ランダムパターンの記述と生成に関する基礎的研究

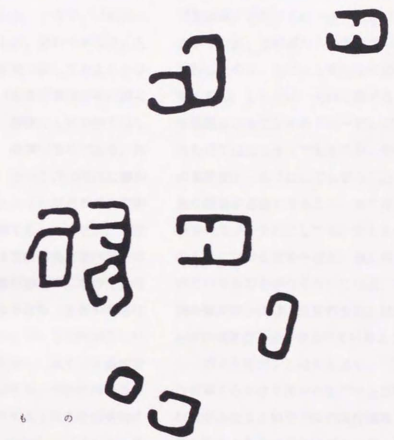
藤木隆明

A Description and Generation of *Random Patterns*

by

Takaaki FUJIKI

Institute of Industrial Science University of Tokyo



可　能　な　も　の

騒々しい、無政府的な、ノワズゥな、色合いの変化する、虎斑のある、縞のある、まぜこぜの、無数の色彩と色調とが入りこんだ多は、可能なものそのものである．…… それは、いくつかの可能なもののひとつの集合であり、可能なもののまさに集合でありうる．…… それは、潜在力ではなく力の逆そのものである．しかし、それは能力である．…… この騒音は開口部である．……

Michel Serres ：GENÈSE（及川 馥訳）

序にかえて

《思い思いに運動する自立した個体群のつくり出す総体的秩序のあり様》[1][2]という言葉が、ずっと心に引っ掛かっていた．一方で、「秩序＝良きもの、混沌＝悪しきもの、忌むべきもの」という単純な図式を、こと更思い返してみようとはしなかった私にとって、《征服の事実がその頂点に達した今日においては、階調はもはや美ではない。美はただ乱調にある。階調は偽りである。真はただ乱調にある。》[3]という1910年代に書かれた大杉栄の言葉も、たとえそれがぎりぎりの所で心の底から吐かれた言葉であったにせよ、やはりアナーキストとしての理念的信条を述べたものに過ぎず、本当に乱調と美が結びつくものだとは受け取っていなかった．もっとも、大杉の意図は別にして、その理念の向かっている方向が正しいものであるならば、必ずや美しく見えてくるべきものであろうとは思っていたが．今日においてもなお、階調を美ではないとするにはまだ感覚的に難しい部分もあるのだが、しかし、少なくともある時期から決して規則正しいとはいえない、正に乱調というべきものが美しく見え出すに至って、秩序や無秩序、混沌、規則と乱れ、といった事柄についても、もう一度よく考えてみる必要があると感じるようになってきた．一種の熱病のように拡がった哲学ブームのなかで、それらを代表するフランス現代哲学の、特に特徴的なキーワード『脱構築』と同じ名前で括られた「デコンストラクション派」と呼ばれる建築家の一群が脚光を浴び出したのは、それから間もなくのことだった．もちろん、これには、それに属すると目されている建築家の全てがそのグルーピングに満足しているわけではなさそうであること、そもそもそれらの建築家を一括りにしてしまうことに対しては厳密な議論が必要であること、等の注釈が必要ではあるのだが、それにしても、たとえそれらが既存のものに対する変形や違反、崩し等によって得られているものも少なくないにせよ、彼等の使う＜建築幾何学＞には、従来のものとは同一視できない何か異質なものが含まれているように見えた．

「ポストモダン」はもとより、「デコン」という言葉すらあまり聞かれなくなった昨今では、これらを単なる反動や一時の流行現象として片付けてしまう人も少なくないだろうが、私には何か重要なものがこれらの中に含まれているように思え

[1] 原　広司：空間的想像力の境界〈Ⅳ〉（建築文化7908）
[2] ブルーノ（清水純一訳）：無限・宇宙と諸世界について（現代思潮社、1967）
[3] 松田道雄編集：現代日本思想体系16　アナーキズム　大杉　栄：生の拡充（筑摩書房、1963）

てならない．例えば、＜異種の建築幾何学＞とでも呼ぶべきものの種子．そして、それらに見て取れる＜乱調の美学＞．ただし、「現代建築の弱点は、配列に関する理論が貧弱なことである．」という原先生の言葉を待つまでもなく、これらの＜建築幾何学＞について感覚的にしか語ることのできないもどかしさがある．だとすれば、これらを語るための理論の整備が急務である．しかし、それは如何にして可能なのか．

＊

ラ・ビレットの公園コンペティションでの模型撮影の直前に、全てのパーツを敷地の上に並べた時生じたあの光景．《不可測な全体の誘導》という原先生のことばが意味するものを、とっさに理解できたように感じたのはあの瞬間だった．そこには、ことばではとてもうまく言い表せないような複雑で錯綜した様相が生じていた．その後、自分なりに不可測な全体を誘導するための手続きについて考えてはいるが、具体的な建築の設計においては依然として難問であり続けている．自らの意図を超えたものを如何にして生みだすのか．それは、言い方を変えれば、建築という領域に、ある種の不確定性を導入することにほかならない．

他方、例えば、音楽、それも現代音楽という領域に目を移すなら、既に不確定性を導入する実験が行なわれていた．ストカスティック・ミュージック（確率的音楽）、不確定性音楽、偶然性の音楽、偶発的音楽、そして単なる即興演奏にいたるまで、様々に形容される音楽の諸分野において、それぞれの差異を厳密に区別しておく必要があるとしても、そしてそれらの目指すものがそれぞれ微妙に、時には大きく異なるものであるとしても、建築の分野ではほとんど行なわれていない試みが音楽の分野では既に行なわれており、それが何を意味するかについて見極めておく必要があることは強調しておいても良いだろう．古典的な調性音楽から無調性の音楽、インテグラルセリアリズムを経て不確定性音楽に至る道程は、その後の新ロマン主義と総称されるある意味では古典様式への回帰とも言える傾向まで含めて、後から考えれば当然の歴史的必然であったようにも思えるのだが、それにしても、ラディカルな試みが行き着く先で、＜音楽＞から単なる＜音＞へと還元されてしまう危険性を敢て選択しながら、歴史の一点で現代音楽の辿り着いた一つの地平－例えば、ノイズ．そこには、耳に心地良いものとしての音楽、言い方を変えれば、惰性化した既成の音楽的美しさとは一線を画した別の価値への移行があると共に、作曲家と演奏家、そして聴衆と言う三者の関係や、作曲家が他者に対して保持していた特権的な位置さえも、徹底的な見直しを迫るものではなかったか．そもそも建築という領域において同じような試みを行なうことは果たして可能なのかという根源的な問いはとりあえず留保しておくとして、もしもそれが可能なら、結果として生じるものは決して既成の建築的美しさではないだろうし、また、作曲家＝建築家、演奏家＝施工者、聴衆＝住み手と置き換えてみることが許されるなら、それら三者の関係も現状とはずいぶん様変りしたものになることだろう．

＊

修士課程の在学中よりもむしろ卒業してから原先生の書かれた多くの文章を読み、また奇しくも、世の中が「バブル景気」に向かって徐々に加速しつつ、その絶頂期を迎えての狂乱騒ぎ、そして遂にはあっけなく失速した時期と期を同じくして、設計の実務に携わっていた坂倉建築研究所での６年間．しかし、それ故にかえって様々なことを考えさせられる契機ともなったのか、しばらく世の中の喧騒から離れた所に身を置いて、もう一度自分の中で整理してみるべき事項を、じっくりと考えてみたいと思い、無理をお願いして博士課程に籍を置いてから早や４年が過ぎようとしている．何がしか、考えたことをまとめなければならないと思いつつも、元々関心のあった事項は漠然としていて拡散的であり、そして何よりも己の怠惰の故に何も形に残らないまま月日が過ぎてしまったのだが、それぞればらばらな断章の集積としてしか書き留めることができないだろうと思っていた拡散的な思考の中で、それでも、ようやく一つのキーワードに行き着くことができたように思う．

＜ランダム＞

このことばによって、それぞれ別のカテゴリーに属すると思われていた事々をかろうじてつなぎ止め、どうにかこうにか纏まりのあるものに縫い上げることができそうになったばかりでなく、それまで別々に考えていた事柄が全て密接に絡み合って、ほとんど同じことを別の側面から考えていたに過ぎないことに気づかされたのだった．

＊

この小論は、＜ランダム＞と呼ばれるものを、主として幾何学的観点から扱うための手法について、関連する諸分野の知見も含め、若干の考察を行なった、いわば数理科学的な色合いをもつ論であるが、一方、私の内では、ここに描き切れない

様々な問題意識を背景としている．それは、まさに広い意味でのデザインの問題と完全に結びついている．言い換えれば、＜自然＞／（そして　あるいは）＜自由＞を巡る思考のことである．本来は、補遺としてそれらの理論背景について述べ、本論と相補的に論じる予定であったが、それらがあまりにも大きな世界を開き、また何よりも筆者の非力の故に、残念ながら、別の機会に譲りたいと思う．なお、以下の記述に於いては、ランダム、乱れ、不規則、無規則、無秩序、混沌等の用語の使い分けを必ずしも厳密に行なっているわけではないことを、予めお断りしておく．もちろん、一般用語としての”混沌”と数理科学理論としての”カオス”とは当然区別されなければならないだろうが、関連する諸分野においても用語の使い方が必ずしも統一されているとはいえず、その意味するところもかなり幅があるのが現状ではないだろうか．むしろ、この小論を端緒にしてこれから向かおうとするのは、これらのことばに対する既成概念の変更も含めてそれらを再定義し、必要に応じてことばや概念を整備して行くことなのだとも言えるだろう．それは翻って、われわれが秩序と呼んでいるものを見直してみることにほかならない．

*

この小論をまとめるにあたり、多くの方々のお力添えを頂きました．原先生に出会えなければ、この小論をまとめることはおろか、このような思考も、問題意識も、決して持つことはできなかったでしょう．私が現在持っている問題意識は、全て、先生から直接・間接に教えて頂いたものばかりです．それでも、まだまだお聞きしたいことが沢山あります．また、藤井先生がおられなければ、決して、この小論に形が与えられることはなかったでしょう．先生には、無理ばかりお願いしました．見も知らぬ、地方の学生の出した不躾な手紙に対して、先生が懇切丁寧なお返事を下さらなければ、今ここで考えをまとめる機会もなかったのです．後込みする私に対して、先生は折に触れて、論をまとめるようにと促して下さいました．とても、先生のご期待に添える自信はなかったのですが、自分としては精一杯やったつもりです．至らぬ点は、どうか御容赦下さい．助手の及川さんにも、修士過程の在学中からお世話になっています．今回の論文をまとめるにあたっては、及川さんの学位論文がほとんど唯一の支えでした．その多くの部分を参考にさせて頂きました．曲渕助教授は、私が修士論文をまとめるときからの非常に頼りになる友人の一人だと思っています．本論をまとめる過程でも、常に熱心な議論をして下さいました．頼りになると同時に、最も手強いJuryの一人となるのを覚悟しています．助手の吉松さんも修士課程のころからの友人であり、以前は、私の方がコンピュータの使い方をガイダンスしていたのに、いつの間にか今回の論文では、プログラムの幾つかを書いてもらう立場へと逆転してしまいました．技官の林信昭さん、同じく小駒幸江さんにも、ずっと長い間にわたって、お世話になり続けています．その他、多くの学生諸氏が手伝ってくれたおかげで、無謀なスケジュールにも関わらず、どうにか間に合わせることができました．貴重なWienの入力データを、快く使わせて下さった三橋正邦君、古谷和仁君、高橋元子さん、今井公太郎君、清水祐二君、鍛佳代子さん、新階寛恭君、岸本達也君、王YUNさん、遠藤克彦君、高嶋貴子さん、忙しい中かなりの無理をお願いしたことを、この場を借りてお詫びします．本当に、どうもありがとう．また、仕事の合間を縫って駆けつけてくれた坂倉建築研究所の波多江宏君、佐藤由紀子さん、萬代恭博君、非常に助かりました．どうもありがとう．

最後になりましたが、皆さん、本当に、お世話になりました．どうもありがとうございました．

1993年12月20日

東京大学大学院工学系研究科建築学専攻
藤木隆明

凡例

『　』　書物の題名等を示す．

「　」　語句を明確または強調するために用いた記号．

《　》　引用した文、またはことば、概念等を示す．
ただし、長文の引用の場合には、段落分けと脚注により明確にした上で、敢えて《　》を用いなかった箇所もある．

＜　＞　（主として、筆者が）ある思いを込めて用いていることば、または概念等を示す．したがって、一般にはまだ流通していないことばも含まれる．

*　文字の右肩に付けたアスタリスクは、特に、本論において、新たに定義したものまたは別の意味を付与した用語を示す．また、方法としては既に存在するが、決まった呼び名のなかったものについて名前を付けたものも含まれている．
その旨は、本文中で明記する．
多くは、＜　＞* の形で用い、本論で定義または考案した概念であることを明確にする意図がある．

[　]　ランダムパターンに関する＜型＞*の名称を示す．

[番号]　脚注を示す．

記号表

$\mathbf{R}^n$	:	n次元ユークリッド空間.
x、y、zなどの小文字	:	$\mathbf{R}^n$ 内の点．場合によってはベクトルとして用いることもある．また、zは複素数を示すためにも用いる．
b、c、ε、δなどの小文字	:	主に定数として用いる．
i、j、k などの小文字	:	主に添え字として用いる．
E、F、Γ などの大文字	:	$\mathbf{R}^n$ 内の部分集合に用いる．
$\mathcal{C}$、$\mathcal{V}$、$\mathcal{G}$ などの大文字	:	集合族を表わす．
$\mathcal{A}$、$\mathcal{D}$、$\mathcal{S}$などの大文字	:	本論で定義したランダムパターンに関する指標を示す．

①

ランダムパターンの記述と生成に関する基礎的研究

藤木　隆明

0
本論の目標と構成
prologue

Noemen est numen.

