (x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta)/J \\
\zeta_z &= (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)/J
\end{aligned} \tag{3-7}
$$

ここで, JはJacobianである.

物理平面座標上の点(x, y, z)と計算平面上の点(ξ, η, ζ)とは次の関係式により1対1に対応づけが可能となる. この関係式により, (ξ, η, ζ)の直交性が保証されることとなる.

$$\nabla^2 \xi = P(\xi, \eta, \zeta) \tag{3-8a}$$

$$\nabla^2 \eta = Q(\xi, \eta, \zeta) \tag{3-8b}$$

$$\nabla^2 \zeta = R(\xi, \eta, \zeta) \tag{3-8c}$$

ここで∇^2はラプラスの演算子であり次のように定義される.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3-9}$$

また, P, Q, Rは場所により格子点間隔の密度を増加, あるいは減少させる効果を持つ関数であり, 次のように示される.

$$P(\xi, \eta, \zeta) = -\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\,\mathrm{sgn}(\xi - \xi_i)\exp(-b_{1i}c_i) \tag{3-10a}$$

$$Q(\xi, \eta, \zeta) = -\sum_{i=1}^{n} a_{2i}\,\mathrm{sgn}(\eta - \eta_i)\exp(-b_{2i}c_i) \tag{3-10b}$$

$$R(\xi, \eta, \zeta) = -\sum_{i=1}^{n} a_{3i}\,\mathrm{sgn}(\zeta - \zeta_i)\exp(-b_{3i}c_i) \tag{3-10c}$$

$$c_i = \sqrt{c_{1i}(\xi - \xi_i)^2 + c_{2i}(\eta - \eta_i)^2 + c_{3i}(\zeta - \zeta_i)^2} \tag{3-10d}$$

n個の(ξ_i，η_i，ζ_i)点に格子を引き寄せる作用を持つsgn($\xi - \xi_i$)は$\xi - \xi_i$の符号を意味し，a_{ji}，b_{ji}，c_{ji}は計算時に任意に設定する定数である.

(3-8)式は物理平面上での方程式であるが，物理平面上で(3-8)式を解くことは境界条件の設定など非常に難かしくなるため，これを$\xi-\eta-\zeta$平面上に書き改めることを考える.前述した数学定理より，

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} \tag{3-11a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta} \tag{3-11b}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial \zeta} \tag{3-11c}$$

これよりラプラスの演算を求めると次のようになる.

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi =& (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)\phi_{\xi\xi} + 2(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y + \xi_z\eta_z)\phi_{\xi\eta} \\ &+ 2(\xi_x\zeta_x + \xi_y\zeta_y + \xi_z\zeta_z)\phi_{\xi\zeta} + (\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2)\phi_{\eta\eta} \\ &+ 2(\eta_x\zeta_x + \eta_y\zeta_y + \eta_z\zeta_z)\phi_{\eta\zeta} + (\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2)\phi_{\zeta\zeta} \\ &+ \nabla^2\xi\,\phi_\xi + \nabla^2\eta\,\phi_\eta + \nabla^2\zeta\,\phi_\zeta\end{aligned} \tag{3-12}$$

ここでϕ=x，y，zを代入すると$\xi-\eta-\zeta$平面上でのx，y，zの関係式が得られる.(例えば，Mastin-Thompson(1978))

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}x_{\xi\xi} + 2\alpha_{12}x_{\xi\eta} + 2\alpha_{13}x_{\xi\zeta} + \alpha_{22}x_{\eta\eta} + 2\alpha_{23}x_{\eta\zeta} + \alpha_{33}x_{\zeta\zeta} \\ &\quad + J^2[P x_\xi + Q x_\eta + R x_\zeta] = 0\end{aligned} \tag{3-13a}$$

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}y_{\xi\xi} + 2\alpha_{12}y_{\xi\eta} + 2\alpha_{13}y_{\xi\zeta} + \alpha_{22}y_{\eta\eta} + 2\alpha_{23}y_{\eta\zeta} + \alpha_{33}y_{\zeta\zeta} \\ &\quad + J^2[P y_\xi + Q y_\eta + R y_\zeta] = 0\end{aligned} \tag{3-13b}$$

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}z_{\xi\xi} + 2\alpha_{12}z_{\xi\eta} + 2\alpha_{13}z_{\xi\zeta} + \alpha_{22}z_{\eta\eta} + 2\alpha_{23}z_{\eta\zeta} + \alpha_{33}z_{\zeta\zeta} \\ &\quad + J^2[P z_\xi + Q z_\eta + R z_\zeta] = 0\end{aligned} \tag{3-13c}$$

ここで各係数は次のように定義される.

$$\alpha_{jk} = \sum_{m=1}^{3} \beta_{mj}\beta_{mk} \tag{3-14}$$

またβ_{jk}は次のマトリクスMの(j，k)に関する余因子として定義される.

$$M=\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} \tag{3-15}$$

以上示した(3-13a)～(3-13c)式は，物理平面上でのラプラスの方程式を計算平面上に変換した式であり，この式を解くことにより物理平面上の位置を計算平面上の位置に1対1に対応させることができ，かつ，ξ，η，ζ系は互いに直交した曲線座標系を形成することになる．これより計算平面上で，境界条件の設定，支配方程式の離散化などが容易となる．

3．3　境界適合座標系座標変換

3．3．1　運動方程式

乱流に対する運動方程式はレイノルズ応力を含めて以下のように記述される．式中のi，jはEinsteinの総和規約に従うものとする．

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\overline{u_i u_j}\right) \tag{3-16}$$

レイノルズ応力方程式に対しては次式により代表させ，レイノルズ応力を拡散項に組み入れ，解の安定性を図る．

$$-\overline{u_i u_j}=\left(\frac{b}{a}\right)_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\left(\frac{c}{a}\right)_{ij} \tag{3-17a}$$

さらに，

$$d_{ij}=\nu+\left(\frac{b}{a}\right)_{ij} \qquad e_{ij}=\left(\frac{c}{a}\right)_{ij} \tag{3-17b}$$

とすると，運動方程式は次のように書き換えられる．

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{d_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-e_{ij}\right\} \tag{3-18}$$

上式に対して物理平面から計算平面への座標変換を行なう．先に示した数学定理に従って座標変換を行なう．対流項に対しては，

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j}&=U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}=U_j\xi_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial \xi}+U_j\eta_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial \eta}+U_j\zeta_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial \zeta}\\&=\left(U_1\frac{\partial \xi}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial \xi}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial \xi}{\partial x_3}\right)\frac{\partial U_i}{\partial \xi}\\&+\left(U_1\frac{\partial \eta}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial \eta}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial \eta}{\partial x_3}\right)\frac{\partial U_i}{\partial \eta}\\&+\left(U_1\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial \zeta}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial \zeta}{\partial x_3}\right)\frac{\partial U_i}{\partial \zeta}\end{aligned} \tag{3-19}$$

ここで反変速度(contravariant　velocity)を

$$\mathbb{U}=U_1\frac{\partial \xi}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial \xi}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial \xi}{\partial x_3} \tag{3-20a}$$

$$\mathbb{V}=U_1\frac{\partial \eta}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial \eta}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial \eta}{\partial x_3} \tag{3-20b}$$

$$\mathbb{W}=U_1\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial \zeta}{\partial x_2}+U_3\frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \tag{3-20c}$$

と定義すると対流項は次のように定義される．この速度は，ξ，η，ζ 座標に沿う速度と解釈できる．

$$\frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j}=\mathbb{U}\frac{\partial U_i}{\partial \xi}+\mathbb{V}\frac{\partial U_i}{\partial \eta}+\mathbb{W}\frac{\partial U_i}{\partial \zeta} \tag{3-21}$$

圧力項に関しては次のように示される．

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\frac{\partial P}{\partial \xi}+\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial P}{\partial \eta}+\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\frac{\partial P}{\partial \zeta}\right) \tag{3-22}$$

拡散項に対する変換は次のように示される．

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{d_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-e_{ij}\right\}$$

$$=\xi_{xj}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{d_{ij}\left(\xi_{xj}^2\frac{\partial U_i}{\partial \xi}+\eta_{xj}^2\frac{\partial U_i}{\partial \eta}+\zeta_{xj}^2\frac{\partial U_i}{\partial \zeta}\right)-e_{ij}\right\}$$

$$+\eta_{xj}\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{d_{ij}\left(\xi_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial \xi}+\eta_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial \eta}+\zeta_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial \zeta}\right)-e_{ij}\right\}$$

$$+\zeta_{xj}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{d_{ij}\left(\xi_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial \xi}+\eta_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial \eta}+\zeta_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial \zeta}\right)-e_{ij}\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{(d_{i1}\xi_{x1}^2+d_{i2}\xi_{x2}^2+d_{i3}\xi_{x3}^2)\frac{\partial U_i}{\partial \xi}\right.$$

$$+(d_{i1}\xi_{x1}\eta_{x1}+d_{i2}\xi_{x2}\eta_{x2}+d_{i3}\xi_{x1}\eta_{x1})\frac{\partial U_i}{\partial \eta}$$

$$\left.+(d_{i1}\xi_{x1}\zeta_{x1}+d_{i2}\xi_{x2}\zeta_{x2}+d_{i3}\xi_{x3}\zeta_{x3})\frac{\partial U_i}{\partial \zeta}-\xi_{x3}e_{i3}-\xi_{x2}e_{i2}-\xi_{x1}e_{i1}\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{(d_{i1}\xi_{x1}\eta_{x1}+d_{i2}\xi_{x2}\eta_{x2}+d_{i3}\xi_{x3}\eta_{x3})\frac{\partial U_i}{\partial \xi}\right.$$

$$+(d_{i1}\eta_{x1}^2+d_{i2}\eta_{x2}^2+d_{i3}\eta_{x3}^2)\frac{\partial U_i}{\partial \eta}$$

$$\left.+(d_{i1}\eta_{x1}\zeta_{x1}+d_{i2}\eta_{x2}\zeta_{x2}+d_{i3}\eta_{x3}\zeta_{x3})\frac{\partial U_i}{\partial \zeta}-\eta_{x3}e_{i3}-\eta_{x2}e_{i2}-\eta_{x1}e_{i1}\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{(d_{i1}\zeta_{x1}\xi_{x1}+d_{i2}\zeta_{x2}\xi_{x2}+d_{i3}\zeta_{x3}\xi_{x3})\frac{\partial U_i}{\partial \xi}\right.$$

$$+(d_{i1}\zeta_{x1}\eta_{x1}+d_{i2}\zeta_{x2}\eta_{x2}+d_{i3}\zeta_{x3}\eta_{x3})\frac{\partial U_i}{\partial \eta}$$

$$\left.+(d_{i1}\zeta_{x1}^2+d_{i2}\zeta_{x2}^2+d_{i3}\zeta_{x3}^2)\frac{\partial U_i}{\partial \zeta}-\zeta_{x3}e_{i3}-\zeta_{x2}e_{i2}-\zeta_{x1}e_{i1}\right\} \tag{3-23}$$

式中のi, jは$i=1\sim3$，$j=1\sim3$ で変化し，$i=1,2,3$の順に各速度成分に対してはW，V，Uの順で，また座標軸系はz，y，xの順で対応している．以上より運動方程式を変換すると次のように示される．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U_i}{\partial t} \\
&+\frac{\partial}{\partial \xi}\{\mathbb{U}U_i+\frac{P}{\rho}\xi_{xi}-l_1 U_{i,\xi}-l_2 U_{i,\eta}-l_3 U_{i,\zeta}+\xi_x e_{i3}+\xi_y e_{i2}+\xi_z e_{i1}\} \\
&+\frac{\partial}{\partial \eta}\{\mathbb{V}U_i+\frac{P}{\rho}\xi_{xi}-l_2 U_{i,\xi}-l_4 U_{i,\eta}-l_5 U_{i,\zeta}+\eta_x e_{i3}+\eta_y e_{i2}+\eta_z e_{i1}\} \\
&+\frac{\partial}{\partial \zeta}\{\mathbb{W}U_i+\frac{P}{\rho}\xi_{xi}-l_3 U_{i,\xi}-l_5 U_{i,\eta}-l_6 U_{i,\zeta}+\zeta_x e_{i3}+\zeta_y e_{i2}+\zeta_z e_{i1}\} \\
&=\ 0
\end{aligned}
\tag{3-24}
$$

$$
\begin{aligned}
l_1&=d_{i3}\xi_{x3}^2+d_{i2}\xi_{x2}^2+d_{i1}\xi_{x1}^2 \\
l_2&=d_{i3}\xi_{x3}\eta_{x3}+d_{i2}\xi_{x2}\eta_{x2}+d_{i1}\xi_{x1}\eta_{x1} \\
l_3&=d_{i3}\xi_{x3}\zeta_{x3}+d_{i2}\xi_{x2}\zeta_{x2}+d_{i1}\xi_{x1}\zeta_{x1} \\
l_4&=d_{i3}\eta_{x3}^2+d_{i2}\eta_{x2}^2+d_{i1}\eta_{x1}^2 \\
l_5&=d_{i2}\eta_{x3}\zeta_{x3}+d_{i2}\eta_{x2}\zeta_{x2}+d_{i1}\eta_{x1}\zeta_{x1} \\
l_6&=d_{i3}\zeta_{x3}^2+d_{i2}\zeta_{x2}^2+d_{i1}\zeta_{x1}^2
\end{aligned}
\tag{3-25}
$$

$i=1$とすればz方向の速度Wに関する運動方程式を得ることができる．計量テンソルlを見れば解るように三次元の場合，9個の拡散係数が必要となる．

3．3．2　乱流エネルギー方程式

乱流エネルギー方程式は次のように示される．

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial k U_j}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\sigma x_j}\right)+G_s-\varepsilon \tag{3-26a}$$

$$G_s=\nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \tag{3-26b}$$

対流項に対しては，反変速度ベクトルを用いて次のように示される．

$$\frac{\partial k U_j}{\partial x_j}=\mathbb{U}\frac{\partial k}{\partial \xi}+\mathbb{V}\frac{\partial k}{\partial \eta}+\mathbb{W}\frac{\partial k}{\partial \zeta} \tag{3-27}$$

拡散項に対しては以下のように示される．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) \\
&=\frac{\nu_t}{\sigma_k}\xi_{xj}\frac{\partial}{\partial \xi}\{\xi_{xj}\frac{\partial k}{\partial \xi}+\eta_{xj}\frac{\partial k}{\partial \eta}+\zeta_{xj}\frac{\partial k}{\partial \zeta}\} \\
&+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\eta_{xj}\frac{\partial}{\partial \eta}\{\xi_{xj}\frac{\partial k}{\partial \xi}+\eta_{xj}\frac{\partial k}{\partial \eta}+\zeta_{xj}\frac{\partial k}{\partial \zeta}\} \\
&+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\zeta_{xj}\frac{\partial}{\partial \zeta}\{\xi_{xj}\frac{\partial k}{\partial \xi}+\eta_{xj}\frac{\partial k}{\partial \eta}+\zeta_{xj}\frac{\partial k}{\partial \zeta}\}
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial}{\partial\xi}\{\xi_{xj}^2\frac{\partial k}{\partial\xi}+\xi_{xj}\eta_{xj}\frac{\partial k}{\partial\eta}+\xi_{xj}\zeta_{xj}\frac{\partial k}{\partial\zeta}\}
$$

$$
+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial}{\partial\eta}\{\eta_{xj}\xi_{xj}\frac{\partial k}{\partial\xi}+\eta_{xj}^2\frac{\partial k}{\partial\eta}+\eta_{xj}\zeta_{xj}\frac{\partial k}{\partial\zeta}\}
$$

$$
+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial}{\partial\zeta}\{\zeta_{xj}\xi_{xj}\frac{\partial k}{\partial\xi}+\zeta_{xj}\eta_{xj}\frac{\partial k}{\partial\eta}+\zeta_{xj}^2\frac{\partial k}{\partial\zeta}\}
$$

$$
=\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial}{\partial\xi}\{(\xi_{x3}^2+\xi_{x2}^2+\xi_{x1}^2)\frac{\partial k}{\partial\xi}+(\xi_{x3}\eta_{x3}+\xi_{x2}\eta_{x2}+\xi_{x1}\eta_{x1})\frac{\partial k}{\partial\eta}
$$

$$
+(\xi_{x3}\zeta_{x3}+\xi_{x2}\zeta_{x2}+\xi_{x1}\zeta_{x1})\}\frac{\partial k}{\partial\zeta}
$$

$$
+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial}{\partial\eta}\{(\eta_{x3}\xi_{x3}+\eta_{x2}\xi_{x2}+\eta_{x1}\xi_{x1})\frac{\partial k}{\partial\xi}+(\eta_{x3}^2+\eta_{x2}^2+\eta_{x1}^2)\frac{\partial k}{\partial\eta}
$$

$$
+(\eta_{x3}\zeta_{x3}+\eta_{x2}\zeta_{x2}+\eta_{x1}\zeta_{x1})\frac{\partial k}{\partial\eta}\}
$$

$$
+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial}{\partial\zeta}\{(\zeta_{x3}\xi_{x3}+\zeta_{x2}\xi_{x2}+\zeta_{x1}\xi_{x1})\frac{\partial k}{\partial\xi}
$$

$$
+(\zeta_{x3}\eta_{x3}+\zeta_{x2}\eta_{x2}+\zeta_{x1}\eta_{x1})\frac{\partial k}{\partial\eta}+(\zeta_{x3}^2+\zeta_{x2}^2+\zeta_{x1}^2)\frac{\partial k}{\partial\zeta}\} \qquad (3\text{-}28)
$$

生成項に関しては次のように変換される．

$$
\nu_t(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i})\frac{\partial U_i}{\partial x_j}
$$

$$
=\nu_t(\xi_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial\xi}+\eta_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial\eta}+\zeta_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial\zeta}+\xi_{xi}\frac{\partial U_j}{\partial\xi}+\eta_{xi}\frac{\partial U_j}{\partial\eta}+\zeta_{xi}\frac{\partial U_j}{\partial\zeta})
$$

$$
\times(\xi_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial\xi}+\eta_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial\eta}+\zeta_{xj}\frac{\partial U_i}{\partial\zeta}) \qquad (3\text{-}29)
$$

以上整理すると，

$$
\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\xi}\{Uk-\frac{\nu_t}{\sigma_k}(g_1k_\xi+g_2k_\eta+g_3k_\zeta)\}
$$

$$
+\frac{\partial}{\partial\eta}\{Vk-\frac{\nu_t}{\sigma_k}(g_2k_\xi+g_4k_\eta+g_5k_\zeta)\}
$$

$$
+\frac{\partial}{\partial\zeta}\{Wk-\frac{\nu_t}{\sigma_k}(g_3k_\xi+g_5k_\eta+g_6k_\zeta)\}-G_s-\varepsilon=0 \qquad (3\text{-}30)
$$

$$
g_1=\xi_{x3}^2+\xi_{x2}^2+\xi_{x1}^2 \qquad g_2=\xi_{x3}\eta_{x3}+\xi_{x2}\eta_{x2}+\xi_{x1}\eta_{x1}
$$

$$
g_3=\xi_{x3}\zeta_{x3}+\xi_{x2}\zeta_{x2}+\xi_{x1}\zeta_{x1} \qquad g_4=\eta_{x3}^2+\eta_{x2}^2+\eta_{x1}^2 \qquad (3\text{-}31)
$$

$$
g_5=\eta_{x3}\zeta_{x3}+\eta_{x2}\zeta_{x2}+\eta_{x1}\zeta_{x1} \qquad g_6=\zeta_{x3}^2+\zeta_{x2}^2+\zeta_{x1}^2
$$

3．3．3　乱流散逸方程式

乱流散逸方程式は次のように示される．

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon U_j}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right)+c_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}G_s-c_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k} \tag{3-32a}$$

$$G_s=\nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \tag{3-32b}$$

対流項，拡散項の座標変換は，乱流エネルギー方程式の場合と同一であることより，全体では次のように整理できる．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{U\varepsilon-\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\left(g_1\varepsilon_\xi+g_2\varepsilon_\eta+g_3\varepsilon_\zeta\right)\right\}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{V\varepsilon-\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\left(g_2\varepsilon_\xi+g_4\varepsilon_\eta+g_5\varepsilon_\zeta\right)\right\}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{W\varepsilon-\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\left(g_3\varepsilon_\xi+g_5\varepsilon_\eta+g_6\varepsilon_\zeta\right)\right\}\\
&\quad-c_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}G_s+c_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}=0
\end{aligned} \tag{3-33}$$

ここで計量テンソルのg_1～g_6は乱流エネルギー方程式と同一に定義されたものである．

3．3．4　圧力補正方程式

圧力の解法に関しては，運動方程式より圧力に関する方程式を導出し離散化することにより圧力に関する解を得る事ができる．運動方程式を各座標軸方向にて微分すると次の関係式を得る．

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \tag{3-34a}$$

上式において$\partial U_i/\partial x_i$は連続の式であるが，（n＋1）時刻の連続の式を0とすると，右辺第1項は次のように示される．

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)&=-\left\{\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)^{n+1}-\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)^{n}\right\}\frac{1}{\Delta t}\\
&=\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)^{n}\frac{1}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{3-34b}$$

さらに(3-34a)式中の右辺第2項を無視すると次の圧力に関するポアソン方程式を得る．

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}=\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)^{n}\frac{1}{\Delta t} \tag{3-35a}$$

この(3-35a)式に対し計算平面上への変換を行なうと，左辺第1項および右辺は，次のように示される．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}&=\frac{1}{\rho}\left(\xi_{xi}\frac{\partial}{\partial \xi}+\eta_{xi}\frac{\partial}{\partial \eta}+\eta_{xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\xi_{xi}\frac{\partial P}{\partial \xi}+\eta_{xi}\frac{\partial P}{\partial \eta}+\eta_{xi}\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)\\
&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\xi_{xi}^2\frac{\partial P}{\partial \xi}+\xi_{xi}\eta_{xi}\frac{\partial P}{\partial \eta}+\xi_{xi}\zeta_{xi}\frac{\partial P}{\partial \zeta}\right\}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\{\eta_{xi}\xi_{xi}\frac{\partial P}{\partial\xi}+\ \eta_{xi}^{2}\frac{\partial P}{\partial\eta}+\eta_{xi}\zeta_{xi}\frac{\partial P}{\partial\zeta}\ \}$$

$$+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\zeta}\ \{\zeta_{xi}\xi_{xi}\frac{\partial P}{\partial\xi}+\zeta_{xi}\eta_{xi}\frac{\partial P}{\partial\eta}+\ \zeta_{xi}^{2}\frac{\partial P}{\partial\zeta}\ \} \quad (3\text{-}35b)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\ (\frac{\partial U_i}{\partial x_i})=\frac{1}{\Delta t}(\xi_{xi}\frac{\partial U_i}{\partial\xi}+\eta_{xi}\frac{\partial U_i}{\partial\eta}\ +\zeta_{xi}\frac{\partial U_i}{\partial\zeta}) \quad (3\text{-}35c)$$

以上変換式を整理すると次のように示される．

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\xi}\{g_1P_\xi+g_2P_\eta+g_3P_\zeta-\frac{\rho}{\Delta t}\xi_{xi}U_{xi}\}$$

$$+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\{g_2P_\xi+g_4P_\eta+g_5P_\zeta-\frac{\rho}{\Delta t}\eta_{xi}U_{xi}\}$$

$$+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\zeta}\{g_3P_\xi+g_5P_\eta+g_6P_\zeta-\frac{\rho}{\Delta t}\zeta_{xi}U_{xi}\}=0 \quad (3\text{-}36)$$

上式中，計量テンソル g は，エネルギー方程式中で定義したものと同一であり，また式中の記号はEinsteinの総和規約に順ずる．

3．3．5　レイノルズ応力方程式

モデル化されたレイノルズ応力方程式を次に示す．モデル化の詳細は第２章に詳述されているように，従来のモデルに改良を加えたものを対象とする．

$$\frac{\overline{u_iu_j}}{k}(P_k-\varepsilon)=P_{ij}-c_1\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_iu_j}-\frac{2}{3}k\delta_{ij})-(\alpha+\beta)(P_{ij}-\frac{2}{3}P_k\delta_{ij})$$

$$+\zeta k(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i})+(4\beta+\alpha)(D_{ij}-\frac{2}{3}P_k\delta_{ij})-\frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \quad (3\text{-}37a)$$

$$P_{ij}=-\overline{u_iu_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}-\overline{u_ju_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (3\text{-}37b)$$

$$D_{ij}=-\overline{u_iu_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}-\overline{u_ju_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \quad (3\text{-}37c)$$

$$P_k=-\overline{u_ku_i}\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \quad (3\text{-}37d)$$

上式中変換の必要となる項は，速度勾配を含む項であり，数学定理

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\zeta} \quad (3\text{-}38)$$

より各速度勾配を計算平面上に変換する．

また，運動方程式中に表われるレイノルズ応力を拡散係数の一部として取り込んだ際の各応力の係数$(b/a)_{ij}$は，上式のレイノルズ応力方程式を書き改めることより次のように定義される．式中$x_1=z$，$x_2=y$，$x_3=x$，$U_1=W$，$U_2=V$，$U_3=U$，$u_1=w$，$u_2=v$，$u_3=u$に相当する．

$$(\frac{b}{a})_{11}=\frac{1}{(P_k/\varepsilon)-1+c_1}\{\frac{2k}{\varepsilon}(1+3\beta)\overline{u_1^2}+\frac{2\zeta}{\varepsilon}k^2\} \quad (3\text{-}39a)$$

$$(\frac{b}{a})_{22}=\frac{1}{(P_k/\varepsilon)-1+c_1}\{\frac{2k}{\varepsilon}(1+3\beta)\overline{u_2^2}+\frac{2\zeta}{\varepsilon}k^2\} \quad (3\text{-}39b)$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)_{33}=\frac{1}{(P_k/\varepsilon)-1+c_1}\left\{\frac{2k}{\varepsilon}(1+3\beta)\overline{u_3^2}+\frac{2\zeta}{\varepsilon}k^2\right\} \tag{3-39c}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)_{23}=\left\{\frac{P_k}{\varepsilon}-1+c_1+\frac{k}{\varepsilon}(1+3\beta)\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)\right\}^{-1}\cdot$$
$$\left\{\frac{k}{\varepsilon}(1-\alpha-\beta)\overline{u_3^2}+\frac{k}{\varepsilon}(4\beta+\alpha)\overline{u_2^2}+\frac{\zeta k^2}{\varepsilon}\right\} \tag{3-39d}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)_{32}=\left\{\frac{P_k}{\varepsilon}-1+c_1+\frac{k}{\varepsilon}(1+3\beta)\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)\right\}^{-1}\cdot$$
$$\left\{\frac{k}{\varepsilon}(1-\alpha-\beta)\overline{u_2^2}+\frac{k}{\varepsilon}(4\beta+\alpha)\overline{u_3^2}+\frac{\zeta k^2}{\varepsilon}\right\} \tag{3-39e}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)_{13}=\left\{\frac{P_k}{\varepsilon}-1+c_1+\frac{k}{\varepsilon}(1+3\beta)\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3}+\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)\right\}^{-1}\cdot$$
$$\left\{\frac{k}{\varepsilon}(1-\alpha-\beta)\overline{u_3^2}+\frac{k}{\varepsilon}(4\beta+\alpha)\overline{u_1^2}+\frac{\zeta k^2}{\varepsilon}\right\} \tag{3-39f}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)_{31}=\left\{\frac{P_k}{\varepsilon}-1+c_1+\frac{k}{\varepsilon}(1+3\beta)\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3}+\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)\right\}^{-1}\cdot$$
$$\left\{\frac{k}{\varepsilon}(1-\alpha-\beta)\overline{u_1^2}+\frac{k}{\varepsilon}(4\beta+\alpha)\overline{u_3^2}+\frac{\zeta k^2}{\varepsilon}\right\} \tag{3-39g}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)_{12}=\left\{\frac{P_k}{\varepsilon}-1+c_1+\frac{k}{\varepsilon}(1+3\beta)\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)\right\}^{-1}\cdot$$
$$\left\{\frac{k}{\varepsilon}(1-\alpha-\beta)\overline{u_2^2}+\frac{k}{\varepsilon}(4\beta+\alpha)\overline{u_1^2}+\frac{\zeta k^2}{\varepsilon}\right\} \tag{3-39h}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)_{21}=\left\{\frac{P_k}{\varepsilon}-1+c_1+\frac{k}{\varepsilon}(1+3\beta)\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)\right\}^{-1}\cdot$$
$$\left\{\frac{k}{\varepsilon}(1-\alpha-\beta)\overline{u_1^2}+\frac{k}{\varepsilon}(4\beta+\alpha)\overline{u_2^2}+\frac{\zeta k^2}{\varepsilon}\right\} \tag{3-39i}$$

3．3．6　エネルギー方程式

エネルギー方程式は，運動方程式同様，乱流熱流束を用いて次のように示される．

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial U_j T}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\partial T}{\partial x_j}-\overline{u_j T'}\right) \tag{3-40}$$

乱流熱流束$-\overline{u_j T'}$に対しては，レイノルズ応力方程式にて示したと同様，次式により乱流熱流束を代表させ拡散項の一部としてエネルギー方程式中に組み入れ数値計算を行なうものとする．すなわち

$$-\overline{u_j T'}=\left(\frac{b}{a}\right)_j\frac{\partial T}{\partial x_j}-\left(\frac{c}{a}\right)_j \tag{3-41a}$$

さらに，

$$d_{jT}=\frac{\lambda}{\rho cp}+\left(\frac{b}{a}\right)_j \qquad e_{jT}=\left(\frac{c}{a}\right)_j \tag{3-41b}$$

とするとエネルギー方程式は次のように示される．

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial U_j T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(d_{jT}\frac{\partial T}{\partial x_j}-e_{jT}\right) \tag{3-42}$$

対流項に対しては，

$$\frac{\partial U_j T}{\partial x_j} = \mathbb{U}\frac{\partial T}{\partial \xi}+\mathbb{V}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\mathbb{W}\frac{\partial T}{\partial \zeta} \tag{3-43}$$

拡散項に対しては，次のように変換される．

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(d_{jT}\frac{\partial T}{\partial x_j}-e_{jT}\right)$$

$$=\xi_{xj}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{d_{jT}\left(\xi_{xj}\frac{\partial T}{\partial \xi}+\eta_{xj}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\zeta_{xj}\frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)-e_{jT}\right\}$$

$$+\eta_{xj}\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{d_{jT}\left(\xi_{xj}\frac{\partial T}{\partial \xi}+\eta_{xj}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\zeta_{xj}\frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)-e_{jT}\right\}$$

$$+\zeta_{xj}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{d_{jT}\left(\xi_{xj}\frac{\partial T}{\partial \xi}+\eta_{xj}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\zeta_{xj}\frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)-e_{jT}\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial \xi}\{(d_{1T}\xi_{x1}^2+d_{2T}\xi_{x2}^2+d_{3T}\xi_{x3}^2)\frac{\partial T}{\partial \xi}$$

$$+(d_{1T}\xi_{x1}\eta_{x1}+d_{2T}\xi_{x2}\eta_{x2}+d_{3T}\xi_{x3}\eta_{x3})\frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$+(d_{1T}\xi_{x1}\zeta_{x1}+d_{2T}\xi_{x2}\zeta_{x2}+d_{3T}\xi_{x3}\zeta_{x3})\frac{\partial T}{\partial \zeta}-\xi_{x3}e_{3T}-\xi_{x2}e_{2T}-\xi_{x1}e_{1T}\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \eta}\{(d_{1T}\eta_{x1}\xi_{x1}+d_{2T}\eta_{x2}\xi_{x2}+d_{3T}\eta_{x3}\xi_{x3})\frac{\partial T}{\partial \xi}$$

$$+(d_{1T}\eta_{x1}^2+d_{2T}\eta_{x2}^2+d_{3T}\eta_{x3}^2)\frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$+(d_{1T}\eta_{x1}\zeta_{x1}+d_{2T}\eta_{x2}\zeta_{x2}+d_{3T}\eta_{x3}\zeta_{x3})\frac{\partial T}{\partial \zeta}-\eta_{x3}e_{3T}-\eta_{x2}e_{2T}-\eta_{x1}e_{1T}\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \eta}\{(d_{1T}\zeta_{x1}\xi_{x1}+d_{2T}\zeta_{x2}\xi_{x2}+d_{3T}\zeta_{x3}\xi_{x3})\frac{\partial T}{\partial \xi}$$

$$+(d_{1T}\zeta_{x1}\eta_{x1}+d_{2T}\zeta_{x2}\eta_{x2}+d_{3T}\zeta_{x3}\eta_{x3})\frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$+(d_{1T}\zeta_{x1}^2+d_{2T}\zeta_{x2}^2+d_{3T}\zeta_{x3}^2)\frac{\partial T}{\partial \zeta}-\zeta_{x3}e_{3T}-\zeta_{x2}e_{2T}-\zeta_{x1}e_{1T}\} \tag{3-44}$$

従ってエネルギー方程式に対する変換式は次のように示される．

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}\{\mathbb{U}T-m_1T_\xi-m_2T_\eta-m_3T_\zeta+\xi_{x3}e_{3T}+\xi_{x2}e_{2T}+\xi_{x1}e_{1T}\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \eta}\{\mathbb{V}T-m_2T_\xi-m_4T_\eta-m_5T_\zeta+\eta_{x3}e_{3T}+\eta_{x2}e_{2T}+\eta_{x1}e_{1T}\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \zeta}\{\mathbb{W}T-m_3T_\xi-m_5T_\eta-m_6T_\zeta+\zeta_{x3}e_{3T}+\zeta_{x2}e_{2T}+\zeta_{x1}e_{1T}\}$$

(3-45)

上式に於いて計量テンソルm は，次のように示される．

$$m_1=d_{3T}\xi_{x3}^2+d_{2T}\xi_{x2}^2+d_{1T}\xi_{x1}^2 \qquad m_2=d_{3T}\xi_{x3}\eta_{x3}+d_{2T}\xi_{x2}\eta_{x2}+d_{1T}\xi_{x1}\eta_{x1}$$

$$m_3=d_{3T}\xi_{x3}\zeta_{x3}+d_{T}\xi_{x2}\zeta_{x2}+d_{1T}\xi_{x1}\zeta_{x1} \qquad m_4=d_{2T}\eta_{x3}^2+d_{2T}\eta_{x2}^2+d_{1T}\eta_{x1}^2$$

$$m_5=d_{2T}\eta_{x3}\zeta_{x3}+d_{2T}\eta_{x2}\zeta_{x2}+d_{1T}\eta_{x1}\zeta_{x1} \qquad m_6=d_{2T}\zeta_{x3}^2+d_{2T}\zeta_{x2}^2+d_{1T}\zeta_{x1}^2 \tag{3-46}$$

計量テンソルは拡散係数を掛けたものとして表わされ，運動方程式と同様であるが，運動方程式の場合９個の拡散係数により代表されたのに対し，エネルギー方程式の場合は３個の拡散係数が必要となる点で異なる．

３．３．７　乱流熱流束方程式

乱流熱流束方程式もレイノルズ応力方程式同様モデル化が必要となる．モデル化された方程式（付録-B参照）は次に示す通りである．

$$\begin{aligned}\frac{\overline{u_iT'}}{2k}(P_k-\varepsilon)=&-\overline{u_iu_j}\frac{\partial T}{\partial x_j}-\overline{u_jT'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\\&-c_{1T}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_iT'}-c'_{1T}\frac{\varepsilon}{k}\left(\frac{\overline{u_iu_j}}{k}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\right)\overline{u_jT'}\\&+c_{2T}\overline{u_jT'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-c'_{2T}\overline{u_jT'}\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\end{aligned} \tag{3-47a}$$

$$P_k=-\overline{u_ku_l}\frac{\partial U_k}{\partial x_l} \tag{3-47b}$$

式中に表われる速度勾配，温度勾配は次の数学定理により計算平面に変換する．

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{3-48}$$

エネルギー方程式に乱流熱流束を組み入れる場合は，前述のように拡散係数の一部として取り扱うが，その値は以下の通りに示される．

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{a}\right)_{1T}=\overline{u_1^2}\frac{k}{\varepsilon}\Big\{&\frac{1}{2}\left(\frac{P_k}{\varepsilon}-1\right)+\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{k}{\varepsilon}\\&+c_{1T}+c'_{1T}\left(\frac{\overline{u_1^2}}{k}-\frac{2}{3}\right)-c_{2T}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+c'_{2T}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{k}{\varepsilon}\Big\}^{-1}\end{aligned} \tag{3-49a}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{a}\right)_{2T}=\overline{u_2^2}\frac{k}{\varepsilon}\Big\{&\frac{1}{2}\left(\frac{P_k}{\varepsilon}-1\right)+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\frac{k}{\varepsilon}\\&+c_{1T}+c'_{1T}\left(\frac{\overline{u_2^2}}{k}-\frac{2}{3}\right)-c_{2T}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+c'_{2T}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\frac{k}{\varepsilon}\Big\}^{-1}\end{aligned} \tag{3-49b}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{a}\right)_{3T}=\overline{u_3^2}\frac{k}{\varepsilon}\Big\{&\frac{1}{2}\left(\frac{P_k}{\varepsilon}-1\right)+\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\frac{k}{\varepsilon}\\&+c_{1T}+c'_{1T}\left(\frac{\overline{u_3^2}}{k}-\frac{2}{3}\right)-c_{2T}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}+c'_{2T}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\frac{k}{\varepsilon}\Big\}^{-1}\end{aligned} \tag{3-49c}$$

3．3．8　温度変動輸送方程式

温度変動方程式に対しては，種々のモデル化が提唱されているが，次式（付録-8参照）により温度変動を求めるものとする．

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t}+\frac{\partial U_j\overline{T'^2}}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\{c\psi\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_iu_j}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_i}\}-2\overline{u_jT'}\frac{\partial T}{\partial x_j}-2\varepsilon_T \tag{3-50}$$

右辺第1項は拡散項を，第2項は生成項を，第3項は散逸項を示す．対流項に対しては，次のように変換される．

$$\frac{\partial U_j\overline{T'^2}}{\partial x_j}=\mathbb{U}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial \xi}+\mathbb{V}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial \eta}+\mathbb{W}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial \zeta} \tag{3-51}$$

拡散項に対しては，次のように変換される．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_j}\{c\psi\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_ju_i}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_i}\}\\
&=c\psi\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \xi}\{\overline{u_ju_i}(\xi_{xj}\xi_{xi}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial \xi}+\xi_{xj}\eta_{xi}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial \eta}+\xi_{xj}\zeta_{xi}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial \zeta})\}\\
&+c\psi\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \eta}\{\overline{u_ju_i}(\eta_{xj}\xi_{xi}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial \xi}+\eta_{xj}\eta_{xi}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial \eta}+\eta_{xj}\zeta_{xi}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial \zeta})\}\\
&=c\psi\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \zeta}\{\overline{u_ju_i}(\zeta_{xj}\xi_{xi}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial \xi}+\zeta_{xj}\eta_{xi}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial \eta}+\zeta_{xj}\zeta_{xi}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial \zeta})\}
\end{aligned} \tag{3-52}$$

生成項に対しては，

$$\begin{aligned}
&2\overline{u_jT'}\frac{\partial T}{\partial x_j}\\
&=2\overline{u_jT'}\{\xi_{xj}\frac{\partial T}{\partial \xi}+\eta_{xj}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\zeta_{xj}\frac{\partial T}{\partial \zeta}\}
\end{aligned} \tag{3-53}$$

以上整理すると，次のように変換式は示される．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}\{\mathbb{U}\overline{T'^2}-c\psi\frac{k}{\varepsilon}(n_1\overline{T'^2}_\xi+n_2\overline{T'^2}_\eta+n_3\overline{T'^2}_\zeta)+2\overline{u_jT'}\xi_{xj}T\}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial \eta}\{\mathbb{V}\overline{T'^2}-c\psi\frac{k}{\varepsilon}(n_2\overline{T'^2}_\xi+n_4\overline{T'^2}_\eta+n_5\overline{T'^2}_\zeta)+2\overline{u_jT'}\eta_{xj}T\}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial \zeta}\{\mathbb{W}\overline{T'^2}-c\psi\frac{k}{\varepsilon}(n_3\overline{T'^2}_\xi+n_5\overline{T'^2}_\eta+n_6\overline{T'^2}_\zeta)+2\overline{u_jT'}\zeta_{xj}T\}\\
&\quad+2\varepsilon_T=0
\end{aligned} \tag{3-54}$$

ここで計量テンソルn_iは，次のように示される．

$$\begin{aligned}
&n_1=u_ju_i\xi_{xj}\xi_{xi} && n_2=u_ju_i\xi_{xj}\eta_{xi}\\
&n_3=u_ju_i\xi_{xj}\zeta_{xi} && n_4=u_ju_i\eta_{xj}\eta_{xi}\\
&n_5=u_ju_i\zeta_{xj}\eta_{xi} && n_6=u_ju_i\zeta_{xj}\zeta_{xi}
\end{aligned} \tag{3-55}$$

上記の各計量テンソルはEinsteinの総和規約に従がい，例えば，n_1は具体的に次のように示される．

$$
\begin{aligned}
n_1 = {} & \overline{u_1^2}\,\xi_{x1}^2 + \overline{u_1 u_2}\,\xi_{x2}\xi_{x1} + \overline{u_1 u_3}\,\xi_{x1}\xi_{x3} \\
& + \overline{u_2 u_1}\,\xi_{x2}\xi_{x1} + \overline{u_2^2}\,\xi_{x2}^2 + \overline{u_2 u_3}\,\xi_{x2}\xi_{x3} \\
& + \overline{u_3 u_1}\,\xi_{x3}\xi_{x1} + \overline{u_3 u_2}\,\xi_{x3}\xi_{x2} + \overline{u_3^2}\,\xi_{x3}^2
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}56)
$$

3．3．9　温度散逸輸送方程式

温度散逸に対する輸送方程式は次のモデル化された式（付録-B参照）に対して座標変換を行なう．

$$
\frac{\partial \varepsilon_T}{\partial t} + \frac{\partial U_i \varepsilon_T}{\partial x_i} = -c_{\varepsilon T1}\frac{2\overline{u_i T'}}{\overline{T'^2}}\frac{\partial T}{\partial x_i}\varepsilon_T - c_{\varepsilon T2}\frac{\varepsilon}{k}\varepsilon_T - c_{\varepsilon T3}\frac{\varepsilon_T^2}{\overline{T'^2}} \qquad (3\text{-}57)
$$

変換された式は次のように示される．

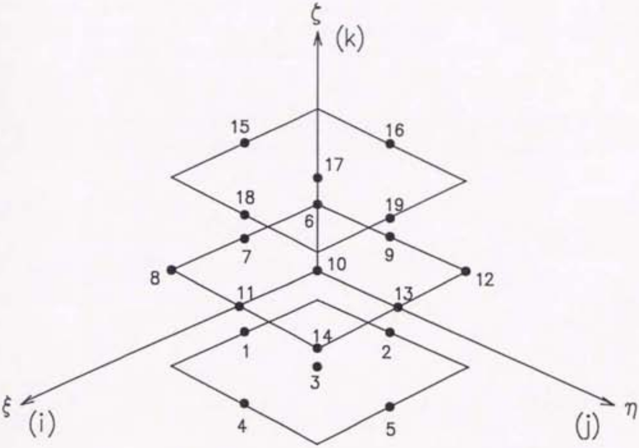
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_T}{\partial t} & + \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{U\varepsilon_T + c_{\varepsilon T1}\frac{\varepsilon_T}{\overline{T'^2}}\left(2\overline{u_1 T'}\xi_{x1} + 2\overline{u_2 T'}\xi_{x2} + 2\overline{u_3 T'}\xi_{x3}\right)T\right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{V\varepsilon_T + c_{\varepsilon T1}\frac{\varepsilon_T}{\overline{T'^2}}\left(2\overline{u_1 T'}\eta_{x1} + 2\overline{u_2 T'}\eta_{x2} + 2\overline{u_3 T'}\eta_{x3}\right)T\right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{W\varepsilon_T + c_{\varepsilon T1}\frac{\varepsilon_T}{\overline{T'^2}}\left(2\overline{u_1 T'}\zeta_{x1} + 2\overline{u_2 T'}\zeta_{x2} + 2\overline{u_3 T'}\zeta_{x3}\right)T\right\} \\
& + c_{\varepsilon T2}\frac{\varepsilon}{k}\varepsilon_T + c_{\varepsilon T3}\frac{\varepsilon_T^2}{\overline{T'^2}} = 0
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}58)
$$

3．4　境界適合座標系における離散化

3．4．1　コントロール・ボリューム

境界適合座標系を用いた本解析の，コントロール・ボリュームを図3-2に示す．計算格子点(i,j,k)を中心としてその周りに18個の格子点を配置したコントロール・ボリュームを定義して計算を行なった．図3-2に示すように座標変換した計算平面上では各座標軸ξ，η，ならびにζは直交座標となり，境界条件の設定，並びに離散式の定義が容易となり，境界適合座標系の特徴である．

計算諸量の格子点への配置手法については，スカラー量とベクトル量の物理量を各々格子の異なる位置に配置するStaggered Grid法によるものと，諸物理量を１つの格子点で代表させるRegular Grid法によるものとがあるが，本数値解析においては，後者の Regular Grid 法を用いて計算を行った．Staggered Grid法は，圧力に関するポアソン方程式を解く際に，圧力値がチェッカー・ボード状のように，１つ跳びに同じ値を繰り返す誤まった圧力解を避けるため導入された方法であるが，一方において，境界適合座標系を用い，かつ格子にStaggered Gridを採用しても，チェッカー・ボード状圧力エラーが発生したため，Regular Gridを用いて計算を行なったという武本(1986)の報告もある．



1 (i, j−1, k−1)
2 (i−1, j, k−1)
3 (i, j, k−1)
4 (i+1, j, k−1)
5 (i, j+1, k−1)
6 (i−1, j−1, k)
7 (i, j−1, k)
8 (i+1, j−1, k)
9 (i−1, j, k)
10 (i, j, k)
11 (i+1, j, k)
12 (i−1, j+1, k)
13 (i, j+1, k)
14 (i+1, j+1, k)
15 (i, j−1, k+1)
16 (i−1, j, k+1)
17 (i, j, k+1)
18 (i+1, j, k+1)
19 (i, j+1, k+1)

図3-2　境界適合座標系によるコントロール・ボリュームの定義

3．4．2　対流項に対する離散化

対流項に対する離散化に対しては，従来より種々の方法が提案されているがここでは，河村(1984)により提唱されたスキーム，およびLeonard(1979)により提唱されたＱＵＩＣＫ(Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) スキームについて検討する．対流項は先に示したように，計算平面上では次のように示される．

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\mathbb{U}\phi)+\frac{\partial}{\partial \eta}(\mathbb{V}\phi)+\frac{\partial}{\partial \zeta}(\mathbb{W}\phi) \tag{3-59}$$

ϕは，流速，温度などに代表される従属変数であり，$\mathbb{U}$，$\mathbb{V}$，$\mathbb{W}$は反変速度成分である．一般に二次元座標における非線形項に対する二次精度の風上差分は次のように示される．

$$\left(A\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_{ij}=\begin{cases} A_{i+1/2,j}\dfrac{3\phi(i,j)-4\phi(i-1,j)+\phi(i-2,j)}{2\Delta h} & A_{i+1/2,j}>0 \\ A_{i+1/2,j}\dfrac{-3\phi(i,j)+4\phi(i+1,j)-\phi(i+2,j)}{2\Delta h} & A_{i+1/2,j}<0 \end{cases} \tag{3-60}$$

上式は次の関係式を用いると，一つの式に置き換えることができる．

$$\frac{A+|A|}{2}=\begin{cases} A & A>0 \\ 0 & A<0 \end{cases} \tag{3-61a}$$

$$\frac{A-|A|}{2}=\begin{cases} 0 & A>0 \\ A & A<0 \end{cases} \tag{3-61b}$$

すなわち

$$\left(A\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_{ij}=A_{i+1/2,j}\frac{-\phi(i+2,j)+4(\phi(i+1,j)-\phi(i-1,j))+\phi(i-2,j)}{4\Delta h}$$
$$+|A_{i+1/2,j}|\frac{\phi(i+2,j)-4\phi(i+1,j)+6\phi(i,j)-4\phi(i-1,j)+\phi(i+2,j)}{4\Delta h} \tag{3-62}$$

ここでjを固定して

$$\phi_{i-2}=\phi_i-2\Delta h\,\phi_i'+2(\Delta h)^2\phi_i''-\frac{4}{3}(\Delta h)^3\phi_i'''+ \tag{3-63a}$$

$$\phi_{i-1}=\phi_i-\Delta h\,\phi_i'+\frac{(\Delta h)^2}{2}\phi_i''-\frac{(\Delta h)^3}{6}\phi_i'''+ \tag{3-63b}$$

$$\phi_{i+1}=\phi_i+\Delta h\,\phi_i'+\frac{(\Delta h)^2}{2}\phi_i''+\frac{(\Delta h)^3}{6}\phi_i'''+ \tag{3-63c}$$

$$\phi_{i+2}=\phi_i+2\Delta h\,\phi_i'+2(\Delta h)^2\phi_i''+\frac{4(\Delta h)^3}{3}\phi_i'''+ \tag{3-63d}$$

として(3-62)式の右辺第１項に代入すると

$$\frac{A_{i+1/2,j}}{4\Delta h}\left(4\Delta h\,\phi_i'-\frac{4}{3}(\Delta h)^3\phi_i'''+\cdots\right)=A_{i+1/2,j}\left(\phi_i'-\frac{(\Delta h)^3}{3}\phi_i'''+\cdots\right. \tag{3-64}$$

同様に第２項に対しては，

$$|A_{i+1-2,j}|(\Delta h)^3\phi_i''''+\cdots \tag{3-65}$$

これより第1項には3階の微分を含み減衰の働きがなく数値的に不安定となることが解る。そこで第1項に対しては、次の差分式を用いる。

$$A_{i+1/2,j}\ \frac{-\phi(i+2,j)+8(\phi(i+1,j)-\phi(i-1,j))+\phi(i-2,j)}{12\Delta h} \tag{3-66}$$

この差分式に置き換えることにより、数値的に不安定となる3階の微分が消えて安定となる。以上の考察により河村は次のような差分スキームを提示した。

$$\left(A\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_{i,j}=A_{i+1/2,j}\ \frac{-\phi(i+2,j)+8(\phi(i+1,j)-\phi(i-1,j))+\phi(i-2,j)}{12\Delta h}$$
$$+\,|A_{i+1/2,j}|\ \frac{\phi(i+2,j)-4\phi(i+1,j)+6\phi(i,j)-4\phi(i-1,j)+\phi(i-2,j)}{4\Delta h} \tag{3-67}$$

このスキームは3次の精度（Δh^3）を持ち，誤差の要因として4次微分を含む．4次微分は拡散項に表われる2次微分同様拡散の効果を待ち，高波数成分ほど有効に落とす働きをし，従って非線形項より発生する高波数成分を有効に落とすものと考えられる．このことは比較的粗い格子を用いても安定した解が得られることを示唆している．

このスキームを対流項を示す(3-59)式に適用すると各項は次のように示される．ただし式中の表記法としては ϕ_{ijk} は ϕ（i,j,k），ϕ_{j+1} は ϕ（i,j+1,k）を示し，変化のない変数は式が繁雑となるため式が理解できる範囲で省略するものとした．

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(U\phi)=U_{i+1/2}\ \frac{-\phi_{i+2}+8(\phi_{i+1}-\phi_{i-1})+\phi_{i-2}}{12\Delta \xi}$$
$$+\,|U_{i+1/2}|\ \frac{\phi_{i+2}-4\phi_{i+1}+6\phi_{ijk}-4\phi_{i-1}+\phi_{i-2}}{4\Delta \xi} \tag{3-68a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(V\phi)=V_{j+1/2}\ \frac{-\phi_{j+2}+8(\phi_{j+1}-\phi_{j-1})+\phi_{j-2}}{12\Delta \eta}$$
$$+\,|V_{j+1/2}|\ \frac{\phi_{j+2}-4\phi_{j+1}+6\phi_{ijk}-4\phi_{j-1}+\phi_{j-2}}{4\Delta \eta} \tag{3-68b}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(W\phi)=W_{k+1/2}\ \frac{-\phi_{k+2}+8(\phi_{k+1}-\phi_{k-1})+\phi_{k-2}}{12\Delta \zeta}$$
$$+\,|W_{k+1/2}|\ \frac{\phi_{k+2}-4\phi_{k+1}+6\phi_{ijk}-4\phi_{k-1}+\phi_{k-2}}{4\Delta \zeta} \tag{3-68c}$$

ＱＵＩＣＫスキームは一般に次のようにして導出される．いま関数 $\phi(\xi)$ をTaylor展開すれば

$$\phi(\xi)=\phi_i+\phi_i'(\xi-\xi_i)+\frac{1}{2}\phi_i''(\xi-\xi_i)^2+\cdots\cdots \tag{3-69a}$$

ϕ_i', ϕ_i'' を次のように近似する．

$$\phi_i'=\frac{\phi_{i+1}-\phi_{i-1}}{2\Delta h} \qquad \phi_i''=\frac{\phi_{i-1}-2\phi_i+\phi_{i+1}}{\Delta h} \tag{3-69b}$$

これより(3-69a)式を書き換えると

$$\phi(\xi)=\phi_i+\frac{\phi_{i+1}-\phi_{i-1}}{2\Delta h}(\xi-\xi_i)+\frac{\phi_{i-1}-2\phi_i+\phi_{i+1}}{2\Delta h}(\xi-\xi_i)^2+\cdots\cdots \tag{3-69c}$$

ここで$q=(\xi-\xi_i)/\Delta h$，（Δhは格子間隔）とすれば

$$\phi(\xi_i+q\Delta h)=\phi_i+\frac{q}{2}(\phi_{i+1}-\phi_{i-1})+\frac{q^2}{2}(\phi_{i-1}-2\phi_i+\phi_{i+1}) \qquad (3\text{-}69d)$$

であり$q=1/2$とすれば，すなわち，格子間隔の真中に位置する従属変数の値は次のように定義される．

$$\phi_{i+1/2}=\phi_i+\frac{1}{2}(\phi_{i+1}-\phi_i)-\frac{1}{8}(\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1})$$

$$=\frac{\phi_{i+1}+\phi_i}{2}-\frac{1}{8}(\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1}) \qquad A_{i+1/2,j}>0 \qquad (3\text{-}70a)$$

$$\phi_{i+1/2}=\frac{\phi_{i+1}+\phi_i}{2}-\frac{1}{8}(\phi_{i+2}-2\phi_{i+1}+\phi_i) \qquad A_{i+1/2,j}<0 \qquad (3\text{-}70b)$$

ただし，ＱＵＩＣＫスキームも，河村スキーム同様，上式に示すように反変速度に相当する$A_{i+1/2}$の取る正符号，負符号によりスキームが変化する．このＱＵＩＣＫスキームを３次元空間に拡張する場合には，各座標軸方向への補正項を導入して次のように定義されるスキームを使用する．

$$(\mathbb{U}\phi)_{i+1/2}=(\mathbb{U})_{i+1/2}\{\frac{1}{2}(\phi_{i+1}+\phi_{ijk})-\frac{\Delta\xi^2}{8}\mathrm{CURV}\phi^{\xi}_{i+1/2}$$
$$+\frac{\Delta\eta^2}{24}\mathrm{CURV}\phi^{\eta}_{i+1/2}+\frac{\Delta\zeta^2}{24}\mathrm{CURV}\phi^{\zeta}_{i+1/2} \qquad (3\text{-}71a)$$

$$(\mathbb{V}\phi)_{j+1/2}=(\mathbb{V})_{j+1/2}\{\frac{1}{2}(\phi_{j+1}+\phi_{ijk})-\frac{\Delta\eta^2}{8}\mathrm{CURV}\phi^{\eta}_{j+1/2}$$
$$+\frac{\Delta\xi^2}{24}\mathrm{CURV}\phi^{\xi}_{j+1/2}+\frac{\Delta\zeta^2}{24}\mathrm{CURV}\phi^{\zeta}_{j+1/2} \qquad (3\text{-}71b)$$

$$(\mathbb{W}\phi)_{k+1/2}=(\mathbb{W})_{k+1/2}\{\frac{1}{2}(\phi_{k+1}+\phi_{ijk})-\frac{\Delta\zeta^2}{8}\mathrm{CURV}\phi^{\zeta}_{k+1/2}$$
$$+\frac{\Delta\xi^2}{24}\mathrm{CURV}\phi^{\xi}_{k+1/2}+\frac{\Delta\zeta^2}{24}\mathrm{CURV}\phi^{\eta}_{k+1/2} \qquad (3\text{-}71c)$$

ここで補正項（Curvature term）CURVϕ，例えばξ方向の補正項については次のように示される．

$$\mathrm{CURV}\phi^{\xi}_{i+1/2}=\begin{cases}(\phi_{i+1}-2\phi_{ijk}+\phi_{i-1})/\Delta\xi^2 & \mathbb{U}_{i+1/2}>0\\(\phi_{i+2}-2\phi_{i+1}+\phi_{ijk})/\Delta\xi^2 & \mathbb{U}_{i+1/2}<0\end{cases} \qquad (3\text{-}72a)$$

$$\mathrm{CURV}\phi^{\eta}_{i+1/2}=\begin{cases}(\phi_{j+1}-2\phi_{ijk}+\phi_{j-1})/\Delta\eta^2 & \mathbb{U}_{i+1/2}>0\\(\phi_{i+1,j+1}-2\phi_{i+1,jk}+\phi_{i+1,j-1})/\Delta\eta^2 & \mathbb{U}_{i+1/2}<0\end{cases} \qquad (3\text{-}72b)$$

$$\mathrm{CURV}\phi^{\zeta}_{i+1/2}=\begin{cases}(\phi_{k+1}-2\phi_{ijk}+\phi_{k-1})/\Delta\zeta^2 & \mathbb{U}_{i+1/2}>0\\(\phi_{i+1,k+1}-2\phi_{i+1,jk}+\phi_{i+1,k-1})/\Delta\zeta^2 & \mathbb{U}_{i+1/2}<0\end{cases} \qquad (3\text{-}72c)$$

図3-3は，$\mathbb{U}_{i+1/2}>0$とした場合の使用格子を●印で示した図である．図3-3より解るようにＱＵＩＣＫスキームは，コントロール・ボリューム面における反変速度の正負による３点補間スキームであり，直交方向の補正項，CURVϕ^{η}，CURVϕ^{ζ}についても，風向きにより上流側を選択すれば良い．以上はξ方向について示したが，同様の考え方をη，ζ方向に拡張すれば各方向での補正項が得られることになる．

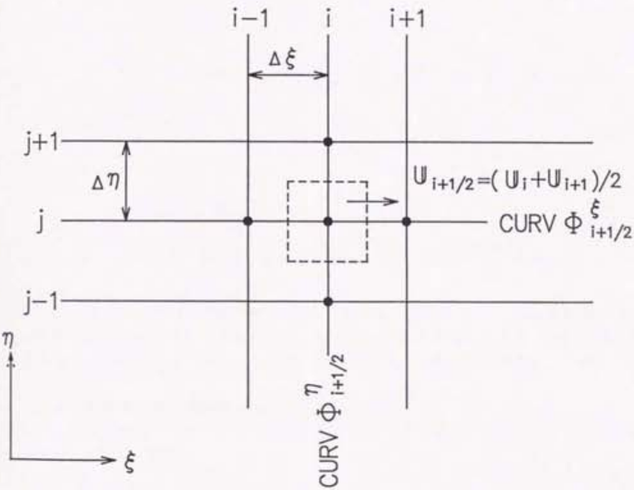

i−1
i
i+1
Δξ
j+1
Δη
j
j−1
$\mathbb{U}_{i+1/2}=(\mathbb{U}_i+\mathbb{U}_{i+1})/2$
CURV $\Phi^{\xi}_{i+1/2}$
CURV $\Phi^{\eta}_{i+1/2}$
η
ξ

図3-3　計算格子点

(3-72a)～(3-72c)式はコントロール・ボリューム界面における値で，この値を用いて対流項の離散化を行う．河村スキーム同様，反変速度の正負によりスキームを選定することが必要であることを考慮して(3-61)式に示す関係式を導入する．ξ方向のみの離散式を示すと次のように示される．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \xi}(\mathbb{U}\phi) \\
&=\frac{1}{2\Delta\xi}\left(\mathbb{U}_{i+1/2}+|\mathbb{U}_{i+1/2}|\right)\cdot \\
&\left\{\frac{1}{2}(\phi_{i+1}+\phi_{i})-\frac{\Delta\xi^{2}}{8}\mathrm{CURV}\phi^{\xi}_{i+1/2}+\frac{\Delta\eta^{2}}{24}\mathrm{CURV}\phi^{\eta}_{i+1/2}+\frac{\Delta\zeta^{2}}{24}\mathrm{CURV}\phi^{\zeta}_{i+1/2}\right\} \\
&+\frac{1}{2\Delta\xi}\left(\mathbb{U}_{i+1/2}-|\mathbb{U}_{i+1/2}|\right)\cdot \\
&\left\{\frac{1}{2}(\phi_{i+1}+\phi_{i})-\frac{\Delta\xi^{2}}{8}\mathrm{CURV}\phi^{-\xi}_{i+1/2}+\frac{\Delta\eta^{2}}{24}\mathrm{CURV}\phi^{-\eta}_{i+1/2}+\frac{\Delta\zeta^{2}}{24}\mathrm{CURV}\phi^{-\zeta}_{i+1/2}\right\} \\
&-\frac{1}{2\Delta\xi}\left(\mathbb{U}_{i-1/2}+|\mathbb{U}_{i-1/2}|\right)\cdot \\
&\left\{\frac{1}{2}(\phi_{i}+\phi_{i-1})-\frac{\Delta\xi^{2}}{8}\mathrm{CURV}\phi^{\xi}_{i-1/2}+\frac{\Delta\eta^{2}}{24}\mathrm{CURV}\phi^{\eta}_{i-1/2}+\frac{\Delta\zeta^{2}}{24}\mathrm{CURV}\phi^{\zeta}_{i-1/2}\right\} \\
&-\frac{1}{2\Delta\xi}\left(\mathbb{U}_{i-1/2}-|\mathbb{U}_{i-1/2}|\right)\cdot \\
&\left\{\frac{1}{2}(\phi_{i}+\phi_{i-1})-\frac{\Delta\xi^{2}}{8}\mathrm{CURV}\phi^{-\xi}_{i-1/2}+\frac{\Delta\eta^{2}}{24}\mathrm{CURV}\phi^{-\eta}_{i-1/2}+\frac{\Delta\zeta^{2}}{24}\mathrm{CURV}\phi^{-\zeta}_{i-1/2}\right\}
\end{aligned}
\tag{3-73}
$$

上式中，$\mathrm{CURV}\phi^{-\xi}$，$\mathrm{CURV}\phi^{-\eta}$，$\mathrm{CURV}\phi^{-\zeta}$とあるのは，反変速度$\mathbb{U}_{i+1/2}$が負の場合の補正項のスキームを代表させることを意味し，便宜的なものである．上式はξ方向に対するものであるが，η，ζ方向に対しても同様の操作を行なうことより離散式が得られる．

3．4．3　拡散項に対する離散化

先に示した各方程式の計算平面での座標変換において拡散項は，計量テンソルを含む形として次のように示される．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \xi}\{-M_{1}\phi_{\xi}-M_{2}\phi_{\eta}-M_{3}\phi_{\zeta}\} \\
&+\frac{\partial}{\partial \eta}\{-M_{2}\phi_{\xi}-M_{4}\phi_{\eta}-M_{5}\phi_{\zeta}\} \\
&+\frac{\partial}{\partial \zeta}\{-M_{3}\phi_{\xi}-M_{5}\phi_{\eta}-M_{6}\phi_{\zeta}\}
\end{aligned}
\tag{3-74}
$$

上式の各項に対して次に示す離散化を行なう．

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(M\phi_{\xi})=\frac{1}{\Delta\xi^{2}}\{M_{i+1/2}(\phi_{i+1}-\phi_{ijk})-M_{i-1/2}(\phi_{ijk}-\phi_{i-1})\} \tag{3-75a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(M\phi_{\eta})=\frac{1}{\Delta\eta^{2}}\{M_{j+1/2}(\phi_{j+1}-\phi_{ijk})-M_{j-1/2}(\phi_{ijk}-\phi_{j-1})\} \tag{3-75b}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(M\phi_\zeta)=\frac{1}{\Delta\zeta^2}\{M_{k+1/2}(\phi_{k+1}-\phi_{ijk})-M_{k-1/2}(\phi_{ijk}-\phi_{k-1})\} \tag{3-75c}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(M\phi_\eta)=\frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta}\{M_{i+1/2,j+1/2}(\phi_{i+1,j+1}+\phi_{j+1}-\phi_{i+1,j-1}-\phi_{j-1})$$
$$-M_{i-1/2,j-1/2}(\phi_{j+1}+\phi_{i-1,j+1}-\phi_{j-1}-\phi_{i-1,j-1})\} \tag{3-75d}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(M\phi_\xi)=\frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta}\{M_{i+1/2,j+1/2}(\phi_{i+1,j+1}+\phi_{j+1}-\phi_{i-1,j+1}-\phi_{i-1})$$
$$-M_{i-1/2,j-1/2}(\phi_{i+1}+\phi_{i+1,j-1}-\phi_{i-1}-\phi_{i-1,j-1})\} \tag{3-75e}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(M\phi_\xi)=\frac{1}{4\Delta\zeta\Delta\xi}\{M_{i+1/2,k+1/2}(\phi_{i+1,k+1}+\phi_{i+1}-\phi_{i-1,k+1}-\phi_{i-1})$$
$$-M_{i-1/2,k-1/2}(\phi_{i+1}+\phi_{i+1,k-1}-\phi_{i-1,k}-\phi_{i-1,k-1})\} \tag{3-75f}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(M\phi_\zeta)=\frac{1}{4\Delta\xi\Delta\zeta}\{M_{i+1/2,k+1/2}(\phi_{i+1,k+1}+\phi_{k+1}-\phi_{i+1,k-1}-\phi_{k-1})$$
$$-M_{i-1/2,k-1/2}(\phi_{k+1}+\phi_{i-1,k+1}-\phi_{k-1}-\phi_{i-1,k-1})\} \tag{3-75g}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(M\phi_\eta)=\frac{1}{4\Delta\zeta\Delta\eta}\{M_{j+1/2,k+1/2}(\phi_{j+1,k+1}+\phi_{j+1}-\phi_{j-1,k+1}-\phi_{j-1})$$
$$-M_{j-1/2,k-1/2}(\phi_{j+1,k}+\phi_{j+1,k-1}-\phi_{j-1}-\phi_{j-1,k-1})\} \tag{3-75h}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(M\phi_\zeta)=\frac{1}{4\Delta\eta\Delta\zeta}\{M_{j+1/2,k+1/2}(\phi_{j+1,k+1}+\phi_{k+1}-\phi_{j+1,k-1}-\phi_{k-1})$$
$$-M_{j-1/2,k-1/2}(\phi_{k+1}+\phi_{j-1}-\phi_{k-1}-\phi_{j-1,k-1})\} \tag{3-75i}$$

式中のMは計量テンソルであり，上式で示すように上流側，下流側での値を代表させて離散化を行なっている．計量テンソルが，ξ，η，ζ の各微分演算の内でなく外に出ていれば差分式はより簡単化された式となる．

3．4．4　生成項に対する離散化

各方程式に表われる生成項に対しては次に示すような離散化を行ない計算を行なった．

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi}=\frac{1}{2\Delta\xi}(\phi_{i+1}-\phi_{i-1}) \tag{3-76a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=\frac{1}{2\Delta\eta}(\phi_{j+1}-\phi_{j-1}) \tag{3-76b}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}=\frac{1}{2\Delta\zeta}(\phi_{k+1}-\phi_{k-1}) \tag{3-76c}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi}=\frac{1}{\Delta\xi}(\phi_{i+1}-2\phi_{ijk}+\phi_{i-1}) \tag{3-76d}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=\frac{1}{\Delta\eta}(\phi_{j+1}-2\phi_{ijk}+\phi_{j-1}) \tag{3-76e}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}=\frac{1}{\Delta\zeta}(\phi_{k+1}-2\phi_{ijk}+\phi_{k-1}) \tag{3-76f}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta}(\phi_{i+1,j+1}-\phi_{i+1,j-1}-\phi_{i-1,j+1}+\phi_{i-1,j-1}) \tag{3-76g}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \zeta} = \frac{1}{4\Delta \xi \Delta \zeta}(\phi_{i+1,k+1} - \phi_{i+1,k-1} - \phi_{i-1,k+1} + \phi_{i-1,k-1}) \qquad (3\text{-}76h)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{1}{4\Delta \eta \Delta \xi}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j-1}) \qquad (3\text{-}76i)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{1}{4\Delta \eta \Delta \zeta}(\phi_{j+1,k+1} - \phi_{j+1,k-1} - \phi_{j-1,k+1} + \phi_{j-1,k-1}) \qquad (3\text{-}76j)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta \partial \xi} = \frac{1}{4\Delta \zeta \Delta \xi}(\phi_{i+1,k+1} - \phi_{i+1,k-1} - \phi_{i-1,k+1} + \phi_{i-1,k-1}) \qquad (3\text{-}76k)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta \partial \eta} = \frac{1}{4\Delta \zeta \Delta \eta}(\phi_{j+1,k+1} - \phi_{j+1,k-1} - \phi_{j-1,k+1} + \phi_{j-1,k-1}) \qquad (3\text{-}76l)$$

3．4．5　圧力項に対する離散化

圧力に関するポアソン方程式は，計算平面上で次のように示された．

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \xi}\{g_1 P_\xi + g_2 P_\eta + g_3 P_\zeta - \frac{\rho}{\Delta t}\xi_{xi} U_{xi}\}$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \eta}\{g_2 P_\xi + g_4 P_\eta + g_5 P_\zeta - \frac{\rho}{\Delta t}\eta_{xi} U_{xi}\}$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\{g_3 P_\xi + g_5 P_\eta + g_6 P_\zeta - \frac{\rho}{\Delta t}\zeta_{xi} U_{xi}\} = 0 \qquad (3\text{-}77)$$

この形は，基本的に拡散項と同一であり従って拡散項に対する離散化で扱った差分式をそのまま上式に適用する．

3．4．6　境界条件

境界条件設定に対しては，大きく２種類の境界条件の与え方がある．すなわちNeumann境界条件とDirichlet境界条件である．前者が勾配を境界条件として与えるのに対し，後者は任意な定数を境界条件として与える．Dirichlet境界条件は，境界適合座標系の場合容易に与えることができるため，ここではNeumann境界条件の設定について述べる．

図3-4は境界適合座標系における基底ベクトルを示したものであり，物理平面上の座標系，x_1，x_2，x_3に対する基底ベクトルを，各々$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$で，また，計算平面上に相当する，ξ，η，ζに対しては，$\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$，$\vec{\zeta}$で基底ベクトルを表すものとする．ベクトル解析により，ξ，η，ζは次のように示される．

$$\vec{\xi} = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_3}\vec{e}_3 + \frac{\partial \xi}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial \xi}{\partial x_1}\vec{e}_1\right) \qquad (3\text{-}78a)$$

$$\vec{\eta} = \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_3}\vec{e}_3 + \frac{\partial \eta}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial \eta}{\partial x_1}\vec{e}_1\right) \qquad (3\text{-}78b)$$

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{h_3}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_3}\vec{e}_3 + \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\vec{e}_1\right) \qquad (3\text{-}78c)$$

ここで

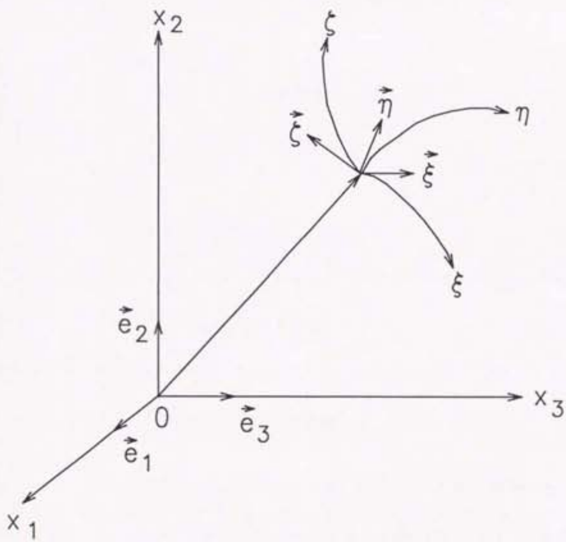


図3-4　境界適合座標系における基底ベクトル

$$h_1 = (\xi_{x1}^2 + \xi_{x2}^2 + \xi_{x3}^2)^{1/2} \tag{3-78d}$$

$$h_2 = (\eta_{x1}^2 + \eta_{x2}^2 + \eta_{x3}^2)^{1/2} \tag{3-78e}$$

$$h_3 = (\zeta_{x1}^2 + \zeta_{x2}^2 + \zeta_{x3}^2)^{1/2} \tag{3-78f}$$

また，従属変数ϕの勾配は基底ベクトルを用いて次のように示される．

$$\mathrm{grad}\,\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e}_3 \right)\phi \tag{3-79}$$

以上(3-79)式と(3-78)式により，ξ=const面に垂直な方向のϕの値を一定値cとして与えた場合を考えると

$$\vec{\xi}\ \mathrm{grad}\,\phi = c_\xi \tag{3-80}$$

として表現される．これは次のように書き改められる．

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{\xi=\mathrm{const}} = \vec{\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e}_3 \right)\phi$$

$$= \vec{\xi}\left\{ \left(\xi_{x1}\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{x1}\frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_{x1}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\vec{e}_1 + \left(\xi_{x2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{x2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_{x2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\vec{e}_2 \right.$$
$$\left. + \left(\xi_{x3}\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{x3}\frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_{x3}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\vec{e}_3 \right\}\phi$$

$$= \frac{\xi_{x1}}{h_1}\left(\xi_{x1}\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{x1}\frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_{x1}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\phi + \frac{\xi_{x2}}{h_1}\left(\xi_{x2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{x2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_{x2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\phi$$
$$+ \frac{\xi_{x3}}{h_1}\left(\xi_{x3}\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{x3}\frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_{x3}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\phi$$

$$= \frac{1}{h_1}(\xi_{x1}^2 + \xi_{x2}^2 + \xi_{x3}^2)\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1}(\xi_{x1}\eta_{x1} + \xi_{x2}\eta_{x2} + \xi_{x3}\eta_{x3})\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$$
$$+ \frac{1}{h_1}(\xi_{x1}\zeta_{x1} + \xi_{x2}\zeta_{x2} + \xi_{x3}\zeta_{x3})\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$$
$$= c_\xi \tag{3-81a}$$

c_ξはすでに与えられた値であり，式中の従属変数に関する1次微分を離散化することにり境界上での勾配を与えることが可能となる．以上はξ=constの面に垂直な方向の勾配であるが同様に，η=const，ζ=const面に垂直な方向の勾配に関する式を求めると次のように整理される．

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{\eta=\mathrm{const}} = \vec{\eta}\ \mathrm{grad}\,\phi$$
$$= \frac{1}{h_2}(\eta_{xi}\xi_{xi})\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{1}{h_2}(\eta_{xi})^2\frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{1}{h_3}(\eta_{xi}\zeta_{xi})\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \tag{3-81b}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{\zeta=\mathrm{const}} = \vec{\zeta}\ \mathrm{grad}\,\phi$$

$$= \frac{1}{h_2}(\zeta_{xi}\xi_{xi})\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \frac{1}{h_3}(\zeta_{xi}\eta_{xi})\frac{\partial\phi}{\partial\eta} + \frac{1}{h_3}(\zeta_{xi})^2\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} \qquad (3\text{-}81c)$$