0．本論の目標と構成

0．1　問題の設定

0．1．1　規則的とは呼べないもの

我々のまわりにある現象や形態は、規則的なものばかりではない．むしろ、規則的なものより不規則なものの方が多い．このように言うとき、私は、例えば、夜空に輝く星々や駅のプラットホームで電車を待つ人びとの位置関係を想起している．しかしながら、これらの”規則的とは呼べないもの”を扱うための基礎的な理論が十分には整備されていないのが現状ではないだろうか．その理由の一つは、言うまでもなく、規則的なものに比べて理論化することが容易ではないことにある．さらに言うなら、もともと初等幾何学をはじめとするこれまでの多くの理論は、規則的なものを主たる考察対象として記述し、発展してきたのであり、あるいはまた、自然界を支配している法則や規則を明らかにすることに全ての力が注がれていたと言っても過言ではない．このことは、現在においてもさして変わりはないだろう．とすれば、”規則的とは呼べないもの”は、長い間、規則からはみ出した例外であり、価値の無いとるに足らないものとして、あるいは、特異な怪物として、もしくは無秩序な混沌として顧みられることが無かったのも当然である．また、これらの中にも、隠れた規則や構造が含まれているものも少なくないだろうが、それらの規則や構造について言及するためのことばや手法が不足しているが故に、通常の意味での規則的なものとしては扱われてこなかったという面もある．もちろん、龍安寺の石庭における石の配置に代表されるように、日本庭園の作庭法はむしろ規則的でない配列を旨としており、東洋の思想においては必ずしも”規則的とは呼べないもの”を蔑（ないがしろ）にしていたわけではなさそうであるが[1]、その場合でも、理論化という意味ではやはり十分には発展してこなかったと言えるのではないだろうか．それでは、規則的なものを主たる考察対象として記述・発展してきたこれまでのアプローチは誤りであったのかというと、そうではない．そもそも、我々には、規則的なものしか記述できないのである．または、記述したとたんに規則的になると言っても良い．唯一可能なのは、”規則的ではない”という様なざっくりした規定の仕方でしかなく、”規則的とは呼べないもの”は、規則的なものの否定形として、あるいは、せいぜいそこからの距離（乱れ）としてしか記述できない定めにある．もし、これまでの方法に多少問題があったとすれば、それは記述

[1] 実際には、もっと重要な位置を占めていると思われるが現時点では、この点について論じるには力不足である為に控えめな表現に留めている．

の仕方ではなく、自覚的にせよ無自覚にせよ、暗黙理のうちに規則的なものを規則的でないものより優位に置いて、その分析対象を限っていた態度にあると言えるのかもしれない．しかし、必要以上にこのことを非難するつもりもない．いずれにせよ、記述できるものから記述してきたに過ぎず、我々にできるのは、規則的なものの補集合として残されているこの”規則的とは呼べないもの”の領域を、どんどん狭めていくことだけなのだから．つまり、この論の向かおうとする先は、本来的に言及不可能なものを記述するために、記述できずに残っている領域を少しずつ狭めていくことだと言えるだろう．しかし、それは依然として困難を極めている．一体、何が可能なのか．

確率論は、これらの問題にアプローチするための極めて重要で強力な道具であるが、確率論だけでは限界がある事も否めない．確率論だけでは、形態的側面に十分言及することができないのである．fig-1には、原研究室で長年に亘って調査してきた海外の伝統的集落における住居の集合状態（配置パターン）をスケールを統一せずに、少し模式的に表示して並べてある．このような集落の配置パターンは、必ずしも線状、格子状、同心円状といった明確な幾何学的形状を示すとは限らないため、従来の幾何学的用語を使っては表記できない．そもそも、我々が、ある対象を見て円形であるとか矩形だとか言えるのは、その対象に先立って、丸、三角、四角というような概念が用意されているからである。我々は、それらの既に用意されている概念集合と対象とを比較・対照しているに過ぎず、形態に関する概念集合がより多く用意されていればいるほど、より細やかに記述することが可能になる．端的に言って、集落の配置パターンをうまく記述できないのは、ことばが不足しているからである．それでは、どのようなことばを準備すればよいのだろうか．

0.1.2　星座・図形・幾何学・パターン

例えば、古来の人々は星の並び（布置(コンフィギュレーション)）を理解するために、星座というものを考案した．星座によって、それまでばらばらに見えていた星々が、秩序づけられ、コミュニケートできる存在になったのだった．思えば、星座というものは極めて奇妙な存在である．それらは、それぞれの星のまとまりに対して付けられた固有名詞であるとともに、いわゆる図形としての性質も持っているのである．何が奇妙かと言うと、図形という概念には、そもそも普通名詞としての役割が付与されていたはずのものだからだ．たった一つしか存在し

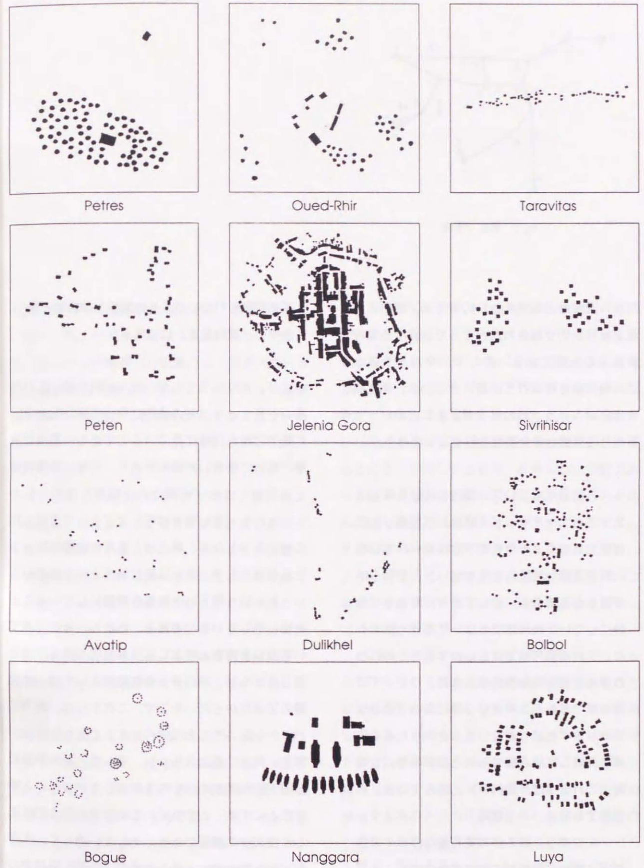


fig-1　集落の配置パターン

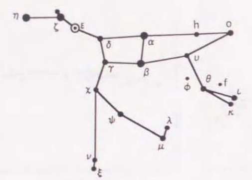


fig-2　おおぐま座

得ない図形などありえないのである．図形とは、現実世界と切り離されたところで成立する純粋記号体系の一部である．そして、それらを扱う学は、幾何学と呼ばれている．とはいえ、例えば、大森荘蔵のいう《重ね書き解釈》によれば、このあたりの事情も多少整理されることだろう．

・・・記号体系としての幾何学は記号系ではあってもユークリッド『原論』が意図した幾何学でもなく、それを中学で教えられてわれわれが理解した幾何学でもないことが明らかであるからである．そして恐らくカントが念頭にしていた幾何学でもないだろう．要するに、それは幾何学ではないのである．われわれが知る初等的な幾何学とは何よりもまず図形の学である．ユークリッドによる「巾のない線」や「拡がりのない点」といった基本図形を元にして組み立てられた図形の学（大森は、これを《図形幾何学》と呼んでいる．）なのである．　　　　中略

・・・つまり、誰もが知覚可能な図形や形態の上に重ねて幾何学の図形を思い描く、それがわれわれが幾何学を了解する仕方なのである．この了解様式の中に幾何学と経験との関係が内蔵されている．その関係とは経験と幾何学の「重ね書き」に他ならない．[2]

つまり、こういうことだ．我々が机や椅子という事物を見るとき、その輪郭に沿って重ね合わされた幾何図形を同時に見ているのである．星座は対象に極めて密着した図形であり、初等的な幾何学とは別のところで定義された図形なのだ．しかし、なにも《重ね書き解釈》などという言葉を持ち出すまでもなく、例えば、集落の配置パターンと私が言うとき、それは既に集落という対象からいったん切り離された図像を問題にしていることを指し示しているのである．ただし、そこで見ている図像を図形と呼ぶには少し抵抗がある．繰り返しになるが、いわゆる幾何図形としては、未定義の図像だからだ．そこで、これからは、改めてパターンということばで代用することにしたい．即ち、対象に重ね合わされ、そして、対象から切り離された図形的なものを総称してパターンと呼ぶことにする．とすれば、この小論が扱うのは正しく幾何学の課題である．そして、恐らく、大森が《図形幾何学》と呼ぶ通常の（初等）幾何学の方法論とは、別の体系が要請されるに違いない．

［2］大森荘蔵：幾何学と運動（現代思想１１、1992）

0.1.3　フネス的認識と固有名詞・普通名詞

さて、ここにフネスという人物がいる．そう、かのボルヘスが着想した記憶の人・フネスだ．彼は、驚異的な記憶力を持っており、あらゆる細部、あらゆる微妙な差異を識別することができる．[3] [4]

フネスはぶどうの木のすべての若枝、房、粒を見る．彼は１８８２年４月３０日明け方の南の雲の形をおぼえており、それらを、追憶のなかにある、たった一度みたことのある皮表紙の本の大理石模様のデザインと比べることができた．また、それを、ケブラーチョの戦いの前夜に、舟のオールがネグロ川にえがいたしぶきの縞模様とも比べることができた．

フネスは3時１４分の（横から見た）犬と３時１５分の（前から見た）犬を別の個物として識別する．それゆえ、フネスの世界は無限の差異から成る世界である．個々のものが個々のものとして圧倒的にただある世界．とはいえ、もし我々にもフネスと同じ能力があったなら、規則的なものとそうでないものを区別する必要もなければ、新たなことばや道具立てを準備する必要もなかっただろう．せいぜい、それぞれの個物を指し示すインデックスがありさえすれば、それで十分である．しかし、幸か不幸か、われわれにはそのような能力がないために、ただ漠然とした取り扱いしかできずにいるのである．一方、ボルヘスの言うように《考えるということは、相違を忘れること》であるなら、フネスの世界は、思考しない世界である．個々のものとものものあいだに、なんらの交換も交通も成立しえない世界．フネスにとっては、さきほどの、微小な時間のずれをはさんだ犬を、ともに同じ「犬」と呼ぶことが理解できない．つまり、普通名詞もまた存在しえないことを意味しているのである．

ところで、我々はと言えば、" 規則的でないもの" に対してフネスのように細かく識別することもできなければ、微小な差異を捨象して同じ名前で括ることさえできずにいる．だとすれば、要請されている事項は、もはや明らかだ．それぞれの個物（あくまでも、パターンとしての）の差異を検出する機構とともに、類似性に基づいて複数の

［3］芳川泰久：双生論　もう一人のクラテュロスのために
（季刊　哲学１、哲学書房、1988）

［4］J. L. ボルヘス（篠田一士訳）：記憶の人・フネス
（筑摩世界文学大系81　ボルヘス　ナボコフ、1984）

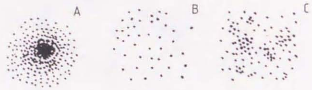


fig-3　集落の＜型＞
（出典：原広司＋東野芳明：現代建築の誘導概念）

パターンをまとめて指し示すことのできる普通名詞が必要なのである．この意味で、星座はこの要請を十分満たしているとは言い難い．星座はあくまでも固有名詞に過ぎないからだ．とはいえ、現時点では、星座はやはり貴重な存在であることに変わりはない．つまり、必要なのはまず名づけることなのだ．更に言えば、異なると見えたものどうしの同置性を変換の操作によって確認するのが、レヴィ＝ストロース的《構造》の視点だとするなら、何らかの意味で、”規則的でないもの”に関する＜構造＞という概念をも規定していく必要があるのだろう．

0.1.4　ランダムパターンの＜相＞*と＜型＞*

”規則的とは呼べないもの”は、一般に、不規則的とか乱れたものとか無秩序なというふうに呼ばれているが、これらの意味を総称してランダムと呼ぶことも多い．ランダムということばは、「手あたり次第の」、「行き当たりばったりの」、「でたらめの」、「無作為の」という意味の操作や行動を形容する言葉であるが、「不規則な」、「無秩序な」という意味を含めてある程度幅をもって使われているようである．ただし、確率論や統計学でランダムというときには、事象の出現確率の一様性と事象の出現の独立性というふたつの条件を満たすもののみを指す．ランダムについては、１章に於て改めて考察するが、以降では、区別の為にこのような完全なランダムを狭義のランダムと呼ぶことにし、ただランダムという場合には部分的なランダムや不完全なランダムを含め、不規則なもの、乱れたもの、すなわち”規則的とは呼べないもの”一般を指すことばとして使うことにする．

fig-２は、集落における様々な配置パターンを大きく三つに分けて模式的に書かれたものである．Ａは［中心をもつ型］で比較的分かり易い．これに対してＢは明確な中心と呼べるものが見い出せないもので、［離散型］と呼ばれている．Ｃは、言わばこれらの中間に属するものであるが、まだ明確な規定はされていない．おそらく、Ａ、Ｂ、Ｃの間にはもっと多くの類型が必要となる筈である．つまり、fig-１のように様々に分布する配置パターンそれ自体をランダムなパターンの＜相＞* [5] と呼ぶなら、それら様々な＜相＞*のパターン対して、＜型＞*の記述をすることは、ランダムなパターンに言及するための重要な問題の一つであるといえるだろう．

前節の議論に即して補足するなら、ここでいうランダムパターンの＜相＞*とは、フネス的な視線の強度をもって観察し、記述したランダムなパターンの相貌（相態* [6]）のことであり、＜型＞*とは、固有名詞としての性格を持つ＜相＞*に対して、ランダムパターンを巡る普通名詞のことである．あるいはまた、《図形幾何学》における丸や三角、四角といった図形概念に相当するものであるとも言えるだろう．従って、これらは、対象とはいったん切り離されたところで成立するものでなければならない．つまり、ある対象に固有の論理によって形成されるべきものではなく、あくまでも個別の分析対象（例えば、集落）には依存しない道具立てでなければならないのである．

---

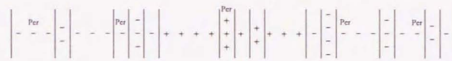
［5］この場合の相とは、日本語で普通に使う時の「すがた、かたち、ありさま」という意味で用いている．つまり、＜相＞とは、本文中にもあるとおりランダムパターンの相貌あるいは様態を指している．しかし、これは幾分同語反復的である．なぜなら、パターンということばの中に「すがた、かたち」という意味が既に含まれてしまっているからだ．したがって、ランダムパターンの＜相＞とは、ランダムパターンそれ自体にほかならない．にもかかわらず、敢えて、＜相＞と呼ぶのは、＜型＞という概念との対比を鮮明にする意図からである．
一方、相ということばは学術用語として他の分野でも用いられている．物理学では、物質系の一部がその内部で物理的・化学的に全く同一の性質を示すとき、その部分を同じ相にあるという．《系の空間的にたがいに境を接している、異なった部分の各々が、物理的に均質であると仮定し、これをわれわれはギッブスにしたがって系の相と名づける．》（プランク『熱力学』、哲学辞典：平凡社、1954）．英語では　phaseである．また、phaseの訳としては、位相ということばも重要である．　《一般には、連続的に存在、発展する一定の形態をとる事物の一面、階程、すなわち、同一対象、事物が継起的にあるいは異なった視点に対して示す現象様相、あるいは特性をさす．しばしば、aspect と同義に用いられるが、厳密にいえば後者が、表示の同時的様相をいうのに対し、前者は継起的様相をさす点で異なる．》　（哲学辞典：平凡社、1971）．よって、私の用いている＜相＞を英語で言うなら、＜aspect＞が一番近いだろう．
物理・化学では、前述の相とほぼ同じ意味で用いられるが、数学において位相という時には、集合論のなかで構成されたひとつの構造概念を指す．また、位相幾何学においては、より制限された形で「図形における点のつながり方」を表現する概念である．

［6］＜相＞*ということばを更に補足すれば、主体（観察者）が客体である顔を観察して受け取ったすがた・かたち、即ち、外見、見かけ、見えがかり、つまり、人相・顔つきに対して相貌ということばを用いるのと全く同じように、パターンという対象についての外見や見えがかりを表すことばとして、いささか耳慣れないことばではあるが、形相でも形態でも状態でも様態でも様相でも位相でもなく、相態*　ということばを充てたい．
この関係を整理すると、
顔　　　　に対する相貌　→　顔の相（人相）を表す．
パターンに対する相態　→　パターンの＜相＞*を表す．*
従って、＜相＞*＝　相態*（パターンに関して）である．

0.2　目標と立場

Stockhausen : *Prozession*

(Reginald Smith Brindle:*THE NEW MUSIC*,Oxford University Press,1975/87)



0.2.1　目標と問題意識の背景

規則的でない、ランダムなパターンに言及するためのことばや手法といった道具立てを整備し、それによって、言及不可能であった領域を徐々に狭めていくこと．一言でいうなら、<不規則系の幾何学>とでもいうのだろうか．それによって、一口にランダム、不規則、乱れ、無秩序としか呼ばれていないものに関する性質を明らかにすること．それはまた、翻って、秩序や規則といったものについてよく考えてみることに他ならない．ただし、これらは、すべて遠い目標であり、この小論では、少なくともそのための概略的な枠組みづくりを目指したいと考えている．

しかし、そもそもこのような研究を行なうには全くもって力不足であり、理学部の方々にお任せしておくのが本来の筋であろう．にも関わらず、何故、建築学科においてこのような研究を行なうのかといえば、この論の性格からして建築という固有の分野からは少し離れた基礎理論とならざるを得ないとしても、その問題意識は深く建築の問題と結びついているのである．その理由の一つには、配列に関する理論が、現在においてもなお極めて貧弱であるからだ．計画とは、ものごとを企て、将来に向けて決定し、あるいは誘導する行為であり、建築計画学は、建築や都市に関する様々な構想に際して、有効な判断材料を提供し、指針を提示することを目的とした学問の一分野である．例えば、作曲とは音の配列を決定する問題であると極論することが許されるなら、建築の計画や設計は、空間要素の配列を決定し誘導する行為であると言うこともできるだろう．もちろん、この場合の音とは、音色、音階、リズム、テンポ、強弱といった様々の属性を伴ったものであるのと同じく、空間要素とは、形、意味、材料、テクスチャー、光の分布といった、空間を形作り空間に付帯する様々な要素という意味である．ところで、基本的に、空間の配列を決定する際の価値基準は多様であって良い．いやむしろ、一意には決定できないといった方が正確だろうか．更にいえば、どのような価値を選択し、あるいは設定し提示するかが、設計という行為の本質に関わっているのである．つまり、設計とは現実における問題解決の性格を持つと同時に、それはひとつの表明でもあるのだ．一方、たとえ主観的にであれ客観的にであれ、いくつかの価値基準を選択したとしても、それで配列が一通りに決定できるとは限らない．実際には、配列の問題と形態の問題が絡み合ってくるために、もっと事情は複雑になるのだが、いずれにせよ、配列を決定するための論理が別に必要となるのである．この時、配列に関する理論の欠如が露となる．その為に、ある者は、惰性的に、ある者は、無自覚なままに、またある者は、生物とのアナロジーによって配列を決定してきた．もちろん、それもひとつの表明であり、どのような表明も許されるべきである．極端に言えば、配列も形態も恣意的であって良いとさえ考えている．そもそも、それは、たぶんに<形態生成>としての性格を合わせ持っており、全てを客観的に決定しきれる類の問題ではないのだから．

・・・その<別な>必然性とは、恣意性のことである．これは、機能的な必然性と相反するものといえよう．しかし、そのような無作為・混沌・無秩序は、合理的・機能的デザインが必然であるのと同じくらい必然なのだ．（必然的な）恣意性は、表現主義的デザインのことではない．古典主義的秩序の外部に存在するものだ．[7]

しかし、だからといって、何も手法を持たず、手探りの状態のままであって良いということにはならない．最も問題なのは、このことに無自覚であることだ．戦略をたて、配列を誘導し、選択を有効に行なうには、研究が必要なのである．

とはいえ、建築にあって、配列の研究が全く行なわれて来なかったという訳ではない．一般に、建築や都市における美学的な傾向を大別するとするなら、次のふたつに分けることが可能であろう．ひとつは、例えば、パルテノンに代表される様な完成度の高い調和的で統一的な美学と、それとは違って、例えば、日本庭園における石の配置や多くの集落にみられるようなゆるやかで少しくだけた美学とがある．規則的な美学と規則的でない美学ということもできよう．あるいはまた、《ある部分をほかの要素から構成されている部分で置き換えると、その建物の全体が崩れてしまうような厳格な枠組をもった美学と、多少の置き換えでは全体はたいして影響をうけないようなルースでやわらかな枠組をもった美学とがある》[8]というべきかも知れない．しかし、長い間、建築の美学として受け入れられてきたのは前者の美学であり、建築意匠という分野において精力的に研究されてきたのも、主に、前者の美学を代表する古典主義建築の形態を形作っている配列則を明らかにすることにあったのではないだろうか．端的にいえば、これが第二の理由である．つまり、後者

のゆるやかな配列に関してはその困難さの故にほとんど手付かずのまま残されているのである．また、更にいえば、前者と後者は相入れない対立関係にあるのではなく、こと配列の理論に関する限り、前者の厳格な配列についての理論は、後者のルースな配列を扱う理論のなかに包含しうると考えている．これは、恐らく将来の課題であろう．

第三に、これが最も大きな理由だと思われるが、現在、他の様々な分野において自然のシステムにおける複雑性や高度な機構に関心が向けられている．建築もこの動きと決して無縁ではない．例えば、今までは、自然と人工とは相入れない対立するものとして、あるいは対比される存在として捉えられてきた．その理由は、建築や都市に即して言えば、端的に言って自然のなかに見られる幾何学と我々の用いている幾何学とのあいだにあまりにも甚だしい乖離があった為だと言うこともできよう．＜不規則系の幾何学＞を目指す立場からすれば、まだ我々の用いている幾何学や手法は初等的(プリミティヴ)なのだ．一方で、自然との関係を良好に保っている集落という存在がルースな幾何学の重要性を物語っているのである．このように、この古くて新しい自然のシステムを研究することが、建築を含めた、あらゆる分野における現代の重要な課題のひとつなのである．

自然の把握に向かって、規則的な配列あるいは構造をその出発点として進んできた近代の科学は、いま、規則系に対する基本的な理解を一応確立したところで、規則的でない状態に手をのばし始めて、全く予期もしなかった新しい現象を続々と発見することになった．・・・理論の面においても、このような状態に対応して、不規則系の理論の新たな構築が要請されている．[9]

[7] ピーター・アイゼンマン（丸山洋志訳）：必然的な恣意
（a+u　9109号、1991）

[8] 原広司：建築・集落からの教え
（NHK人間大学テキスト、日本放送出版協会、1993）

[9] 日本物理学会編：ランダム系の物理学（培風館、1981）

0.2.2　観点及び立場

さて、前述のような目標に向かって理論化を進めて行くに当たっては、どのような観点や立場に基づいて進めて行くかが重要な問題となる．それによってアプローチの仕方が異なったものになるからだ．したがって、本論の依って立つ立場をここで明らかにしておく必要があるだろう．

１章に於いてまた詳しく触れるが、主として平面上における点的事象の分布パターンについては今までに多くの研究がなされてきた．にもかかわらず、既往の研究例に於いてはそのアプローチの仕方はほとんどひとつに限られていたといって良い．それは、確率論的、統計学的アプローチであった．様々に分布する空間的パターンをその確率分布との関連によって捉えようとする立場である．そして、そこで得られた成果について要約するなら、それは次のようになるだろう．

点的事象の空間的分布は、（狭義の）ランダム型、凝集型、均等型に大別され、均等型を除いた他のふたつの分布型には、当てはめるべき理論的な確率分布があり、（狭義の）ランダム型にはポアソン分布、凝集型には負の二項分布がそれぞれ対応する．また、（狭義の）ランダム型を中心として一方の極に凝集型、そしてもう一方の極に均等型を置き、どの分布型に近いかによって問題としている分布を分類するための指標が構成できる．これは、相互に独立でその出現確率がどの場所においても等しく与えられた場合に生じるパターン（狭義のランダム型）を基準として、そこからの隔たりによって分布パターンを分類・記述しようという考え方である．

このように、様々な分野（生態学、計量地理学、生物学、医学、行動分析等）において同様な研究が行なわれてきたにもかかわらず、これら三つの型の呼び名や指標の名称が多少異なっているだけで、その立場においても、得られた結果においても、ほとんど共通していると言うことができるだろう．その理由は、主にふたつ考えられる．第一には、おそらく、このような規則的でないものを分析するための道具としては、確率論及び統計学しか手元に無かったのだと思われる．そして、その状況は現在においてもそれほど変わってはいないと考える．したがって、この小論においても、確率論や統計学の役割をいささかも減じるものではない．第二に、これは第一の点と関連するのであるが、今まで生態学や地理学をはじめとする様々な分野において行なわれてきた研究の最大の

目的は、分布パターンの分類・記述そのものにあったのではなく、それが結果するに至ったパターン形成のメカニズム、すなわち、そのパターンが結果する原因や因果関係を探ること[10]、言い換えれば、その背後にあると仮定される法則性を明らかにすることにあったからである．このような立場からすれば、それが全く無関係に生起しうるものかそうでないかが重要となってくるのであろう．

結論から言うと、このような他の分野において行なわれてきた研究と比較して、本論の目指す目的や立場は大きく異なっている．以下にそれを列挙する．

i ）背後にあると思われる原因や因果関係を探るのではなく状態の記述そのものに目的がある．それは、《図形幾何学》とは違った意味での幾何学に接近する．（<不規則系の幾何学>）

ii ）分析対象に固有の論理を分析することではなく、もっと基礎的な理論の整備や道具立ての提案を目指す．したがって、具体的な分析対象には依存しない論理でなければならない．（この意味からも、それは幾何学の一部に包含されるべきである．）

iii ）不規則系を扱うためには確率論や統計学は非常に強力で重要な道具であり、これからも積極的に活用していく必要があるが、一方、全てを確率で記述して済せてしまうことには少々満足できない点もある．繰り返しになるが、実際に現象しているものの関係性を探ることではなく、あくまでも形の論理としての関係性を探ることに重点があるからだ．[11] よって、確率という道具を持ちつつ、他の観点からのアプローチの可能性を探る必要がある．ちなみに、実際の現象を扱う立場からも、全てを確率で記述するやり方には注意が喚起されているようだ．これは、おそらく世界観とも関係する極めて重大な問題のひとつであろう．

《・・・しかし、ランダムに見える現象が確率論的な現象か、決定論的過程であるがランダムに見えているだけなのかを検証することは、一般に、困難である．むしろ、ランダムであると言ったところでそれ以上の追及を放棄しているのではないか．》

ー　ルネ・トム　（筆者要約）

（『デバ』誌上におけるプリゴジン[12]らとの論争にて[13]）

iv）ii）と関連するが、具体的な分析対象には依存しない理論とは言っても、それによって何かを分析するにあたっては、観測のスケールと精度の問題が入り込むことになる．前者に対しては、基本的には、スケールに依存しない尺度を探ることによって回避するが、反面、精度の問題は、いかなる理論においても不可避の問題として捉える．つまり、具体的な分析対象に関する考察はすべてその観測精度とセット（一揃い）にされてはじめて意味を持つと考える．

v ）規則的なものとそうでないものとのあいだには、本質的な優劣の差はない、という立場に立つ．

[10] 及川清昭：1986年度東京大学学位論文

[11] 幾何学の中にも、いわゆる幾何確率を扱う積分幾何学という分野がある．1章において触れる．

[12] ただし、プリゴジンが、すべてを確率で記述しようとしているという訳ではない．彼は決定論的過程と偶然性を統合して「複雑性の科学」に高めようとしている．

[13] 宇敷重広：フラクタルの世界／入門　複素力学系（日本評論社、1987）

0.3　対象領域

基本的に、このような論の対象とすべき範囲には制限は無いと思われるが、様々な理由から、本論で扱いうるものは自と限られてくる．以下に、本論の対象とする領域について列挙する．

i）2次元平面（2次元ユークリッド空間：$\mathbf{R}^2$）上のパターンに限る．

ii）順序として、主に点的なパターンに考察の重点を置いてはいるが、必ずしも、点的なパターンのみに限っている訳ではない．むしろ、線的、面的なパターンも含めた、パターン全般を取り扱う．（そもそも、ランダムパターンに関してはこのような分類はあまり意味を持たない．）2章に於て述べる様に、対象とするパターンに微小解像度δのメッシュをかけて2値のディジタル画像に変換し、そのディジタル画像の性質を考察の対象にすれば、大きさを持たない点の分布パターンかそうでないかを区別せずに取り扱うことができる．ただし、多値の画像は扱わない．従って、対象とするのは、言うなれば、中間調の無い白黒のパターンのみである．

iii）本論では、時間的なランダムは取り扱わないものとする．つまり、「変化」の問題は扱わない．このことは、ランダムな対象に関して現在ある有力な理論のほとんどが活用できないことを意味する．ランダムな変動を解析する理論や散逸系の理論、カオス理論に至るまで、フラクタル理論を除けばそのほとんどが時間変化を対象として形成されている．これらのことが意味するのは、おそらく、＜ランダム＞の問題は静的（スタティック）な方法によっては解くことの困難な問題だということである．そのため、静的（スタティック）なパターンのみを対象とする本論に於いても、次の2つの意味で、動的（ダイナミック）な性格を導入することを心掛けた．第一には、方法それ自体の中に動的（ダイナミック）な性格を持ち込むことであり、第二には、「分析」の論理を補完するための「生成」の論理を準備することである．これまで科学に於ける主要な方法論は、ほとんど全て「分析」の論理であった．本論に於いてもまた、「分析」の論理が大きな比重を占めていることも事実である．しかし「分析」の論理だけでは限界がある．シミュレーションやAI的思考を萌芽とするような「生成」の論理が探索されなければならない．