上式はEinsteinの総和規約に基づいて記述した．

以上はNeumann 境界条件に対するものであるが，次に乱流エネルギー，乱流散逸方程式に対する境界条件について考える．これらの式に対する境界条件は，前述のように，対流項が無視され，散逸項と生成項がバランスするという局所平衡条件と，計算第１点目が乱流域に存在し，対数速度分布を満足するという２つの仮定により与えられている．従って，壁面より計算第１点目までの距離，およびその点における速度を計算平面上で定義することが必要となる．

図3-5に示すように，(i+1,j,k)，(i,j,k)点を含む，２つのξ=const面について考える．(i,j,k)，(i+1,j,k) の位置ベクトルは次のように示される．

$$x_1(i,j,k)\vec{e}_1 + x_2(i,j,k)\vec{e}_2 + x_3(i,j,k)\vec{e}_3 \qquad (3\text{-}82a)$$

$$x_1(i+1,j,k)\vec{e}_1 + x_2(i+1,j,k)\vec{e}_2 + x_3(i+1,j,k)\vec{e}_3 \qquad (3\text{-}82b)$$

これら位置ベクトルの差は

$$\Delta\vec{x} = (x_1(i+1,j,k) - x_1(i,j,k))\vec{e}_1 + (x_2(i+1,j,k) - x_2(i,j,k))\vec{e}_2$$
$$+ (x_3(i+1,j,k) - x_3(i,j,k))\vec{e}_3 \qquad (3\text{-}82c)$$

上式に対するξ=const面に垂直な距離Δlは次のように示される．

$$\Delta l = \Delta\vec{x}\,\vec{\xi}$$
$$= (x_3(i+1,j,k) - x_3(i,j,k))\frac{1}{h_1}\frac{\partial\xi}{\partial x_3} + (x_2(i+1,j,k) - x_2(i,j,k))\frac{1}{h_1}\frac{\partial\xi}{\partial x_2}$$
$$+ (x_1(i+1,j,k) - x_1(i,j,k))\frac{1}{h_1}\frac{\partial\xi}{\partial x_1} \qquad (3\text{-}82d)$$

一方，ξ=const面に垂直な (i+1,j,k) における速度は

$$V_{nor} = \xi\ (U_1(i+1,j,k)\vec{e}_1 + U_2(i+1,j,k)\vec{e}_2 + U_3(i+1,j,k)\vec{e}_3)$$
$$= \frac{1}{h_1}\xi_{x1}U_1(i+1,j,k) + \frac{1}{h_1}\xi_{x2}U_2(i+1,j,k) + \frac{1}{h_1}\xi_{x3}U_3(i+1,j,k) \qquad (3\text{-}83a)$$

と示される．またこの速度ベクトルは，基底ベクトル$\vec{\xi}$の内積をとることにより次のように示される

$$V_{nor}\xi = V_{nor}\left(\frac{1}{h_1}\xi_{x1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_1}\xi_{x2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_1}\xi_{x3}\vec{e}_3\right) \qquad (3\text{-}83b)$$

上式において右変の各項は物理平面座標における，x_1，x_2，x_3方向の速度成分を表わしている．かつこれらの速度成分のベクトル和は，ξ=const面に垂直な方向の速度を示している．今，ξ=constに水平な速度V_{par}を求めようとする場合，(3-83a)式の各成分は必要のない速度成分であり各速度成分よりそれらの項を差し引いて，二乗和を定義することにより次のように求められる．

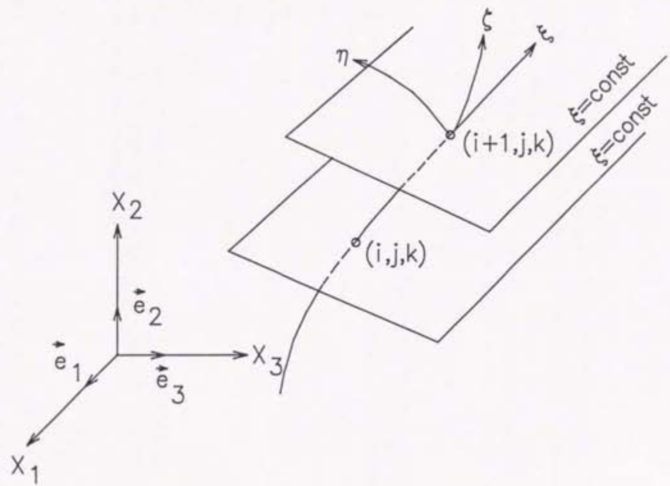


図3-5　二点間の垂直距離

$$\Delta U_1 = U_1(i+1,j,k) - V_{nor}\frac{1}{h_1}\xi_{x1} \tag{3-84a}$$

$$\Delta U_2 = U_2(i+1,j,k) - V_{nor}\frac{1}{h_1}\xi_{x2} \tag{3-84b}$$

$$\Delta U_3 = U_3(i+1,j,k) - V_{nor}\frac{1}{h_1}\xi_{x3} \tag{3-84c}$$

$$V_{par} = (\Delta U_1{}^2 + \Delta U_2{}^2 + \Delta U_3{}^2)^{1/2} \tag{3-84d}$$

(3-82d)式によりξ=const面に垂直な距離が，(3-84)式よりξ=const面に水平な速度が得られ，従って対数速度分布えの適用が可能となる．以上はξ面に限って説明したが，η，ζ面についても同様に導出できる．またスリップのある場合の境界条件を設定する場合には，上の理論がそのまま適用できる．いま点(i,j,k) を含むξ=const面を考えればこの面に垂直な速度ベクトルは(3-83a)式，(3-83b)を参照して次のように示される．

$$V_{nor}\vec{\xi} = V_{nor}\left(\frac{1}{h_1}\xi_{x1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_1}\xi_{x2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_1}\xi_{x3}\vec{e}_3\right) \tag{3-85a}$$

$$V_{nor} = \frac{1}{h_1}\left(\xi_{x1}U_1(i,j,k) + \xi_{x2}U_2(i,j,k)\right) + \xi_{x3}U_3(i,j,k)) \tag{3-85b}$$

(2-85a)式の右各項はξ=const面に垂直な速度の物理平面上での各速度成分であり，これらは水平速度に寄与しない量であることより，点(i,j,k) におけるξ=const面に水平な速度は次のように示される．

$$U_{1slip} = U_1(i,j,k) - V_{nor}\frac{\xi_{x1}}{h_1} \tag{3-86a}$$

$$U_{2slip} = U_2(i,j,k) - V_{nor}\frac{\xi_{x2}}{h_1} \tag{3-86b}$$

$$U_{3slip} = U_3(i,j,k) - V_{nor}\frac{\xi_{x3}}{h_1} \tag{3-86c}$$

上式で示したU_{1slip}を境界条件として与えることより数値計算を行なえばよい．上式はξ=const面に対しての境界条件であるが，η=const，ζ=const面に対しても同様の考え方より境界条件を定義できる．

３．５　結言

境界適合座標系の検討を行なうことより次の知見を得た．

(1) 運動方程式，エネルギー方程式中のレイノルズ応力，乱流熱流束の取り込みは，値を直接代入するのでなく計算の安定性を考え拡散項の一部として取り込むPseudo-Viscosityの概念を採用した．

(2) 境界適合座標系に，レイノズル応力方程式，乱流熱流束方程式に対する代数応力モデルを導入すると，運動方程式，エネルギー方程式の計量テンソルは，各方向の拡散係数が乗算された形として求められる．

(3) 変換された計算平面上では，計算格子は直交性を保つため方程式の離散化は比較的容易に行なえ，境界適合座標系の特徴と言える．

第４章　三次元非等方性乱流速度場解析

４．１　緒言

工業上対象となる流れは，多くの場合非等方性乱流場であり，かつ複雑な形状を有する．従って流れを数値解析により正確に把握するためには，それら二つの問題に対し適切な方策を講じることが必要となる．第２章においては，非等方性乱流の速度場に対する解析手法について詳述し，第３章においては，複雑三次元形形状に対する数値解析手法として境界適合座標系を用いて非等方性を考慮した支配方程式の変換について言及した．

本章においては，比較的複雑形状を有し，圧力・歪相関項中の平均流による影響の項に関し実験的解析を行なった Tucker-Reynolds(1968)の実験を計算対象とし，本論文で構築した数値解析手法を用いて数値解析を行なうことを目的とする．同時に境界適合座標系，乱流モデルの妥当性についても検討を加える．この Tucker-Reynolds(1968)の実験に対し，Launder-Reece-Rodi(1975)は，主流中心部の乱流エネルギーおよび各垂直応力成分を，速度場は既知として解析を試みている．また Lin-Wolfshtein(1979)も，Launderらと同様に一次元モデルとして Tucker-Reynolds(1968)の実験を対象として数値解析を行なっている．以上のように，主流中心部の乱流エネルギー挙動についてのみ解析した例はあるが，流れ場全体について解析した例はみられない．本解析では，三次元モデルとして，流れ場全体にわたりどのような流動現象が発生しているのかを，実験結果と対比させながら検討を進めていく．

第４．２節においては，計算対象モデルについての特徴を明確にする．特に実験においては，境界層排除厚さを考慮して実験風洞が設計されている点に留意することが必要と思われる．第４．３節では解析を行なうのに必要な支配方程式について整理した．本解析で用いたレイノルズ応力モデルは第２章で述べた提唱モデルとした．第４．４節では，数値解析手法について記述する．特に問題となる座標系，計算格子生成，境界条件設定について述べる．境界条件の設定に際し，格子乱流下の入口部における乱流エネルギー－乱流散逸に対する値は実験では示されておらず，推測値を求めることが必要となる．第４．５節では，解析結果と実験結果とを比較検討し，流動状態，境界適合座標系，乱流モデルの妥当性等について検討を加える．主流中心速度，乱流エネルギー，垂直応力の減衰過程については実験結果と比較し考察を加えるとともに，本解析モデルに特徴的な流れについても検討する．以上の各節で得られた諸知見を，第４．６節の結言に整理して示す．

４．２　解析モデル

計算解析モデルとしては，Tucker-Reynolds(1968)の行なった実験を対象とし，図4-1にはその実験風洞を示す．図4-1は Tucker-Reynolds(1968)の文献より引用したものである．実験風洞は大きく3つの部分より成り立っている．まず第１の部分は長さ2ft.縦横比6:1の直管部であり，入口には乱流格子が設けられている．流入した流れは，この乱流格子により一様に乱され湾曲風洞内に流入する．乱流格子には，１辺が11/16in.の正方形格子，お

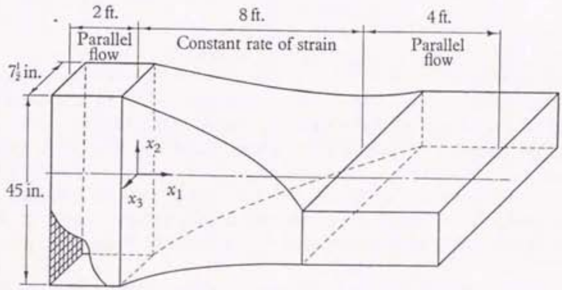

2 ft.
8 ft.
4 ft.
Parallel flow
Constant rate of strain
Parallel flow
7½ in.
45 in.
x_2
x_1
x_3

図4-1　解析対象モデル

よび，ひし型形状格子1.2in.×0.6in.の2種類を使用している．一般に，格子乱流においては，メッシュサイズの20倍程度下流において，一様等方性乱流（homogeneous isotropic turbulence)となることが知られていることより，この第１の部分においては一様等方性乱流の状態が形成されている．

第2の部分は 8ft. の長さをもち，入口部での縦横比の6:1の割合が下流に行くに従がい面積一定のもとに徐々に変化しその割合が1:6となる．図に示すように主流方向を x_1，側壁に垂直な方向を x_3，上下壁に垂直な方向を x_2とすると，主流方向に沿う各断面の変化割合は次式のように定義されている．

$$x_2 = (x_2)_A e^{-cx_1} \quad , \quad x_3 = (x_3)_A e^{cx_1} \tag{4-1}$$

ここで$(x_2)_A$，$(x_3)_A$はA断面におけるx_2，x_3方向の壁面までの座標値を示しており，その変化割合を決めるcは0.2225/ft.として風洞を設計している．このように風洞を設計すると各方向の速度は次のように示される．

$$U_1 = 一定 \quad , \quad U_2 = -cU_1x_2 \quad , \quad U_3 = cU_1x_3 \tag{4-2}$$

これより速度勾配は

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = -cU_1 \quad , \quad \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = cU_1 \tag{4-3}$$

となり速度分布に一定の歪を与えた流れ場を得ることができる．入口直管部にて形成された一様等方性乱流は，この湾曲風洞(distorting tunnel) に流入し，速度分布が変化することにより，一様等方性乱流から非等方性乱流構造へと変化していく．この乱流構造の変化はレイノルズ応力の圧力・歪相関項を通して，乱流エネルギーが各方向に再配分されるためと考えられる．

次にこの非等方性乱流は，縦横比が入口と逆となる長さ4ft.の直管部に流入する．この直管部においては，先の亜流方向への速度勾配がなくなり主流方向への一様流となるため，非等方性乱流は再度各成分間でのエネルギーの分配が行なわれ等方性乱流になろうとする傾向を示す．

以上のように解析モデルは，各々に特徴のある3つの部分より構成されているが，実験装置全体としては下流に軸流型ブロア(7.5H.P.，1800rpm)を配置した吸引タイプのオープン型の実験風洞となっている．さらに長さ2ft.の入口直管部乱流格子の前には，二次元ベルマウス型の作動流体の導入部が設けられている．作動流体としては空気を用いて実験を行なっている．

測定手法としては，熱線風速計（Disa Model No.55A01)を用いて，主流方向中心部での乱流エネルギー，主流方向速度，あるいは主流方向に垂直な断面における速度分布等を測定している．熱線風速計には直径0.005mm，長さ１mmの白金線を使用している． Tucker-Reynoldsは，実際の測定を行なうまえに，熱線風速計の精度を確認する意味より，完全に発達した円管乱流を測定し，Laufer(1954) の実験結果との比較を行なっている．その結果，管中心部において Laufer の実験値よりわずかながら非等方的となっているが比較的良好に一致していること，また，熱線風線計より測定したせん断応力分布と，圧力損失より得られた結果は両者とも直線性を示し良好に一致したことを報告している．また，入口直管部に設けた乱流格子を取り除いた場合の風洞の持つ乱れ強さを湾曲風洞入口中心部にて測定している．その結果次のような測定結果を得ており，風洞自体の持つ乱れ強さが非常に

小さいことを示唆している．U_{1c}，u_1は各々主流方向の平均速度，変動速度を示す．

$$\left(\frac{u_1}{U_{1c}}\right)^2 = 0.4\times10^{-4} \tag{4-4}$$

実験条件としては，入口流入速度を20ft/sとして実験を行なっている．代表長さを入口部の7.5in.とするとレイノルズ数は $Re=7.4\times10^4$，格子サイズ11/16in.を代表長さとすると $Rem=6.8\times10^3$と示される．この実験条件として特に注意すべき点として，風洞設計に際して境界層排除厚さを考慮している点があげられる．すなわち主流方向の中心速度を入口直管部より出口直管部まで一定となるよう保持するため各断面にて境界層排除厚さを算出し，その厚さ分だけを壁面に加える操作を行なっている．Tucker-Reynolds(1968）の文献には具体的な境界層排除厚さについては言及していないが別の文献においてTucker(1966)は排除厚さ分$\delta^*(x)$を次式により定義している．

$$\delta^*(x) = 0.0462S\left(\frac{U_c S}{\nu}\right)^{-1/5} \tag{4-5}$$

上式は，圧力勾配のない平板での境界層排除厚を示す式（Schlichting(1968))でありSは，壁面に沿う長さとして定義されるが，Tuckerは乱流格子からの距離を代表させ計算を行なっている．

4．3　支配方程式

本解析で必要となる支配方程式は，運動方程式，乱流エネルギー方程式，乱流散逸方程式，レイノルズ応力方程式となる．第２章で示した発達しつつある正方形断面の乱流解析と同様の支配方程式であるが次の点で異なる．先の解析において支配方程式は，主流方向の拡散項を省略した放物型として計算を行なっているが，本解析においては，省略のない完全楕円形として解析を行なう．また乱流エネルギー，乱流散逸の拡散項のモデル化に際しては，先の章では，Daly-Harlow(1970）のモデルを用いて解析を行なったが，図2-15，図2-16で示したように主流中心速度，乱流エネルギーの分布に実験値と差が生じ，この要因として拡散項中の定数に問題があることを指摘した．そこで本解析においては，工業的によく使用される $k-\varepsilon$ 二方程式を用いて数値解析を行なうこととした．レイノルズ応力方程式に対しては，提唱モデルを用いて解析を行なった．表4-1に支配方程式の各項を示す．

表4-1に示した支配方程式は物理平面上で示される方程式であり，境界適合座標系を適用した場合には計算平面上での変換が必要である．変換された方程式については第３章にて説明した通りである．

4．4　数値解析

4．4．1　座標系

境界適合座標系を用いて数値解析を行なう場合，物理平面上の座標系（x_1，x_2，x_3）の原点と，計算平面上の座標系(ξ，η，ζ)の原点とは必ずしも一致する必要はなく任意に選定できる．これら，(x_1，x_2，x_3),および(ξ，η，ζ)の座標原点を図4-2に示す．

表4-1 支配方程式の各項

Equation	ϕ	Diff ϕ	S ϕ
Density	1	0	0
Momentum	U_i	$\nu \dfrac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}$	$-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i} - \dfrac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_j}$
Turbulent Energy	k	$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\nu_t}{\sigma_k}\dfrac{\partial k}{\partial x_j}\right)$	$G_s - \varepsilon$
Turbulent Dissipation	ε	$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right)$	$\dfrac{\varepsilon}{k}(c_{1\varepsilon} G_s - c_{2\varepsilon}\,\varepsilon)$
Reynolds Stress	$\dfrac{\overline{u_i u_j}}{k}(P_k - \varepsilon)$		$P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \pi_{ij,1} + \pi_{ij,2} + \pi_{ij,w}$

表4-2 支配方程式の定数

σ_k	σ_ε	$c_{1\varepsilon}$	$c_{2\varepsilon}$
1.0	1.3	1.44	1.92

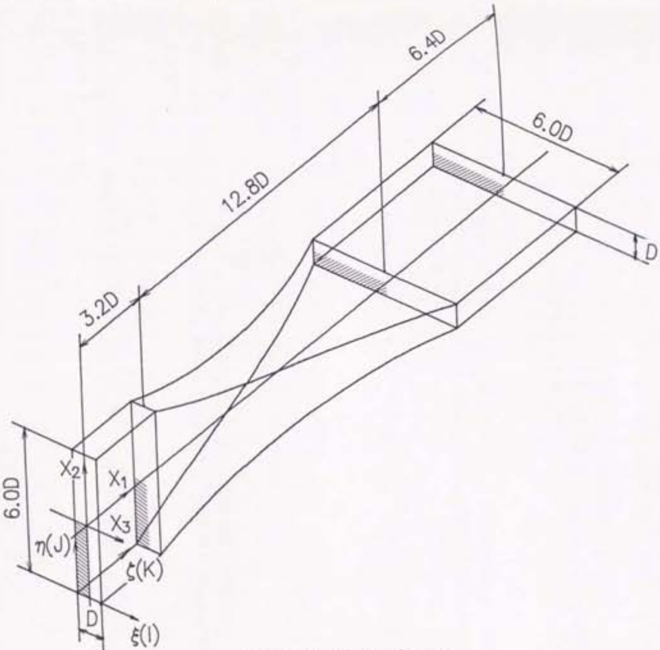


図4-2　座標系と解析モデル

図4-2は，入口部の短辺を代表長さDとして各諸量を無次元化し表示したものである．物理平面上の（x_1，x_2，x_3)の原点は湾曲風洞入口中心部とし，これより各点における座標値を設定する．主流方向を x_1，亜流方向をx_2，x_3として定義している．また計算平面上の(ξ，η，ζ)座標の原点は，プログラムを組む上での便宜性を考慮して，乱流格子の位置する入口直管部に設定した．計算平面上の(ξ，η，ζ)座標は物理平面の(x_1，x_2，x_3)座標に各々対応する．

また計算対象領域は系の対称性を考えて 1/4断面として計算を行なった．図4-2において斜線部分の領域が計算対象領域に当たる．計算格子数は壁面，対称面，入口，出口の点を除いて13×13×48($\xi\times\eta\times\zeta$)として計算を行なった．

4．4．2 計算格子

計算格子を設定する際には，物理量が大きく変化するであろう壁面近傍および湾曲風洞の出入口部に格子が集中するよう設定することが必要であり，本解析では等比数例を用いて次のような比率 r により格子設定を行なった．

主流方向格子

$$
\begin{array}{lll}
x_1 = 0 \sim 3.2D & r_1 = 0.91884 & \\
3.2D \sim 9.6D & r_2 = 1.0995 & (4\text{-}6a) \\
9.6D \sim 16.0D & r_3 = 0.92477 & \\
16D \sim 22.4D & r_4 = 1.05662 &
\end{array}
$$

亜流方向格子

$$
\begin{array}{lll}
x_2 = 0 \sim -3.0D & r_5 = 1.0010 & (4\text{-}6b) \\
x_3 = 0 \sim -0.5D & r_6 = 1.0010 &
\end{array}
$$

先の解析モデルにて説明したように，実験においては境界層排除厚さを加味して設計しているため本数値解析においても同様に排除厚さを考慮する．無次元化された排除厚さの式は次のように定義できる．

$$\frac{\delta^*}{D} = 0.0462\ \frac{x_1}{D}\ \left\{\frac{U_c(x_1/D)\cdot D}{\nu}\right\}^{-0.2} \tag{4-7}$$

U_c は主流方向の断面中心速度，D は代表長さを示す．従って例えば，湾曲風洞部の壁面形状の座標値は次のように示される．

$$x_2 = -0.5\ e^{c_0 x_1} + \frac{\delta^*}{D} \tag{4-8a}$$

$$x_1 = -3.0\ e^{-c_0 x_1} + \frac{\delta^*}{D} \tag{4-8b}$$

ただし，定数 c_0は無次元化された定数値であり c_0=0.13906としている．

こうして得られた計算格子を図4-3に示す．図4-3は，上述の条件の下に格子生成したものであり，格子生成に関するポアソン型方程式を満足する結果とはなっていない．そこで図4-3の格子を初期格子として，(3-8)式の P(ξ，η，ζ)，Q(ξ，η，ζ)，R(ξ，η，ζ)を零に設定することにより得られた計算格子を図4-4に示す．

図4-4よりポアソン方程式を満足する計算格子はx_2－x_3断面では壁面近傍，あるいは対称面上で多少歪んだ結果となっている．これは壁面境界値が適正な位置に固定されていな

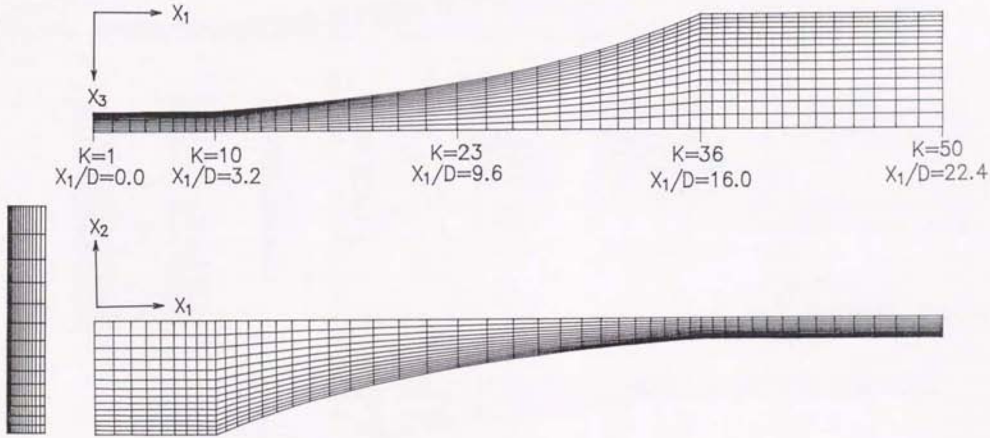


図4-3　初期設定計算格子

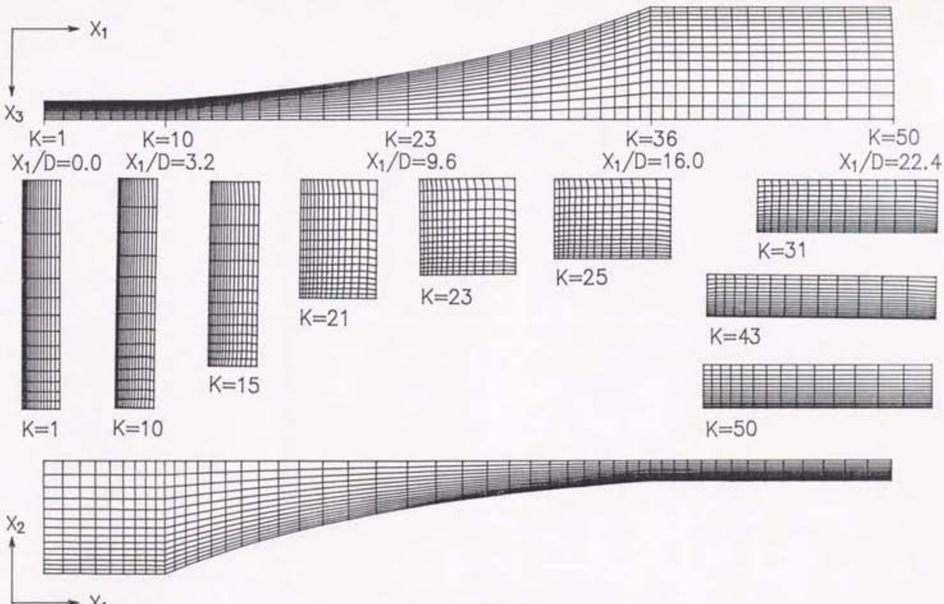

X1
X3
K=1
X1/D=0.0
K=10
X1/D=3.2
K=23
X1/D=9.6
K=36
X1/D=16.0
K=50
X1/D=22.4
K=31
K=25
K=23
K=21
K=43
K=15
K=50
K=1
K=10
X2
X1

図4-4 計算格子

いためであり，境界上の点を未知数として扱うことにより全領域の格子を直交させるという手法も提唱されている(Nakamura(1985))．一方 x_1-x_2 断面，x_1-x_3 断面においてはほとんど変化はみられない．このポアソン方程式を解いて得られた計算格子を用いて解析を行なう．

4．4．3　境界条件

本解析例において境界条件設定の際，特に問題となるのは，乱流エネルギー，乱流散逸に関する入口および壁面における境界条件である．入口部での境界条件を考えると流れは格子乱流であることより乱流エネルギーは，Batchelor-Townsend(1948)によれば格子位置からの距離 x_1 の -1 乗に，Uberoi(1963)によれば，-1.2 乗に比例して減衰していくことを報告している．すなわち $k \propto (x_1-(x_1)_a)^{-n}$ と示される．$(x_1)_a$ は乱流格子位置から下流にとられ，等方性乱流が形成される点までの距離として定義される．Tucker-Reynoldsは，$(x_1)_a$=4in.として入口より，14in.の点からの主流中心部乱流エネルギーを測定し，その結果 k は -1.2 乗に比例して減衰していくことを報告している．従ってその実測結果をもとに入口部近傍での乱流エネルギー値を外挿法により設定することができ，この値を入口部での乱流エネルギー値として計算を行なう．

次に乱流散逸 ε に関する入口部での値を設定しなければならないが，実測値が不明であるため何らかの手法により推定することが必要となる．一般に格子乱流後流においてはせん断応力は零となり平均流からレイノルズ応力によって乱れエネルギーを供給されることはない．従って k，ε 方程式中の拡散項，生成項が省略できて次式が成立する．

$$U_1\frac{\partial k}{\partial x_1} = -\varepsilon \quad , \quad U_1\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} = -c_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{4-9}$$

上の二つの式より次の関係式を得ることができる．

$$\varepsilon = c' k^{c_{2\varepsilon}} \tag{4-10a}$$

$$k = \left\{\frac{c'}{U_1}(c_{2\varepsilon}-1)x_1 + k_a^{1-c_{2\varepsilon}}\right\}^{1/(1-c_{2\varepsilon})} \tag{4-10b}$$

ここで，k_a は $(x_1)_a$ における乱流エネルギーの値であり c' は実測値より求まる定数値である．上の(4-10)式を用いて，Tucker-Reynoldsの乱流エネルギーに関する実験結果より c' を求めると c'=0.2568 となる．ここで先に説明したように入口部での乱流エネルギー値を求めると次のような値となる．

$$k_{in} = 4.34\times10^{-2} \tag{4-11a}$$

この値と(4-10a)式より入口部での乱流散逸 ε を求めると次のように示される．

$$\varepsilon_{in} = 4.656\times10^{-1} \tag{4-11b}$$

ただし各値は主流速度，代表長さで無次元化した値として示されている．

この乱流散逸 ε について，前述の手法とは別の手法にて推定してみる．速度変動 u_1，u_2，u_3 によるエネルギーの散逸の平均値を $\overline{Diss}$ とすれば，$\overline{Diss}$ は次のように定義される．

$$\overline{Diss} = \mu \{2(\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}})^2 + 2(\overline{\frac{\partial u_2}{\partial x_2}})^2 + 2(\overline{\frac{\partial u_3}{\partial x_3}})^2 + (\overline{\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}})^2$$
$$+ (\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}})^2 + (\overline{\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}})^2 \} \qquad (4\text{-}12)$$

この式に等方性の諸条件を課すと次のように整理される.

$$\overline{Diss} = 15\mu \frac{\overline{u_1^2}}{\lambda^2} \qquad (4\text{-}13)$$

ここでλの値は乱れまたは，渦粒子の最小寸法に関係するものである．格子を通過した一様流れにおける等方性乱れにおいては，$\overline{Diss}$は乱流エネルギーの減少率となる．すなわち

$$U_1 \frac{dk}{dx_1} = -15 \ \frac{\mu}{\rho} \frac{\overline{u_1^2}}{\lambda^2} = -\varepsilon \qquad (4\text{-}14)$$

となる．上式より示されるように乱れの散逸はλのような渦の最小寸法に関係している．乱流の機構が乱れ速度u_1とその寸法 l とにかかわらず幾何学的に相似であるとすれば

乱流エネルギー　$k \propto \overline{u_1^2}$

乱流散逸　$\varepsilon \propto \frac{\overline{u_1^2}}{l\sqrt{\overline{u_1^2}}} = \frac{(\overline{u_1^2})^{3/2}}{l}$

の関係式が成立しこの関係式と(4-14)式より次の関係式を得る.

$$\frac{\lambda}{l} \propto \sqrt{\frac{\nu}{l\sqrt{\overline{u_1^2}}}} \qquad (4\text{-}15a)$$

格子を通過した流れにおいては，格子間隔Mが渦寸法の最大となることより次式が成立する.

$$\frac{\lambda}{M} = A \sqrt{\frac{\nu}{M\sqrt{\overline{u_1^2}}}} \qquad (4\text{-}15b)$$

この式と(4-13)式よりλを消去すると乱流散逸εは

$$\varepsilon = 15\nu \frac{\overline{u_1^2}}{\lambda^2} = 15\overline{u_1^2} \ \frac{\sqrt{\overline{u_1^2}}}{A^2M} = 15 \ \frac{(2k/3)^{3/2}}{A^2M} \qquad (4\text{-}16)$$

となる．ただし$\overline{u_1^2}=2k/3$とし，Aの値は格子の種類により決定される実験値である．正方形格子においてMが 0.62in.から5in.までは，Aの値は2.20～0.95程度の値となることが実験より確かめられている.

(4-16)式を用い，定数AをA=2.2とし本解析例に適用すると，格子間隔M=11/16in.，乱流エネルギー$k_{in}=4.34\times10^{-2}$であるから入口における無次元化された乱流散逸ε_{in}を求めると次のような値を持つ.

$$\varepsilon_{in} = 1.66\times10^{-1} \qquad (4\text{-}17)$$

以上の考察より，いずれの推定法を用いても乱流散逸の値は，ほぼ－1乗のorderを持つことがわかるが，両者の値には差が認められ，いずれの値をとるべきかの根拠は明らかでない．そこで本解析においては，乱流エネルギー，乱流散逸の入口条件を

$$k_{in} = 4.34\times10^{-2} \qquad (4\text{-}18a)$$
$$\varepsilon_{in} = 2.0\times10^{-1} \qquad (4\text{-}18b)$$

として計算を行なうものとした.