0.4　本論の構成

本論は、六つの章から構成されている．

第1章では、ランダムに関する基礎的な事項の整理を行なう．まず、＜ランダム＞の意味するものを、秩序や規則性との関連から考えてみる．次にこれまで、ランダムな対象に対する主要な道具立てでありほとんど唯一の理論であった統計・確率的な事項について、主なものを復習する．また、ランダムネスの分類と、ランダムネスを表す量として現在用意されている、エントロピー及びコンプレキシティを見る．その後、関連する諸分野の知見へと目を移し、形態学関連、幾何学関連、物理科学関連の順で概観していき、本論の扱う問題に最も近いものとして、我々の研究室での成果も含め、主として点の分布パターンの分類・記述に関した既存の研究例についてのまとめを行なう．最後に、ランダムなパターンに関する＜構造＞*として現在どのようなことが考えられているかを、フラクタル理論の成果を基にしながら論じ、3章に於けるランダムパターンの＜構造＞*設定問題へと繋げていく為の準備を整える．

第2章では、個々のパターンについての記述として（これをランダムパターンの＜相＞*と呼んでいる）、どのようなことが考えられるかを論じるとともに、幾つかの指標を構成してみる．その主なものとして、自己相関度*及び乱れ度*の提案とフラクタル理論から拡張した幾つかの手法がある．特に、自己相関度*及びそれによって得られる乱れ度*は、並進対称性からの乱れのみを検出するという意味で極めて限定されてはいるが、これまで統計・確率的にしか捉えられてこなかったランダムさの一面を、形態的・幾何学的観点から計量できるものとして、なにがしかの役割は果たし得ると考えている．また、フラクタル理論から拡張した手法のうち、特に階層的格子変化法*と呼ぶ方法は、第3章に於けるランダムパターンに関した＜型＞*及び＜構造＞*の設定へと展開させていく上で、基礎となるものである．その他、これまでもランダムなパターンを位置づける上で着目されていた凝集性と集群性に関して、その整理と指標化について改めて考えてみる．

第3章では、第2章に於いて得られた様々な指標を基に、幾つかのパターンに共通するような＜型＞*あるいは、その＜構造＞*の設定を試みる．もちろん、これらの設定は一通りしかないという類の問題ではない．どのような観点に基づいて類

型化を行なうかによって、異なるものになり得る．ここでは、最も正しい＜型＞*あるいは＜構造＞*とは何か、という様な問い方は行なっていない．どのようなものが考えられるかに重点を置いている．その中でも、階層的格子変化法*から導かれた＜acceleration＞*という概念から得られる＜構造＞*には重要なものが含まれていると考えている．そこでは、いわゆるフラクタルを＜acceleration＞*が0のパターンと位置づけ、それを基準としてフラクタル以外の＜構造＞*をも指摘できる可能性を示してある．同時に、この＜acceleration＞*を基にした分類法についても述べることにする．

第4章は、ケーススタディに充てられる．その主な分析対象は、我々の研究室で長年に亘って調べてきた、海外の伝統的集落の配置パターンである．ただし、本論の目指すものは、固有の分析対象に内在する論理や特定のスケールに依存するような論理ではないので、集落のパターンに手法を適用するからといって集落論を展開するつもりはない．にも関わらず、集落の配置パターンはまず第一に考察すべき対象であると思われた．果たしてそこにどのような類似と差異が指摘しうるのかは、以前からの、そして現在もなお続けられている問い掛けであるからだ．分析の仕方は、二通り行なった．一つ目は、各住居の重心の位置に関する分布パターンとして、二つ目は、特徴のある集落を幾つか選び、パターンそのものの形を対象として分析を行なった．また、第2章に於いて構成された各指標を組み合わせ、集落の総体がどのような傾向を示すのかをプロット図として表した．その他比較の為に、都市的なパターンや道路網の作り出す線的なパターンを含め、幾つかのパターンについて分析を試みた．

第5章は、この章も含めて次の第6章でまとめを行ないたい為に、通常の章と同じように書かれてはいるが、本来であれば補章として位置づけるべきものである．なぜなら、そこで語ろうとしているのはかなり挑戦的な内容ではあるものの、むしろそれ故に、現時点に於いて十分な成果が得られているとは言い難いからである．しかしながら、「分析」の論理ではカバーしきれないものを補う為の、「生成」の論理からのランダムパターンに関するアプローチの一つを示唆しているという意味で、たとえそれらが単なる着想に留まるとしても、ぜひ書き留めておきたかったものである．そこでは、ランダムなパターンを分析しその特徴を抽出することではなく、まさにそのパターンの等価物として、簡単な数式や、それを産み出す単純なルールに置き換えることを目標としている．非常に簡単な図形を除いては、パターンを分析すると必ずその他の情報が抜け落ちる．逆に、分析によって得られたものをいくら積み重ねてみても、元のパターンには決して到達することはできない．このことを敷衍すれば、結局パターンはパターンをもってしか記述できないことになる．これに対して、例えばデカルトは、図形を方程式で表すことに成功した．とは言え、それらも比較的簡単な図形かあるいは規則的な図形に限られている．それと同様なことを、よりランダムなパターンについて試みようという訳である．しかしそのためには、別の方法論を必要とする．そこで私は、複素力学系と呼ばれる数学の一分野に着目した．この無謀な試みはいまだ茫漠としているものの、その過程で、アメリカの数学者達の手により、IFSシステムと呼ばれる会話型のシステムが開発されていることを知った．IFSは、会話型の操作によってターゲットとする図形を簡単な数式に置き換える為のシステムである．その射程がどの程度のものであるかについてはまだ明らかではないが、少なくともフラクタルな図形なら、乱数と複素力学系ないし実空間の力学系に於ける様な反復写像を用いて生成できる．このシステムは、主に画像処理の観点から情報の圧縮性能という点で関心が持たれており、本論の主題とは多少ずれているものの、私の着想もあながち的外れではないと思わせてくれた点で心強い．ここでの説明も他の章より長くなっていることが示している通り、実は、この章の研究に費やした時間が一番多い．しかしこの問題は、非常に深い問題をはらんでおり、何らかの成果が得られる為には、本家である複素力学系そのものの更なる発展を待つ必要があるのかも知れない．

第6章は、まとめを行なう．本論は、ここでの大筋を見ても明らかな様に、何か一つのストーリーに基づいて直線的に論述されたものではない．むしろ、様々な角度やいろいろなレベルからのアプローチの可能性を探ることにこそ主眼がある．残念ながら、本論もまた、既存の論理の枠組みから一歩も外へ踏み出してはいないが、願わくば、実証主義的な研究に留まらず、あるいは現状の分析や解釈に終わらず、積極的な提案型の研究へと接近することを望むものである．

1 ランダムに関する基礎事項

Chapter 1

1．ランダムに関する基礎事項

1.1 ランダムとは．．．

1.1.1 ランダムの意味するもの

1）ランダムと秩序

「ランダム」ということばは、実は、かなり幅をもって使われていると思われる．一見したところでは、すぐに規則性を見い出せないものや、でたらめに見えるものに対して、大雑把に「ランダム」ということばで表すこともあるし、確率論や統計学に通じている人が「ランダム」と聞けば、統計用語として極めて限定された意味を思い浮かべるだろう．

> ランダムという言葉は、「手当たり次第の」、「行き当たりばったりの」、「でたらめの」、あるいは多少堅苦しく言って「無作為の」という意味の、操作あるいは行動を形容する言葉である．日本語での言い回しよりも簡潔で便利な表現としてよく使われている．日本語で「でたらめの」とか「手当たり次第の」といえば、「無秩序な」あるいは「不規則な」というのと同様な意味をもっている．[1]

これは、おそらく英語の意味に即した説明であると思われるが、例えば、建築などでは操作や行動だけでなく、あるものの状態を表すことばとしても用いることがある．本論では、序章に於ても述べた様に、規則的とはいえない、未だうまく言語化されていないものを総称して、広い意味でランダムと呼ぶことにするが、ここでは、この＜ランダム＞[2]ということばがはらむものを、少し概観してみたいと思う．

次ページの表-1には、手元の英和辞典で調べた＜ランダム＞に関する類義語を、三つのグループに分けて示してある．A）は、random、B）は、irreguler、C）は、disorder（confusion）の類義語である．それぞれ、微妙にニュアンスの異なることばが、以外と数多く用意されている．私の言う＜ランダム＞には、これらのほとんどの意味を含んでいると言って良いだろう．端的に言えば、random、irregular、disorder、confusion、chaos、jumbleである．更に補足すれば、ここには登場していないが、complexも加えるべきであろう．どちらかと言うと、行為や操作よりも状態を表すことばとしての意味合いに重きがある．日本語訳の中からすこし拾ってみると、「でたらめな」、「無作為の」、「散漫な」、「不規則な」、「変則の」、「異常な」、「例外的な」、「不自然な」、「混乱」、「乱雑」、「錯雑」、「乱れ」、「無秩序」、「散乱」、「混沌」、「雑

A）RANDOMの類義語

random	：明確な目的・方針・方法などに欠ける. 「でたらめな」、「行き当たりばったりの」、「手当たり次第の」 ［統計用語として］「無作為の」、「任意の」
haphazard	：適切さ、効果、悪影響などに充分な関心を払わず、 「気分、なりゆきまかせの」 「偶然［の出来事］」
desultory	：組織的でない、一貫性のないものを指す 「漫然とした」、「散漫な」、「気まぐれな」 「とっぴな」、「的はずれの」

B）不規則なものや例外的なものを指す類義語

irregular	：定まった方式、規則、法則に従っていない 「不規則な」、「変則的な」 ［形・配置などが］「不揃いの」、「不同の」
abnormal	：正常または普通の状態からそれているため奇異な、 「異常な」、「変則の」、「異例の」
exceptional	：例外的でまれな、または普通よりすぐれた 「例外の」、「異例の」、「異常な」、「格別の」
anomalous	：その物の種類・環境などにより予想される状態からはずれた 「変則的な」、「異常な」、「異例の」、「例外的な」
unnatural	：自然の理に合わない、道徳的非難を暗示することの多い語. 「不自然な」

C）乱れたものや無秩序に関する類義語

confusion	：雑然と混在して個々の区別がつかない状態. 「混乱」、「乱雑」、「混合」、「錯雑」、「錯乱」
disorder	：正常の位置・配列などが乱れた状態 「無秩序」、「不整頓」、「混乱」、「秩序の乱れた状態」
mess	：不快・不潔な混乱、乱雑 「ごたごた」、「乱雑」、「不潔」、「混乱」、「散乱」
chaos	：まだ何の組織も生じていない初期の混乱状態を意味することが多い. 「混沌」、「無秩序」
muddle	：不手際による混乱. 「ぼんやりとした状態」、「混乱」、「雑然」、「混乱した考え」、「支離滅裂」
snarl	：もつれて整理の困難な混乱 「もつれ」、「混乱」
jumble	：不調和な物の混在 「ごちゃまぜ」、「寄せ集め」、「混乱［状態］」

表-1　<ランダム>を巡る類義語
（旺文社：英和中辞典、1975より抜粋）

然」、「もつれ」、「ごちゃまぜ」、「寄せ集め」等々となる．これにも同様に、「複雑」を加えたい．

表-1を見てすぐに気づくのは、A）のrandomのグループには、偶然性との関連があるらしいということと、exceptionalを除くほとんどのことばにネガティヴな意味合いが込められているということであろう．[3] 更に、例えば、B）及びC）の語群は、chaosを除いて、何らかの意味で、基準となるものや正常と仮定されるものに対する相対的な概念として規定されているということであろう．

> 乱れとは、単なる混沌ではない．欠陥をもった不完全な秩序のことである．乱れた状態について考えるには、まず秩序の理想像が頭の中に描けていなければならない．この秩序がこわれたものが乱れであるといえる．このように、最初に秩序を定義し、それからのずれとして乱れた系を性格づける方が、最初に完全に乱れた系を定義しておいてそこへ秩序を少しずつとり入れていくという進め方よりずっと考え易い．乱れの概念は、単純で直感的なものである．乱れは、「ランダム」、「確率的」、「予測不能」といった類の統計用語の仲間で既知の概念や当然と考えられている概念との関連においてのみ定義されうるものである．[4]

ここでZiemanの言う（空間的）秩序とは、完全な結晶中で見い出される様な、原子または分子が列上や面上に規則正しく並んだ状態を指している．そして、確かに、結晶の原子配列は秩序と呼ばれるに相応しい規則性を持っている．我々が、一般に秩序と呼ぶときに、おそらくはまず最初に規則正しいものの美しさを想起するのは、この結晶配列の規則性によるのかも知れない．がしかし、「秩序」もまた様々なレベルで、また様々な立場で語られうることばである．例えば、このような完全結晶中で見られる秩序は、後で見るように、数学的に言うと、並進操作や点群操作の下で格子が不変であるという規則性（対称性）を指しており、これは、言わば、静的で古典（主義）的な秩序である．ここに於ける秩序を、規則と言い換えても、それほど意味は変わらない．そこに、我々は、《「自由」な「決定者」と「不自由」で何らかのマスタープランに順応せねばならない系の成員》[5]を見る．プリゴジンの文脈では、「自由」な「決定者」とは、系それ自体を完全に規定して