乱流特性量の壁面に対する境界条件は，壁面近傍までの拡張は行なわずに高レイノルズ数流れに対するものとして壁関数を用いた．壁関数は第１の仮定として計算第１点目で局所平衡が成立すること，第２の仮定とし対数速度分布が成立することより導出でき次のような関係式を得る．

$$k = \frac{U_\tau}{\sqrt{c_\mu}} \qquad \varepsilon = \frac{U_\tau^{3}}{\kappa y} \qquad U_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} \tag{4-19}$$

ここで，U_τは摩擦速度，τ_wは壁面せん断応力を示す．対数速度分布に関しては平板に対する一般的なものを使用した．

次に圧力補正方程式を解く場合の境界条件について考える．圧力補正方程式は，第３章(3-35a)式で示したように次のように示される．

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^{2}} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)^{n}\frac{1}{\Delta t} \tag{4-20}$$

この方程式を見て解るように，右辺は速度勾配より構成されており，境界面における圧力は速度が既知であれば上式より規定することができ，この値を境界条件として数値解析を行なう．圧力に関しては，運動方程式より解かるように絶対値は必要でなく勾配のみが必要となる．このような圧力補正方程式の解法については，Reggio-Camarero(1987) の文献に詳述されている．

４．５　解析結果検討

４．５．１　主流中心速度分布

図4-5に主流方向中心部速度の実験結果，計算結果を比較したものを示す．主流中心速度は x_1=4in.における主流中心速度にて無次元化した値として実験，計算とも示してある．実験結果より特徴的なことは，湾曲風洞出入口部にて流れは加速されピーク値を持ち，湾曲風洞部で主流中心速度が低い値を持つことがあげられるが，計算結果においてもこれらの傾向を良く表わしている．この二つの加速領域は，主流中心速度の約６％前後と小さな値であるが計算ではこの値を良好に予測している．これら二つの加速領域の発生原因としてTucker(1966)は次のような説明を加えている．湾曲風洞出入口部でのかなりきつい壁面曲率ならびに上下壁面部に発生する高い静圧分布により流線が壁面形状に沿って流れることができず流線が中心部方向に曲げられる結果，このような二つの加速領域が発生するとしている．

また，主流中心速度が，0.95～1.06 の範囲でほぼ一定の値を保持しているのは，先にも説明したように，圧力勾配のない平板に対する境界層排除厚さ分を実験，計算とも考慮しているためであるが，計算結果の方が，湾曲風洞部で実験値よりも高い値を示す結果となった．この境界層排除厚さ分を考慮するとしないとでは，主流中心速度分布の発達の様子は図4-5とは大きく異なる．図4-6は参考として，計算格子に境界層排除厚さを考慮せず計算した結果であるが，主流中心速度は，境界層の発達と相まって徐々に増加する傾向を示し，主流中心速度を一定に保つことは非常に難かしくなる．

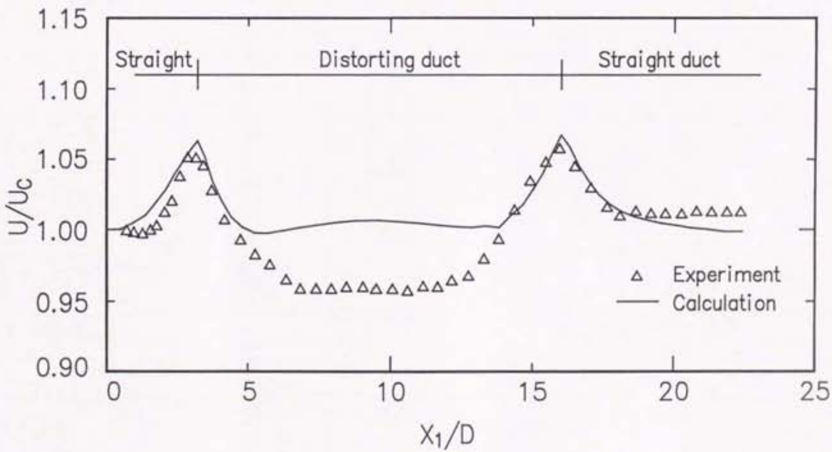


図4-5　主流中心速度の発達

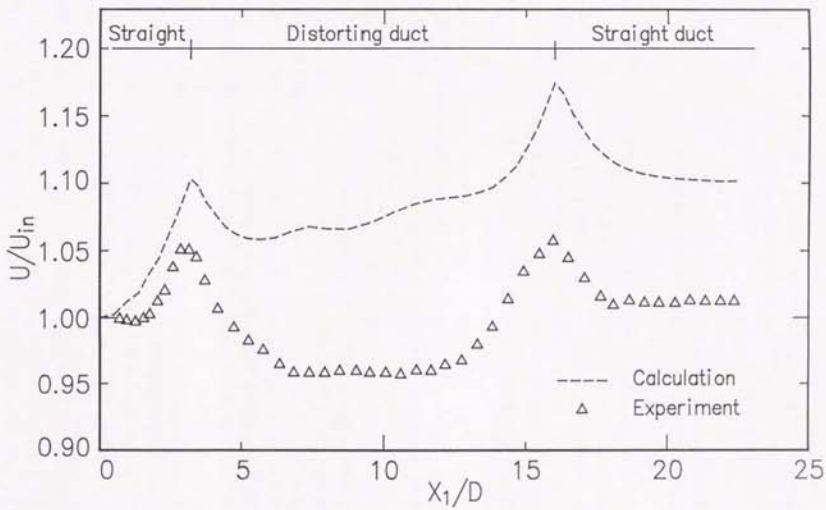


図4-6　境界層排除厚さを考慮しない場合の主流中心速度の発達

4．5．2　主流速度分布，二次流れベクトル

図4-7(a),(b)は，各横断面における主流速度の等値線図を，図4-8(a),(b)には，二次流れベクトル線図を示す．主流速度U_1の等値線図より特徴的な現象とし次のような点を指摘できる．すなわち湾曲風洞入口までは，主流速度分布は主流中心部で速度が最も大きい凸状の放物型分布となっているが，湾曲風洞部においてはx_1=4.80Dに認められるように下壁面近傍に最大主流速度を持つ領域が形成され，人口直管部の速度分布とは異なる分布となる．この領域は湾曲風洞，およびこれに続く出口直管部においても存在し，x_1=16.0Dにおいても認められるが，出口近傍になると，この領域も消滅し，凸状放物型の速度分布を持つようになる．また，湾曲風洞入口に近づくにつれて，あるいは湾曲風洞部において主流速度等値線が大きく変形していく事も特徴的な現象として上げられるが，これは二次流れにより等値線図が変形を受けたものと解釈できる．また，湾曲風洞出口部近傍のコーナー部において，わずかばかりの逆流領域の発生が認められた．この逆流領域は，主流方向x_1=14.67D～x_1=16.0Dの間で発生している．この種の三次元乱流場の剥離を楕円形方程式を用いて解いた例は，その困難さゆえにきわめて少ないが，中山-Chow-Sharma(1983)は，主流方向に対し一方向のみに拡大していくディフューザ内流れについて計算を行ない，わずかばかりの逆流領域がコーナー部より発生することを指摘しており，本解析例と流れ場形状は多少異なるものの，同様の傾向を示すのは興味深い．

二次流れベクトルは，図4-8(a)より解るように湾曲風洞入口　x_1=3.2Dにおいて，主流中心速度の約12%程度の速度を持ち，中心部へ向かう流れを形成している．また，この二次流れは入口直管部　x_1=1.75Dの位置ではすでに発生し始めており，湾曲風洞の影響がかなり上流まで及んでいることをうかがわせる．

湾曲風洞に流入すると，x_1=4.80Dの位置においては二次流れは最大で主流中心速度の20%程度までも達し，かなり強い二次流れを形成する．例えば，比較的きつい曲がりをする90°曲がり管(R_c/d=4，R_c：曲率半径，d：管直径)では，最大二次流れは主流中心速度の29%程度に達するとAkiyama(1988)らは報告している．このように本解析では主流中心軸線は直線であるが，壁面の変形により，曲がり管に発生する二次流れと同程度の流れが発生していることになる．風洞内二次流れは，入口近傍では上下壁に垂直方向となるような流れであるが，下流に行くに従がい側壁に垂直となる方向に徐々に曲げられ発達していく．このような二次流れの発生により，中心部の速い流体は側壁方向に持ち去られることになり，結果的に湾曲風洞部の主流中心速度が低下することになる．また，主流速度の等値線図に於てx_1=14.67Dよりコーナー部に於て逆流領域が発生したのと呼応するように二次流れベクトルに於いても同じ位置に逆流領域が認められ小さな循環流を形成している．中山-Chow-Sharma(1983)も同様な計算結果を提示している．その後，下流に行くに従いその循環領域は，増大して行く．

風洞部で形成された循環流は，出口直管部に流入するが，直管部に流入すると図4-8(b)に示すように循環流を形成しつつ減衰して行く．x_1=18.59Dにおいては，主流速度の10%以下にまで二次流れは減衰してきており，さらに下流においては2～4%程度と第二種二次流れの大きさと同程度となってきてはいるが，第二種二次流れがどの程度この循環流に影響を及ぼしているのかは，現状の出口直管部をさらに延長して計算をすることが必要と思われる．

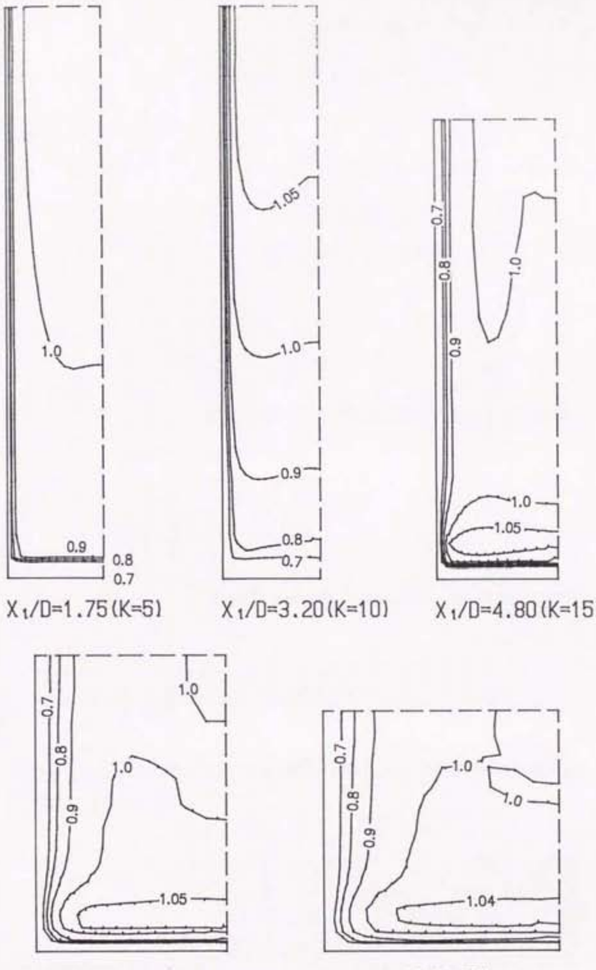
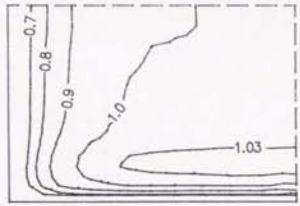
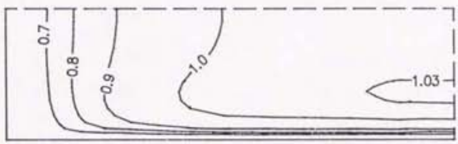


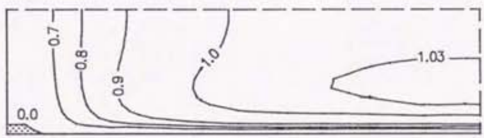
図4-7(a)　主流速度等値線図：U_1/U_{in}



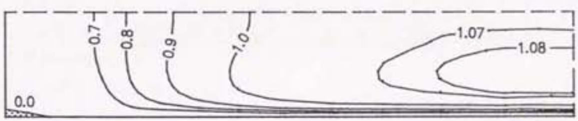
$X_1/D=11.05(K=25)$



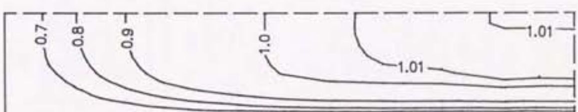
$X_1/D=14.26(K=31)$



$X_1/D=14.67(K=32)$



$X_1/D=16.00(K=36)$



$X_1/D=18.59(K=43)$

図4-7(b)　主流速度等値線図：U_1/U_{in}

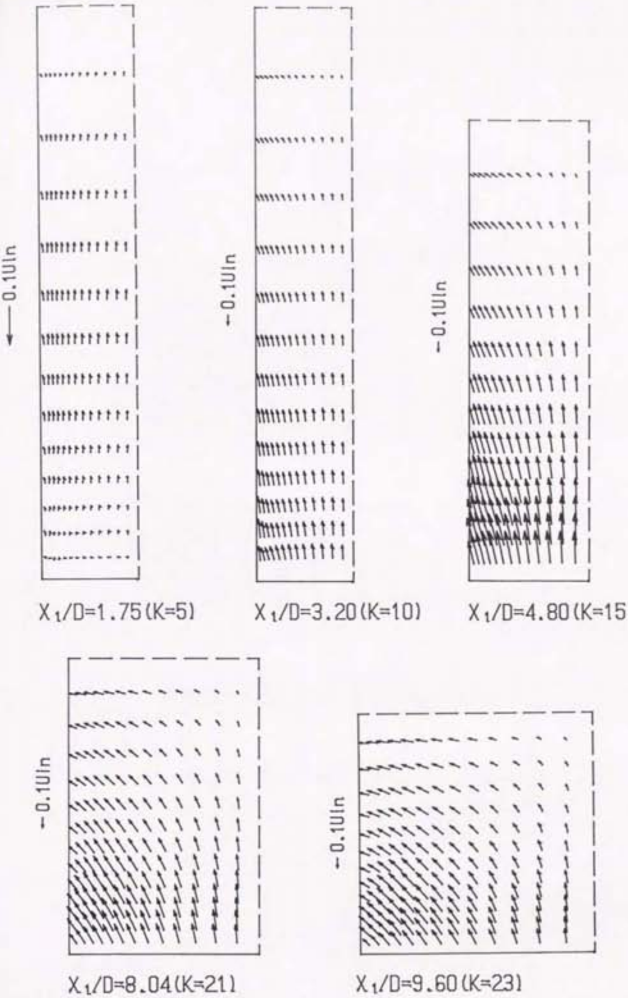
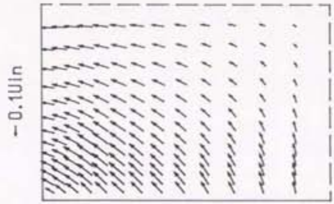
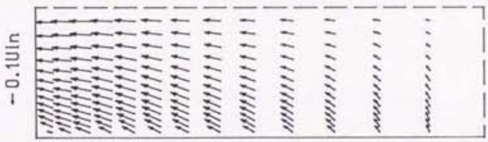


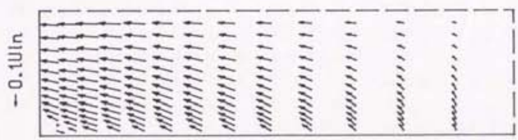
図4-8(a)　二次流れベクトル線図



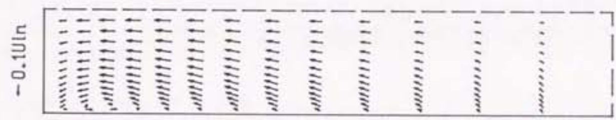
$X_1/D=11.05\,(K=25)$



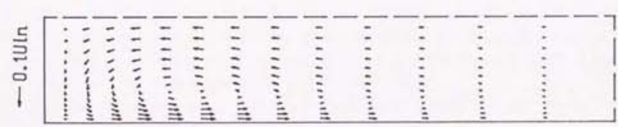
$X_1/D=14.26\,(K=31)$



$X_1/D=14.67\,(K=32)$



$X_1/D=16.00\,(K=36)$



$X_1/D=18.59\,(K=43)$

図4-8(b)　二次流れベクトル線図

4．5．3　圧力分布

図4-9は主流方向に沿った中心部，下壁面中心部，及び左壁面中心部の圧力分布である．中心部圧力分布において，正の圧力勾配と負の圧力勾配を持つ二つの谷部がみられるが，これは，湾曲風洞の入口部，出口部に各々位置しており，各々の圧力勾配と主流中心速度のピーク値の加速，減速流とが対応していることがわかる．また圧力値は入口直管部から出口直管部まで二つの谷部はあるもののほぼ一定値となっているが，これは境界層排除厚さ分を考慮して流れ方向に断面が徐々に広がっているためであり，排除厚さを考慮しなければ，二つの谷部を持ち，図4-9に示す圧力分布より入口で高く出口で低い圧力分布となるものと考えられる．また，下壁面中心部の圧力が，湾曲風洞入口に於いて急激に上昇しているが，実験に於いても同様な結果となることを，Tucker(1966)は報告している．また，Tuckerは，この圧力が急激に上昇する逆圧力勾配領域にて，剥離流が存在するか否かを調査して，剥離流の無いことを報告している．解析結果に於いてもこの領域での剥離流は認められず同様な結果となっている．

次に主流方向に垂直な断面における圧力等値線図を考える．図4-10(a),(b)は，各断面における等値線図を示したものである．湾曲風洞入口部 x_1=3.2D において下壁部に高圧力領域が形成され，湾曲風洞に入るとこの高圧部の領域は徐々に中心部へと移動し，湾曲風洞出口 x_1=16.0D においては，高圧領域は左右壁に発生することが認められる．

このように断面内の高圧力領域の発生位置が下流に行くに従がい変化するのは次のような現象に起因すると思われる．最初風洞入口部下壁近傍において圧力が高くなるのは，一様流として流入した主流速度が湾曲風洞上下壁により遮られる結果高圧領域を形成するものと思われる．この下壁部の高圧領域発生により図4-8(a) x_1=3.20D に示すような中心部へ向かう二次流れが発生し，風洞中心部に上下壁面近傍の流れが運び込まれる事になる．さらに湾曲風洞を流れるにつれ，二次流れは徐々に上下壁に平行となる流れを形成していき，風洞部出口において出口直管部の左右壁に二次流れが遮られる結果，左右壁で高圧力部領域が発生し，湾曲風洞出口部以降の直管部においては，左右壁に高圧力領域が形成されることになる．その後下流に行くに従がい，二次流れの減衰とともに左右壁高圧領域の値は減少していくことになる．以上のように断面内の圧力分布は，二次流れの挙動と相関のあることが解かる．

4．5．4　乱流エネルギー分布

図4-11は主流方向への中心部乱流エネルギーの発達の様子を，実験結果，計算結果と比較したものである．計算結果では，約 x_1=1.2D 程度より k の勾配が実験結果と離れてゆく結果となっている．これは，計算において，湾曲風洞の存在が上流まで影響を及ぼし，その結果，勾配に変化が生じたとも考えられる．実際計算において，二次流れの発生は，x=1.75D においては明瞭に認められ，湾曲風洞の影響がかなり上流域まで及んでいることは明らかである．実験においては x_1=1.86D の位置より測定を行なっているため，計算結果に示すような，勾配の変化が存在するか否かは不明である．

実験においては乱流エネルギーは，−1.2の勾配を持って減衰し，湾曲風洞出口でピーク値を取る．計算においては，勾配は異なるものの同様の傾向を示している．このような実験結果の勾配との不一致は，入口における乱流エネルギー，乱流散逸の設定が適正でなか

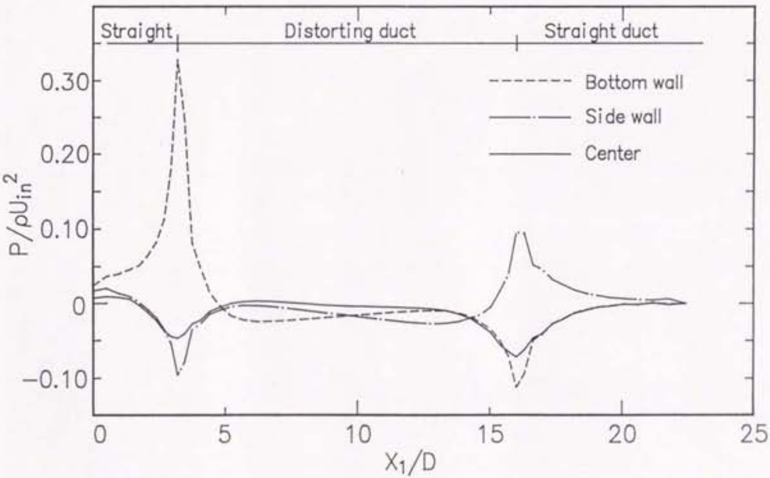


図4-9　主流方向圧力分布

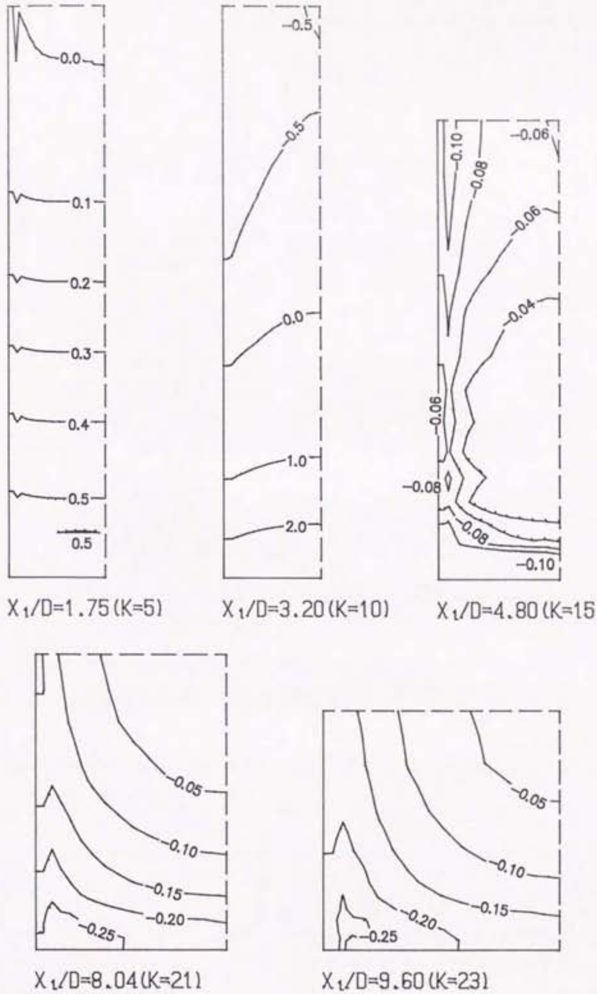


図4-10(a) 圧力等値線図：(P／ρU_{in}^2)x10

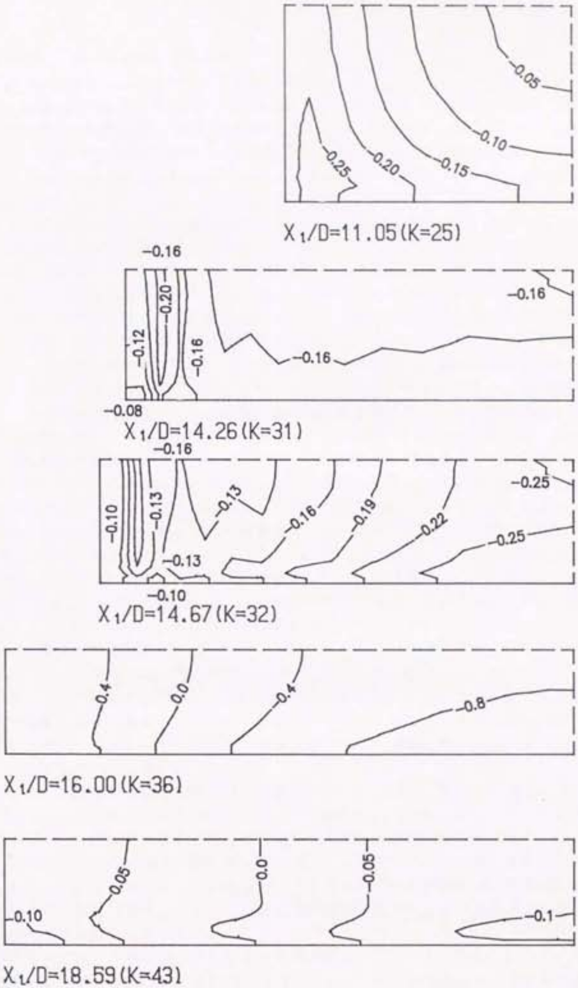


図4-10(b) 圧力等値線図：($P／\rho U_{in}{}^2$) x 10

った点に起因しているものと考えられる．

図4-12～4-14は乱流エネルギーの各速度変動成分，$\overline{u_1^2}$，$\overline{u_2^2}$，$\overline{u_3^2}$ の計算結果と実験結果とを比較したものである．図4-12は、主流方向の速度変動$\overline{u_1^2}$の変化を示しているが，計算においては，湾曲風洞入口部，出口部においてピーク値を持った分布となっているが，実験においては，出口部にてピーク値は認められるものの入口部では認められない．これは，実験においては熱線風速計を用いており，熱線の占める領域の平均として乱流エネルギー値を測定しているのに対し，計算結果は中心点の結果であり，その周囲領域の変動成分値をとれば計算結果のピーク値も平均化され，より実験結果に近づくものと思われる．また，他の速度変動の計算結果と比較して$\overline{u_1^2}$の示すピーク値が大きいのは，$\overline{u_1^2}$のモデル式中に主流速度U_1の主流方向への勾配$\partial U_1/\partial x_1$の項を含み，中心部主流速度結果より解かるように湾曲風洞出入口にて二つのピーク値を持つことに起因している．

図4-13は上下壁に垂直方向の速度変動成分$\overline{u_2^2}$の実験と計算結果とを比較したものである．計算結果，実験結果ともピーク値は湾曲風洞出口にて認められる．また計算結果の特徴として，入口直管部においてその減衰勾配に変化が認められ，湾曲風洞の影響を他の変動成分より大きく受けていることが伺える．これは次のように説明できる．変動成分$\overline{u_2^2}$の式は，亜流速度 U_2の各方向への勾配を含む項が支配的であり，また湾曲風洞入口よりかなり上流部において中心部に向かう亜流速度U_2は観察されることより，$\overline{u_2^2}$ の値は，かなり上流部から変化することになり，その結果減衰勾配も変化することになる．

図4-14は，左右壁に垂直な方向の速度変動$\overline{u_3^2}$の実験結果と計算結果とを比較したものである．計算結果においては，湾曲風洞入口にて勾配が急激に変化する点，および出口部にて，山と谷の変動を持っている点が特徴的である．実験においては，湾曲風洞入口部での勾配の急激な変化は認められないものの，出口部においては，山と谷の変動挙動を示し計算結果と同様の傾向を示している．変動成分 $\overline{u_3^2}$は，亜流速度 U_3の勾配を含む項が支配的であり，またこの亜流速度U_3は，二次流れベクトル図を見ても解かるように，湾曲風洞に流入して始めて発生し，下流に行くに従い徐々に発達していく．このことより，変動成分$\overline{u_3^2}$の値は，湾曲風洞に流入して始めて変化し，その結果湾曲風洞入口部における急激な勾配が発生したものと解釈できる．

以上のように各変動成分挙動は，平均流の速度勾配と深い関係にあり，このような平均流の速度勾配により，乱流エネルギーの再配分が行なわれるものと考えられる．これは，第２章でも述べたようにレイノルズ応力方程式中の圧力・歪相関項の平均流による影響の項によるものと解釈できる．

図4-15は，各垂直応力値の主流方向への変化を示したもので，各垂直応力値が湾曲風洞内でどのように再配分されるかの実験結果，計算結果を示したものである．実験においては，直管部入口に乱流格子を設けて，等方性乱流とすることを意図しているが，図に示すように非等方的な流れとなって湾曲風洞部へ流入する．風洞内では，各方向への再配分化が行なわれ上下壁に垂直方向の速度成分$\overline{u_2^2}$が増大し，逆に左右壁に垂直方向の速度成分$\overline{u_3^2}$が減少する結果となっている．その後出口部直管に流入すると，各垂直応力値は等方的になろうとする傾向を示している．

計算においては，乱流格子の設置してある直管部入口では，0.33の値となっているが，これは等方性を保持していることを示すものであり，非等方的状態となっている実験結果

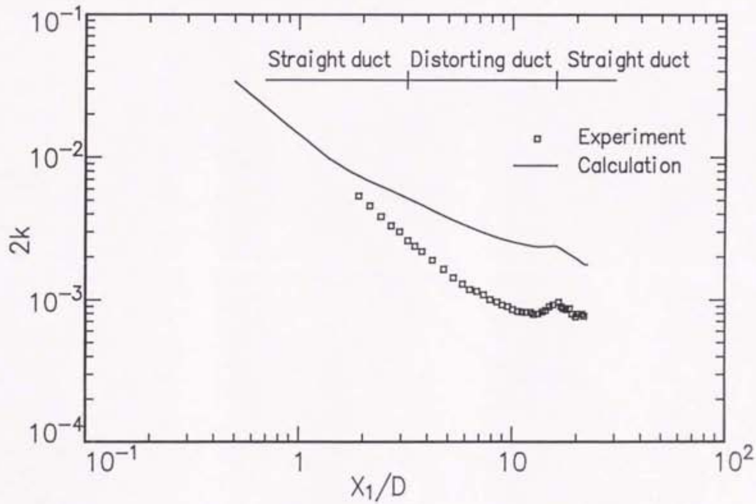


図4-11　中心部乱流エネルギーの変化

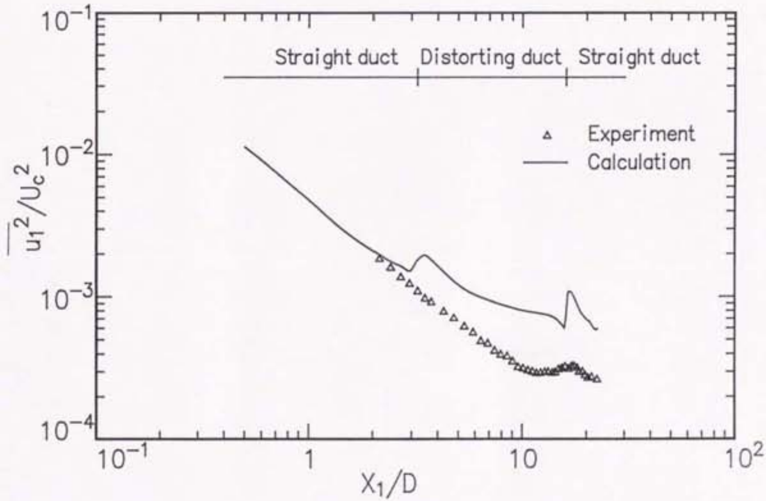


図4-12 垂直応力$\overline{u_1^2}$の変化

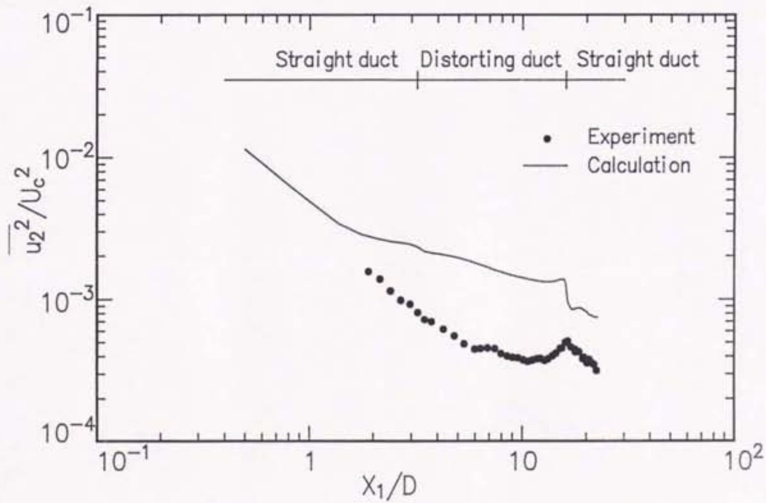


図4-13　垂直応力$\overline{u_2^2}$の変化

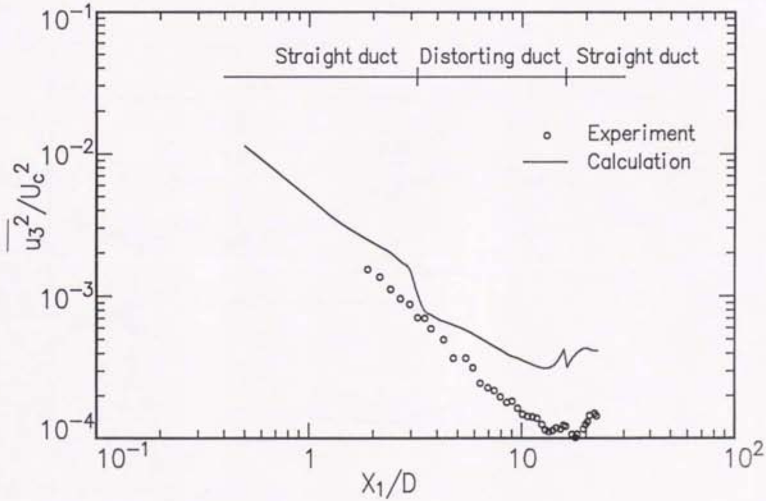


図4-14　垂直応力$\overline{u_3^2}$の変化

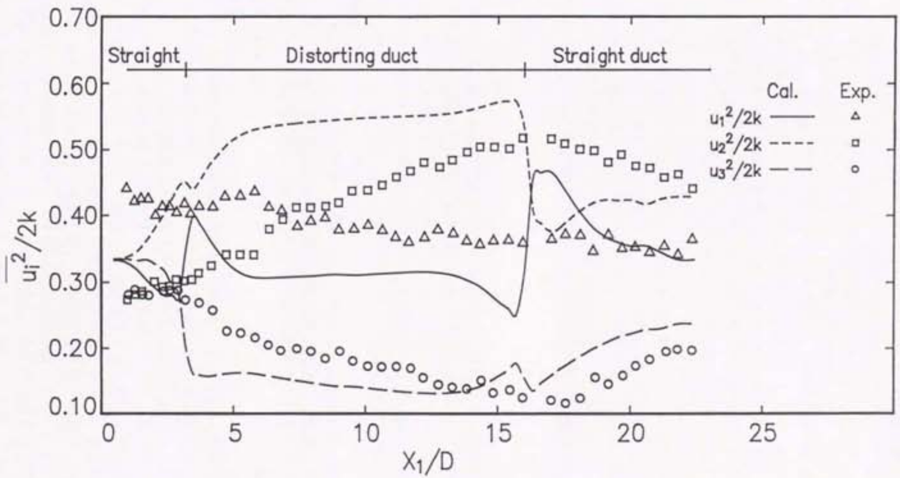


図4-15　各垂直応力の変動

とは異なっている．また，この値は x_1=1D程度より変化し始めており，下流の湾曲風洞の影響が上流域まで波及しているものと考えられ，この点についても実験とは異なる結果となっている．湾曲風洞部においては，垂直応力$\overline{u_2^2}$の値が増大し，$\overline{u_3^2}$が減少し，$\overline{u_1^2}$が一定値を保つという結果となり，実験と同様の傾向を示している．また，出口直管部においては，各垂直応力は等方的になろうとし，実験の結果とも一致している．

湾曲風洞入口，出口部において，各垂直応力の変動が急であるのは，前述のように実験値が領域平均の値であるのに対し，計算結果が局所値であることも一つの要因と考えられる．また，本解析モデルは対流項，拡散項にRodi近似を行なった代数応力モデルであり，従って対流，拡散現象を正確に表現しているとは言い難い．Rodi近似は，第２章でも述べたように（$\overline{u_i u_j}/k$）の勾配が小さいものと仮定して成立する近似であるが，湾曲風洞出入口部においては，これらの値が大きく変化することは予想されることであり，湾曲風洞出入口部における垂直応力の変動は，代数応力モデルを用いたことに起因しているとも考えられる．そうであれば，速度あるいはレイノルズ応力の各方向勾配が急激に変化するような流れに対して，代数応力モデルを用いることには問題があり，対流，拡散項を含めた形で各レイノルズ応力方程式を解くことが必要と思われる．

Townsend (1954) は，流れの非等方性を示すパラメータとして，次のようなパラメータ K_1(structural parameter)

$$K_1 = \frac{\overline{u_2^2} - \overline{u_3^2}}{\overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}} \tag{4-21}$$

を導入し，管中心部における値を求めた．K_1 は上式より解るように等方性流れの場合は零となり，非等方性が増すにつれ減少する値をとる．図4-16は，この K_1の実験およよび計算結果を示したものである．Townsend(1954)は，入口アスペクト比が，4:1の湾曲風洞にて実験を行ない，この値が0.42に漸近していくことを報告したが，Tucker-Reynolds(1968)は，入口アスペクト比6:1で実験を行ない図4-16に示すように0.64と大きな値をとりTownsend (1954)の結果と一致しないことを報告している．

実験において，K_1 は湾曲風洞部入口より徐々に増加し，湾曲風洞出口手前でピーク値を取った後減少しているが，計算においては，湾曲風洞入口部にて急激に変化し，その後緩やかな勾配を持って増加，出口手前でピーク値をとった後減少している．この入口部の急激な変化は，垂直応力$\overline{u_2^2}$，$\overline{u_3^2}$が大きく変化したためであり，この変動原因は，前述の通りである．

乱流エネルギーの各断面における等値線図を，図4-17 (a),(b)に，および垂直応力成分$\overline{u_3^2}$,$\overline{u_2^2}$,$\overline{u_1^2}$の等値線図を各々図4-18 (a),(b),図4-19 (a),(b),図4-20 (a),(b)に示す．各々のパラメータは入口流入速度で無次元化して表示してある．乱流エネルギーは直管部入口で等方性乱流として全断面で一定値を与えているが，x_1=1.75Dでは，壁面近傍で高く中心領域で低くなるという乱流エネルギーに特徴的な様相をすでに呈しており，この傾向は湾曲風洞部に入っても変わることなく下流域まで発達していく．また図4-7 (a),(b)に示したように主流速度等値線図は二次流れにより変形を受けているが，乱流エネルギーの場合は二次流れによる等値線図の変形は少ないように思われる．

垂直応力$\overline{u_3^2}$の等値線図の発達の様子を考察すると，側壁面近傍では$\overline{u_3^2}$の値は比較的低い値を示し，下壁面近傍においては高い値を示す領域が認められる．これは壁面は，x_3

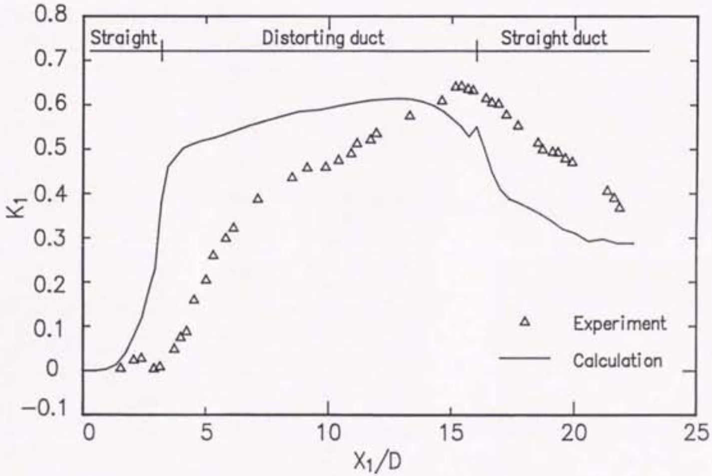


図4-16　非等方性を示すパラメータK_1の比較

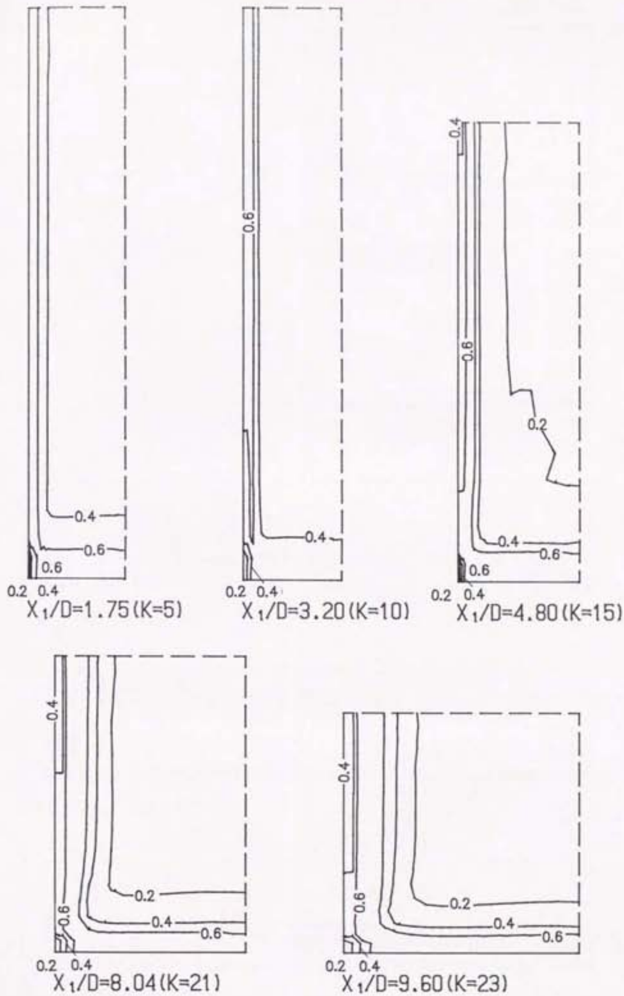


図4-17(a)　乱流エネルギーの等値線図：$(k／U_{in}^2)\times 10^2$

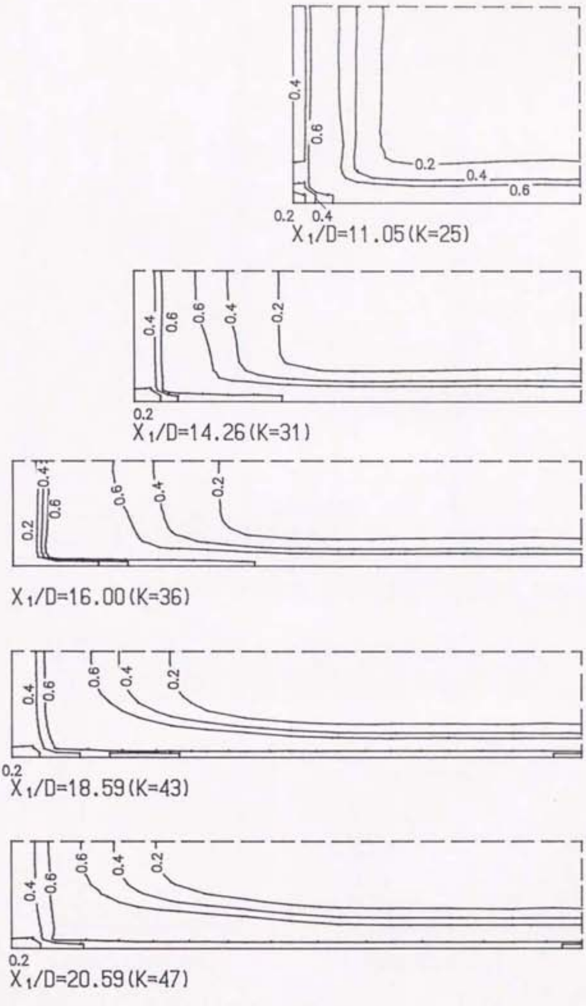
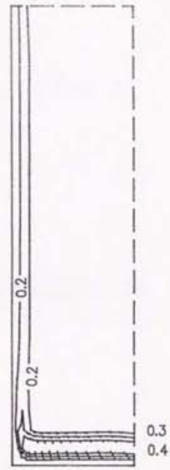


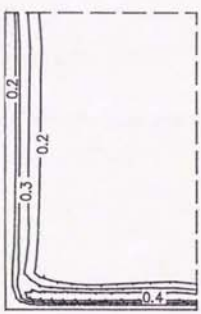
図4-17(b)　乱流エネルギーの等値線図：（k／U_{in}^2）x 10^2

X_1/D=1.75(K=5)

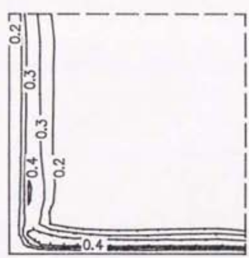
X_1/D=3.20(K=10)



X_1/D=4.80(K=15)

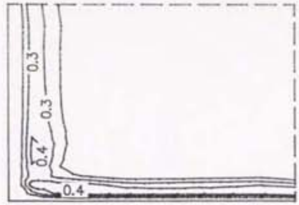


X_1/D=8.04(K=21)

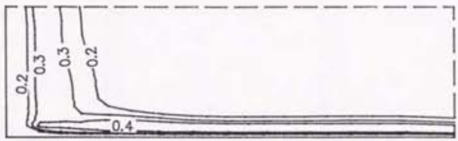


X_1/D=9.60(K=23)

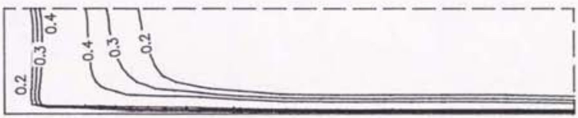
図4-18(a)　垂直応力$\overline{u_3^2}$の等値線図：($\overline{u_3^2}$／U_{in}^2) x 10^2



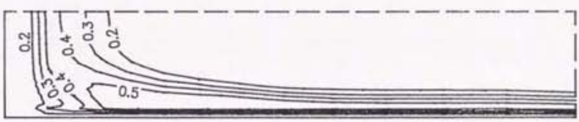
$X_1/D=11.05(K=25)$



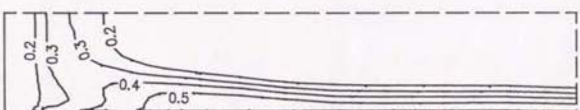
$X_1/D=14.26(K=31)$



$X_1/D=16.00(K=36)$



$X_1/D=18.59(K=43)$



$X_1/D=20.59(K=47)$

図4-18(b)　垂直応力 $\overline{u_3^2}$ の等値線図：($\overline{u_3^2}$／U_{in}^2) x 10^2

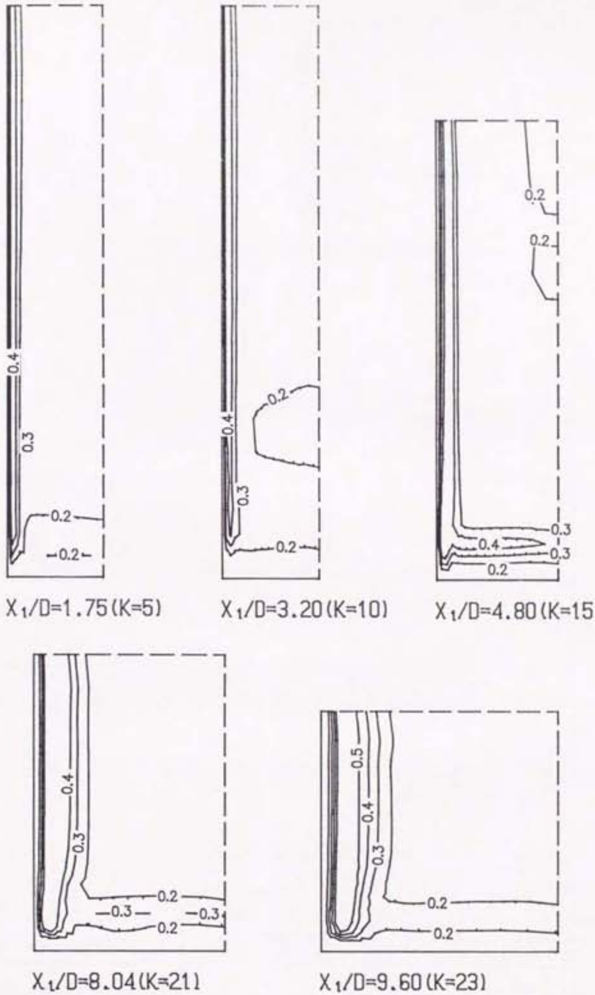
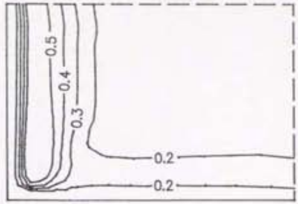
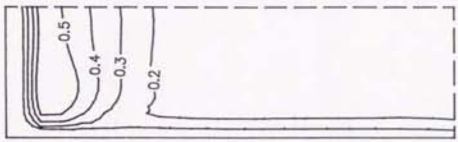


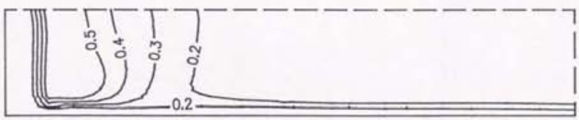
図4-19(a)　垂直応力$\overline{u_2{}^2}$の等値線図：$(\overline{u_2{}^2}/U_{in}{}^2)\times 10^2$



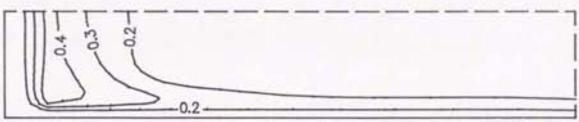
$X_1/D=11.05(K=25)$



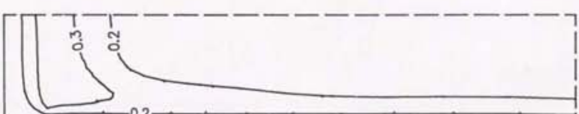
$X_1/D=14.26(K=31)$



$X_1/D=16.00(K=36)$



$X_1/D=18.59(K=43)$



$X_1/D=20.59(K=47)$

図4-19(b)　垂直応力$\overline{u_2{}^2}$の等値線図：$(\overline{u_2{}^2}/U_{in}{}^2)\times 10^2$

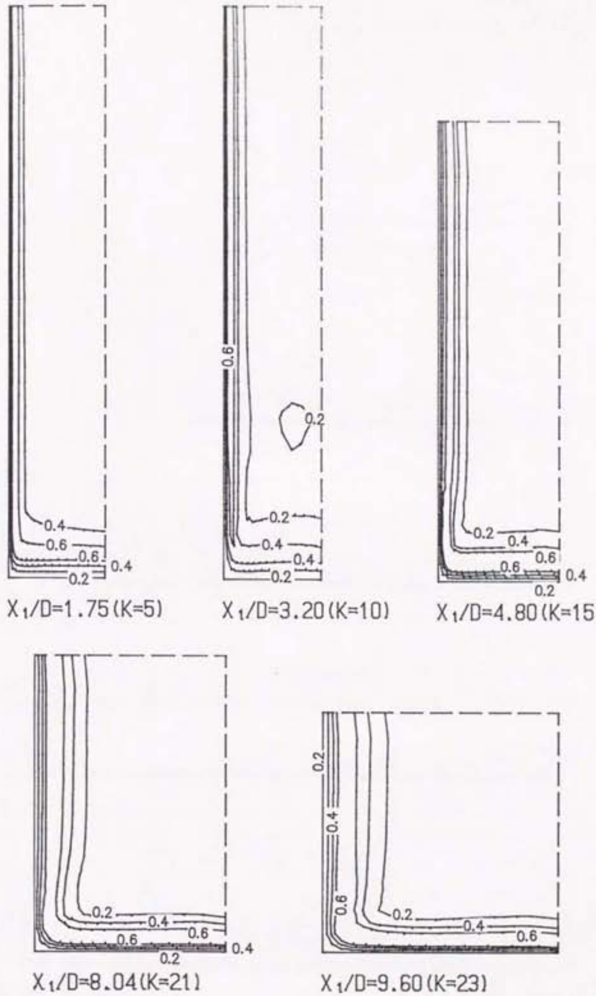
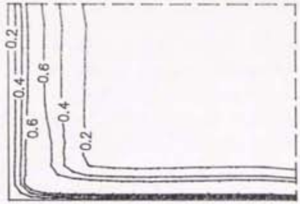
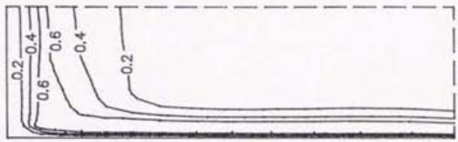


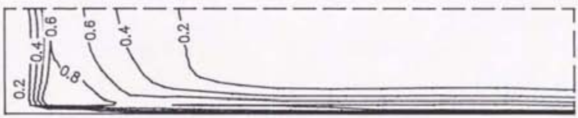
図4-20(a)　垂直応力$\overline{u_1^2}$の等値線図：$(\overline{u_1^2}/U_{in}^2)\times 10^2$



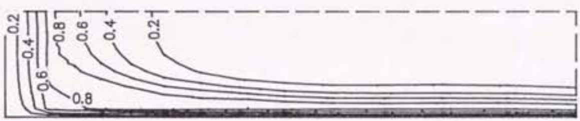
$X_1/D=11.05(K=25)$



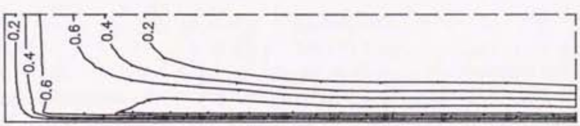
$X_1/D=14.26(K=31)$



$X_1/D=16.00(K=36)$



$X_1/D=18.59(K=43)$



$X_1/D=20.59(K=47)$

図4-20(b)　垂直応力$\overline{u_1^2}$の等値線図：$(\overline{u_1^2}/U_{in}^2)\times 10^2$

方向に垂直な方向にあたり，x_3方向の変動成分$\overline{u_3{}^2}$が側壁に近づくにつれ，その値が壁面のため抑制されるのに対し，下壁面はx_3方向と同一方向であるため，壁面により抑制されることがないためであり，レイノルズ応力モデルの妥当性を示すものと考えられる．

垂直応力$\overline{u_2{}^2}$の等値線図に対してもx_2方向に垂直な下壁面ではu_2の乱れが抑制されて値の低い領域が広がっているのに対し，側壁部には高い値の領域が認められ，垂直応力$\overline{u_3{}^2}$の動向とは逆の傾向を示している．

主流方向の垂直応力$\overline{u_1{}^2}$は，側壁面，下壁面による影響を受けることはないので，いずれかの壁に特に大きな値を持つ領域を形成することなく，壁面で高く中心部で低いすり鉢状の分布となっている．

4．5．5　レイノルズ応力分布

各種レイノルズ応力のうち，ここでは，第二種二次流れの発生要因となる，垂直応力の差($\overline{u_3{}^2}-\overline{u_2{}^2}$)，および，流れ方向に垂直な断面のせん断応力$\overline{u_2 u_3}$の分布について検討を加える．図4-21 (a),(b)は，入口速度で無次元化した垂直応力の差の等値線図を，図4-22 (a),(b)はせん断応力$\overline{u_2 u_3}$の分布を示す．

垂直応力の差の分布をみると，下壁において正の領域を，また左壁において負の領域を示す結果となっているが，これは，下壁近傍においては，u_3 の変動は下壁に水平方向であることより，壁により抑制されることはなく，逆にu_2は下壁に対し垂直方向の変動成分であり，下壁に近づくにつれて抑制されることになり，従って$\overline{u_3{}^2}>\overline{u_2{}^2}$の関係が成立するためと解釈できる．左壁に対しては，$\overline{u_2{}^2}$，$\overline{u_3{}^2}$の関係が逆となることより負の領域が発生することになる．

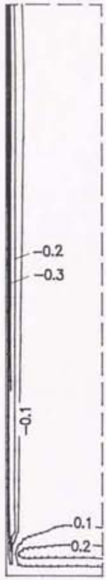
このことは，主流方向の速度 U_1のx_2方向，x_3方向の速度勾配とも相関づけて説明することができる．いま，亜流方向速度 U_2，U_3が主流方向速度U_1に比べて小さいものと仮定し，($\overline{u_3{}^2}-\overline{u_2{}^2}$)の値を求めると次のように示される．モデルとしては，本提唱モデルを用いている．

$$
\begin{aligned}
&(\overline{u_3{}^2}-\overline{u_2{}^2})\left(\frac{P_k}{\varepsilon}-1+c_1\right)\\
&\qquad=-2\frac{k}{\varepsilon}(4\beta+\alpha)\left(\overline{u_1 u_3}\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3}-\overline{u_1 u_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)\\
&\qquad=2c_\mu(4\beta+\alpha)\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left\{\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2-\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2\right\} \qquad (4\text{-}22)
\end{aligned}
$$

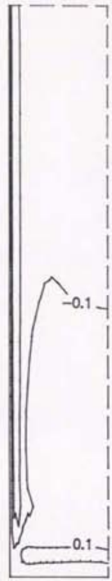
上式において

$$
\frac{P_k}{\varepsilon}-1+c_1 \fallingdotseq c_1\ >0 \quad , \quad 4\beta+\alpha<0 \qquad (4\text{-}23)
$$

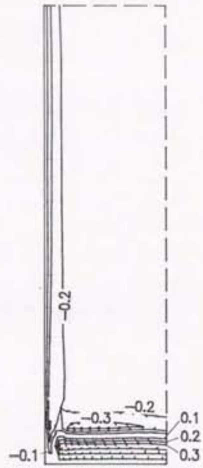
であることに留意して，図4-7 (a),(b)の主流速度等値線図を検討すると，下壁近傍においては，$\partial U_1/\partial x_2>\partial U_1/\partial x_3$であり，上式より垂直応力の差は正の値をとり，左壁近傍においては，$\partial U_1/\partial x_3>\partial U_1/\partial x_2$であることより逆に負の値を取ることが理解できる．また両壁より離れた領域では，垂直応力の差は負の値を示し，上式より考えれば $\partial U_1/\partial x_3$の値が大きいためと考えられるが，この領域においては，主流速度の断面方向の速度勾配の値も小さくなり，亜流速度勾配の項も同時に考慮することが必要となり，



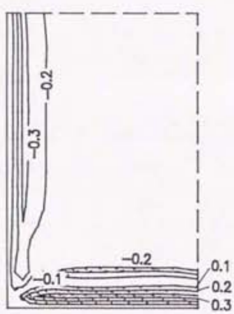
X_1/D=1.75(K=5)



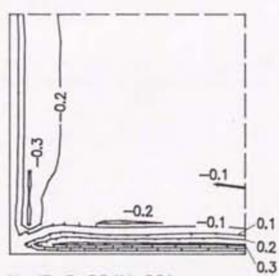
X_1/D=3.20(K=10)



X_1/D=4.80(K=15)

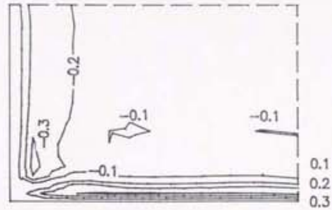


X_1/D=8.04(K=21)

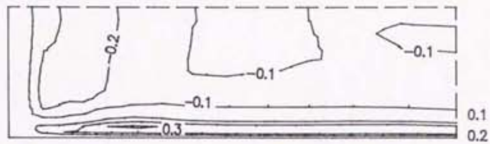


X_1/D=9.60(K=23)

図4-21(a)　垂直応力の差の等値線図：$(\overline{u_3^2}-\overline{u_2^2}/U_{in}^2)\times 10^2$

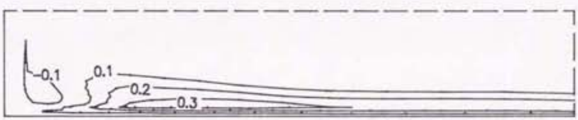


$X_1/D=11.05$ (K=25)

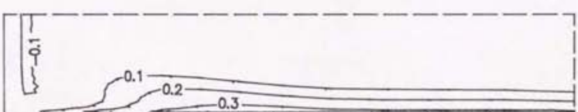


$X_1/D=14.26$ (K=31)

$X_1/D=16.00$ (K=36)



$X_1/D=18.59$ (K=43)



$X_1/D=20.59$ (K=47)

図4-21(b)　垂直応力の差の等値線図：$(\overline{u_3^2}-\overline{u_2^2}/U_{in}^2)\times 10^2$

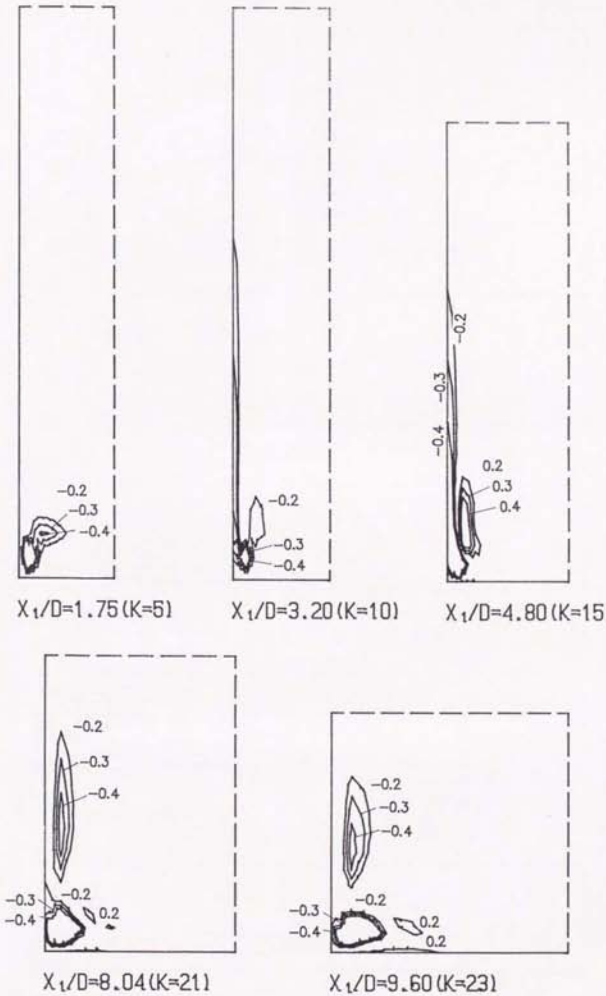
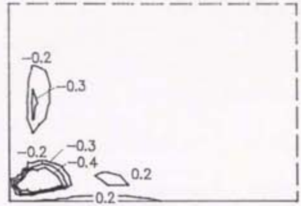
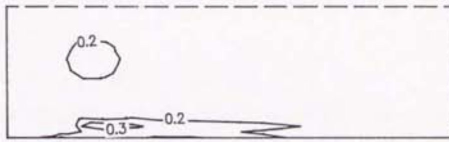


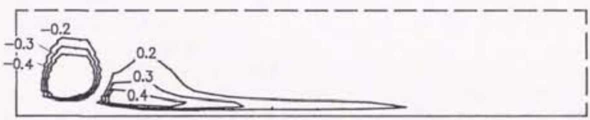
図4-22(a)　せん断応力の等値線図：$(\overline{u_2 u_3}/U_{in}^2) \times 10^3$



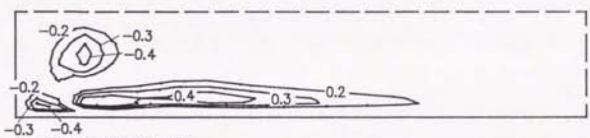
$X_1/D=11.05$ (K=25)



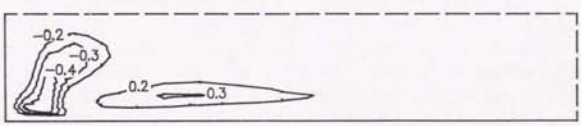
$X_1/D=14.26$ (K=31)



$X_1/D=16.00$ (K=36)



$X_1/D=18.59$ (K=43)



$X_1/D=20.59$ (K=47)

図4-22(b)　せん断応力の等値線図：$(\overline{u_2 u_3}/U_{in}^2)\times 10^3$

単に$\partial U_1/\partial x_3$の値が大きいためとは判断できない．

次にせん断応力$\overline{u_2u_3}$の等値線図について検討すると，特徴的な現象として次のような点があげられる．せん断応力$\overline{u_2u_3}$の値は湾曲風洞部に入れると，異符号領域を形成し，正の領域は湾曲風洞内において下流に行くに従がい徐々にその領域を増大していくが，出口直管部においては徐々に，減衰していく傾向にあることが認められる．一方，負の領域は，下流に行くに従がい，その領域を徐々に増大していく傾向にある．

せん断応力$\overline{u_2u_3}$は，主流速度および亜流速度のx_2，x_3方向速度勾配より構成されており，湾曲風洞内にては，これらの項の影響により異符号領域が形成されるものと考えられる．また出口直管部下流においては，亜流速度は小さくなるものと考えられ，$\overline{u_2u_3}$の構成式においてそれらの項を無視するとせん断応力は次のように示される．

$$\overline{u_2u_3}\left(\frac{P_k}{\varepsilon}-1+c_1\right)$$
$$=\frac{k}{\varepsilon}(4\beta+\alpha)\left(-\overline{u_1u_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}-\overline{u_1u_3}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) \qquad (4\text{-}24)$$

この式において$\overline{u_2u_3}$の係数は正で，$4\beta+\alpha<0$であり，右辺の各せん断応力と速度勾配の積の和の正，負によりせん断応力$\overline{u_2u_3}$は符号を変えるものと考えられる．

以上のように第二種二次流れの発生要因となるレイノルズ応力値は各断面にて有限値を持つものの，本解析のような流れでは圧力勾配による第一種二次流れの発達が大きく，明瞭な第二種二次流れは観察されなかった．第一種二次流れ，第二種二次流れは共存するものの第一種二次流れの方が支配的と解釈できる．

せん断応力$\overline{u_1u_2}$，および$\overline{u_1u_2}$の値は，ρu_1の流量が，u_3，u_2の速度変動により，x_3方向，x_2方向に運ばれ，運動量の交換を行なう結果生じるせん断応力と解釈できる．従って$\overline{u_1u_3}$は，x_3方向に等値線を発達させていき，一方$\overline{u_1u_2}$は，x_2方向に等値線図を発達させていくものと予測できる．

図4-23(a),(b)は，せん断応力$\overline{u_1u_3}$の代表的な位置での等値線図を示したものであるが，$\overline{u_1u_3}$の等値線図はx_3方向に発達しており，前述のような傾向を示している．また左壁面近傍にて最大値を取る分布となっている．

図4-24(a),(b)は，同様にせん断応力$\overline{u_1u_2}$の等値線図であるが，入口直管部，湾曲風洞部の下壁部において，壁部に平行な等値線図が，x_2 方向発達していくような分布となっており，予測結果と一致した結果となっている．特徴的な現象として，入口直管部にて認められなっかた異符号領域が，湾曲風洞部にて生じていることが上げられる．この異符号領域は，湾曲風洞内で徐々に発達し，湾曲風洞の中央部に当たるx_1=9.600以降その領域を減少している．その後出口直管部に於いては，この異符号領域は認められなくなる．第２章３．４節の助走区間発達乱流解析において，せん断応力$\overline{u_1u_3}$（あるいは$\overline{u_1u_2}$）の分布に異符号領域が発生するのは主流速度の亜流方向勾配の値により正あるいは負の値を持つことを説明したが，本解析流れの場合には，せん断応力$\overline{u_1u_3}$に比べせん断応力$\overline{u_1u_2}$の分布に異符号領域が認められることより，主流速度U_1のx_2方向の速度勾配，すなわち$\partial U_1/\partial x_2$の値が場所により正または，負の値を取るものと考えられる．従って，入口直管部，出口直管部に於いて，主流速度等値線の歪は少なく，この勾配値は変化しないことより入口，及び出口に於いては，異符号領域は見られない事になる．

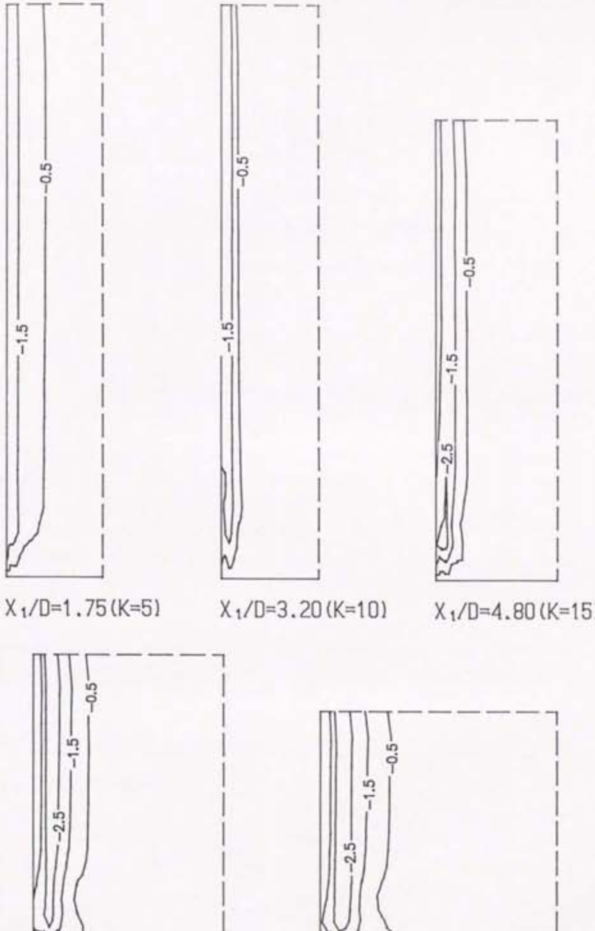
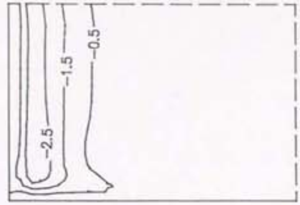
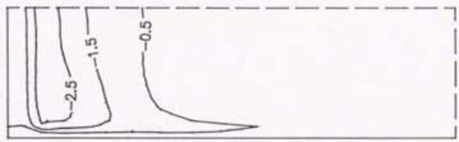


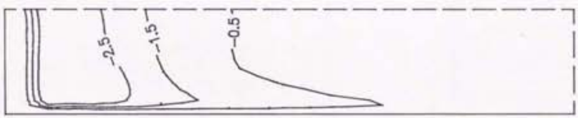
図4-23(a)　せん断応力$\overline{u_1 u_3}$の等値線図：$(\overline{u_1 u_3}/U_{in}^2)\times 10^3$



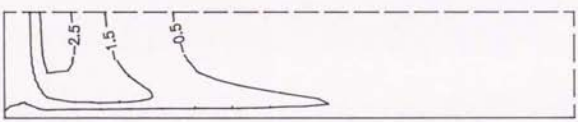
$X_1/D=11.05$ (K=25)



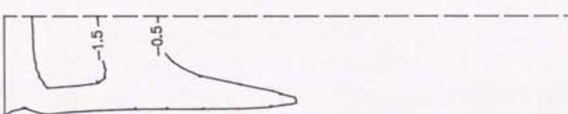
$X_1/D=14.26$ (K=31)



$X_1/D=16.00$ (K=36)



$X_1/D=18.59$ (K=43)



$X_1/D=20.59$ (K=47)

図4-23(b)　せん断応力$\overline{u_1 u_3}$の等値線図：$(\overline{u_1 u_3}/U_{in}^2)\times 10^3$

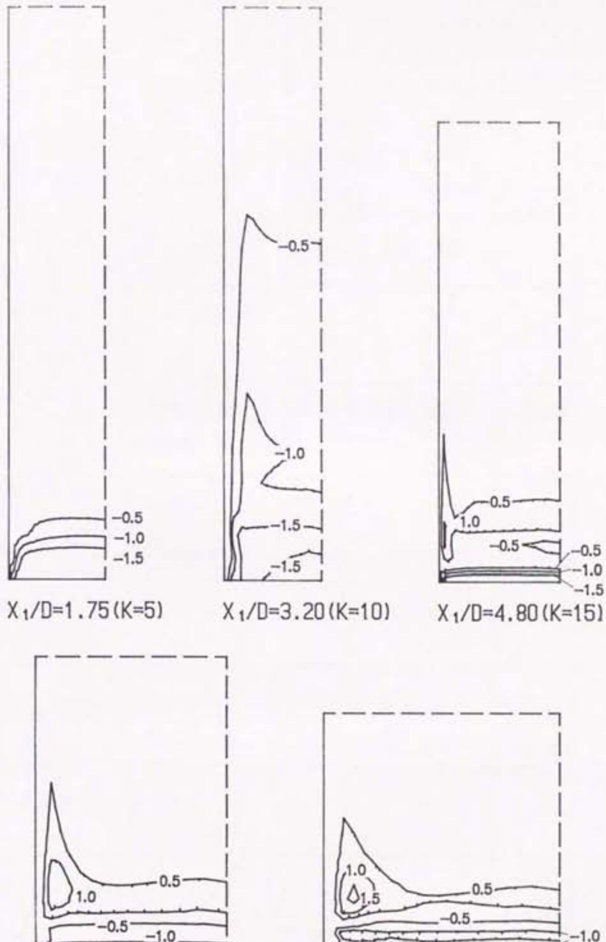
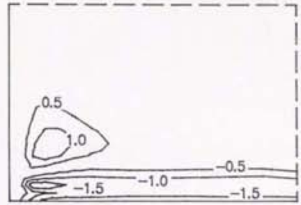
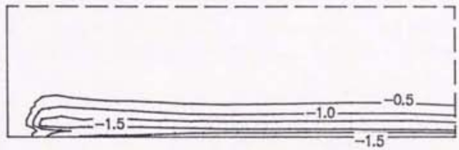


図4-24(a)　せん断応力$\overline{u_1 u_2}$の等値線図：($\overline{u_1 u_2}$／U_{in}^2) x 10^3

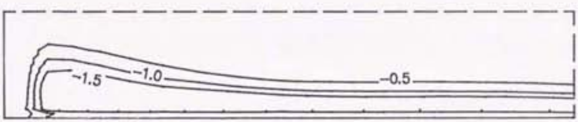


$X_1/D=11.05(K=25)$

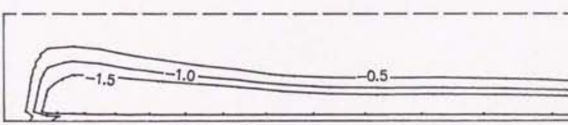


$X_1/D=14.26(K=31)$

$X_1/D=16.00(K=36)$



$X_1/D=18.59(K=43)$



$X_1/D=20.59(K=47)$

図4-24(b)　せん断応力$\overline{u_1u_2}$の等値線図：$(\overline{u_1u_2}/U_{in}^2)\times10^3$

4．6　結言

本章では，境界適合座標系を用いて，Tucker-Reynolds(1968) の行なった非等方性乱流場の解析を行ない次のような結言を得た．

(1) 主流中心部速度は，湾曲風洞出入口部にて二つのピーク値を持つが，計算結果においても同様の結果を示した．一方，中心部主流方向圧力分布は出入口部で二つの谷を形成する分布を取りながらほぼ一定圧をとる．

(2) 実験において，主流中心部速度を一定に保つため境界層排除厚さを考慮しているが，計算においてもこの排除厚さ分を加味することが不可欠である．

(3) 計算結果において湾曲風洞の上流部への影響は二次流れ，乱流エネルギー分布等に明瞭に認められる．二次流れは湾曲風洞入口部手前より発生し，また中心部乱流エネルギー分布は入口直管部とそれに続く湾曲風洞部において，その減衰勾配を異にする結果となっている．

(4) 湾曲風洞部での圧力・歪相関項による垂直応力の再配分は，計算結果においても，実験結果においても同様の傾向を示して行なわれており，モデルの妥当性を示すものと考えられる．また，各垂直応力が湾曲風洞出入口にて大きく変動するのは，代数応力モデルとしたためであり，対流項，拡散項の効果をさらに考慮することが必要と思われる．

(5) 本解析流れの出口直管部において循環流が形成されるが，これは圧力勾配により起因するものと思われるが，垂直応力の差，せん断応力の分布は，有限値を持つことより第二種二次流れによる影響もわずかながら反映されているものと推察される．従って，第一種二次流れと第二種二次流れは共存するものの第一種二次流れが支配的であると解釈できる．

(6) 境界適合座標系にてレイノルズ応力方程式を表現し，複雑三次元形状を有する非等方乱流場を解析可能な手法の構築を行なった．

第５章　結論

５．１　結論

我々の生活をとりまく多くの流れ場，および温度場は，非等方性を持つ乱流であり，その乱流機構を正確に把握しかつ予測することは，工業上における様々な諸問題解決の指針となり得るものであり，非等方性の熱流動解析を行なうことは有意義なことである．特に，乱流を定義づける一要因と考えられる拡散現象は，機械工学はもとより，化学工学，土木工学等々多くの分野にて興味が持たれる問題であり，非等方性を考慮して始めて実際の流れを把握することが可能となる．

本論文は，三次元非等方性乱流を正確に考慮すべく速度場に対して，レイノルズ応力方程式を数値的に解くことを前提とし，その際，特にモデル化の上で問題となるレイノルズ方程式中の圧力・歪相関項については，種々のモデルについて検討を加えるとともに，それらのモデルの差異分析を踏まえた改良モデルの提唱を行った．さらに，この種の非等方性乱流モデルは，そのモデルが要求される複雑な流れに適用してこそ，初めてその真価を発揮できるものであり，そこでこの非等方性乱流モデルに，境界適合座標系を導入する事により三次元非等方性乱流場の解析を行った．その際，境界適合座標系にて非等方性を取扱えるよう，各支配方程式の変換と数値解析プログラムコードの構築を行ない，三次元複雑形状流れに適用し，計算手法，乱流モデルの妥当性について検討を加えた．以下に本研究にて得られた知見をまとめる．

第２章においては，流れの非等方性を考慮すべくレイノルズ応力方程式，および乱流熱流束方程式のモデル化について，各支配方程式の導出も含めて記述した．レイノルズ応力方程式中の圧力・歪相関項については，現在提案されている種々のモデルのうち，ＬＲＲモデル(Launder-Reece-Rodi)，ＧＬモデル(Gibson-Launder)，ＧＥモデル(Gessner-Eppich)，ＮＣＳモデル(Nakayama-Chow-Sharma)を取り上げ記述した．これらモデルの特徴を明確にするため完全発達した正方形断面管路に適用し，Brundrett-Baines(1964)の実験結果を比較対象とした．第二種二次流れの発生を比較，差異分析を行なうことよりモデルの得失を明確にした．特に第二種二次流れを正確に予測するためには，圧力・歪相関項中の平均流の影響の項に，断面方向への主流速度勾配を含むことが必要であることを明らかにした．この項を含まないＧＬモデルは，第二種二次流れの値は実験より１オーダー低い値となり，かつ非等方性を圧力・歪相関項中の壁面による影響の項により表現していることを示した．ＧＥモデル，並びにＮＣＳモデルは定数系の選定に問題を残し第二種二次流れの発生要因となるレイノルズ応力値を正確には予測していない．これらモデルの差異分析結果を考慮して新たなモデルの提案を行なった．提唱モデルはＧＥモデルを基本とし，定数決定を単純せん断流れ，壁面近傍流れにより行なったものであるが，第二種二次流れ，およびその発生要因とするレイノルズ応力値を他のモデルより良好に予測することができた．さらに本提唱モデルを，発達しつつある正方形断面管路に適用し，Melling-Whitelaw(1976)の実験結果と比較を行なった．本提唱モデルは，この種の発達しつつある流れに特徴的な現象を捉えておりモデルの妥当性を示した．例えば，せん断応力$\overline{u_1 u_3}$（あるいは，$\overline{u_1 u_2}$）は，発達するにつれ第二種二次流れによる等主流速度分布の歪により，その値が同一断面

で異符号領域を形成することになるが，計算に於いても同様の結果となっている．また，レイノルズ応力方程式をモデル化する際，それらの対流項，拡散項に対しては，Rodi(1976)による近似を用いて，代数応力モデルとして解析を行なったが，本解例のように，各レイノルズ応力値が流れ方向に比較的緩慢に変化する様な場合には，妥当な近似であることを示した．

第３章においては，複雑形状への境界条件の設定が容易な境界適合座標系の格子生成理論，座標変換理論，各支配方程式の変換について記述した．レイノルズ応力，あるいは乱流熱流束の運動方程式，エネルギー方程式への取り込みは，直接値を代入するのでなく拡散項の一部として取り込むPseudo-Viscosityの概念を導入し，計算の安定性を図る．レイノルズ応力方程式，乱流熱流束方程式を境界適合座標系に適用すると，座標変換の際に発生する運動方程式，エネルギー方程式の計量テンソルは，各方向の拡散係数が乗算された形になることを示した．運動方程式の場合，各方向に対して３個，合計９個の，エネルギー方程式の場合３個の拡散係数を考慮することとなる．支配方程式中の対流項に関しては，ＱＵＩＣＫ(三次風上差分)のアルゴリズムを用いて離散化を行ない，他の項に関しては中央差分を用いて離散化を示した．圧力に関しては，圧力に関するラプラスの方程式を導出し，圧力補正方程式として解いている．同時に境界条件の設定手法についても記述した．

第４章においては，第２章で検討した非等方性乱流モデル，および，第３章で検討した境界適合座標を用いて，複雑形状で非等方性問題を扱った Tucker-Reynolds(1968)の湾曲風洞を用いた実験を計算対象として解析結果を記述した．風洞中心部主流速度分布において湾曲風洞出入口に二つのピーク値を持つが，計算結果においても同様の傾向を示し，計算の妥当性を示すものと考えられる．実験風洞は境界層排除厚さを考慮して設計してあるが，計算においてもこの境界層排除厚さ分を考慮することが必要であることを示した．湾曲風洞部にて各方向の乱流垂直応力は，圧力・歪相関項中の平均流の影響により非等方性を示す．すなわち上下壁に垂直方向の垂直応力成分は増加し，左右壁に垂直方向の垂直応力成分は減少，主流方向の垂直応力は，ほぼ一定値を保つが，計算においてもこの非等方性の動向をとらえていることを示した．しかし，その絶対値には実験結果と開きが認められた．これは乱流エネルギーの主流方向への減衰が実験結果と異なるためで，入口部乱流エネルギー，乱流散逸の値が不明であり，推定値を仮定して計算を行なったことに起因していると考えられる．また計算結果の特徴として，湾曲風洞入口部の影響がかなり上流部まで波及していること，乱流応力成分が湾曲風洞入口，出口部において急激な変化をすることがあげられる．後者は，対流項，拡散項に対して代数応力モデルとして計算を行なったためであり，対流，拡散の影響が大きな領域では，それらの項の省略のない形としてレイノルズ応力方程式を解くことが必要であることを示唆している．本解析例においては，第二種二次流れの発生要因となる乱流応力値は存在するものの，正方形管路内に認められるような明瞭な第二種二次流れの発生は認められず，第一種二次流れが支配的であることを示した．この第一種，第二種二次流れ，および湾曲風洞内部に於けるわずかばかりの剥離領域の存在により，湾曲風洞出口の後に続く直管部において循環流が形成される事を予知した．以上のように境界適合座標系とレイノルズ応力方程式を用いて，汎用性の高い三次元非等方性乱流プログラムコードの構築を行い，モデル並びに計算手法の妥当性を確認した．

謝　辞

本研究の遂行，並びに本論文の作成にあたり終始懇切なる御指導，御鞭撻を賜りました東京大学工学部教授 平田 賢先生に心より感謝致します．

本論文の作成にあたり，有益なる御助言と，示唆に富む御討論をいただきました東京大学工学部教授 秋山 守先生，東京大学生産技術研究所教授 小林 敏雄先生，東京大学工学部助教授 笠木 伸英先生，東京大学工学部助教授 荒川 忠一先生に謹んで感謝の意を表します．

本研究の計画立案，遂行に際し終始，的確な御助言と，機知に富む御討論をしていただき，同時に叱咤激励していただいた宇都宮大学工学部教授 秋山　光庸先生に深く感謝致します．

最後に，妻みどり，長女麻子の協力と辛抱とに感謝致します．

参考文献（欧文）

1) Akiyama,M., Murakoshi,T., Sugiyama,H., Cheng,K.C., and Nishiwaki,I.(1988): Numerical solution of convective heat transfer for reverse transition in the bend tube by a low-Reynolds-number turbulent model,JSME Int.J.Series II,Vol. 31, No.2, 289-298.