いる（古典的な意味での）決定論的な法則であり、また、系とは独立な形でその外側に存在しうる観測者という仮定を指しているのだが、この関係は、この他にも様々に解釈しうる．そこでは、力の関与が決定的な役割を果たしている．一方、生物学や散逸系を扱う非平衡熱力学に於ける秩序の捉え方は、これとは対照的である．それは、静的ではなく動的な秩序であり、対称的であるというよりもむしろ対称性が破れることによって秩序が形成されて来るという捉え方である．均質で無差異だった場に、何らかの理由で偏りが生じることによって、自らの位置を定位できるようになるという意味で、空間が秩序づけられる．《それ以前には内在的な方法で空間が感知されなかった系において空間概念が発生することは、対称性の破れと呼ばれている．》[5] 同様に、過去と未来が同じであった世界の時間対称性が破れることによって、我々は、突如「時間」を発見することになる．そこでは、もはや未来に対する現在の役割は前と同じではない．また、そこに於ける系の成員は、従順であると言うより、もっと自発的で自律的である．それまで、互いに勝手に運動していたものが、ある契機を境に対称性が破れることによって協同的な秩序だった振る舞いを示すのである．もちろん、そこにも力や規則は存在するが、そこでの秩序は、むしろ相関やコヒーレンスに置き換えられるものである．あるいはまた、放っておけば一様な平衡状態へと向かう時間の矢に逆らって、本来不安定な系を平衡から遠く隔たった非一様な状態に持続させておく機構も、秩序である．（このような、負のエントロピーのことを生物学では、ネゲントロピーと呼ぶことがある．）つまり、ここでは、持続や安定性という概念もまた、秩序と結びついているのである．

従って、このことを拡張していけば、いま、この宇宙に存在しているものは、全て持続的な存在であるから、全てのものに秩序があるという言い方も許される．

> 表現されたものは、すべて秩序づけられてしまったものである．この世にはほとんど、秩序しかない．すべての集落や建築は、秩序づけられてしまっている．[6]

それでは、秩序しかないのかというとそうではない．存在としては秩序であっても、我々には見えていないものがある．即ち、未だ認識されていない対象が残されている．前述の原のことばも、このことを逆説的に述べていると理解する．その意味で、これは認識論的な秩序の捉え方である．従って、秩序以外のものとは、無秩序というより、まさに、混沌と呼ぶべきものである．混沌とは、文字通り天地が未だ分れていない、物事の区別ができていない状態のことであり、それゆえ、これは未分化で無差異なものである．

> 無差異（アンディフェランス）には二つのアスペクトがある．それはまず、一切が溶け込んでいる未異化（アンディフェラ）＝未分化（シシェ）の深淵、暗黒の無、未規定の動物であり、それはさらに、純白の無、静寂を取り戻した表面であって、そこでは、つながりのないいくつかの規定が、まるでばらばらになった肢体のように、たとえば、顎から落ちた頭蓋、肩から抜けた腕、顔面から飛び出た眼球のように漂っている．一方の未規定な物は、まったく無差異的（アンディフェラン）であるが、しかし他方の浮遊する諸規定も、未規定なものに劣らず、互いに無差異的である．[7]

つまり、セールに倣って言うなら、無秩序／混沌とは、未知の秩序に過ぎない、ということになる．だとすれば、いまや、秩序とは、与えられ、従うものではなく、発見するものである、という見解へと導かれてくるのだ．従って、（私はもはや秩序ということばには何の特権も与えてはいないが）それに即して言えば、私がこれから向かおうとするのは、ランダムパターンの秩序を発見し、それらを秩序づける作業なのだとも言えるだろう．

2）方法としてのランダム/結果としてのランダム

さてこれ以上、秩序と無秩序を巡る問題の深みへと今ここで足を踏み入れるのは、あまり得策ではないと思われるので、話をランダムに戻そう．碁盤の上の石の配列について考える．例えば、黒と白の石をひとつ置きに並べたいわゆる市松模様を見るとき、そこにどのような規則性があるかを指摘することは容易にできる．しかし、対局中の、あるいは終盤の碁石の並びは、かなり乱雑になってきて、まさにランダムな様相を呈して来るだろう．それでも、碁に通じている人であれば、それらは決して無秩序でも混沌でもなく理解しうるに違いない．つまり、ランダムや秩序、無秩序と言うことには、どれだけそれについて知っているかという意味で、情報というものが大きな役割を果たしているのである．

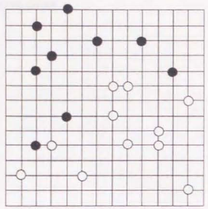


fig-1 ”ランダムな”碁石の配置

それでは、できるだけランダムに碁石を並べていく手続きについて考えてみる．まず、規則性ができないように関心をはらって、ひとつずつ碁石を並べていく．最初のうちは、比較的スムーズにことが運んでいくが、次第に碁石の数が増えていくにつれて、次にどこに置くかについてあれこれ迷い出すことになる．この場合に戸惑いを生じさせているのは、結果として現われてくる配置についての意図せぬ規則性なのである．

そこで今度は、なるべく意思の入り込まない方法によって石を配置していくことを考えよう．例えば、サイコロやコインを利用して決めていくことにする．コインを投げてその表裏によって石の白黒を決定する．また、サイコロを幾つか組み合わせて、その出た目によって石の位置を決めてゆく．このとき、最終的に現われる石の分布が、どのようになっているかは予測不可能である．ただし、後に見るように統計的な性質はある程度予想しうるが．結果として現われた石の配列は、果たしてランダムになっているだろうか．確かに一見して規則性を見い出せないような乱れた配置になっている場合もあれば、しばらく眺めているうちになんとなく秩序を見い出せるようなパターンもあるだろう．中には、そうなる確率は小さいけれども、幾つかの石が直線上に並ぶということも可能性としてはありうる．このようにできるだけ意思の入り込まない方法によって配列を決定したとしても、結果として現われるパターンがランダムであるかどうかということとは、また別の問題なのである．

> したがって、ランダムな方法で作られた配置の一つ一つを取り上げて、それが無秩序であるとかランダムな配列だとかということは、見る人の判断によるのであって、配置が作られる操作とは別のことだといってよい．ただいえることは、ランダムな手法によって配置すればほとんどすべての場合に得られた結果が常識的に考えた無秩序という形容に合致したものになる．すなわち不規則な配置が得られる確率が非常に高いということである．そして、このことは対象とする形態とか現象が多数の要素からなる場合ほど正しい主張となることも明らかであろう．このように考えてくると、少なくとも自然科学の問題に関連して、ランダムという概念を多少はっきりした形で考える場合には、秩序とか規則性といった概念の根底にある目的とか合理性といった価値観のようなものを出来るだけ無視することにして、確率をよりどころにして理解するしかない、ということがわかるだろう．[1]

この言明には、ほとんどのところで賛成だけれども、少しばかり注釈を付けたい．ひとつは、ここで述べられているランダムの捉え方は、次項でみるように、私の言う意味で狭いランダムである、ということである．ふたつめは、上で引用した文章中のランダムということばを、仮に広い意味に拡張して読み変えると、最後の《確率をよりどころにして理解するしかない》というくだりは、「確率をはじめとして、秩序を発見し規定するための様々な道具立てを考案する必要がある」と言い換えたいところである．つまり、繰り返すなら、秩序とはあくまでも発見するものであり、それは言わば、記述可能性のことである．従って、少なくとも記述という観点では、静的で、しかも結果として現われたパターンのみを対象とする本論のような立場にあっては、確率のみをよりどころにしたのでは不十分なのである．

---

［1］寺本　英：ランダムな現象の数学（吉岡書店、1990）

［2］一般の「ランダム」ということばと区別するために、私の言う広い意味でのランダムを、＜ランダム＞として表記したが、以後は煩雑となるために特に区別せず、ランダムとだけ表記することが多くなる．ただし、文脈により紛らわしいと思われる場合には、その都度意味を補足する．

［3］おそらく、Michel Serresならランダムではなくnoiseと言うだろう．なぜなら、《それは、無秩序のように否定的な用語でしか指示されない一つの状態をいうための唯一の肯定的な用語だからである．》《ノワーズとは古いフランス語の古びた単語、響きと怒り、ものの騒がしい混乱と人々の憎しみを表わす語である．ノワーズは混沌を示す．》——ミッシェル・セール（及川馥訳）：生成

しかし、私も同じ理由でランダムという語を選んだ．

［4］J. M.ザイマン（米沢富美子他訳）：乱れの物理学（丸善、1982）

［5］G. ニコリス／I. プリゴジン（安孫子誠也他訳）：複雑性の探究　（みすず書房、1993）

［6］原広司：建築・集落からの教え（NHK人間大学テキスト（日本放送出版協会、1993）

［7］G.ドゥルーズ（財津理訳）：差異と反復（河出書房新社、1992）

1.1.2　統計・確率的事項

1）狭義のランダム

前項で述べた、例えば、コインやサイコロによって石の配置を決めるやり方は、別の見方をすると、そのコインやサイコロに細工がなされていない限り、ある特定の位置が優先的に選ばれるわけではないから、すべての可能な場合について全く同じ確率で選ぶための手続きになっている．《この場合結果を予測することが全く不可能であるという意味で完全に無秩序であり不規則なのである．》[8] このように、いろいろな事象の現われる確率が平等に与えられているとき、結果を予測できないが故に、確率論や統計学ではランダムと呼ぶ．もう少し正確に言えば、①事象の出現確率の一様性（等確率）、②事象の出現確率の独立性、という二つの条件を満たすとき、それをランダムと言う．このランダムの定義は、一般に受け入れられているという意味で通りが良いものであるが、かなり制限されたランダムであり、前節の文脈に沿って言えば、方法としてのランダムに重きを置いたものになっている．従って、この幾分制限されたランダムを、1.1.1節の1）項で述べた様々な意味を包含する<ランダム>と区別して、狭義のランダムと呼ぶことにする．この狭義のランダムについては、確率論や統計学の膨大な蓄積が利用できる．またこれまで行なわれてきた、例えば、点の分布パターンに関する数多くの研究も、この狭義のランダムに基づいている．しかし残念ながら、本論に於いては、結果としてのランダムに重点を置いている為に、これらの多くの蓄積を直ちに利用できるというわけには行かないのである．なお、この節では、主として狭義のランダムについて述べるので、特に断らない限り、ランダムと言えば、狭義のランダムを指すことにする．

2）一様な分布と完全なランダム

次に、一様な分布、あるいは分布の一様性について考えてみよう．一様と均質を同義と考えると、一様な分布とは、3次元空間に於いて言えば、どの部分に単位体積を取ってみても、常に同じ量が見い出されうるということであり、例えば、空間中に存在する気体分子に即して言うなら、ある体積Vの中にN個の分子が存在することが予め分かっているとすると、単位体積中に存在する分子の数は、場所に依らず常にn＝N／Vで一定であるような分布を言う．しかし、このことが厳密に成立するのは、空間全体が、密に埋め尽くされている場合、即ち、もはや気体ではなく固体のようなもので充填されている場合か、もしくは何も存在しない場合だけである．あるいは、この条件をもう少し弛めてみたとしても、満足できるのは、せいぜい、分子が規則正しい完全な結晶格子上に並んでいるときだけである．しかし一般には、気体分子の様に常に動き回っていて、しかも、厳密に見ると粗密に偏りがあるような場合でも、一様な分布というものが定義できるように拡張されている．それは、ある量の代わりに、確率によって定義される．即ち、ある一つの粒子が空間中のある任意の位置にある時刻見い出される確率が、場所に依らず、しかもどの粒子についても一定であるとき、その分布は一様であると言う．このとき、それらの粒子の出現には、等確率ということ以外に何の規則性もないから、一様なランダムと共に完全なランダムと言われることもある．しかし、この限りに於いては、先程の狭義のランダムと完全なランダムとは同じ内容を指しているに過ぎない．一般の場合に、完全なランダムを定義することは困難である．ただし2章に於いて、並進対称性から最も遠いものとしての、言わば、（並進対称性に対する）幾何学的な意味での完全なランダムというものを定義することを試みる．

3）二項分布とポアソン分布 [8] [9]

いま、系は一様であるとする．V及びNを全体積及び全粒子数とし、ΔVをV内における小領域の体積とする．また、nをその小領域内の粒子数とする．系は一様であるから、ΔV内にある一つの粒子が存在する確率は、明らかにΔV／Vで与えられる．ここで、この小領域内にn個の粒子が存在する確率P（n）は、n個の粒子がΔV内に見い出され、同時に残りの（N－n）個がΔV内に存在しないという確率であるから、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(n) &= {}_{N}P_{n}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^{n}\left(1-\frac{\Delta V}{V}\right)^{N-n} \\
&= \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^{n}\left(1-\frac{\Delta V}{V}\right)^{N-n}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

となる．

この確率分布は、二項分布またはベルヌーイ分布と呼ばれている．

次に、N／V＝μとおき、NとVを十分大きくしていく．また、簡単のためにΔV＝1　とする．

（1.1）式の右辺は、

$$
\frac{1}{n!}N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)\left(\frac{\mu}{N}\right)^{n}\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^{N-n}
$$

$$=\frac{\mu^n}{n!}\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^{N-n}$$

と書き換えられるので、n≪Nとして、Nを無限大に近づけると、

$$\lim_{N\to\infty} P(n)=\lim_{N\to\infty}\frac{\mu^n}{n!}\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^N$$

$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^N=e^{-\mu}$ より、

$$P(n)=\frac{\mu^n}{n!}e^{-\mu} \qquad (1.2)$$

を得る.

これが、確率論に於ける重要な分布の一つであるところのポアソン分布である.

4）いくつかの統計量[10]

a）平均

統計量のうち最も基本的なものは、この平均と次に述べる分散であろう.

平均を一般化した概念が期待値であるが、平均値と期待値とは、数値的に等しいので、この期待値の定義を用いて逆に平均を定義することができる．なお、後で述べる様に、平均のとり方には、空間平均、時間平均とともにアンサンブル平均がある.

ここで、確率変数Xの期待値をE［X］とすると、

E［　］はアンサンブル平均をとるという記号としても用いられるが、結局は同じ内容を表わしているので、特に区別する必要はない．またE［　］の代わりに＜　＞もしばしば用いられる.

Xの平均値μ（又は$\overline{X}$）は次のように表わされる.

$$\mu=\overline{X}=E[X]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i) & \text{（離散的なとき）}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx & \text{（連続量のとき）}\end{cases}$$
$$=\langle X\rangle$$

ただし、$f(x)$ 又は $f(x_i)$ は、x又はx_iの確率密度である.

b）分散

確率変数Xが、大体どの程度の範囲にあるかを示すための量が分散でありσ^2で表わされる.

$$\sigma^2=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 f(x_i) & \text{（離散的なとき）}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx & \text{（連続量のとき）}\end{cases}$$

また、σは標準偏差と呼ばれる.