2) Aly,M.M., Trupp, A.C., and Gerrard,A.D.(1978): Measurement and Prediction of fully developed turbulent flow in an equilateral triangular duct, J.Fluid Mech., Vol.85, 57-83.

3) Arnal,D., and Cousteix,J.(1981): Turbulent flow in unbounded streamwise corners, Proc. 3rd Symp. Turbulent Shear Flows, Davis, 2.19-2.24.

4) Barfield,W.D.(1970): An optimal mesh generator for lagrangian hydrodynamic calculations in two space dimensions, J. of Computational Physics 6,417-429.

5) Batchelor,G.K.,and Townsend,A.A.(1948): Decay of isotropic turbulence in the initial period, Proc. Roy. Soc. A193, 539-558.

6) Batchelor,G.K., and Proudman,I.(1954): The effect of rapid distortion of a fluid in turbulent motion, Quart.J. Mech. Appl. Math.7, 83-103.

7) Beguier,C., Dekeyser,I.,and Launder,B.E.(1978): Ratio of scalar and velocity dissipation time scales in shear flow turbuleuce, Phys. Fluids, Vol.21, 307-310.

8) Bradshaw,P., Cebeci,T., and Whitelaw,J.H.(1981): "Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow", Academic Press, London.

9) Brundrett,E., and Baines,W.D.(1964): The production and diffusion of vorticity in duct flow, J.Fluid Mech., Vol.19, 375-394.

10) Buleev,N.I.(1963): Theoretical model of the mechanism of turbulent exchange in fluid flow, AERE Translation, 957-.

11) Champagne,F.H., Harris,V.G., and Corrsin,S.(1970): Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow, J.Fluid Mech., Vol.41, 81-139.

12) Chen,B.C-J., Vanka,S.P., and Sha,W.T.(1980): Some recent computations of rod bundle thermal hydraulics using boundary fitted coordinates, Nuclear Engieering and Design, 62, 123-135.

13) Chou,P.Y.(1945): On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation, Quart. Appl. Math. 3, 38-54.

14) Comte・Bellot,G., and Corrisin,S.(1966): The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence, J.Fluid Mech., Vol.25, 657-682.

15) Corrsin,S.(1952): Heat Transfer in Isotoropic Turbuleuce, J. of Applied Physics, Vol.23, No.1, 113-118.

16) Daly,B.J.,and Harlow,F.H.(1970): Transport equations in turbulence, Phys. Fluids, Vol.13, 2634-2649.

17) Demuren,O., and Rodi,W.(1984) : Calculation of turbuleuce driven secondary motion in non-circular ducts, J.Fluid Mech., Vol.140, 189-222.

18) Dryden,H.L.,Schubauer,G.B.,Mock,G.B., and Skarmstad,H.K.(1937): Measurements of the intensity and scale of wind tunnel turbuleuce and their relation to the critical Reynolds number of spheres, NASA Rep. No.581.

19) Elghobashi,S., and Launder,B.E.(1981): Modelling the dissipation rate of temperature variance in a thermal mixing layer,Proc.3rd.Symp.Turbulent Shear Flows, Davis, 15.13-15.17.

20) Fujita,H.,Yokosawa,H.,Hirota,M., and Nagata,C.(1988): Fully developed turbulent flow and heat transfer in a square duct with two roughened facing walls, Chem.Eng.Comm., Vol.74, 95-110.

21) Gessner,F.B., and Jones,J.B.(1965): On some aspects of fully-developed turbulent flow in rectangular channels, J.Fluid Mech., Vol.23, 689-713.

22) Gessner,F.B., and Emery,A.F.(1976): A Reynolds stress model for turbulent corner flows part I ; Development of the model, J.Fluids Engineering, Vol. 98, 261-268.

23) Gessner,F.B., and Emery,A.F.(1977): A length scale model for developing turbulent flow in a rectangular duct, J.Fluids Engineering, Vol.99, 347-358.

24) Gessner,F.B., and Emery,A.F.(1981): The numerical prediction of developing turbulent flow in rectangular ducts, J.Fluids Engineering, Vol.103, 445-455.

25) Gessner,F.B., and Eppich,H.M.(1981): A near-wall pressure-strain model for turbulent corner flows,Proc.3rd.Symp.Turbulent Shear Flows,Davis, 2.25-2.32.

26) Gibson,M.M., and Launder,B.E.(1976): On the calculation of horizontal,turbulent,free shear flows under gravitational influence, J.Heat Transfer,Vol.98, 81-87.

27) Gibson,M.M., and Launder,B.E.(1978): Ground effects on pressure fluctuations in the atomospheric boundary layer, J.Fluid Mech., Vol.86, 491-511.

28) Gosman,A.D., and Rapley,C.W.(1978): A prediction method for fully-developed flow through non-circular passages,Proc.Int.Conf.Numerical Meth.Paper FS178, 271-285.

29) Guan,W.D., and Yan,Y.Y.(1988): Numerical simulation of 2-D flow field of Yangtse estuary by using body-fitted coordinates, Proc. of the 3rd Int.Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, 553-558.

30) Harris,V.G., Graham,J.A.H., and Corrsin,S.(1977): Further experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow, J.Fluid Mech., Vol.81, 657-687.

31) Hanjalic,K., and Launder,B.E.(1972): A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows, J.Fluid Mech., Vol.52, 609-638.

32) Hinze,J.O.(1975): "Turbulence" , McGRAW-Hill, New York.

33) Hirata,M.,Tanaka,H.,Kawamura,H., and Kasagi,N.(1982) : Heat transfor in turbulent flows, Proc. of the 7th. Int. Heat Transfer Conference,Vol.1, 31-57.

34) Hoagland,L.C.(1960): Fully developed turbulent flow in straight ducts second-ary flow, its cause and effect on the primary flow, Ph.D. thesis, Dept.Mech.Engng, MIT.

35) Jayatilleke,C.L.V.(1959): The influence of Prandtl number and surface roughness on the resistence of the laminar sub-layer to momentum and heat transfer, Prog. Heat and Mass Transfer 1, 193-329.

36) Jones,W.P., and Launder,B.E.(1972) : The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, Int.J.Heat Mass Transfer, Vol.15, 301-314.

37) Keffer,J.F., Olsen,G.J., and Kawall,J.G.(1977) : Intermittency in a thermal mixing layer, J.Fluid Mech., Vol.79, 595-607.

38) Laufer,J.(1954) : The structure of turbulence in fully developed pipe flow, NACA Rep.1174.

39) Launder,B.E.(1975) : On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum,J.Fluid Mech., Vol.67, 569-581.

40) Launder,B.E.(1978) : Heat and mass transport, in "Turbulence", (ed. Bradshaw, P), Springer-Verlag, Heidelberg, 231-287.

41) Launder,B.E.(1979) : Stress transport closures-Into the third generation, Turbulent Shear Flows I , Springer-Verlag, 259-278.

42) Launder,B.E., and Ying,W.M.(1972) : Secondary flows in ducts of square cross-section, J.Fluid Mech., Vol.54, 289-295.

43) Launder,B.E., and Ying,W.M.(1973) : Prediction of flow and heat transfer in ducts of square cross-section, Heat and fluid flow, Vol.3, 115-121.

44) Launder,B.E., Reece,G.J., and Rodi,W.(1975) : Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure, J.Fluid Mech. Vol.68, 537-566.

45) Launder,B.E., and Samaraweera,S.A.(1979) : Application of a second-moment turbulence closure to heat and mass transport in thin shear flows- I , Int. J. Heat Mass Transfer., Vol.22, 1631-1643.

46) Launder,B.E., and Morse,A.(1979) : Numerical prediction of axisymmetric free shear flows with a Reynolds stress closure, Turbulent Shear Flows I ,Springer-Verlag, 279-293.

47) Leslie,D.C.(1980) : Analysis of a strongly sheared, nearly homogeneous turbulent shear flow, J.Fluid Mech., Vol.98, 435-448.

48) Leonard,B.P.(1979) : A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation,Comp.Meths.Appl.Mech.Eng.19,59-98.

49) Leutheusser,H.J.(1963): Turbulent flow in rectangular ducts, J.Hydraul. Div. ASCE 89, (HY3).

50) Lin,A., and Wolfshtein,M.(1979): Theoretical study of the Reynolds stress equations, "Turbulent Shear Flows I" ,(ed.F.Durst et al.),327-343,Springer-Verlag.

51) Lumley,J.L.(1975): Lecture Series No.76, von Karman Inst. Belgium.

52) Mastin,C.W.,and Thompson,J.F.(1978): Transformation of three-dimensional regions onto rectangular regions by elliptic systems,Number. Math.29, 397-407.

53) Melling,A., and Whitelaw,J.H.(1976): Turbulent flow in rectangular duct, J. Fluid Mech., Vol.78, 289-315.

54) Monin,A.S.(1965): On the symmetry properties of turbulence in the surface layer of air, Atmos. Oceanic. Phys. 1, 25-30.

55) Nakamura,S.(1985): Orthogonal grid generation by boundary grid relaxation algorithms, 9th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, 427-431.

56) Nakayama,A., Chow,W.L., and Sharma,D.(1983): Calculation of fully developed turbulent flows in ducts of arbitrary cross section, J.Fluid Mech., Vol.128, 199-217.

57) Naot,D., Shavit,A., and Wolfshtein,M.(1970): Interactions between components of the turbulent velocity correlation tensor due to pressure fluctuations, Israel J. of Technology, Vol.8, No.3, 259-269.

58) Naot,D.,Shavit,H.,and Wolfshtein,M.(1974): Numerical calculation of Reynolds stresses in a square duct with secondary flow, Wärme-und Stoffübertragung 7, 151-161.

59) Naot,D., and Rodi,W.(1982): Numerical simulation of secondary current in channel flow, J.Hydraul.Div. ASCE.108(HY8), 948-968.

60) Nikuradse,J.(1926): Untersuchungen über die Geschwindigkeitseverteilung in turbulenten Strömungen, VDI-Forschungsheft, 281-.

61) Nikuradse,J.(1930): Untersuchungen über turbuleute Strömungen in nicht kreisförmigen Rohren, Ingenieur-Archiv 1, 306-332.

62) Patankar,S.V., and Spalding,D.B.(1971): A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, Int. J.Heat Mass Transfer, Vol.15, 1787-1806.

63) Perkins,H.J.(1970): The formation of streamwise vorticity in turbulent flow, J.Fluid Mech., Vol.44, 721-740.

64) Pollard,A., and Martinuzzi,R.(1987): A comparison study eleven models of turbulence, 6th Symp. Turbulent Sheat flows, 17.9.1-17.9.5.

65) Prandtl,L.(1925): Turbulent Flow, NASA Tech. Memo. No.435.

66) Ramanathan,S., and Kumar,R.(1988): Comparison of boundary-fitted coordinates with finite-element approach for solution of conduction problems, Numerical Heat Transfer, Vol.14, 187-211.

67) Reece,G.J.(1976): A generalized Reynolds stress model of turbulence, Ph. D. thesis, Imperial College, London.

68) Reggio,M., and Camarero,R.(1986): Numerical solution procedure for viscous incompressible flows, Numerical Heat Transfer, Vol.10, 131-146.

69) Reggio,M., and Camarero,R.(1987): A calculation scheme for three-dimensional viscous incompressible flows, J.Fluids Engineering, Vol.109, 345-352.

70) Ribner,H.S., and Tucker,M.(1952): Spectrum of turbulence in a contracting stream, NACA Tech. Note 2606.

71) Rodi,W.(1976): A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses, Z . angew. Math. Mech. 56, T219-T221.

72) Rotta,J.(1951): Statistische theorie nichthomogener turbulenz, Zeitschrift für Physik, Bd.129, 547-572.

73) Rotta,J.C.(1972): "Turbulente Strömungen", B.G.Teubner, Stuttgart. 大路通雄訳(1975),「乱流」, 岩波書店.

74) Schlichting,H.(1968): "Boundary-Layer Theory (6th edition)", Mcgraw-hill, New York, 599.

75) Shir,C.C.(1973): A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetary boundary Layer, J.Atmos.Sci., Vol.30, 1327-1339.

76) Spalding,D.B.(1971): Concentration fluctuations in a round turbulent free jet, Chemical Engineering Science, Vol.26, 95-107.

77) Tatchell,D.G.(1975): Convection processes in confined three-dimensional boudary layers, Ph.D. thesis, Imperial College, London.

78) Taylor,G.I.(1935): Statistical theory of turbulence, Proc. Roy. Soc. London, A151, 421-478.

79) Tennekes,H., and Lumley,J.L.(1972): "A First Course in Turbulence", The MIT Press.

80) Thames,F.C.,Thompson,J.F.,Mastin,C.W.,and Walker,R.L.(1977): Numcrical solutions for viscous and potential flow about arbitrary two-dimensional bodies using body-fitted coordinate systems,J. of Computational Physics 24,245-273.

81) Thompson,J.F., Thames,F.C., and Mastin,C.W.(1977): Boundary-fitted curvilinear coordinate systems for solution of partial differential equations on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies, NACA CR-2729.

82) Thompson,J.F.(1988): Grid generation techniques in computational fluid dynamics, AIAA Journal, Vol.22, No.11, 1505-1523.

83) Townsend,A.A.(1954): The uniform distortion of homogeneous turbulence,Quart. J.Mech. Appl. Math.7, 104-127.

84) Tracy,H.J.(1965): Turbulent Flow in a three-dimensional channel, J.Hydraul. Div. ASCE 91(HY6), 9-35.

85) Tucker,H.J.(1966): Description and calibration of the McGill distorting tunnel, McGill University Mech. Engng. Res. Lobs., Tech. Note 66-4.

86) Tucker,H.J.,and Reynolds,A.J.(1968): The distortion of turbulence by irrotational plane strain, J.Fluid Mech., Vol.32, 657-673.

87) Uberoi,M.S.(1963): Energy transfer in isotropic turbulence, Phys. Fluids 6, No.8, 1048-1056.

88) Uberoi,M.S., and Wallis,S.(1966): Small axisymmetric contraction of grid turbulence, J.Fluid Mech., Vol.24, 539-543.

89) Warhaft,Z., and Lumley,J.L.(1978): An experimental study of the decay of temperature fluctuations in grid-generated turbulence, J.Fluid Mech., Vol.88, 659-684.

90) Webster,C.A.G.(1964): An experimental study of turbulence in a density stratified shear flow, J.Fluid Mech., Vol.19, 221-.

91) Winslow,A.M.(1967): Numerical solution of the quasilinear poisson equation in a nonuniform triangle mesh, J. of computational Physics 2, 149-172.

92) Wyngaard,J.C.(1975): Modelling the planetary boundary layer extension to the stable case, Boundary-Layer Meteorology 9, 441-460.

93) Yoshizawa,A(1984): Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy viscosity representation, Phys.Fluids 27,No.6,1377-1387

参考文献（邦文）

1) 石垣　博(1984)：乱流モデルと乱流の計算，日本機械学会誌， Vol.87,No.785,335-340.

2) 梅垣菊男,三木一克(1987)：一般座標系を用いた回転機器内の二次元非定常非圧縮粘性流れの解析，第1回数値流体力学シンポジウム,37-38.

3) 笠木伸英,明　賢国(1989)：第2回CFD(数値流体力学)ワークショプ，日本機械学会東海支部講演会

4) 河村哲也,高見穎郎(1984)：円柱まわりの高レイノルズ数流れ，京都大学数理解析研究所講究録510,210-225.

5) 中村省一郎(1985)：格子形成法の最近の進歩について，第3回航空機計算空気力学シンポジウム論文集,185-195.

6) 中山　顕,Chow,W.L., and Sharma,D.(1983)：三次元乱流はく離流れの数値解析，日本機械学会論文集(B編),49巻,447号,2483-2486.

7) 山本　誠,荒川忠一,田古里哲夫(1989)：応力方程式モデルによるロープ・ミキサ流の数値解析，日本機械学会論文講演抜刷,論文No.89-0509A

8) 長野靖尚,金　哲晃(1987)：温度場二方程モデルによる乱流伝熱の解析，日本機械学会論文集(B編),53巻,490号,1773-1780.

9) 武本行正(1987)：非圧縮性 Pipe Flow の数値シミュレーション，核融合研究，第58巻,第1号,50-57.

10) 武本行正(1986)：3次元非圧縮粘性流解析コード,第2回ベクトル計算機応用シンポジウム論文集,98-107.

11) 前川　博,小林睦夫(1977)：乱流熱伝達の模型に関する基礎的研究，日本機械学会論文集(第2部),43巻,307号,2250-2260.

12) 前川　博,小林睦夫,風間邦治,佐藤　俊(1979)：単純せん断乱流における熱伝達，日本機械学会論文集(B編),45巻,395号,983-984.

13) 明　賢国,笠木伸英(1987)：k－ε乱流モデルに対する新たな提案とその評価，日本機械学会論文集(B編),54巻,507号,3003-3009

付録A：　支配方程式の導出

本解析に用いた支配方程式は，次に示すようにナビエ・ストークス方程式，エネルギー方程式より導出できる．このことは，ナビエ・ストークス方程式に数学的操作を加えることにより乱流解析に必要な諸物理量を導出し，現象解析を行なっていると解釈できる．ここでは，本解析に用いた支配方程式の導出について説明を加える．

A1．速度，温度に対する瞬時値の輸送方程式

ナビエ・ストークス方程式は，次のように示される．

$$\frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{U}_i\widetilde{U}_k)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x_k}\right) \qquad \text{(A-1)}$$

ここで～のついた変数は，平均値と変動値とで示され

$$\widetilde{U}_i=U_i+u_i \qquad \widetilde{U}_k=U_k+u_k \qquad \widetilde{P}=P+p \qquad \text{(A-2)}$$

であり，上式に代入すれば次のようになる．

$$\frac{\partial (U_i+u_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(U_i+u_i)(U_k+u_k)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(P+p)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\nu\frac{\partial}{\partial x_k}(U_i+u_i)\right\} \qquad \text{(A-3)}$$

上式の各項の時間平均をとる．

$$\overline{\frac{\partial (U_i+u_i)}{\partial t}}=\frac{\partial U_i}{\partial t} \qquad \text{(A-4a)}$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(U_i+u_i)(U_k+u_k)}=\frac{\partial}{\partial x_k}(U_iU_k+\overline{u_iu_k}) \qquad \text{(A-4b)}$$

$$\overline{\frac{\partial (P+p)}{\partial x_i}}=\frac{\partial P}{\partial x_i} \qquad \text{(A-4c)}$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\nu\frac{\partial}{\partial x_k}(U_i+u_i)\right\}}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial}{\partial x_k}U_i\right) \qquad \text{(A-4d)}$$

以上より

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial U_iU_k}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\overline{u_iu_k}\right) \qquad \text{(A-5)}$$

(A-1)式と(A-5)式の差をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{U}_i-U_i)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{U}_i\widetilde{U}_k-U_iU_k)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{P}-P)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x_k}-\nu\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\overline{u_iu_k}\right) \qquad \text{(A-6)}$$

ここで

$$\widetilde{U}_i-U_i=u_i \qquad \text{(A-7a)}$$

$$\widetilde{U}_i\widetilde{U}_k-U_iU_k=U_iu_k+u_iU_k+u_iu_k \qquad \text{(A-7b)}$$

$$\widetilde{P}-P=p \qquad \text{(A-7c)}$$

であることより速度の瞬時値に対する輸送方程式は次のように示される．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(U_iu_k+u_iU_k+u_iu_k)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\overline{u_iu_k}\right) \qquad \text{(A-8)}$$

次にエネルギー方程式について考える．エネルギー方程式は次のように示される．

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{U}_k\widetilde{T})=\frac{\partial}{\partial x_k}(a\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_k}) \qquad \text{(A-9a)}$$

ここで　$\widetilde{T}=T+T'$ であり上式に代入すると次式を得る．

$$\frac{\partial (T+T')}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k+u_k)(T+T')=\frac{\partial}{\partial x_k}\{a\frac{\partial (T+T')}{\partial x_k}\} \qquad \text{(A-9b)}$$

時間平均の操作を上式に行なうと

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(U_kT+\overline{u_kT'})=\frac{\partial}{\partial x_k}(a\frac{\partial T}{\partial x_k}) \qquad \text{(A-10)}$$

(A-9a)式と(A-10)式の差をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{T}-T)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{U}_k\widetilde{T}-U_kT)=\frac{\partial}{\partial x_k}\{a\frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{T}-T)+\overline{u_kT'}\} \qquad \text{(A-11)}$$

これより温度変動T'に対する輸送方程式は次のように示される．

$$\frac{\partial T'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(U_kT'+u_kT+u_kT')=\frac{\partial}{\partial x_k}(a\frac{\partial T'}{\partial x_k}+\overline{u_kT'}) \qquad \text{(A-12)}$$

A２．乱流エネルギー輸送方程式

速度の瞬時値に対する輸送方程式(A-8)式に u_i を乗ずると各項は次のように示される．

$$u_i\frac{\partial u_i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{u_i^2}{2}) \qquad \text{(A-13a)}$$

$$u_i\frac{\partial}{\partial x_k}(U_iu_k)=u_i(U_i\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+u_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k})=u_iu_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \qquad \text{(A-13b)}$$

$$u_i\frac{\partial}{\partial x_k}(u_iU_k)=u_i(u_i\frac{\partial U_k}{\partial x_k}+U_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k})=u_iU_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k\frac{u_i^2}{2}) \qquad \text{(A-13c)}$$

$$u_i\frac{\partial}{\partial x_k}(u_iu_k)=u_iu_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}(u_k\frac{u_i^2}{2}) \qquad \text{(A-13d)}$$

$$-u_i\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}=-\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{P}{\rho}u_i) \qquad \text{(A-13e)}$$

$$u_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k})=\nu\frac{\partial}{\partial x_k}(u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_k})-\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$
$$=\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\{\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{u_i^2}{2})\}-\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \qquad \text{(A-13f)}$$

$$u_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_iu_k})=u_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_iu_k}) \qquad \text{(A-13g)}$$

$\overline{u_i^2}=2k$ であり各項の時間平均をとると次の厳密解を得ることができる．

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial U_kk}{\partial x_k}=-\overline{u_iu_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{(\frac{u_i^2}{2}+\frac{P}{\rho})u_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\nu\frac{\partial k}{\partial x_k})$$
$$-\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \qquad \text{(A-14)}$$

A３．乱流散逸輸送方程式

高レイノルズ数流れに対する乱流散逸εは次のように定義される．

$$\varepsilon=\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \tag{A-15}$$

次に，このεに対する厳密方程式を導出する．速度の瞬時値に対する輸送方程式に2ν $(\partial u_i/\partial x_j)(\partial/\partial x_j)$の演算を行なうと各項は次のように示される．

$$2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)=\nu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 \tag{A-16a}$$

$$2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}(U_i u_k)=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+u_k\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j\partial x_k}\right)$$
$$=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_k\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j\partial x_k} \tag{A-16b}$$

$$2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}(u_i U_k)=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i\frac{\partial U_k}{\partial x_j}+U_k\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$
$$=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}+u_i\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_k\partial x_j}+\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+U_k\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_j}\right)$$
$$=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}+2\nu U_k\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$
$$=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\nu U_k\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right\}$$
$$=2\nu\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\nu U_k\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right\} \tag{A-16c}$$

$$2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_k)=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)$$
$$=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+u_k\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k}\right)$$
$$=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_k\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k}$$
$$=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{u_k\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right\} \tag{A-16d}$$

$$2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)=2\nu\left\{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i\partial x_j}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)\right\}=2\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)\right\} \tag{A-16e}$$

$$2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k}\right)$$
$$=2\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k}\right)\right\}-2\left(\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k}\right)^2$$
$$=\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right\}-2\left(\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k}\right)^2 \tag{A-16f}$$

$$2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_k)=2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) \tag{A-16g}$$

以上各項の時間平均をとって整理すると乱流散逸に対する次の厳密式を得ることができる．

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k \varepsilon)=-2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}-2\overline{\left(\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}\right)^2}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\overline{u_k \varepsilon'}+\frac{2\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial P}{\partial x_j}}-\nu\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right\}$$

$$-2\nu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}+\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-2\nu\overline{u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \qquad \text{(A-17a)}$$

$$\varepsilon'=\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad \text{(A-17b)}$$

A4．レイノルズ応力方程式

速度の瞬時値に対する輸送方程(A-8)式に u_j を乗じた式と，その式において i と j とを入れ換えた式を考える．すなわち

$$u_j\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_k}(U_i u_k+U_k u_i+u_i u_k)$$

$$=-\frac{1}{\rho}u_j\frac{\partial P}{\partial x_i}+u_j\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\overline{u_i u_k}\right) \qquad \text{(A-18a)}$$

$$u_i\frac{\partial u_j}{\partial t}+u_i\frac{\partial}{\partial x_k}(U_j u_k+U_k u_j+u_j u_k)$$

$$=-\frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial P}{\partial x_j}+u_i\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\overline{u_j u_k}\right) \qquad \text{(A-18b)}$$

以上の二つの式を左辺第１項より順次加算した結果は以下のように整理される．

$$u_j\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_i\frac{\partial u_j}{\partial t}=\frac{\partial u_i u_j}{\partial t} \qquad \text{(A-19a)}$$

$$u_j\frac{\partial}{\partial x_k}(U_i u_k)+u_i\frac{\partial}{\partial x_k}(U_j u_k)=u_j u_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+u_i u_k\frac{\partial U_j}{\partial x_k} \qquad \text{(A-19b)}$$

$$u_j\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k u_i)+u_i\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k u_j)=U_k\left(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$$

$$=U_k\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} \qquad \text{(A-19c)}$$

$$u_j\frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_k)+u_i\frac{\partial}{\partial x_k}(u_j u_k)=u_k\left(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$$

$$=u_k\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k}=\frac{\partial u_i u_j u_k}{\partial x_k}-u_i\frac{\partial u_j u_k}{\partial x_k}-u_j\frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} \qquad \text{(A-19d)}$$

$$-\frac{1}{\rho}u_j\frac{\partial P}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial P}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\left(-P\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial P u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial P u_i}{\partial x_j}-P\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

$$=\frac{P}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial P u_i}{\partial x_j}\right) \qquad \text{(A-19e)}$$

$$u_j\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)+u_i\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$$

$$=-2\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$$

$$= -2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k}\right) \tag{A-19f}$$

$$u_j \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_i u_k}) + u_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_j u_k}) \tag{A-19g}$$

以上の7つの式を加算し時間平均の操作を加えると次のレイノルズ方程式に対する厳密解を得ることができる.

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = -\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{\frac{P}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} - \overline{\frac{P}{\rho}(\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j)}\right] - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \tag{A-20}$$

A5. 乱流熱流束方程式

速度，温度の瞬時値に対する輸送方程式(A-8)式，(A-12)式に各々T’，u_iを乗じた式を考える．すなわち

$$T'\frac{\partial u_i}{\partial t} + T'\frac{\partial}{\partial x_k}(U_i u_k + u_i U_k + u_i u_k)$$
$$= -\frac{T'}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + T'\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k}\right) \tag{A-21a}$$

$$u_i \frac{\partial T'}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_k}(U_k T' + u_k T + u_k T') = u_i \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a \frac{\partial T'}{\partial x_k} + \overline{u_k T'}\right) \tag{A-21b}$$

上式の各項を左辺より順次加えると次のように整理される．

$$T'\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial u_i T'}{\partial t} \tag{A-22a}$$

$$T'\frac{\partial}{\partial x_k}(U_i u_k + u_i U_k + u_i u_k) + u_i \frac{\partial}{\partial x_k}(U_k T' + u_k T + u_k T')$$
$$= U_k\left(T'\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial T'}{\partial x_k}\right) + u_k\left(T'\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial T'}{\partial x_k}\right)$$
$$+ u_k T'\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = U_k \frac{\partial u_i T'}{\partial x_k} + u_k T'\frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$
$$+ u_i u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_k T') \tag{A-22b}$$

$$T'\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i u_k\right) + u_i \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a \frac{\partial T'}{\partial x_k} + \overline{u_k T'}\right)$$
$$= \nu\left(\frac{\partial}{\partial x_k} T'\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial T'}{\partial x_k} + a \frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i \frac{\partial T'}{\partial x_k}\right)$$
$$- a \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial T'}{\partial x_k} \tag{A-22c}$$

$$-\frac{T'}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial T'P}{\partial x_i} + \frac{P}{\rho}\frac{\partial T'}{\partial x_i} \tag{A-22d}$$

以上の各式に，時間平均の操作を加え各項を整理すると次に示す乱流熱流束方程式の厳密形を得る．

$$\frac{\partial \overline{u_i T'}}{\partial t}+U_k\frac{\partial \overline{u_i T'}}{\partial x_k}=-\frac{\partial}{\partial x_k}\{\overline{u_i u_k T'}+\overline{\frac{P}{\rho}T'}\delta_{ik}$$

$$-\nu(\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}})-a\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i\frac{\partial T'}{\partial x_j}})\}-\overline{u_i u_k}\frac{\partial T}{\partial x_k}-\overline{u_k T'}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

$$+\overline{\frac{P}{\rho}\frac{\partial T'}{\partial x_i}}-(\nu+a)\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \qquad \text{(A-22e)}$$

A６．温度変動輸送方程式

温度の瞬時値に対する輸送方程式(A-12)式に，温度変動Ｔ’を乗じ各項を整理すると次のように示される．

$$T'\frac{\partial T'}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial T'^2}{\partial t} \qquad \text{(A-23a)}$$

$$T'\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k T')=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k T'^2) \qquad \text{(A-23b)}$$

$$T'\frac{\partial}{\partial x_k}(u_k T)=T'u_k\frac{\partial T}{\partial x_k} \qquad \text{(A-23c)}$$

$$T'\frac{\partial}{\partial x_k}(u_k T')=u_k T'\frac{\partial T'}{\partial x_k} \qquad \text{(A-23d)}$$

$$T'\frac{\partial}{\partial x_k}(a\frac{\partial T'}{\partial x_k})=a\frac{\partial}{\partial x_k}(T'\frac{\partial T'}{\partial x_k})-a\frac{\partial T'}{\partial x_k}\frac{\partial T'}{\partial x_k}$$

$$=a\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{1}{2}\frac{\partial T'^2}{\partial x_k})-a\frac{\partial T'}{\partial x_k}\frac{\partial T'}{\partial x_k} \qquad \text{(A-23e)}$$

$$T'\frac{\partial}{\partial x_k}(u_k T')=\frac{\partial}{\partial x_k}(T'u_k T')-u_k T'\frac{\partial T'}{\partial x_k} \qquad \text{(A-23f)}$$

以上の各項に時間平均操作を加え整理すると次のように示される．

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{U_k T'^2})=-\overline{u_k T'}\frac{\partial T}{\partial x_k}+a\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k})$$

$$-a\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_k}\frac{\partial T'}{\partial x_k}}-\overline{u_k T'}\frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} \qquad \text{(A-24)}$$

ここで次の関係式を用いると

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_k T'^2})=2\overline{u_k T'}\frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} \qquad \text{(A-25)}$$

次のように書き換えられる．

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{U_k T'^2})=-2\overline{u_k T'}\frac{\partial T}{\partial x_k}-2a\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_k}\frac{\partial T'}{\partial x_k}}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_k}(a\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k}-\overline{u_k T'^2}) \qquad \text{(A-26)}$$

A７．温度散逸輸送方程式

温度乱れに対する乱流散逸ε_Tは次のように定義できる．

$$\varepsilon_T=a\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial T'}{\partial x_l}} \qquad \text{(A-27a)}$$

温度の瞬時値に対する輸送方程式(A-12)式に$2a(\partial T'/\partial x_l)(\partial/\partial x_l)$の演算子を乗

じると各項は次のように示される.

$$2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial T'}{\partial t}\right)=2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T'}{\partial x_l}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial T'}{\partial x_l}\right) \qquad \text{(A-27b)}$$

$$2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}U_kT'\right)=2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(U_k\frac{\partial T'}{\partial x_l}\right)$$

$$=2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}U_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial T'}{\partial x_l}\right)+2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial T'}{\partial x_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_l}$$

$$=U_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial T'}{\partial x_l}\right)+2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial T'}{\partial x_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_l} \qquad \text{(A-27c)}$$

$$2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}u_kT\right)=2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(u_k\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)$$

$$=2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\left\{\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial T}{\partial x_k}+u_k\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)\right\}$$

$$=2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial T}{\partial x_k}+2a\,u_k\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial^2 T}{\partial x_l\partial x_k} \qquad \text{(A-27d)}$$

$$2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}u_kT'\right)=2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(u_k\frac{\partial T'}{\partial x_k}\right)$$

$$=2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\left\{\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial T'}{\partial x_k}+u_k\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial T'}{\partial x_k}\right)\right\}$$

$$=2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial T'}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_k a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial T'}{\partial x_l}\right) \qquad \text{(A-27e)}$$

$$2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a\frac{\partial T'}{\partial x_k}\right)\right\}=2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial}{\partial x_l}\left(a\frac{\partial T'}{\partial x_k}\right)\right\}$$

$$=2a\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial T'}{\partial x_l}\left(a\frac{\partial^2 T'}{\partial x_l\partial x_k}\right)\right\}-2\left(a\frac{\partial^2 T'}{\partial x_l\partial x_k}\right)^2$$

$$=2a\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{a\left(\frac{\partial T'}{\partial x_l}\right)^2\right\}-2\left(a\frac{\partial^2 T'}{\partial x_l\partial x_k}\right)^2 \qquad \text{(A-27f)}$$

$$2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}(u_kT')=2a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_k}(u_kT') \qquad \text{(A-27g)}$$

以上の各項に時間平均の操作を加え整理すると次のように書き換えられる.

$$\frac{\partial \varepsilon_T'}{\partial t}+U_k\frac{\partial \varepsilon_T'}{\partial x_k}=-2a\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}}\frac{\partial T}{\partial x_k}-2a\overline{u_k\frac{\partial T'}{\partial x_l}}\frac{\partial^2 T}{\partial x_l\partial x_k}$$

$$-2a\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial T'}{\partial x_k}}\frac{\partial U_k}{\partial x_l}-2a\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial T'}{\partial x_k}}$$

$$-2\overline{\left(a\frac{\partial^2 T'}{\partial x_l\partial x_k}\right)^2}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_k a\frac{\partial T'}{\partial x_l}\frac{\partial T'}{\partial x_l}}-a\frac{\partial \varepsilon_T}{\partial x_k}\right) \qquad \text{(A-28)}$$

付録B： 三次元非等方性乱流温度場解析

速度場に於ける，三次元非等方性乱流現象の解析が重要であるように，温度場に於ける非等方性について考慮することも有意義なことと思われる．そこで非等方性乱流温度場の解析を試み，将来，この種の研究の一助となることを願って付録に納める．解析にあたっては，乱流熱流束方程式を用いて非等方性温度場を解くことを考える．しかし乱流熱流束方程式も，レイノルズ応力方程式同様そのままの形では解くことは不可能であり，モデル化が必要となる．特に問題となるのは，対流項，拡散項ならびに圧力・温度勾配相関項であり，対流項，拡散項に対してはRodi近似を用いてモデル化を行なった．次に順を追ってそのモデル化について検討する．

B 1．乱流熱流束方程式による解析

B 1．1　対流項，拡散項のモデル化

レイノルズ応力方程式同様，対流項について次の操作を行なう．

$$\frac{D\overline{u_iT'}}{Dt} = \frac{\overline{u_iT'}}{\sqrt{k}}\frac{D\sqrt{k}}{Dt} + \sqrt{k}\frac{D}{Dt}\frac{\overline{u_iT'}}{\sqrt{k}}$$

$$= \frac{\overline{u_iT'}}{2k}\frac{Dk}{Dt} + \sqrt{k}\left\{\frac{D}{Dt}\left(\sqrt{\overline{T'^2}}\,\frac{\overline{u_iT'}}{\sqrt{k}\sqrt{\overline{T'^2}}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\overline{u_iT'}}{2k}\frac{Dk}{Dt} + \frac{\overline{u_iT'}}{2\overline{T'^2}}\frac{D\overline{T'^2}}{Dt} + \sqrt{k}\sqrt{\overline{T'^2}}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overline{u_iT'}}{\sqrt{k}\sqrt{\overline{T'^2}}}\right) \qquad \text{(B-1a)}$$

一方，拡散項の近似に対しては，次の近似式を用い数学上の操作を加えると，

$$Diff_{iT} = c_s\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_ku_l}\frac{\partial\overline{u_iT'}}{\partial x_l}\right)$$

$$= c_s\frac{\overline{u_iT'}}{2k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_ku_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right) + c_s\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_ku_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\overline{u_iT'}}{2k}\right)$$

$$+ c_s\frac{\overline{u_iT'}}{2\overline{T'^2}}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_ku_l}\frac{\partial\overline{T'^2}}{\partial x_l}\right) + c_s\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_ku_l}\frac{\partial\overline{T'^2}}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\overline{u_iT'}}{2\overline{T'^2}}\right)$$

$$= c_s\frac{\overline{u_iT'}}{2k}D_k + c_s\frac{\overline{u_iT'}}{2\overline{T'^2}}D_{T'^2} + c_s\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_ku_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\overline{u_iT'}}{2k}\right)$$

$$+ c_s\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_ku_l}\frac{\partial\overline{T'^2}}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\overline{u_iT'}}{2\overline{T'^2}}\right) \qquad \text{(B-1b)}$$

以上の式において次の仮定を設ける．

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overline{u_iT'}}{\sqrt{k}\sqrt{\overline{T'^2}}}\right) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\overline{u_iT'}}{2k}\right) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\overline{u_iT'}}{2\overline{T'^2}}\right) = 0 \qquad \text{(B-1c)}$$

この仮定を設けることにより次の関係式を得る.

$$\frac{D\overline{u_iT'}}{Dt} - Diff_{iT} = \frac{\overline{u_iT'}}{2k}\left(\frac{Dk}{Dt} - D_k\right) + \frac{\overline{u_iT'}}{2\overline{T'^2}}\left(\frac{D\overline{T'^2}}{Dt} - D_{T'^2}\right)$$

$$= \frac{\overline{u_iT'}}{2k}(P_k - \varepsilon) + \frac{\overline{u_iT'}}{2\overline{T'^2}}(P_T - \varepsilon_T) \qquad \text{(B-1d)}$$

ここでP_T, ε_Tは, 温度の乱れに関する輸送方程式中の生成項, および温度変動に対する散逸項を示している.

B1. 2 圧力・温度勾配相関項のモデル化

圧力・温度勾配相関項に対する厳密形は次のように示される.

$$\overline{\frac{p}{\rho}\frac{\partial T'}{\partial x_j}} = \frac{1}{4\pi}\int_{vol}\left\{\overline{\left(\frac{\partial^2 u_l u_m}{\partial x_l \partial x_m}\right)'\frac{\partial T'}{\partial x_j}} + 2\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\right)'\overline{\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right)'\left(\frac{\partial T'}{\partial x_j}\right)}\right.$$

$$\left. + \frac{\gamma g_i}{T}\overline{\left(\frac{\partial T'}{\partial x_i}\right)'\frac{\partial T'}{\partial x_i}}\right\}\frac{d\,VOL}{|x - y|} + S_{ij} \qquad \text{(B-2)}$$

ここで( )' はyにおける, ついていないものはxにおける値を示す. 上式において右辺第1項は純粋な乱れによる影響を示す項であり$\pi_{iT,1}$と示す. 第2項は平均流による影響を含む項$\pi_{iT,2}$第3項は浮力による影響を示す項である. 各々の項に対してモデル化が必要であるが, 本解析の場合, 浮力による影響の項に対しては, その影響は小さいものとして無視している.

純粋な乱れによる影響の項$\pi_{iT,1}$ に対するモデル化は, Monin(1965)によるものが最初であり次のようにモデル化を行なった.

$$\pi_{iT,1} = -c_{1T}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_iT'} \qquad \text{(B-3a)}$$

これは, 圧力・歪相関項の$\pi_{ij,1}$に対する Rottaの "return to isotropy" の概念を導入したモデルである. このモデルに対してLumley(1975)は, 定数c_{1T}の中にレイノルズ応力の非等方性項を入れるべきとして上式を改良して次のようにモデル化を行なった.

$$\pi_{iT,1} = -c_{1T}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_iT'} - c_{1T}'\frac{\varepsilon}{k}\left(\frac{\overline{u_iu_j}}{k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\right)\overline{u_jT'} \qquad \text{(B-3b)}$$

平均流の影響を含む項$\pi_{iT,2}$については次のように定義できる.

$$\pi_{iT,2} = \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\right) b_{li}^{m} \qquad \text{(B-4a)}$$

$$b_{li}^{m} = -\frac{1}{2\pi}\int_{vol}\frac{\overline{\partial^2 u_m' T'}}{\partial \xi_l \partial \xi_i}\frac{d\,VOL}{|x - y|} \qquad \text{(B-4b)}$$

ここで, b_{li}^{m}は3次の相関テンソルであり, レイノルズ方程式中では4次相関テンソルとして表現された項に相当する. この3次の相関テンソルに対する制約条件は次に示す3条件となる.

$$b_{ij}^{m}=b_{ji}^{m} \tag{B-5a}$$

$$b_{mi}^{m}=0 \tag{B-5b}$$

$$b_{ii}^{m}=2\overline{u_m T'} \tag{B-5c}$$

制約条件は，順に系の対称性を満足する条件，連続の式より満足される条件，グリーンの定理より導びかれる3次相関テンソルの特解を示している．

Launder(1975)は上の制約を満足する3次の相関テンソルとして次のようなモデルを提唱した．

$$b_{ij}^{m}=\{0.8\delta_{ij}\delta_{mr}-0.2(\delta_{im}\delta_{jr}+\delta_{jm}\delta_{ir})\}\overline{u_r T'} \tag{B-5d}$$

これより$\pi_{iT,2}$は次のように示される．

$$\pi_{iT,2}=0.8\overline{u_m T'}\frac{\partial U_i}{\partial x_m}-0.2\overline{u_m T'}\frac{\partial U_m}{\partial x_i} \tag{B-6}$$

一方，前川(1979)らはこの3次相関テンソルに対し，応力テンソルの等方からの偏差を含む項Δ_{ij}を加えて次のようにモデル化を行なっている．

$$\begin{aligned} b_{ij}^{m}=\{&0.8\delta_{ij}\delta_{mr}-0.2(\delta_{im}\delta_{jr}+\delta_{jm}\delta_{ir}) \\ &+c_{\psi 3}\delta_{ij}\Delta_{mr}-c_{\psi 4}(\delta_{im}\Delta_{jr}+\delta_{jm}\Delta_{ir}) \\ &+c_{\psi 5}\Delta_{ij}\delta_{mr}-c_{\psi 6}(\Delta_{im}\delta_{jr}+\Delta_{jm}\delta_{ir})\}\overline{u_r T'} \end{aligned} \tag{B-7a}$$

$$\Delta_{ij}=\frac{\overline{u_i u_j}}{k}-\frac{2}{3}\delta_{ij} \tag{B-7b}$$

圧力・温度勾配相関項に対するより簡便なモデルとしては次のようなモデルがある．

$$\pi_{iT,2}=c_{2T}\overline{u_j T'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \tag{B-8}$$

壁面に対する影響の項のモデル化に対しては，レイノルズ応力方程式と同様に壁面近傍にて1，壁から離れるに従い次第に減少する関数を項中に導入してモデル化を行なっている．Launder-Samaraweera(1979)は，平均流の速度勾配の影響を壁面に対する影響の項に導入して次のようなモデルを提唱している．

$$\pi_{iT,w}=\{-c_{1,w}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i T'}-c_{2,w}\overline{u_j T'}(4\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i})\}\frac{k^{3/2}}{\varepsilon x_n} \tag{B-9}$$

ここでx_nは壁面からの垂直距離であり，$c_{1,w}=0.1$，$c_{2,w}=0.02$としている．

本解析において乱流熱流束モデルを解く場合には，数値計算の上で取扱いの容易な，代数応力モデルとして解析を行ない，対流項，拡散項のモデル化には，Rodi近似を温度場へ拡張した(B-1d)式を用いるものとする．ただし，温度変動の生成P_Tとその散逸ε_Tとはほぼ$P_T \simeq \varepsilon_T$として右辺第2項は無視するものとする．圧力・温度勾配相関項に関しては，$\pi_{iT,1}$，$\pi_{iT,2}$に関してはより厳密であると思われる(B-3b)式，および(B-6)式を用いるものとする．壁面に対する影響は，速度場で定義した式と同一のものを使用する．以上の主旨に沿ってモデル化された式は次のように示される．

$$\frac{\overline{u_i T'}}{2k}(P_k - \varepsilon) = P_{iT} + \pi_{iT,1} + \pi_{iT,2}$$

$$= -\overline{u_i u_j}\frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{u_j T'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_{1T}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i T'} - c_{1T}'\frac{\varepsilon}{k}\left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\right)\overline{u_j T'}$$

$$+ c_{2T}\overline{u_j T'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_{2T}'\overline{u_j T'}\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \tag{B-10}$$

$$c_{1T} = c_{1T}^{*}\left\{1 + c_{1T,w} f\left(\frac{L}{x_w}\right)\right\}, \quad c_{1T}' = c_{1T}^{**}\left\{1 + c_{1T,w} f\left(\frac{L}{x_w}\right)\right\}$$

$$c_{2T} = c_{2T}^{*}\left\{1 + c_{2T,w} f\left(\frac{L}{x_w}\right)\right\}, \quad c_{2T}' = c_{2T}^{**}\left\{1 + c_{2T,w} f\left(\frac{L}{x_w}\right)\right\} \tag{B-11}$$

表B-1に，各乱流応力値に対する，$\pi_{iT,1}$および$\pi_{iT,2}$の具体的な構成式を示す．

次にモデル式中に表われる定義の決定法について検討する．今，単純せん断流れを想定し，主流方向をx_1，主流方向に垂直な方向をx_3とし，x_2 は奥行方向を示すものとする．

$$\frac{\partial U_3}{\partial x_1} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \tag{B-12}$$

であることに留意して$\overline{u_1 T'}$，$\overline{u_3 T'}$に対するモデル化された式を，表B-1を参考として求めると次のように示される．

$$\overline{u_1 T'}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{P_k}{\varepsilon} - 1\right) + c_{1T} + c_{1T}'\left(\frac{\overline{u_1^2}}{k} - \frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$= \left\{-c_{1T}'\frac{\overline{u_1 u_3}}{k} + \frac{k}{\varepsilon}(c_{2T} - 1)\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right\}\overline{u_3 T'} - \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_1 u_3}\frac{\partial T}{\partial x_1} \tag{B-13a}$$

$$\overline{u_3 T'}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{P_k}{\varepsilon} - 1\right) + c_{1T} + c_{1T}'\left(\frac{\overline{u_3^2}}{k} - \frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$= \left(-c_{1T}'\frac{\overline{u_1 u_3}}{k} - c_{2T}'\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)\overline{u_1 T'} - \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_3^2}\frac{\partial T}{\partial x_3} \tag{B-13b}$$

ここで

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{P_k}{\varepsilon} - 1\right) + c_{1T} + c_{1T}'\left(\frac{\overline{u_1^2}}{k} - \frac{2}{3}\right) \tag{B-13c}$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{P_k}{\varepsilon} - 1\right) + c_{1T} + c_{1T}'\left(\frac{\overline{u_3^2}}{k} - \frac{2}{3}\right) \tag{B-13d}$$

として先の$\overline{u_1 T'}$，$\overline{u_3 T'}$より$\overline{u_1 T'}$を消去して$\overline{u_3 T'}$について整理すると

$$\overline{u_3 T'}\Lambda_2 = \left(-c_{1T}'\frac{\overline{u_1 u_3}}{k} - c_{2T}'\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)\left\{-c_{1T}'\frac{\overline{u_1 u_3}}{k} + \frac{k}{\varepsilon}(c_{2T} - 1)\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right\}\frac{\overline{u_3 T'}}{\Lambda_1}$$

$$+ \left(-c_{1T}'\frac{\overline{u_1 u_3}}{k} - c_{2T}'\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)\left(-\frac{k}{\varepsilon}\frac{\overline{u_1 u_3}}{\Lambda_1}\frac{\partial T}{\partial x_3}\right) - \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_3^2}\frac{\partial T}{\partial x_3} \tag{B-13e}$$

ここで

表B-1　P_{iT}，$\pi_{iT,1}$，$\pi_{iT,2}$に対するモデル式

$\overline{u_iT'}$	P_{iT}
$\overline{u_1T'}$	$-\overline{u_1^2}\frac{\partial T}{\partial x_1}-\overline{u_1u_2}\frac{\partial T}{\partial x_2}-\overline{u_1u_3}\frac{\partial T}{\partial x_3}-\overline{u_1T'}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}-\overline{u_2T'}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}-\overline{u_3T'}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}$
$\overline{u_2T'}$	$-\overline{u_1u_2}\frac{\partial T}{\partial x_1}-\overline{u_2^2}\frac{\partial T}{\partial x_2}+\overline{u_2u_3}\frac{\partial T}{\partial x_3}-\overline{u_1T'}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}-\overline{u_2T'}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}-\overline{u_3T'}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}$
$\overline{u_3T'}$	$-\overline{u_1u_3}\frac{\partial T}{\partial x_1}-\overline{u_2u_3}\frac{\partial T}{\partial x_2}+\overline{u_3^2}\frac{\partial T}{\partial x_3}-\overline{u_1T'}\frac{\partial U_3}{\partial x_1}-\overline{u_2T'}\frac{\partial U_3}{\partial x_2}-\overline{u_3T'}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}$

$\overline{u_iT'}$	$\pi_{iT,1}$
$\overline{u_1T'}$	$-c_{1T}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_1T'}-\dot{c}_{1T}\frac{\varepsilon}{k}\{(\frac{\overline{u_1^2}}{k}-\frac{2}{3})\ \overline{u_1T'}+\frac{\overline{u_1u_2}}{k}\overline{u_2T'}+\frac{\overline{u_1u_3}}{k}\overline{u_3T'}\}$
$\overline{u_2T'}$	$-c_{1T}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_2T'}-\dot{c}_{1T}\frac{\varepsilon}{k}\{\frac{\overline{u_1u_2}}{k}\overline{u_1T'}+(\frac{\overline{u_2^2}}{k}-\frac{2}{3})\ \overline{u_2T'}+\frac{\overline{u_2u_3}}{k}\overline{u_3T'}\}$
$\overline{u_3T'}$	$-c_{1T}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_3T'}-\dot{c}_{1T}\frac{\varepsilon}{k}\{\frac{\overline{u_1u_3}}{k}\overline{u_1T'}+\frac{\overline{u_2u_3}}{k}\overline{u_2T'}+(\frac{\overline{u_3^2}}{k}-\frac{2}{3})\ \overline{u_3T'}\}$

$\overline{u_iT'}$	$\pi_{iT,2}$
$\overline{u_1T'}$	$c_{2T}\ (\overline{u_1T'}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\overline{u_2T'}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\overline{u_3T'}\frac{\partial U_1}{\partial x_3})$ $-\dot{c}_{2T}\ (\overline{u_1T'}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\overline{u_2T'}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+\overline{u_3T'}\frac{\partial U_3}{\partial x_1})$
$\overline{u_2T'}$	$c_{2T}\ (\overline{u_1T'}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+\overline{u_2T'}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+\overline{u_3T'}\frac{\partial U_2}{\partial x_3})$ $-\dot{c}_{2T}\ (\overline{u_1T'}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\overline{u_2T'}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+\overline{u_3T'}\frac{\partial U_3}{\partial x_2})$
$\overline{u_3T'}$	$c_{2T}\ (\overline{u_1T'}\frac{\partial U_3}{\partial x_1}-\overline{u_2T'}\frac{\partial U_3}{\partial x_2}-\overline{u_3T'}\frac{\partial U_3}{\partial x_3})$ $-\dot{c}_{2T}\ (\overline{u_1T'}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}+\overline{u_2T'}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}+\overline{u_3T'}\frac{\partial U_3}{\partial x_3})$

表B-2　モデル定数

$\dot{c}_{1T}$	$\ddot{c}_{1T}$	$\dot{c}_{2T}$	$\ddot{c}_{2T}$	$c_{1T,w}$	$c_{2T,w}$
3.9	−2.5	0.8	0.2	0.25	−0.46

$$\Lambda_3 = \left(-c_{1T}' \frac{\overline{u_1 u_3}}{k} - c_{2T}' \frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)\left\{-c_{1T}' \frac{\overline{u_1 u_3}}{k} + \frac{k}{\varepsilon}(c_{2T}-1)\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right\}$$

$$= \left(c_{1T} \frac{\overline{u_1 u_3}}{k}\right)^2 - c_{2T}'(c_{2T}-1)\left(\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 + \frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\frac{\overline{u_1 u_3}}{k} c_{1T}'(c_{2T}' - c_{2T}+1) \tag{B-13f}$$

を定義する．一方，次の関係式が成立する．

$$\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\frac{\overline{u_1 u_3}}{k} = -\frac{P_k}{\overline{u_1 u_3}}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\overline{u_1 u_3}}{k} = -\frac{P_k}{\varepsilon} \qquad \left(\because \ P_k = -\overline{u_1 u_3}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) \tag{B-13g}$$

$$\left(\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 = \left(-\frac{\overline{u_1 u_3}}{k\, c\mu}\right)^2 = \frac{1}{c\mu} \qquad \left(\because \ \frac{u_1 u_3}{k} = \sqrt{c\mu}\right) \tag{B-13h}$$

これらの関係式よりΛ_3は次のように書き換えられる．

$$\Lambda_3 = \left(c_{1T} \frac{\overline{u_1 u_3}}{k}\right)^2 + c_{2T}'(c_{2T}-1)\frac{1}{c\mu} + \frac{P_k}{\varepsilon} c_{1T}'(c_{2T} - c_{2T}'+1) \tag{B-14}$$

$\overline{u_3 T'}$に関する式をΛ_1，Λ_2，Λ_3を用い$-P_k = \overline{u_1 u_3}\cdot\partial U_1/\partial x_3$に留意して整理すると次のようになる．

$$-\overline{u_3 T'} = \frac{\left\{\dfrac{\overline{u_3^2}}{k} - \dfrac{c_{1T}'(\overline{u_1 u_3}/k)^2 - (P_k/\varepsilon)\, c_{2T}'}{\Lambda_1}\right\}}{\Lambda_2 - (\Lambda_3/\Lambda_1)} \frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial x_3} \tag{B-15}$$

ここで乱流プラントル数を求めると，その定義式より次のようになる．

$$P_{rt} = \frac{\overline{u_1 u_3}\,(\partial T/\partial x_3)}{\overline{u_3 T'}\,(\partial U_1/\partial x_3)}$$

$$= \frac{c\mu\{\Lambda_2 - (\Lambda_3/\Lambda_1)\}}{\left\{\dfrac{\overline{u_3^2}}{k} - \dfrac{c_{1T}'(u_1 u_3/k)^2 - (P_k/\varepsilon)\, c_{2T}'}{\Lambda_1}\right\}} \tag{B-16}$$

モデル定数を決定する際には，上式を用いて行なう．ただし(B-11)式で表わされるモデル定数のうち，c_{2T}'，c_{2T}'' については，Launder(1975) により提唱された定数

$$c_{2T}' = 0.8 \qquad c_{2T}'' = 0.2 \tag{B-17}$$

を用いるものとする．c_{1T}'，c_{1T}''については，壁の影響を表わす関数 f を 0とし，その時の乱流プラントル数，すなわち単純せん断流れにおける乱流プラントル数の値がP_{rt}=0.67であることより決定する．$c_{1T,w}$，$c_{2T,w}$ に関しては f =1として，壁面近傍の乱流プラントル数がP_{rt}=0.92であることより決定する．式中に表われる，各乱流応力値については，レイノルズ応力方程式のモデル定数決定の際に使用したものを使用する．こうして求めた定数値を表B-2に示す．

B２．正方形断面管路の助走区間非等方性温度場解析

ここでは，エネルギー方程式，乱流熱流束方程式を用いて非等方性温度場の解析を試みる．計算対象としては，速度場にて扱った正方形断面を有する発達しつつある流れ場を検討する．このような温度場に関する助走区間発達乱流解析の比較すべき実験値がないため乱流熱流束，あるいはヌセルト数等の挙動について検討を行なう．

支配方程式としては，速度場にて用いた方程式の他に，エネルギー方程式，乱流熱流束

方程式が必要となる．ただしエネルギー方程式は速度場の解析同様，放物型とし主流方向の拡散項は無視した形として次のように示される．

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho U_1 T)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho U_2 T)+\frac{\partial}{\partial x_3}(\rho U_2 T)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\lambda}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\lambda}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)-\rho\frac{\partial \overline{u_1 T'}}{\partial x_2}-\rho\frac{\partial \overline{u_2 T'}}{\partial x_3} \tag{B-18}$$

一方，乱流熱流束方程式に対しては，モデル化された式として次のように示される．

$$\frac{\overline{u_i T'}}{2k}(P_k-\varepsilon)=P_{iT}+\pi_{iT,1}+\pi_{iT,2} \tag{B-19}$$

B２．１　解析手法

解析手法，格子点数は速度の場合と同様である．温度および乱流熱流束の変数配置は，図B-1のような配置としている．また乱流熱流束をエネルギー方程式に取り込む場合には，計算の安定性を考慮し，直接取り込むのでなく速度場で説明したように拡散項の一部として取り込むPseudo-Viscosityの概念を導入する．

温度境界条件として，熱流束一定の条件を設定した．その際温度分布は対数温度分布に従がうものとし，Jayatilleke(1959)の$\mathbb{P}$ functionを用いて次のように示す．

$$T^+=P_{rt}(U^++\mathbb{P}) \tag{B-20a}$$

ここで

$$\mathbb{P}=9.24\left\{\left(\frac{P_r}{P_{rt}}\right)^{3/4}-1\right\}\left\{1+0.28\exp\left(-0.007\frac{P_r}{P_{rt}}\right)\right\} \tag{B-20b}$$

$$U^+=\frac{U}{U\tau}=\frac{1}{\kappa}\ln\frac{U\tau y}{\nu}+E \tag{B-20c}$$

でありP_{rt} は乱流プラントル数を示す．一方T^+は次のようにも定義できる．

$$T^+=\frac{\rho c_p(T_w-T)U\tau}{q_w} \tag{B-20d}$$

T_w壁面温度，q_wは壁面からの熱流束を示す．(B-228d)式よりT_wに関する次の式を得る．

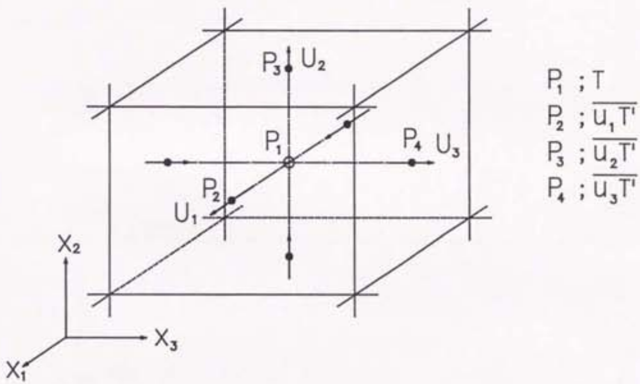
$$T_w=T+\frac{q_w}{\rho c_p U\tau}T^+ \tag{B-21}$$

この式より熱流束の境界条件を壁面温度に置き換えることができ，境界条件を設定できる．上式中のＴは，壁面からの計算第１点目にて代表させ計算を行なう．

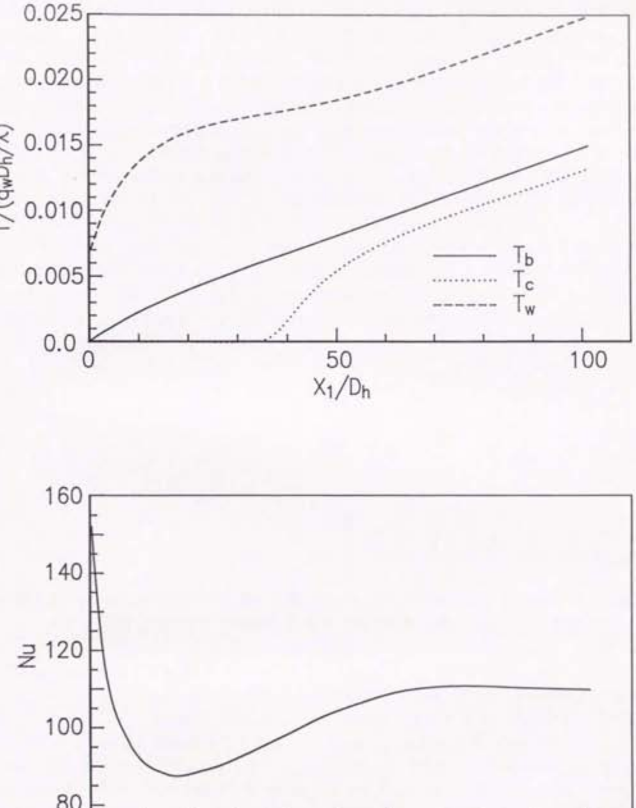
計算パラメータとしては，速度場と同じ Re=42,000とし，熱流速はq_w=0.005として計算を行なった．次に解析結果について検討する．

B２．２　解析結果

図B-2は混合平均温度T_b，管中心温度T_c，壁面平均温度T_wおよびヌセルト数の主流方向への変化の様子を示したものである．ヌセルト数を算出する際の代表温度差の算出には，壁面平均温度と混合平均温度とを用いた．混合平均温度T_bは，熱流束一定であるためほぼ直線的に増加している．また管中心温度は，約x_1=35D_hより上昇し始め，入口より発



図B-1　三次元変数配置図



図B-2　温度、ヌセルト数の発達

達した温度境界層がこの地点において管中心まで達したことを意味している．壁面平均温度T_wは，入口より急激に立ち上がりその後一定勾配にて徐々に増加しており，T_b，T_cの動向と異なる．ヌセルト数が極小値をとった後一定値に漸近していくのは，このT_wとT_bとの発達の勾配の相違により生じたものと考えられる．またヌセルト数は約$x_1=70D_h$程度より一定値となりT_w，T_bの勾配がほぼ等しくなったことを意味している．これらの結果より完全に発達した温度場を得るにはかなりの助走区間距離が必要であることがわかる．ヌセルト数，T_wなど平均値を示すもので考察したが，例えば局所的なヌセルト数が安定するまでを完全に発達した温度場とすれば，さらに長い助走区間距離が必要と思われる．

図B-3および図B-4は，$x_1=5.6D_h$，$36.8D_h$に於ける温度乱流熱流束の分布を示したものである．$x_1=5.6D_h$における乱流熱流束の分布について比較してみると，$\overline{u_1T'}$の方が$\overline{u_3T'}$より早く発達している様子が解る．この傾向は$x_1=36.8D_h$においても認められる．これは，主流方向の垂直応力$\overline{u_1^2}$，亜流方向の垂直応力$\overline{u_3^2}$ならびに各々の方向の温度勾配に大きく影響されているものと考えられる．今，モデル化された$\overline{u_1T'}$，$\overline{u_3T'}$の方程式において，亜流速度U_2，U_3および乱流せん断応力値は小さいものとしてそれらの項を省略すると$\overline{u_1T'}$，$\overline{u_3T'}$は次のように示される．

$$\overline{u_1T'}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{P_k}{\varepsilon}-1\right)+c_{1T}+c_{1T}'\left(\frac{\overline{u_1^2}}{k}-\frac{2}{3}\right)+\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+(c_{2T}'-c_{2T})\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right\}$$

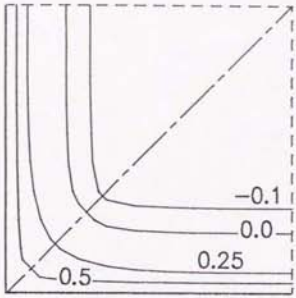
$$=-\overline{u_1^2}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial x_1}+(c_{2T}-1-c_{2T}')\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\overline{u_3T'}+\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\overline{u_2T'}\right)\frac{k}{\varepsilon} \tag{B-22a}$$

$$\overline{u_3T'}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{P_k}{\varepsilon}-1\right)+c_{1T}+c_{1T}'\left(\frac{\overline{u_3^2}}{k}-\frac{2}{3}\right)\right\}$$

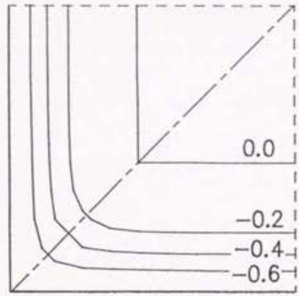
$$=-\overline{u_3^2}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial x_3}-c_{2T}'\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\overline{u_1T'} \tag{B-22b}$$

主流速度U_1の亜流方向に対する速度勾配，$\partial U_1/\partial x_2$，$\partial U_1/\partial x_3$は小さいと思われることより，$\overline{u_1T'}$，$\overline{u_2T'}$の値を支配するのは右辺第１項と考えられ，垂直応力$\overline{u_1^2}$，$\overline{u_3^2}$および各々の方向の温度勾配$\partial T/\partial x_1$，$\partial T/\partial x_3$により，$\overline{u_1T'}$，$\overline{u_2T'}$は支配されるものと考えられる．

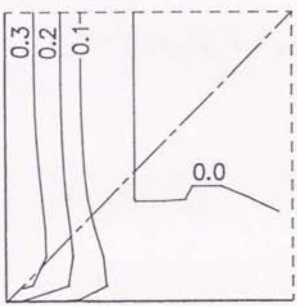
$\rho c_p\overline{u_1T'}$，$\rho c_p\overline{u_3T'}$は，乱れにより輸送される熱流束を示すものであり，他方，$\rho\overline{u_1^2}$，$\rho\overline{u_1u_3}$，は運動量に関する乱れによる輸送を示しており，$\overline{u_1T'}$と$\overline{u_1^2}$および，$\overline{u_3T'}$と$\overline{u_1u_3}$とが物理的意味で対応する（ただしせん断応力$\overline{u_1u_3}$の分布は，$\overline{u_1u_2}$の分布を対角線対称としたものに対応）．$x_1=5.6D_h$におけるこれらの分布を比較すると，相方の分布とも非常に良く似ているのが解る．しかし$x_1=36.8D_h$に於いては，主流方向速度分布と温度分布との差はそれほど大きな相違はないものの，$\overline{u_1T'}$，$\overline{u_3T'}$の分布と$\overline{u_1^2}$，$\overline{u_1u_3}$の分布とを比較すると，両者において差が認められる．$\overline{u_1T'}$の等値線図は$\overline{u_1^2}$と比較してコーナー部へ突出したような分布となっているが，これは先の解析結果でも考察したように，乱流熱流束方程式の対流項，拡散項もレイノルズ応力方程式同様Rodi近似を用いているため，第二種二次流れに起因するものでなく，圧力・温度勾配相関項によるものと考えられる．また$\overline{u_3T'}$の分布においては，$\overline{u_1u_3}$の分布に見られる異符号領



$(T-T_b)/(q_w D_h/\lambda)\times10^2$

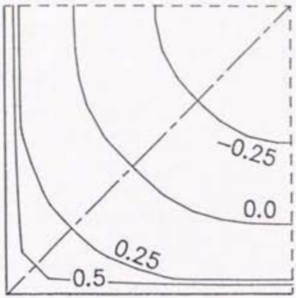


$\overline{u_1T'}/(U_b q_w D_h/\lambda)\times10^4$

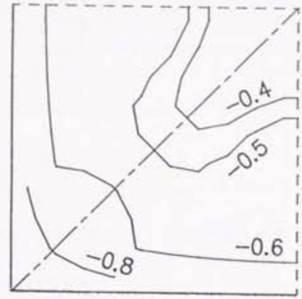


$\overline{u_3T'}/(U_b q_w D_h/\lambda)\times10^4$

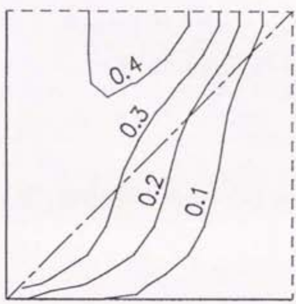
図B-3　温度、乱流熱流束の等値線図　（x_1=5.6D_h）



$(T-T_b)/(q_w D_h/\lambda)\times10^2$



$\overline{u_1 T'}/(U_b q_w D_h/\lambda)\times10^4$



$\overline{u_3 T'}/(U_b q_w D_h/\lambda)\times10^4$

図B-4　温度、乱流熱流束の等値線図　（x_1=36.8D_h）

域は認められず，異なったものとなっている．これらの相違は，乱流熱流束方程式中の圧力・温度勾配相関項とレイノルズ応力方程式中の圧力・歪相関項の相違によるものと考えられる．このように，運動量の輸送と，熱流束の輸送とに関する相似性が発達するに従い，徐々に崩れて行くことは，K－ε二方程式モデルによる解析等でよく用いられる乱流プラントル数，すなわち

$$P_{rt}=\frac{\overline{u_1 u_2}\ (\partial T/\partial x_2)}{\overline{u_2 T'}\ (\partial U_1/\partial x_2)} \tag{B-23}$$

が一定という仮定が成立しなくなることを示唆しているものと考えられる．

B３．湾曲風洞内非等方性温度場解析

ここでは，先に示した乱流熱流束の他に，温度変動の輸送方程式および温度変動に対する散逸の輸送方程式を導入し解析を行なう事を試みる．この温度変動および散逸に対する解析としては前川(1979)らの単純せん断流れ場への適用例，Elghobashi-Launder(1981)の格子乱流の温度混合層への適用例などがあるが，この種の研究は比較的少ない．しかもこれらの要因を含め乱流熱流束方程式を三次元乱流場へ応用解析した例はみられない．乱流熱流束方程式に対しては上述したモデルを用い，温度変動，温度散逸に対しては輸送方程式のモデル化を行なう．計算対象としては，第４章でとり上げたTucker-Reynolds(1968)の実験とし，熱流束一定の境界条件を設定することにより非等方性乱流温度場の解析を行なう．比較すべき実験データはないが，流れ場との相関を考えながら，乱流熱流束，温度変動などの挙動について考察を加える．

B３．１　温度変動，温度散逸輸送方程式に対するモデル化

温度変動，および温度散逸に対する方程式は，厳密形をそのまま解くことは不可能であり，モデル化が必要となる．温度変動の輸送方程式のうち特に問題となるのは拡散項のモデル化であるが，これに対しては速度勾配型の拡散モデルを導入し，次のようなモデル化を行なう．

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t}+\frac{\partial U_j\overline{T'^2}}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_\phi\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_j u_l}\frac{\partial T'^2}{\partial x_l}\right)-2\overline{u_j T'}\frac{\partial T}{\partial x_j}-2a\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j}\frac{\partial T'}{\partial x_j}}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_\phi\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_j u_l}\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_l}\right)-2\overline{u_j T'}\frac{\partial T}{\partial x_j}-2\varepsilon_T \tag{B-24}$$

温度散逸の輸送方程式に対しても同様にモデル化が必要となる．温度散逸方程式に対しては一般に次のようなモデル化が行なわれている．

$$\frac{\partial \varepsilon_T}{\partial t}+\frac{\partial U_j\varepsilon_T}{\partial x_j}=-c_{\varepsilon T0}\frac{\overline{u_i u_j}}{k}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\varepsilon_T-c_{\varepsilon T1}\frac{2\overline{u_j T'}}{\overline{T'^2}}\frac{\partial T}{\partial x_j}\varepsilon_T$$

$$-c_{\varepsilon T2}\frac{\varepsilon}{k}\varepsilon_T-c_{\varepsilon T3}\frac{\varepsilon_T{}^2}{\overline{T'^2}} \tag{B-25}$$

式中に表われる定数値については，各モデラーにより種々の定数系が提唱されているが本解析においては，前川ら(1979)の定数系を採用し計算を行なうものとする．

非等方性温度場解析に必要な支配方程式を表B-3，定数を表B-4に示す．この時，各輸送

表B-3　支配方程式の各項

Equation	ϕ	$\mathrm{Diff}\,\phi$	$S\phi$
Density	1	0	0
Momentum	U_i	$\nu \dfrac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}$	$-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i}-\dfrac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_j}$
Turbulent Energy	k	$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\nu_t}{\sigma_k}\dfrac{\partial k}{\partial x_j}\right)$	$G_s-\varepsilon$
Turbulent Dissipation	ε	$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right)$	$\dfrac{\varepsilon}{k}\left(c_{1\varepsilon} G_s - c_{2\varepsilon}\,\varepsilon\right)$
Reynolds Stress	$\dfrac{\overline{u_i u_j}}{k}(P_k-\varepsilon)$		$P_{ij}-\varepsilon_{ij}+\pi_{ij,1}+\pi_{ij,2}+\pi_{ij,w}$
Energy	T	$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\lambda}{\rho c_p}\dfrac{\partial T}{\partial x_j}\right)$	$-\dfrac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_j T'}$
Turbulent Heat Flux	$\dfrac{\overline{u_i T'}}{2k}(P_k-\varepsilon)$		$P_{iT}+\pi_{iT,1}+\pi_{iT,2}+\pi_{iT,w}$
Temperature Fluctuation	$\overline{T'^2}$	$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(c_\varphi \dfrac{k}{\varepsilon}\overline{u_j u_i}\dfrac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_i}\right)$	$-2\overline{u_j T'}\dfrac{\partial T}{\partial x_j}-2\varepsilon_T$
Temperature Dissipation	ε_T	0	$-c_{\varepsilon T0}\dfrac{\overline{u_i u_j}}{k}\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}\varepsilon_T - c_{\varepsilon T2}\dfrac{\varepsilon}{k}\varepsilon_T$ $-c_{\varepsilon T1}\dfrac{2\overline{u_j T'}}{T'^2}\dfrac{\partial T}{\partial x_j}\varepsilon_T - c_{\varepsilon T3}\dfrac{\varepsilon_T^2}{T'^2}$