分散や標準偏差は、分布のばらつき程度を示す量として、平均とともに重要な統計量であるが、この事実を数学的に述べたものが、以下に述べるチェビシェフの不等式と呼ばれるものである.

$$\frac{1}{a^2} \geqq P(|X-\mu|) \geqq a\sigma$$

ここでaは適当な正の数である.

即ち、上式は、確率変数が平均値から aσ以上離れている確率は、全体の$\frac{1}{a^2}$より小さいということを示している.

c）モーメント

いくつかの重要な統計量は、モーメントという形で、書き表わすことができる.

ψ（X）を確率変数Xの関数として、

ψ（X）の期待値　E［ψ（X）］を次のように定義する.

$$E[\varphi(x)]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)f(x_i) & \text{（離散的なとき）}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx & \text{（連続量のとき）}\end{cases}$$

ここでϕ（x）$=x^k$（k＝0、1、2、…）

と置いたときの期待値E［x^k］をk次のモーメントと呼ぶ．即ち、

$$E[x^k]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i)^k f(x_i)\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx\end{cases}$$
$$=\langle X\rangle^k$$

明らかに、平均値μは1次のモーメントに等しい．また、分散σ^2は、平均のまわりの2次のモーメントとして表わされる.

$$\sigma^2=E[(x-\mu)^2]$$

$(x-\mu)^2$を展開することによって

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x^2-2\mu x+\mu^2)f(x)dx$$
$$=E[x^2]-2\mu E[x]+\mu^2E[x]$$
$$=E[x^2]-2\mu^2+\mu^2$$
$$=E[x^2]-\mu^2$$

よって

$$\sigma^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$$

と表わすことができる.

ここで、モーメントとは、何らかの密度に重みをかけて積分する際に使われる一般的な言葉であり、例えば、f（x）を剛体の質量密度と考えれ

ば、平均は重心に、分散は重心のまわりの２次モーメント（慣性モーメント）に相当する．

モーメントについては２．１節の形状特徴量の項でも触れる．

d）共分散

２つの確率変数X、Yがあるとき、それぞれの平均をμ、νとすると、

$$E\left[(x-\mu)^2(Y-\upsilon)^2\right]=\langle \sigma X \sigma Y \rangle$$

として与えられる共分散も、重要である．
共分散は、上式を展開することにより、

$$\langle \sigma X \sigma Y \rangle = \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle$$

として与えられる．

この共分散の重要な性質は、確率変数XとYが独立であれば、共分散はいつでも自動的に０になるということである．

従って、この共分散を計算することにより、２つの変量XとYの相関の有無を知ることができる．

e）歪度（skewness）と尖度（kurtosis）

平均のまわりの３次のモーメント

$$\mu_3=E\left[(x-\mu)^3\right]$$

を歪度という．

これは、分布の非対称性に関した量であり、$\mu_3=0$のときは、分布が対称形であることを表わす
$\mu_3 \neq 0$のときは、分布が歪んでいることを意味し、０からずれているほど、その歪みは大きい．

また、２次のモーメント（σ^2）をμ_2と表わしたとき歪度（g_1）の定義として下のようなものもある．[11]

$$g_1=\frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}$$

このときも、$g_1 \neq 0$のとき分布は非対称である．

この他、分布の尖り具合を表わすものとして、尖度（g_2）がある．[11]

$$g_2=\frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

ここでμ_4は、平均まわりの４次のモーメントである．

f）モーメント母関数

ψ（X）として、特にe^{tx}としたときの期待値$E\left[e^{tx}\right]$をモーメント母関数という．

ただし、ｔはXとは無関係に与えた変数である．

モーメント母関数は、確率密度f（x）を与えるとｔの関数として定まる．

モーメント母関数は、マクローリン展開により、

$$E\left[e^{tx}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}E\left[x^k\right]t^k$$

と表わせる．

モーメント母関数は全てのモーメントの情報を含んでいるので、母関数が一致する２つの分布は同じものであると考えることができる．

5）大数の法則 [10]

大数の法則とは、経験から導かれる確率と、数学的な概念としての確率を結びつけるものであり、１回１回の試行で、ある事象Aが起こるかどうかは確率的にしかわからないが、試行回数を増やせば増すほど、その事象の起こる確率は、一定の値Pに近づくというものである．
大数の法則はどんな分布にもあてはまる．
チェビシェフの不等式より

$\mu=np$、$\sigma=\sqrt{np(1-p)}$とすると、
任意に選んだ正の数ａに対して

$$P\left(|X-np| \leqq a\sqrt{np(1-p)}\right) \geqq 1-\frac{1}{a^2}$$

が成り立つ．このときPは１を超えないので、かっこ内の両辺をｎで割り、X／ｎ＝Tとすると

$$1 \geqq P\left(|X-np| \leqq a\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}\right) \geqq 1-\frac{1}{a^2}$$

$a\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}=\varepsilon$とおくと

$$1 \geqq P(p-\varepsilon \leqq T \leqq p+\varepsilon) \geqq 1-\frac{1}{a^2}$$

ここで、ａを十分大きくとれば　$1-\frac{1}{a^2} \fallingdotseq 1$となり、またｎを$a^2$に比べて十分大きくとれば$\varepsilon$は十分小さくなるから、

$$P(T=p) \fallingdotseq 1$$

6）正規分布と中心極限定理 [10]

ポアソン分布は、理論上重要な確率分布の一つであったが、これに対して実用上最も重要な分布が正規分布である．
正規分布は、ガウス分布とも呼ばれ、次式で定義される．

平均μ、分散σ^2の正規分布$N(\mu,\sigma^2)$は、ｙを連続変量として、

$$h(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

このうち、特に平均が0、分散が1となる正規分布N（0、1）を標準正規分布と呼ぶ．

ここで、例えば2項分布に於いて、nを大きくしていったときT＝X／nの分布は、大数の法則によりpのまわりに集中することが知られた．また、平均μ＝npのμを固定してnを大きくしていったとき、ポアソン分布に従うこともわかった．そこで、pが小さくないときに、nを大きくしていくとどうなるか、について答えてくれるのが、以下に述べる中心極限定理である．

中心極限定理とは、確率変数$X_1,X_2,\cdots,X_n$が互いに独立で、平均μ、分散σ^2をもつ同一の分布に従っているものとすると、

$\overline{X}=\frac{1}{n}\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$として、

$$Z_n=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{x}-\mu\right)$$

とおくと、このZ_n分布はnを大きくしたとき標準正規分布N（0、1）に近づく、というものである．

ただし、特殊な場合には中心極限定理の成立しない分布も存在する．

7）その他の分布

a）ガンマ分布 [10]

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty y^{x-1}e^{-y}dy$$

に従うもの

b）多項分布 [10]

1回の試行で起こりうる結果がm通りあり、それぞれの結果の起こる確率を$p_1,p_2,\cdots,p_m$とする．n回の独立な試行を行なったとき、i番目の結果の起こる回数を確率変数x_iとしたとき、

$X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_m=x_m$となる確率

$P\left(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_m=x_m\right)$は確率密度

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\frac{n!}{x_1!\,x_2!\cdots x_m!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_m^{x_m}$$

で与えられる．

このときの分布を多項分布と呼ぶ．

c）超幾何分布 [10]

AとBという2つの種類のものから成る総数N個の集団を考える．このうちAという種類のものがM個含まれているとし、この集団から無作為に1個取り、それを元に戻さないという試行をn回行ったとき、とり出された種類Aのものの個数を

確率変数Xとすると、

n回の試行によって取り出されるものの組み合わせの総数は${}_NC_n$、種類Aでないものの数は（N－M）個だから、そのうち（n－x）個をとる組み合わせは${}_MC_x$、また、種類Aでない（N－M）個のうちから（n－X）個をとる組み合わせは${}_{N-M}C_{n-x}$となるから

X＝xとなる確率は、次のような確率密度

$$f(x)=\frac{{}_MC_x\cdot{}_{N-M}C_{n-x}}{{}_NC_n}$$

で与えられることになる．

これに従う確率分布が超幾何分布である．

ここでもし、試行回数nに比べてMもNも十分大きいならば、超幾何分布は2項分布で近似できることが知られている．

[8] 前出：ランダムな現象の数学

[9] 前出：複雑性の探求

[10] 薩摩順吉：理工系数学入門コース　確率・統計（岩波書店、1989）

[11] 野上道男他：パソコンによる数理地理学演習（古今書院、1986）

1.1.3 乱数

1）シミュレーションにおける乱数の役割

我々が日常観察する現象の中には、その結果を事前に正確に予測できるものとそうでないものとがある．例えば天体の運行については、極めて高い精度で予測できるが、１枚の紙片を２階から落としたときの落下位置のように、何らかの意味で不確定な要素を含み、あるいはランダムな挙動を示すという現象や事象も数多い．その要因は、様々にありうる．本来的にランダムで確率的な現象である場合はもちろんのこと、何かの決定論的な法則に従いながらも初期条件がランダムであるものや、様々な要素が複雑にからみ合っているために、その振る舞いをランダムとしか呼べないようなものまで多種多様にある．それらのうち、近年特に注目されているカオスという現象、即ち一決定論的な法則に従いながらも、そのシステムの複雑さの故に、あるいはまた、初期条件の微妙な違いが結果に於いて重大な差異をつくり出すために、ほとんどその長期的な挙動が予測不可能であるような現象── は別としても、そのようなランダムに生起する現象へのアプローチとしては、確率論がこれまで一手に引き受けてきた感がある．

その一方で、確率論は、主にいろいろな事象の生起する確率が予め分かっているものとして展開することが多いが、ある確率をもって生起する現象をどのようにつくり出すかについてはあまり熱心に議論されないようである．しかしながら、複雑な挙動の解析に於いては、それらの生起する確率を推測するためにも、同じような現象を実験的につくり出してそれを研究することが、決定的に重要な事柄となるのである．これが、いわゆるシミュレーションであり、特にモンテカルロ法に代表されるようなコンピュータ・シミュレーションに於いて、必須不可欠な道具が乱数なのである．

つまり、乱数とは、そのような実験の場に於いて、実際の現象に於ける制御不能で不確定な要因の役割を演じるための数値の列のことである．従って、<ランダム>の問題、特にそれを生成するという観点から扱おうとする際には、この乱数のもつ性質について一通り押えておく必要がある．

2）乱数の種類

乱数を、まずその発生法によって大別すると、次のように分類できる．[12]

① さいころを振ることによって得られるもの
② 乱数表によるもの
③ 算術乱数
④ 物理乱数
⑤ πやeなどの超越数の各桁に表われる数字を乱数として利用しようというもの

①は純粋に確率的であり、さいころ自体がその操作に於いて等確率であることが保証されてさえいれば、その操作を延々と続けていくことによって無限の乱数列が得られる．ただし、この発生法には高速性という点で問題があり、あまり実際的な方法とは言えないものである．

②の乱数表は、1927年にティペットが人口調査をもとにして作ったものが最初とされている．その後も数多くの乱数表が作られたが、算術乱数に比べると簡便さその他の諸点に於いて不都合が多いため、現在ではあまり用いられていない．

このうちで、特に重要なのは③の算術乱数と④の物理乱数である．中でも③の算術乱数は、コンピュータとの関連もあって、現在最も良く用いられている．④の物理乱数は、適当な物理現象を使って、サイコロを振るという操作を別の形で再現しようとするものである．⑤の方法は、超越数が有限小数で表わされないこと、即ち、その数列は周期をもたないという性質を乱数として利用できないか、というものである．ただし、良く分かっていない部分も多く、現在のところ実用性には乏しいようである．

3）算術乱数

算術乱数とは、決定論的な算術式からつくり出される乱数の総称であるが、そもそも全く無秩序に並んだ数列を、決定論的な法則から導こうとする企てには、原理的に矛盾をはらんでいる．従って、算術乱数として得られる乱数は、たとえそれがどんなに良質なものであったとしても、あくまで実用上さしつかえない範囲でランダムと見做せるに過ぎない．即ち、算術乱数として得られる乱数は、必ずくり返しの周期をもつ．それ故、算術乱数のこの性質は、局所ランダム性と呼ばれている．また、算術乱数にはもう一つ重大な欠陥がある．それは、数列のもつ非独立性である．算術乱数に於ける前の数字と後の数字は決して独立ではない．このように、算術乱数は、完全な乱数ではなく、あくまでも擬似乱数である．従って、擬似乱数を用いる際には、その統計的な性質を検定する作業と同時に、問題に応じて種々の欠陥をとり除くための工夫が必要となる．更に付け加えるなら、検定法と、ある乱数の性質とはセットにして考えるべき性格のものである．なぜなら、検定の

仕方によって、有限数列の局所ランダム性が逆に定義されることにもなるからである．しかも、問題によっては、必要とする乱数の性質も異なり、検定法も異なることになる．ただし、どのような問題に対して、どのような検定法が向いているかといった問題については、まだ十分に整理されているわけではなく、今後の課題として残されているようである．

ここで、擬似乱数の満たすべき条件としては、以下のようなものが挙げられている．[12]

① 多数個の乱数をすみやかに発生させること．

② 周期は十分長いものであること．

③ 再現性をもつこと．

つまり、検定をパスした乱数と同じ乱数を用いてシミュレーションすることができる．

④ 良好な統計的性質をもつこと．

従って、乱数の利用目的に適合した検査を行って、その性質の良好なことを確かめることが必要である．

また、算術乱数は、大別して、一様乱数と特殊乱数に分けられる．

4）一様乱数

乱数の中でも、一様乱数は特に重要である．後に述べるような、様々の確率分布に従う特殊乱数も、この一様乱数を用いて作り出すことができるからである．一様乱数は、ある数の生成される確率が、どの数も全く等確率であるような性質を満たす数列である．この意味で、完全な一様乱数は、極めて信頼のおけるサイコロを実際に振ってみるという以外には得ることが難しいものである．ところで、宮武＋脇本は、フォン・ミーゼスの集団理論と関連させて、次のように一様乱数の定義を行っている．[13]

集団とはつぎのように定義される：

S＝ $\{a_i\}$ は高々可付番無限個の記号 a_i の集合で、K＝ $\{x_j\}$ はSの元からなる無限列、Gは可付場無限個の席を指定する操作の集りとして、つぎのことを仮定する：

（1）どの記号 a_i についても、極限頻度 p_i がKにおいて存在する．

（2） $\sum_{a_i \in S} p_i = 1$

（3）任意の $\Gamma \in G$ をとり、Kに Γ を適用してKから無限部分列をとったとき、この部分列において各 a_i の極限分布が存在して、それが p_i に等しい．