表B-4　支配方程式の定数

σ_k	σ_ε	$c_{1\varepsilon}$	$c_{2\varepsilon}$	c_φ	$c_{\varepsilon T0}$	$c_{\varepsilon T1}$	$c_{\varepsilon T2}$	$c_{\varepsilon T3}$
1.0	1.3	1.44	1.92	0.22	0.0	1.0	0.9	1.9

方程式は次のように表現できる．ただし，レイノルズ応力，乱流熱流束方程式の対流項，拡散項はRodi近似を用いた近似式として表現してある．

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(U_j\phi)=D_{iff}\phi+S\phi \tag{B-26}$$

B３．２　解析手法

座標系を図B-5に示す．図に示すように，加熱条件としては，周囲の壁面を均等に加熱するものとし，従ってその対称性を考えて，計算対象領域は1／4断面として計算を行なう．図B-5において斜線部分が計算対象領域である．計算格子数は，第４章同様13×13×48(ξ×η×ζ)とする．計算格子は，壁面近傍で格子間隔が小さくなるよう設定した不等間隔格子を用い，第４．４．２節で示したものと同一であり，境界層排除厚さ分を考慮した計算格子となっている．

温度解析における境界条件設定の際に特に問題となるのは，温度変動，温度散逸の輸送方程式に対する境界条件の設定が上げられる．これらの諸量は速度場における乱流エネルギー，乱流散逸に相当するものであるが，速度場の場合これらの諸量に対しては，壁法則が成立するものとして，境界条件の設定を行なった．温度変動，温度散逸に対し，このような法則が成立することはなく，従って何らかの仮定を設けることにより境界条件を設定することが必要となる．本解析においては次に示す二つの仮定を用いることにより境界条件の設定を行なった．まず，壁法則で使用したと同様，計算第１点目で局所平衡が成立するものとすると，温度変動の輸送方程式より次式が成立する．

$$\varepsilon_T=-2\overline{u_jT'}\frac{\partial T}{\partial x_j} \tag{B-27}$$

速度場における速度スケールと温度場における速度スケールとの比Ｒはほぼ一定値となることは実験的に確かめられており本解析でもこの関係式を用いるものとする．すなわち，次式のように示される．

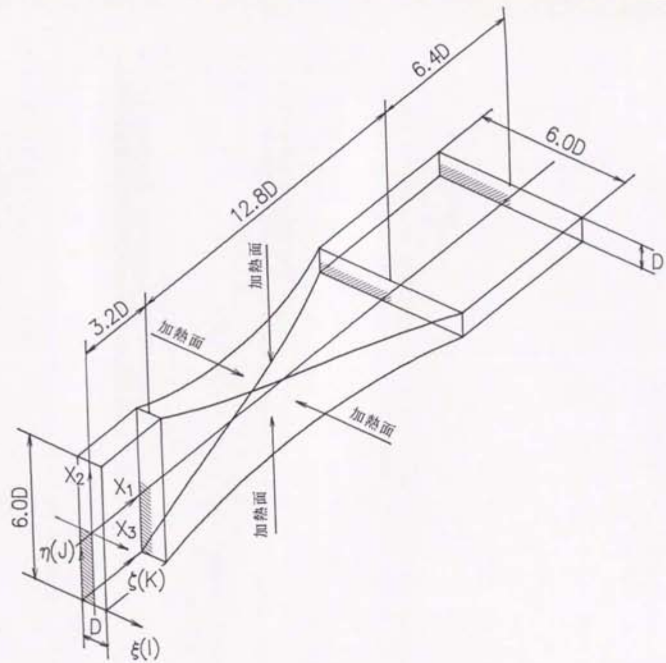
$$R=\frac{\overline{T'^2}/\varepsilon_T}{k\ /\varepsilon} \tag{B-28}$$

以上，２つの関係式より次の式を得る．

$$\begin{aligned}\overline{T'^2}&=-2\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_jT'}\frac{\partial T}{\partial x_j}\\&=-2R\frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u_1T'}\frac{\partial T}{\partial x_1}+\overline{u_2T'}\frac{\partial T}{\partial x_2}+\overline{u_3T'}\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)\end{aligned} \tag{B-29a}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_T&=\frac{1}{R}\ \frac{\varepsilon}{k}\ \overline{T'^2}\\&=-2\left(\overline{u_1T'}\frac{\partial T}{\partial x_1}+\overline{u_2T'}\frac{\partial T}{\partial x_2}+\overline{u_3T'}\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)\end{aligned} \tag{B-29b}$$

本解析では，これら二つの関係式を用いて境界条件の設定を行なうものとする．上式中表われる速度スケール比Ｒの値は，ほぼ一定値となり Beguier-Dekeyser-Launder(1978)は0.5程度と報告している．Elghobashi-Launder(1981) も同様な結果を報告している．こ



図B-5　座標系と解析モデル

れらの報告に対しLaunder(1978)は$R=0.8$程度が妥当であると報告している．本解析においてはそれらの中間的な値0.75として計算を行なうものとした．また，温度境界条件は，熱流束一定($q_w=0.001$)とした．

さらに温度変動，温度散逸の解析を得るには，入口におけるそれらの値が必要となる．本解析において直管入口部に設定してある乱流格子は加熱せず，一様な流れが流入することを考える．従って，入口部における温度変動，温度散逸の値は小さな値を代入して計算を行なうものとする．Warhaft-Lumley(1978)は乱流格子を加熱することにより温度変動を与え，その主流流れ方向への減衰を実験的に明らかにしているが，彼らの実験値を参考として入口部でのそれらの値を次のように設定した．

$$\overline{T'^2}=1.0\times10^{-8} \quad \text{(B-30a)}$$

$$\varepsilon_T=6.0\times10^{-8} \quad \text{(B-30b)}$$

B３．３　解析結果検討

B３．３．１　温度分布

図B-6は主流中心部の温度分布の発達の様子を示したものである．中心部温度は除々に上昇し x_1=9D程度より降下し始めるものの，その変化範囲は0.03程度と非常に小さく，ほぼ一定とも考えられる．これは先にも述べたように境界層排除厚さを加味して風洞が設計され，また計算においてもこの点を考慮しているため，温度境界層発達による中心部への影響が抑えられたことによるものと考えられる．また，湾曲風洞出入口部では，温度分布発達の様子は速度分布発達の様子とは異なり，凸状のピーク値を持たず滑らかな変化を示している．速度発達の場合，このピーク値は圧力変化により発生するものであるのに対し，温度発達の場合は，拡散項により変化しているためと考えられる．

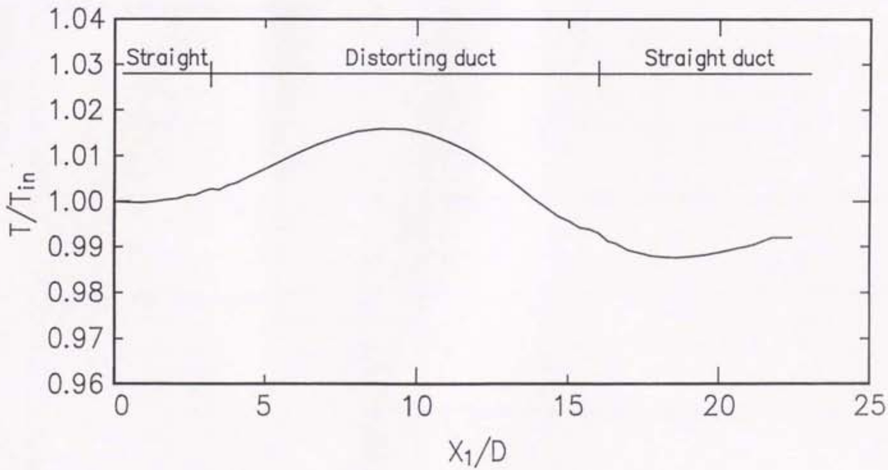
図B-7(a)，(b)は，各断面における等値線図を示したものである．湾曲風洞の前に位置する入口直管部において，下壁部温度の発達が，左右壁温度発達より早く発達していることがわかる．x_1=3.2Dより下壁部の等値線図は，流路中心部に向かって変形しているのが観察されるが，これは二次流れによる影響を受けているためであり，この傾向は湾曲風洞部に入るとより顕著に認められる．出口直管部に流入すると入口直管部とは逆に，左右壁での温度境界層の発達が促進され，上下壁での温度境界層の発達が抑制されることとなる．

また湾曲風洞出口近傍のコーナー部において，等温度線図に変化がみられ高い温度領域が生成されるのは，先の主流方向速度等値線図に示したように，壁面近傍に生じたわずかな逆流領域の影響によるものと考えられる．

B３．３．２　ヌセルト数分布

図B-8は下壁中心部，側壁中心部および平均ヌセルト数の主流方向への変化を示したものである．各々のヌセルト数は，バルク温度を代表温度とし，下壁面中心温度，側壁面中心温度，各断面における平均温度との差より算出した結果である．図B-9は，ヌセルト数算出の際用いた下壁面中心温度，側壁面中心温度，主流方向に直角な断面の壁面平均温度の変化を，図B-10には，バルク温度変化を示してある．

図B-8のヌセルト数変化をみると下壁，側壁中心部とも，湾曲風洞入口部，出口部にて変



図B-6　主流中心温度の発達

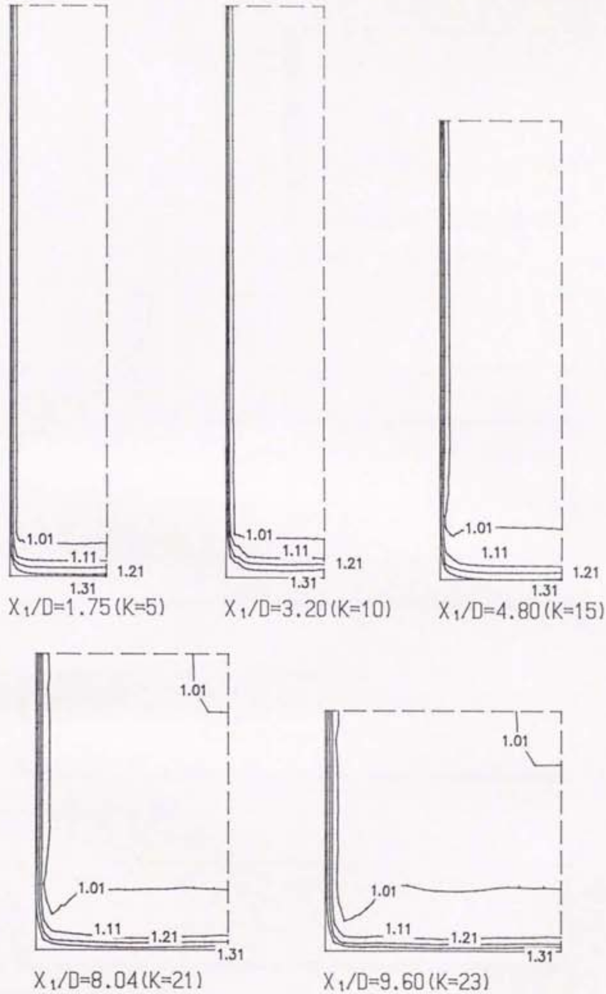
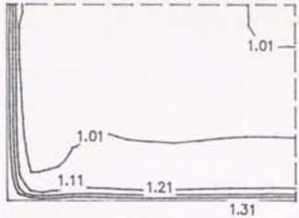
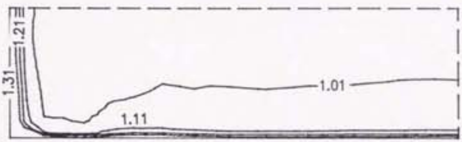


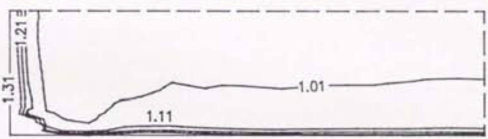
図8-7(a)　温度等値線図：T/T_{in}



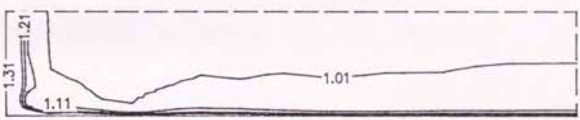
$X_1/D=11.05$ (K=25)



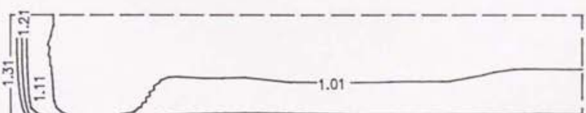
$X_1/D=14.26$ (K=31)



$X_1/D=14.67$ (K=32)

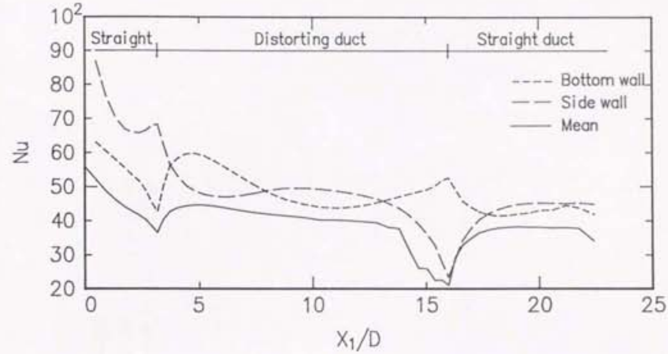


$X_1/D=16.00$ (K=36)

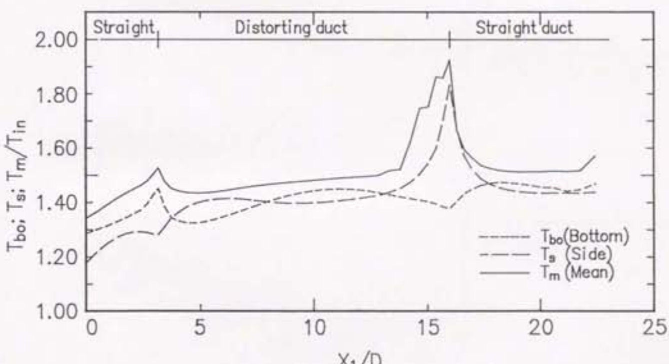


$X_1/D=18.59$ (K=43)

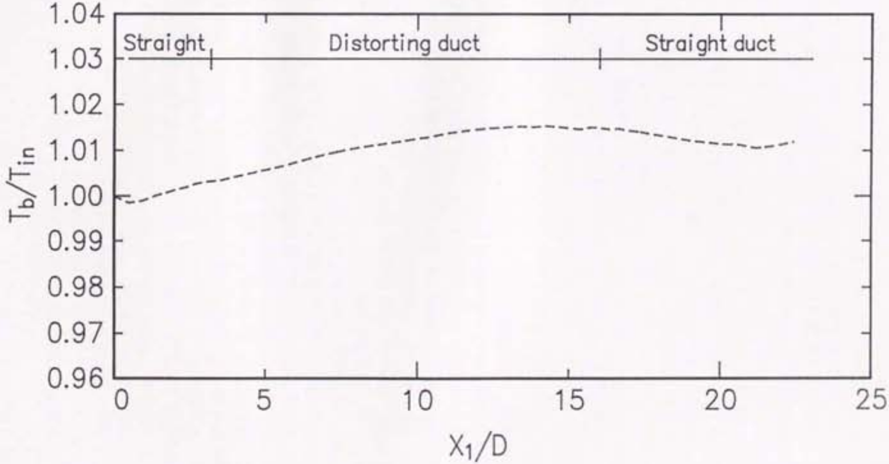
図B-7(b)　温度等値線図：$T／T_{in}$



図B-8 主流方向ヌセルト数の発達



図B-9 主流方向温度の発達



図B-10　バルク温度の発達

動していることがわかる．また側壁中心部のヌセルト数は，湾曲風洞に流入すると，一部一定値を保つ領域はあるものの徐々に降下していき，湾曲風洞出口にて最小値を持つ．また図B-9に示す側壁面中心部の温度は上昇し湾曲風洞出口部にて最大値を取る．このような側壁面中心部でのヌセルト数降下，温度上昇は，湾曲風洞内で発生している下壁面より側壁面へ向かって流れる二次流れによる熱移動が大きく影響しているものと考えられる．従って，逆に下壁中心部におけるヌセルト数は，湾曲風洞出口に向かって二次流れによる熱移動が下流に行くに従がい行なわれる結果，上昇することになる．また平均ヌセルト数の変化をみると x_1=13.7D近傍より急激に減少し多少変動した後増加しているが，これは逆流領域の発生による壁面平均温度上昇と変動に帰因しているものと考えられる．

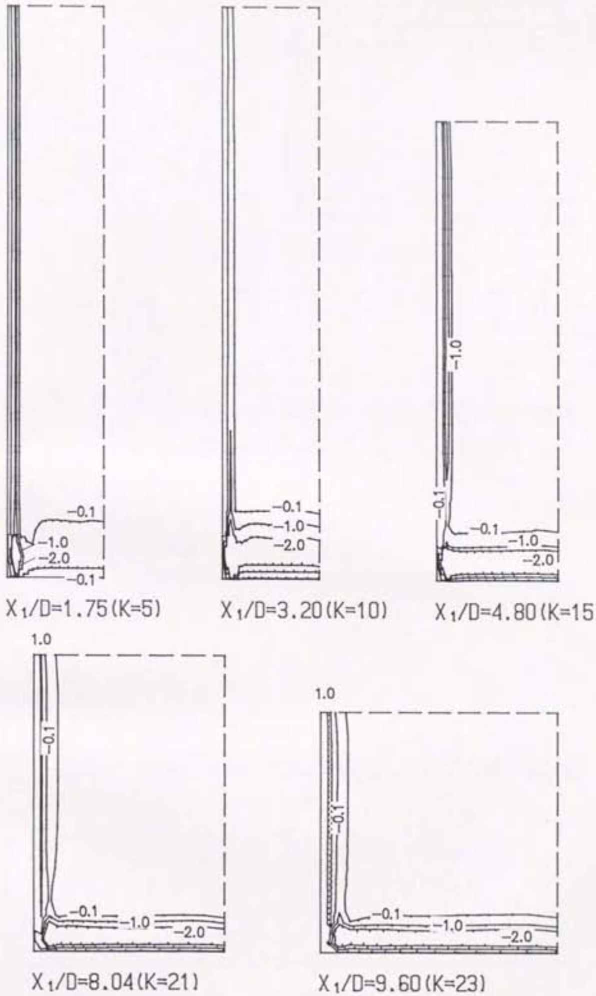
バルク温度はピーク値を取った後，減少する傾向にあるが，これは，バルク温度が，ある断面に於ける速度，温度，微小面積の積の総和をその断面の通過流量で除した値として定義され，本解析のような流れでは，下流に行くに従い排除厚さを考慮しているため速度は減少し，その減少割合が温度上昇より大きいため，このような減少傾向になったものと考えられる．主流中心速度分布，主流中心温度分布同様，本解析流れに特有の現象と思われる．

B３．３．３　乱流熱流束分布

図B-11(a)，(b)に主流方向の乱流熱流束$\overline{u_1 T'}$の等値線図を，図B-12および図B-13(a)，(b)に亜流方向の乱流熱流束$\overline{u_2 T'}$，$\overline{u_3 T'}$の各断面における等値線図を示す．

$\overline{u_1 T'}$の変化について検討する．入口直管部において左右壁に負の領域が認められるが，湾曲風洞に流入すると同時に，上下壁に左右壁と同程度の値をもつ負の領域が出現する．これは，左右壁に比べ上下壁に沿う主流方向の温度変化が大きく変化したことを示唆している．コーナー部には特に大きな値を持つ乱流熱流束が存在し，これは下流に行っても消えることなく存在する．湾曲風洞部に入ると左右壁に正の符号を持つ領域が認められる．正符号をとるか負の符号をとるかは主流方向の乱流熱流束を構成する各項の値の総和により決定されるものであるが，特に支配的な項と思われる，主流方向の温度勾配の値が小さい，すなわち温度の主流方向への発達が緩慢であることによるものと思われる．湾曲風洞出口近傍に近づくと，等値線図は，コーナー部において大きく変化するが，これは逆流領域の存在のため温度分布が大きく歪んでいるためである．出口直管部に流入すると，入口直管部とは逆に，$\overline{u_1 T'}$の比較的値の大きな負の領域は，上下壁に認められることになる．

次に亜流方向の乱流熱流束$\overline{u_2 T'}$，$\overline{u_3 T'}$の変化について考察する．$\overline{u_2 T'}$は下壁近傍より発達し始め，下壁面と等値線図が平行となって中心部方向へ発達するのに対し，$\overline{u_3 T'}$はまったく逆に側壁より発達し始めることが特徴的である．また両者とも逆流領域の存在する断面において等値線はかなり変動を示し，後流までその影響を残していることが伺える．$\overline{u_1 T'}$，$\overline{u_2 T'}$，$\overline{u_3 T'}$ は乱れにより輸送される熱流束を示すものであり，一方，$\overline{u_1^2}$，$\overline{u_1 u_2}$，$\overline{u_1 u_3}$ は乱れにより輸送される運動量を示すものである．従って $\overline{u_1 T'}$は$\overline{u_1^2}$と，$\overline{u_2 T'}$は$\overline{u_1 u_2}$と，$\overline{u_3 T'}$は$\overline{u_1 u_3}$と対応するものと考えられる．$\overline{u_1 T'}$と図4-20を，$\overline{u_3 T'}$と図4-23を，$\overline{u_2 T'}$と図4-24を比較すると，$\overline{u_1 T'}$と$\overline{u_1^2}$とは両壁より発達し，$\overline{u_2 T'}$と$\overline{u_1 u_2}$とは下壁近傍より，$\overline{u_3 T'}$と$\overline{u_1 u_3}$とは側壁近傍より発達し，基本的な特徴は両者で一致している．しかし両者で相似形となることはなく，例えば$\overline{u_2 T'}$の



図B-11(a)　乱流熱流束$\overline{u_1T'}$の等値線図：$(\overline{u_1T'}/U_{in}T_{in})\times 10^3$

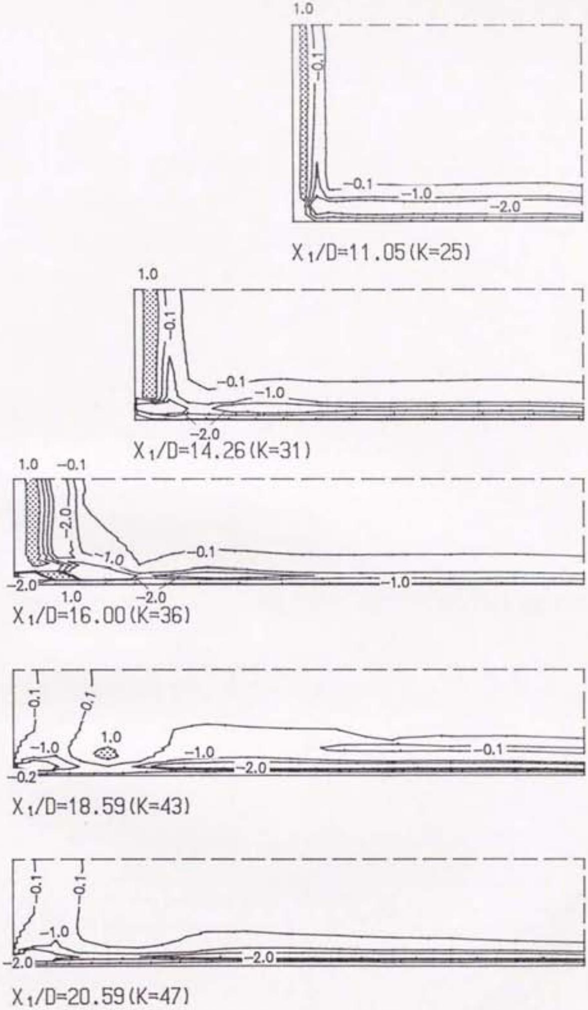
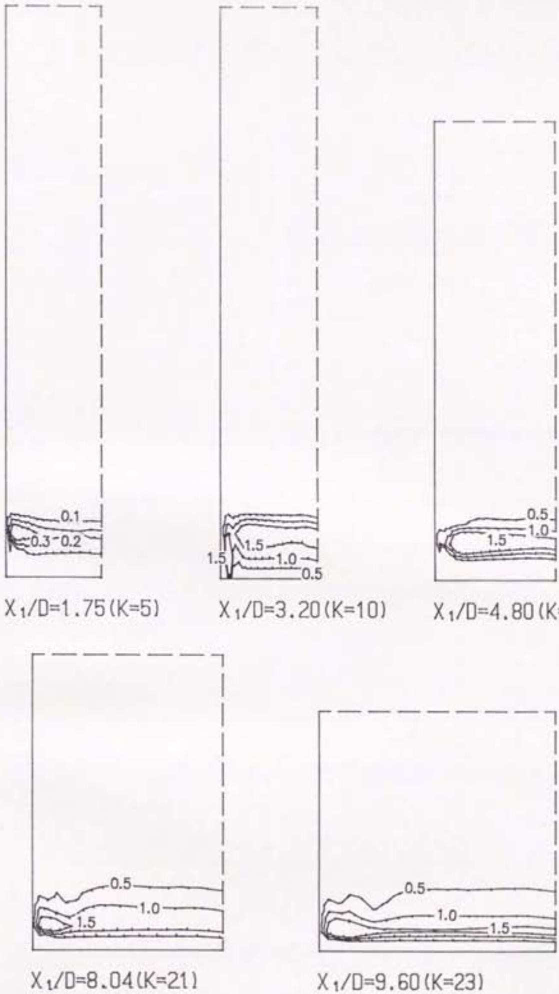
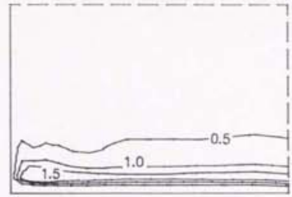


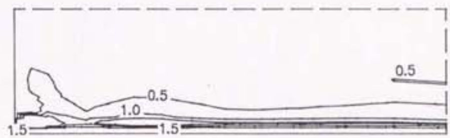
図8-11(b)　乱流熱流束$\overline{u_1T'}$の等値線図：$(\overline{u_1T'}/U_{in}T_{in})\times 10^3$



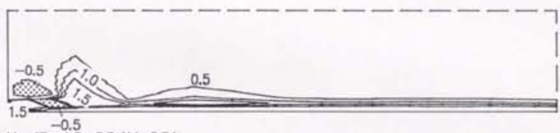
図B-12(a)　乱流熱流束$\overline{u_2T'}$の等値線図：($\overline{u_2T'}$／$U_{in}T_{in}$) x 10^3



$X_1/D=11.05$ (K=25)



$X_1/D=14.26$ (K=31)

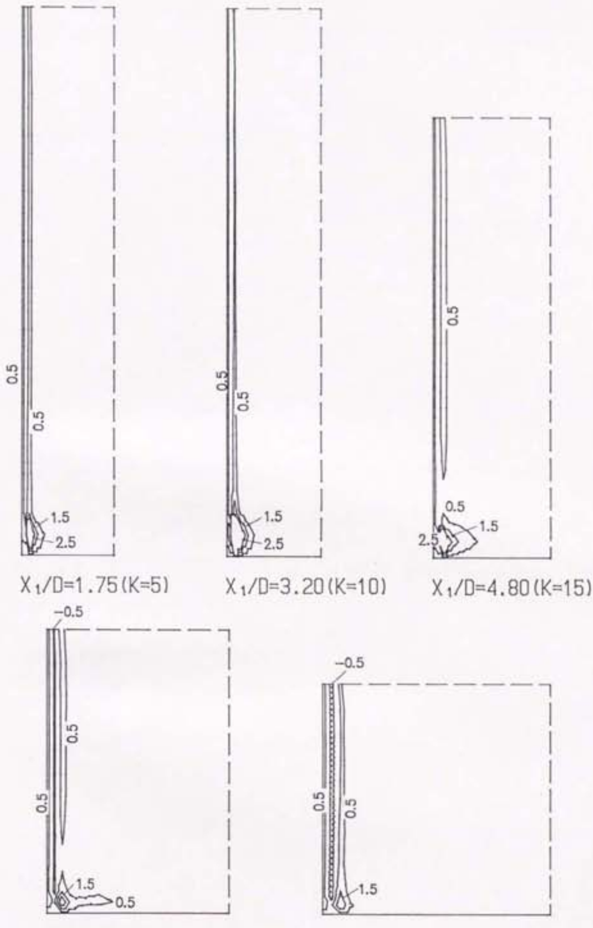


$X_1/D=16.00$ (K=36)

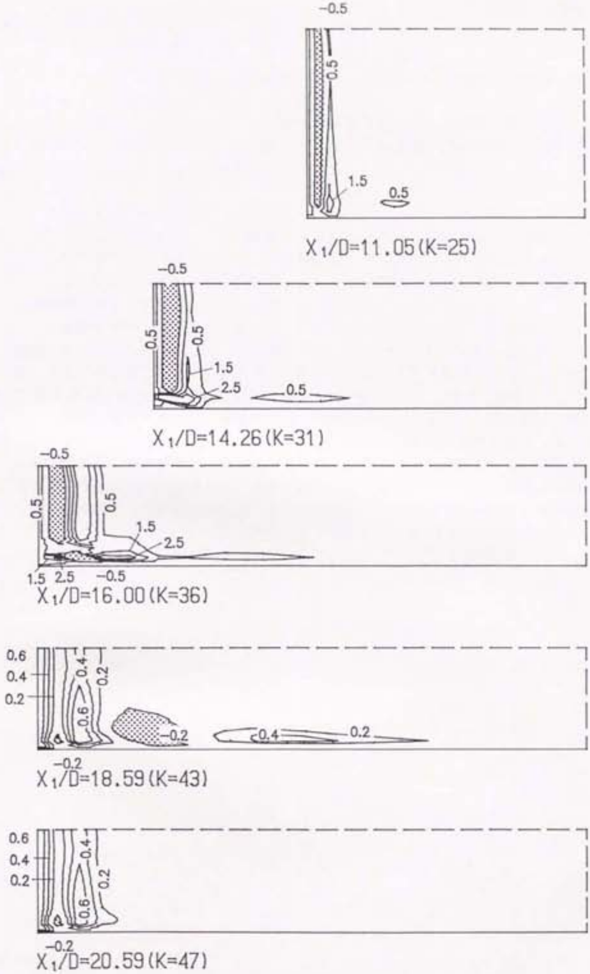
$X_1/D=18.59$ (K=43)

$X_1/D=20.59$ (K=47)

図B-12(b)　乱流熱流束 $\overline{u_2T}'$ の等値線図：$(\overline{u_2T}'/U_{in}T_{in})\times10^3$



図B-13(a)　乱流熱流束$\overline{u_3 T'}$の等値線図：($\overline{u_3 T'}/U_{in}T_{in}$)x$10^3$



図B-13(b)　乱流熱流束$\overline{u_3 T'}$の等値線図：($\overline{u_3 T'}$／$U_{in} T_{in}$) x 10^3

x_1=18.59D，において下壁にピーク値を持つ二つの島が形成される特徴的な分布となっているが，これは$\overline{u_1 u_2}$の分布において観察されない．

以上のようにいずれの分布においても，乱流熱流束分布とレイノルズ応力分布とは，特徴的な分布は似ているもののまったく相似形とは言えず，熱輸送と運動量輸送に関する相似性は本解析例の場合には成立していない．

B3．3．4　温度変動分布

図B-14(a)，(b)は，温度変動$\overline{T'^2}$の各断面の等値線図を示したものである．特徴的なこととして，入口直管部，湾曲風洞部内で下壁近傍において温度変動が顕著である点があげられる．また出口直管部においては，側壁近傍からの温度変動の発達もみられ，下壁部に生じた比較的高い温度変動の領域は下流に行くに従がい徐々に減衰していく．

このように温度変動の領域が，入口直管部，湾曲風洞部では下壁部に，出口直管部においては側壁近傍にも観察されるのは，温度変動に対する生成項が温度勾配と乱流熱流束との積の和であることを考えると，温度発達分布と深くかかわりあうものと思われる．そこで図B-7に示す等温度線図による温度発達の状態を考えると，入口直管部，湾曲風洞部の下壁部において温度分布は主流方向，垂流方向にも大きく変化していることがわかる．湾曲風洞部においては，二次流れの発生により，下壁部近傍の等温度線は大きく歪まされる結果，この傾向はさらに顕著となる，また出口直管部に流入すると二次流れによる影響が減少し，側壁における温度発達が促進され大きく変化していることがわかる．このような温度変化の大きい領域では必ず温度変動$\overline{T'^2}$の発生が認められ，両者の間には強い相関があると思われる．また乱流熱流束の各分布同様，x_1=14.67D～16.0Dまでの逆流領域においては，その影響を受けて等値線図が変形している．

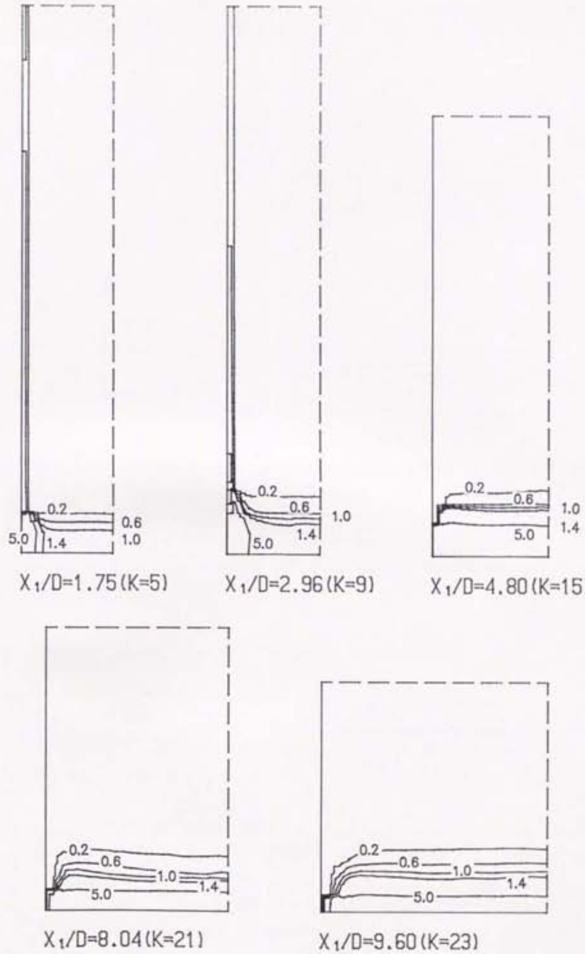
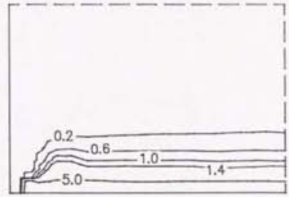
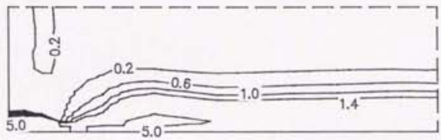


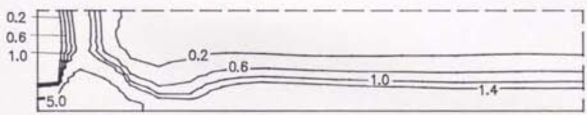
図8-14(a)　温度変動$\overline{T'^2}$の等値線図：$(\overline{T'^2}/T_{in}^2)\times 10^3$



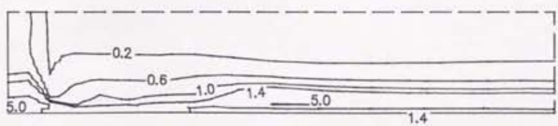
$X_1/D=11.05(K=25)$



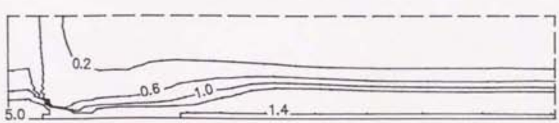
$X_1/D=14.26(K=31)$



$X_1/D=16.00(K=36)$

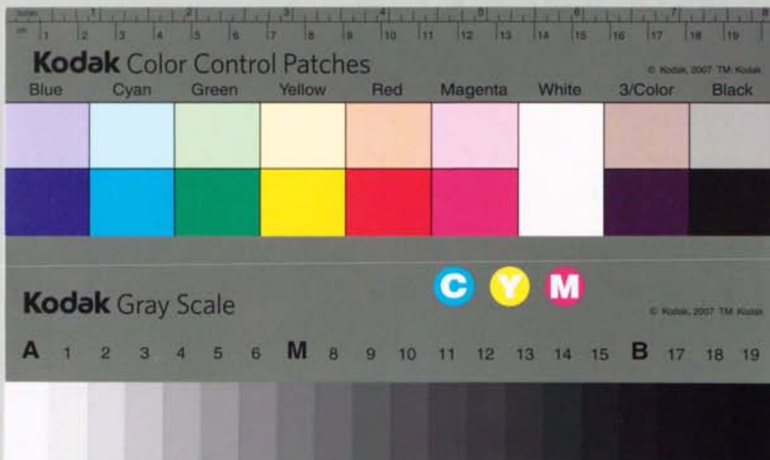


$X_1/D=18.59(K=43)$



$X_1/D=20.59(K=47)$

図8-14(b)　温度変動$\overline{T'^2}$の等値線図：$(\overline{T'^2}/T_{in}^2)\times 10^3$


Kodak Color Control Patches
© Kodak, 2007 TM: Kodak
Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black
Kodak Gray Scale
C Y M
© Kodak, 2007 TM: Kodak
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19