このときKは集団（collective）と名付けられ，$p(a_i) = p_i$ をKの中での a_i の確率という．

S＝ $\{a_i\}$ において、a_i が0から9までの整数で、K＝ $\{x_j\}$ が集団であるとき、もし $p_i = 0.1$ であれば、Kは一様乱数列である．ただし各 x_j は独立に出現するものとする．独立とは、a_i から a_j に移る遷移確率 p_{ij} が j をきめたとき、i に無関係であるときをいう．

一様乱数の発生法も、大別すると平均採中法と線形漸化式の2つに分けられる．現在主に使われているのは、後者の線形漸化式の方であるが、平均採中法についても簡単に触れておく．

a）平均採中法

フォン・ノイマンによって、1940年代に考案された方法である．2進又は10進の数を考え、2a桁の数があるとする．第（n＋1）番目の乱数 x_{n+1} は、第n番目の乱数 x_n を自乗して x_n^2 とし、そこで得られた4a桁の数列のうち、最初と最後のa桁づつを捨て、中央の2a桁のみを残して、これを新しい乱数 x_n とする．この方法によると、非常に速く乱数を発生することができるが、周期が極めて短く統計的な検査にも合格しないことが多いため、現在ではほとんど使われていない．

また、上の方法の変種として、2数 x_{n-1}、x_n の積 $x_{n-1} \cdot x_n$ の中央2a桁をとり、新しい乱数 x_{n+1} とする方法もある．x_0、x_1 を適当な数にとれば、平均採中法のように短い周期でなく、長周期の比較的統計的性質の良い乱数を発生させることができる．

b）線型漸化式 [12]

線型漸化式を用いる方法の一般形は、次のようになる．

$x_{n+1} \equiv a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_j x_{n-j} + b \pmod{P}$

ここで、a_0、$a_1 \cdots a_j$ 及びb、Pは正の整数である．また、mod P はPで割った余りを表わす．

この方法は、別名合同法とも呼ばれる．このとき明らかに、周期は p^{j+1} を超えない．

① フィボナッチ法

線型漸化式の最も単純な形は、

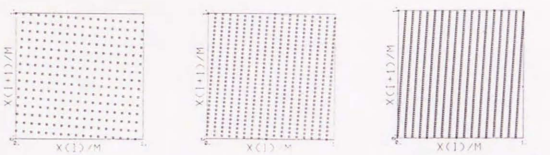
$x_{n+1} \equiv x_n + x_{n-1} \pmod{P}$

であり、この算術式を用いて乱数を発生させる方法は、フィボナッチ法と呼ばれている．

② 乗積合同法（レーマー法）

1951年に、レーマーによって導入された方法であり、レーマー法とも呼ばれる．これは、

$x_{n+1} \equiv \lambda_1 \cdot x_n \pmod{P}$



(a) $M=256,\ x_0=99,\ x_{i+1}=17x_i-1\ (\mathrm{mod}\ M)$　(b) $M=512,\ x_0=99,\ x_{i+1}=17x_i-1\ (\mathrm{mod}\ M)$　(c) $M=1024,\ x_0=99,\ x_{i+1}=17x_i-1\ (\mathrm{mod}\ M)$

fig-2　一様乱数における「結晶構造」（出典：[12]）

という算術式を用いる.

レーマーによれば、λ_1を適当に選び、$P=2^d\pm1$（2進の場合）又は$P=10^d\pm1$（10進の場合）にとることによって、その乱数の周期を、2進の場合2^d、10進の場合は10^dに近しいか又は極めて近くにすることができる．ただし、この計算には多少の時間がある.

③ 混合合同法

$$x_{n+1}\equiv \lambda_1\cdot x_n+\mu_1\ (\mathrm{mod}\ P)$$

により乱数を発生させるものである.

$P=2^d$（2進の場合）又は$P=10^d$（10進の場合）として、x_1とμ_1を適当に選ぶと最長可能な周期を実現できる.

上の3つの方法とも、得られた整数列$x_0, x_1, x_2,$…を、Pで割った比　$U_i=x_i/P$をつくると数列$\{U_i\}$は［0、1］上の一様乱数となる.

例えば、②のレーマー法の場合、$P=2^\beta$（βは正の整数）とし、λ_1とP を互いに素な正整数とすることにより、良質の一様乱数が得られることが多いということが知られている.

C）合同法乱数の主な欠陥

先に述べた様に、算術乱数には、有限の周期と非独立性という2つの代表的な欠点を有しているが、この他にも重大な欠陥のあることがマーセイリアによって指摘されている.[12]

fig-2に示すように、この方法で発生させた乱数の2次元分布には、「結晶構造」ともいうべき規則性が見られる．即ち、合同法によって発生させた一様乱数$\{U_i\}$を2つずつ組み合わせ$P_0(U_0, U_1)$、$P_1(U_1, U_2)$、$P_2(U_2, U_3)$、…をxy座標上でプロットすると、これらの点は平行な直線上に並ぶ（ただし、P_iとP_{i+1}が一つの直線上で順次並ぶというわけではない）．このことは、空間の広さと比較して、極めて限られた場所にしか点が落ちないことを表わしており、その結晶構造の間隔は、それを計算したコンピュータにおける整数演算のケタ数が許す最小単位の長さに比較してはるかに長いものであることが報告されている.[12]

従って、現在最も多く用いられている合同法乱数についても、それを用いる場合には注意が必要であり、何らかの手段[13]によって、これらの結晶構造を壊すことが要請される.

d）合同法によらない乱数

合同法によらない算術乱数もあり、例えばトーズワース数列と呼ばれるものがそれである．これは、最大周期列に基づく乱数発生法であり、多次元分布の構造に関しては良好であるが、他の統計的な性質についても合同法乱数より優れているかどうかは良くわかっていない部分が多い.

e）乱数のくくり合わせ[14]

1つの乱数列の数字が、独立に発生されたものであるとすると（乱数列が独立性を有しているとすると）、この乱数列を用いて更に精度の良い乱数列をつくり出すことができる．例えば、0と1からなる無限数列があり、この数列が独立性をもっているとする．この数列に於いて0が現われる確率を$P_0=(1-\varepsilon)/2$、1が現れる確率を$P_1=(1+\varepsilon)/2$とすると、この数列の始めから順に2個ずつの組にし、これら各組の数字を加えて2進数化した新しい数列をつくると、このときの0及び1の出現確率は、前の数列よりも1／2に近いものになる．よって、後の数列の方が乱数としては良質となる．この方法は、2進数であるかどうかにはかかわりがないので、10進乱数についても同じ様に適用できる．ただし、あくまでも元の乱数が独立性を有していなければならない．もし、元の乱数がマルコフ型であったりすると、得られる乱数は更に悪いものになってしまう.

5）特殊乱数

区間［0、1］上の一様乱数から以下のような各種の確率分布に従う特殊乱数をつくり出すことができる.

① 指数乱数

② 正規乱数（1変量～多変量）

③ ガンマ乱数

④ 二項乱数

⑤ ポアソン乱数

⋮

等々

単純な特殊乱数ならば、それをつくり出すことは原理的に簡単である．確率$p(x)dx$に従う乱数xをつくるためには［0、1］上での一様乱数をUとして、関係式

$$U=\int_{-\infty}^{x} p(x)dx$$

からxを求めれば良い.[14]

6）物理乱数

物理乱数には、大別して、放射線を利用する方法と電流のノイズを用いる方法がある．今後、物理乱数発生の専用機やコンピュータから容易にアクセスするための簡便な装置が実用化されれば、

ますます利用が増えると思われる．この物理乱数源を使った乱数は、非独立性を全く持たず、乱数としては算術乱数より良好である．ただし、この物理乱数は、乱数としての良質性の反面、再現性をもたないという欠点を有しており、同じ乱数列を使って繰り返しシミュレーションをするには不向きである．

7）準乱数

この他、準乱数と呼ばれる乱数がある．
この乱数は、完全に無秩序という、乱数が本来有すべき性質、即ち、あらゆる角度からみてランダムであるというような性質を備えたものではないが、多重積分の計算にめざましい効用を発揮するものであり、特に一様性に於いて特異な乱数である．

8）乱数列の定義

乱数列を厳密に定義することは、実はそれほど容易なことではない．本節で述べた乱数に関する言明も、そのほとんどは実用的な定義に過ぎない．それは、確率の定義とも結びつき、本論が扱う＜ランダム＞の問題とも関連する深い領域である．実用的な目的には不必要であるが、真にでたらめ、あるいはでたらめな振る舞いとは、正確に言って何を意味しているかについては定量的な定義が必要である．確率や統計についての数学理論に於いても、確率の意味するものや実際の世界ではどのような場合にこの概念を適用できるのかということについては何も述べられていない．例えば、R.von Misesは、確率を正しく定義するためには乱数列を正しく定義しなければならないという見解を表明している．その他、多くの人々が様々な定義を乱数列に与えた．これらの定義について深入りすることはできないが、Knuthは『The Art of Conputer Programming 3. 準数値算法／乱数』の中でこの点に関して詳しい議論を行っている．

[12] 津田孝夫：モンテカルロ法とシミュレーション（培風館、1977）
[13] 津田孝夫：多変数問題の数値解析（サイエンス社、1973）に詳しい
[14] 宮武修 他：乱数とモンテカルロ法（森北出版、1978）

1.1.4　ランダムネスを表わすための量

1）ランダムネスの分類

ランダムネスを分類するなどということは、現段階では、とても不可能なことである．従って、ここでは、ランダム系を扱う物理学に於ける概略的な分類を紹介することに留めたい．[15]

(a) 内因的な（intrinsic）ランダムネスと外因的な（extrinsic）ランダムネス
(b) 空間的な（spatial）ランダムネスと時間的な（temporal）ランダムネス
(c) マクロ、サブマクロ、ミクロなランダムネス

《内因的なランダムネスとは、系に内在する原因によって、いわば自発的に生じたランダムネス、これに対して外因的なランダムネスは外因的に導入されたもの、という意味である．》[15] また、時間的なランダムネスとは、一般に、確率過程と呼ばれているものを指している．その典型はブラウン運動である．

本論の対象とするのは、（結果として現われた）パターンの問題であるので、内因的、外因的という区別はない．また、時間変化は取り扱わないので、専ら空間的なランダムネスだけである．対象の持つスケールというものも無いので、スケールについても区別しない．ただし、どちらかといえば、建築や都市といった日常的な、中間スケール（巨視的なスケールとも呼ばれる）の問題に関心を払う．なお、上の分類には、この他に、論理的なランダムネスを含めた、(d)情報に関するランダムネスを加えたい．

2）乱雑性と不確定性及び複雑性

さて、ランダムネスを表わすための尺度として現在用意されている指標について述べる前に、今まで述べてきた＜ランダム＞も含めてランダムネスというものの性質について、もう少し吟味してみよう．結論から言うと、そこには、乱雑性あるいは不確定性という要素と複雑性という要素が含まれており、その区別が重要である．例えば、制御できない偶然性の介在によって無秩序と見なされるものは、乱雑性または不確定性によるランダムネスである．また、信号に対する雑音は、乱雑性によるランダムネスの好例であろう．一方、信号の内容そのものに起因するランダムネスは、むしろ複雑性としてのランダムネスである．例えば、暗騒音を信号として読解しようとしたときのランダムネスは、乱雑性による撹乱というより、暗騒音の信号に対する論理的な無秩序性（この場

合は、不可能性）に起因していると見なすべきである．無秩序とは未知の秩序に過ぎない、と言うときのランダムネスは、どちらかと言うと、複雑性と関連がありそうである．ただし、これらは厳密に区別できるわけではなく、乱雑性に起因する複雑性もあるし、先程の信号の例に見られるように、その視点によってどちらとも言える場合がある．このように実際には、不可分に両者が入り交じってランダムネスを構成していることが多いと思われる．せいぜい言えることは、どちらの比重が大きいか、ということぐらいであろう．しかしながら、通常、この両者が一緒くたにされて漠然と捉えられていることを考えれば、それを区別する意識は重要なのである．

3）エントロピー [16] [17] [18]

ランダムネスを表わす指標として現在用意されているものには、エントロピーとコンプレキシティの二つがある．
エントロピーは、基本的に、乱雑さや拡散の程度、不確定の度合いを表す量であり、大きく三つに分けることができる．

a）熱力学的エントロピー

熱力学に於ける第２法則はエントロピー増大の法則と呼ばれており、閉鎖システムのエントロピーは増大に向かう、というものである．これは過程の不可逆性を示唆していると解釈される．即ち、外部と遮断された孤立系の乱雑性や拡散の度合いは、時間の経過とともに増大して最後には熱平衡状態に達する、ということを述べているのである．この場合のエントロピーとは、閉鎖システムのマクロな状態変化を指示する量であり、物やエネルギーの拡散の程度を示す物理量である．形式的には、熱力学的エントロピーをSとすれば、温度Tの物質が熱Qを受け取ったとき、その物質の熱力学的エントロピーの増加分ΔSは、

$$\Delta S \geqq Q/T$$

と定義される．（等号は可逆過程、不等号は不可逆過程において成立する．）

また、この法則は通常、無秩序の増大へと向かう傾向として理解される．言い換えれば、ある条件下に於いて実現可能な系の状態（これを可能態*と呼びたい）の数を反映するものとしてエントロピーを捉えることが可能である．つまり、可能態*の数が少なければ少ない程、系は秩序立っていると言える．この意味で言うと、絶対零度付近の固体は、低いエントロピーを持っているが故に秩序立っており、常温・常圧における気体は、高いエントロピーを持っているが故に無秩序である、と言えそうである．[19] この考え方を発展させたのが、次に述べるボルツマンであった．

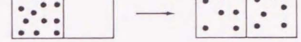


fig-3　気体分子の拡散

b）統計力学的エントロピー

ボルツマンは、熱力学第２法則の意味を追及し、ミクロな運動に関する力学、即ち、気体分子の運動によって、マクロ状態の不可逆変化を述べた熱力学第２法則を、確率論的に導こうとした．例えば、fig-3のように、容器の左半分のみに気体分子を集め、右半分を真空とした状態から出発し、次に中央の仕切りを取り除くと、これらの気体分子は容器全体へ拡散していく．このとき、後の状態は、二つの意味で無秩序的である．一つは、初期の区分けされた状態から比べると、発展後の一様な状態は、構造化されていないという意味で無秩序的であり、二つには、気体分子によって占められていく体積が初期の２倍あるため、気体分子の自由度が増し、可能態*の数が明らかに増大するからである．

このことは、初期の確率的に起こりにくい状態から、容器全体に拡散することによって、より確率の高い状態に移行したことを表している．つまり、非平衡状態から始まって、平衡状態へと移行するに従って、エントロピーが増大し、最後の平衡状態においてエントロピーが最大になることを、そのときの実現確率と対比させると、実現確率とエントロピーを関連づけることが可能となる．よって、エントロピーは、この実現確率を表す量であるとともに、より確率の高い状態としての無秩序さを表す量と考えることができるのである．

c）情報（論的）エントロピー

ボルツマンのＨ関数を原形として、1948年にシャノンによって定式化されたものである．物理量としてのエントロピーを、一般の確率変数に対して定義し、確率変数のランダムネスを観測によってもたらされる情報量として意味づけたものである．

全部でn個の事象が独立に起こり得て、それぞれの確率が、P_1、P_2、・・・, P_i、・・・, P_n（ただし、$\Sigma P_i = 1$）とすると、このときの情報量（情報エントロピー）は、

$$H = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 P_i \qquad \text{（単位はビット）}$$

となる．全ての場合が等確率で生じるとき、言い換えれば、どの事象が起こり得るかの不確かさの

度合いが最大となるとき、情報エントロピーは最大となる．従って、情報エントロピーは、ある事象群の不規則性あるいは無秩序性を反映する量であると共に、その不確かさの度合いを表す量とも考えられる．

この他にも、コルモゴロフエントロピー（Kエントロピー）やレニーエントロピーと呼ばれる量もあるが、これらについては、フラクタルに関する項で折に触れて述べたいと思う．

d）パターンのエントロピー

空間的な分布に関するエントロピーを計量するためには、その背後にあると想定される実現確率を推定する必要が生じる．しかしながら、本論のように、実際の現象から切り離され、しかも静的な、言わば結果として現われたパターンのみを考察する場合には、その分布確率を推定するというより、むしろ定義するための機構が必要となる．この問題は第２章に於いて改めて考える．

4）コンプレキシティ（計算複雑性）[17] [18]

a）コンプレキシティによるランダムの定義

情報エントロピーが、個別の対象そのもののランダムネスを表すというよりも、むしろ、背後にあると想定される確率変数のランダムネスを表すものであるのに対して、個別の対象のランダムネスを、それ自身として定式化したものがコンプレキシティ（計算複雑性）である．1965年頃、ロシアの数学者Kolmogorovとアメリカの数学者Chaitinによって独立に考案された．それは、ある対象を記述するために必要な最小のことばの長さとして定義される．これは、ある意味で論理的な複雑性を表す指標であり、ｎ個の２進数（０と１）から成るデータ列を、コンピュータによって書かせるために必要な最小のアルゴリスムのビット数をコンプレキシティと呼び、それがその数列の長さｎと同程度であるとき、ランダムであると定義した．

例えば、そのデータ列が100100100･･･というように規則性を持っている場合、その情報はかなりの圧縮が可能である．その数列を順に指示するかわりに、100をm回、あるいはその数字がｎ個に等しくなるまで繰り返せという命令によって同じ内容を伝達することができる．これに対して、そのデータ列が完全に無秩序であるときには、その情

報を圧縮することが出来ず、ｎ個の数字を順番に指示する以外には伝達のしようが無いのである．

b）パターンのコンプレキシティ

パターンの問題に対してこのコンプレキシティを適用した例を今のところ知らないが[20]、次のように考えることができるだろう．簡単の為に、Ｎ個の点から成る分布パターンを考える．このパターンを表すための一つの方法は、点の位置を示すＮ個の座標の組に変換することであろう．これによって、パターンの情報は完全に再現性を持つ．では、この情報を、もっと圧縮することはできないだろうか．例えば、Ｎ個の点列が一直線上にあり、しかも等間隔に並んでいる場合、座標の組として表す代わりに、その直線の方程式と点の間隔そして始点あるいは終点の座標さえ与えてやれば済む．Ｎが大きくなっても同じ情報ですむから、Ｎが大きくなればなるほど、前者と後者の格差は拡がっていくことになる．思えば、デカルトの最大の功績は、座標を導入したこともさることながら、図形を方程式で表したことにあったのだった．しかし、少しパターンが複雑になってくると、無理矢理方程式で表そうとしても、煩雑になって少しも情報の圧縮にならないことが分かる．コンプレキシティの定義に倣うと、点のパターンを表すのにＮ個の座標の組としてしか指示できないようなパターンをランダムということもできるが、これではほとんどのパターンがランダムということになってしまうだけである．少し考えてみると、この場合のコンプレキシティーは個別のパターンの複雑性というより、むしろ図形を方程式で表すという方法の問題であるようにも思えてくる．つまり、ランダムなパターンを表すための有効な方法の欠如がそのパターンを複雑に見せているのではないか．このことに対する挑戦の第一歩が、第５章で語られる．それは未だ着想の域を出ないが、そこでは、ランダムなパターンを、それを生成するための簡単なルール（方程式を含めて）に置換する試みについて考えてみる．

[15] 前出：ランダム系の物理学

[16] 野上道男他：パソコンによる数理地理学演習（古今書院、1986）

[17] 前出：複雑性の探求

[18] 数理科学：特集　乱れと秩序（サイエンス社、1985）

[19] このことは、逆に言うと、通常の意味で秩序立っているとされているものは、可能態'の数が少なく極めて限定されたものであり、ランダムなものは多くの可能態'を持っていると言うことができる．

[20] 計算幾何学に於いても計算の複雑さという問題を扱うがそれは、いわゆる計算可能性もしくはアルゴリズムの効率のことである．

1.2　関連諸分野の概観と基礎事項の整理

1.2.1　形態学関連

1）形態／形態学／形態学的思考について

形態学という、幾分古めかしい響きを伴わずにはおかない、この広範な学について、今ここで何かを論じる力など到底無ければ、またそのつもりも無いが、本論が広い意味で形を扱う論である以上、ひとこと触れておかないわけにはいかないだろう．形態学は、「モルフォロギー」（英語では、morphorogy）と呼ばれ、これは、ゲーテの創始によるとされている．ゲーテの形態学が、植物を主題としているということにも象徴される様に、初期の形態学は、専ら、動物や植物という生物形態の記述にエネルギーが向けられ、またそれ故に膨大な研究の蓄積がなされたのであった．そしてそれらの流れは、現代に至るまで、例えば、博物学的側面を持つ生物学の一部や比較解剖学といわれる分野の中に連綿として繋がってきている．それらの研究に於ける主眼は、何と言っても、自然界に見られる、特に有機体の形態を収集・記述・分類し、それを通して自然を理解するところにあると思われるが、研究の性格上、その方法論もまた多種多様にわたっている．もっとも、ゲーテの考えていた形態学は、主に植物を主題としながらもその具体的な対象の記述を超えて、ことばの真の意味での、自然科学を目指したものであったと考えられている．

しかし、形態学は、必ずしもゲーテの望んでいた方向に発展していったわけではなく、また近代科学の中にあっては、ゲーテの考える自然科学、即ち、《ニュートン的科学とは違った仕方での自然の解明》[21]が正当な位置を占めるには至らなかった．その後、様々に分化していくことになる形態学の傾向を、①博物学的な指向性、②精密科学への接近、③哲学への移行（または回帰というべきか）というふうに、大きく三つに分けて考えてみることも可能だろう．本来は、同じ形態学という名の下に、同居しているはずのこれら三つの側面も、現代に於いてはかなり明瞭に分離されて、もはや同じ学とはとても呼べないような数多くの分野へと派生してきている．

> ・・・このため、『生物学』という語は、きわめて多様な広い領域から成ることになります．一方の極には、自らをあたかも精密科学であると見做そうするとような領域、たとえば生化学や生物物理学があります．もう一方の極には、主として記述を旨とする、場合によっては歴史的でさえあるような科学があります．明らかに、代謝回路や、ある酵素の活性中心に標識分子を乗せようとしている人間は、カモメの食習慣や巣ごもり習慣を研究している人間や、古代人の顎の骨から頭骨を再構成しようとしている人間と共通なところはほとんどありません．[22] [23]

更に、同じ箇所でシャルガフが《生物学は生命の科学でありますが、生命は、精密科学がきわめて居心地悪く感ずるような相手なのです．》と述べているのと全く同じ様に、形態もまた現在の精密科学の方法論に十分にはなじまない性格を有していると言うことができるだろう．と言うのは、近代以降現代に至るまで、精密科学に於いて常に主流を成してきたのは、言わば還元主義的な方法論であるのに対して、いかなる意味であれ、形あるいは形態とは、ある全体性のことであり、それを構成要素へと分解した途端に、形態にとって最も重要なものが失われてしまうと考えられるからである．ステレオロジー（stereorology）は、精密科学の手法を取り入れた現代形態学を構成する主要な分野の一つであるが、《ステレオロジーとは、3次元空間中に存在する対象の形態についての諸量をそれより次元の低い面や線より得られる情報から推定する理論と方法を意味する．》[24] [25]とあるように、そこでは還元主義的な要素論的アプローチが明瞭に謳われている．しかしながら、形態の研究に際して、そこに精密科学的な、あるいは数理科学的な手法を持ち込もうとする研究は全て、ほとんど例外なくこの方法論の持つ限界に直面せざるを得ないであろう．そして、本論もまた同様に、この困難から自由ではありえない．おそらく、求められているのは、還元主義的な方法論を補完し、それと本来相補的であるべき新たな全体性把握のための理論と方法である．

> 原　いま科学は全体を言えなくて、差異が強調されるようになりフラグメントの世界でいいのではないかという傾向が現われている．今日の民族主義の台頭などその現れです．・・・
> われわれはそういった全体像をあきらめるのではなく、新たな全体性をめざして表現していかなくてはいけない．[26]

そして、このことの重要性は、そもそもゲーテがそうであったように、③の哲学や思想に於いて形態を考える流れの中で、既に充分認識されてい

たと考えられる．ゲーテから現象学、E.カッシラーを経て、レヴィ＝ストロースやチョムスキーへと至る流れに於いて [27]、時には、直感による現象の把握ということばで、時には、関係や形態化ということばによって、あるいはまた、構造や生成、科学と神話の統合というようなことばで語られてきたのは、たとえそれらが同じものではなかったにせよ、ある全体性を把握するための思考や方法論のことではなかったか．従って、それを仮に形態学的思考と呼ぶなら、本論に於いて最も参考となる形態学の成果とは、この形態学的思考にほかならない．

ただし一方で、私は今まで、形態や形態学ということばをできるだけ用いないように努めてきた．それは主に、ふたつの理由からである．一つは、形態学的思考の目指すものは、個別の分析対象を超えた、より一般的な学であるにもかかわらず、それが何であれ頭に冠される形態学は、依然として、それぞれの個別の研究対象に深く密着していることである．この意味で、本論に於ける個別の分析対象から分離されたパターンやその考察を、形態もしくは形態学と呼ぶにはそぐわないものがある．二つめは、形態には単なる形だけでなく、意味というものが不可分に結びついていると考えられる点である．そのため、意味もまた形態学に於ける主要な研究主題の一つとなっている．しかし本論が扱うのは、意味を含めて、形態に付属する様々の属性を剥ぎ取ったパターンであり、意味という問題を全く対象外としている点でも、形態学と呼ぶより、むしろ<幾何学>と呼ぶのが相応しいと考えているのである．

形態を種々の対象認識から解放し、対象を超越した空間の認識に還元することが形態に対する基本的な態度であり、そしてこの操作を体系化したものが幾何学である．また、幾何学的に把握された形態は演繹的論理の体系の中に組み込まれて形態のもつ意味を明らかにする道筋、いいかえれば形態学の方法論を可能にする． [28] [29]

[21] 中村雄二郎：かたち再考（現代思想　１１、1992)
[22] E.シャルガフ：ヘラクレイトスの火（岩波書店、1990)
[23] 坂井建雄：生物形態の意味の由来（現代思想１１/1992)
[24] 諏訪紀夫：定量形態学（岩波書店、1977)
[25] 及川清昭：1986年度東京大学学位論文（前出)
[26] 日本的空間のアイテンティティを探る（建築雑誌9305)
[27] 高橋義人：形態学的思考から新しき知へ（現代思想 11)
[28] 諏訪紀夫：病理形態学原論（岩波書店、1981)
[29] 明らかに還元主義的な言説ではあるが、対象との関わり方や幾何学の捉え方に共感できるものがある．

2）数理形態学（Mathematical Morphorogy）

形態の研究に数理的な手法を導入した分野は、歴史的にみれば比較的新しく、また、その中には様々に呼ばれるものがある．数理形態学もその中の一つである．少し長文になるが、及川清昭氏の学位論文から数理形態学に関するくだりを引用させていただく．

数理形態学という名称は未だ一般化されてはいないが、［Matheron 1975］や［Serra 1982］の著作によって、近年広く知られるようになった分野である．数理形態学とは形態の幾何学的あるいは確率的性質に関する理論的な問題を扱う分野である．この意味で積分幾何学と密接に連係しており、事実、その成果を取り入れながら発展している．また、幾何学的な計量結果を表現するという点においては計算幾何学とも深い関わりをもっているといえる．ただし、計算幾何学はアナログ情報を主として扱うのに対し、数理形態学はアナログ情報の処理に加えて、デジタル画像処理の面においても理論化をはかろうとしており、いわば計測の自動化を志向しているといってよい．広義のテクスチャー解析もこの分野に包含されているといえる．数理形態学の成果もパターン認識のみならず、ステレオロジー、コンピュータ・グラフィックス、CAD、結晶学、形の科学などに応用されている．数理形態学が対象とする範囲はきわめて広く、既製の数学（主として位相幾何学、初等幾何学）の諸理論をはじめ、ランダム集合に関する理論、ディジタル化の手法、フラクタル幾何学など、およそ図形の形態とその集合に関する理論すべてにわたっているといっても過言ではない． [30]

この他、Dehoff&Rhines　の提唱する計量形態学（Quantitative Microscopy ）や前出の諏訪による定量形態学等がある．

[30] 及川清昭：1986年東京大学学位論文（前出）

1.2.2　幾何学関連

1）集合の幾何学（幾何学的測度論とフラクタル幾何学）

幾何学的測度論は、整数及び非整数次元をもつ集合に関する性質を研究する分野であり、主として今世紀初頭から、純粋数学者たちによって進展してきたものであるが、「フラクタル」という概念に対する数学的な基礎付けを与えるという点で、近年その重要性の認識がますます高まりつつある．

ここでは、まず最初に、フラクタル理論に於ける中心概念である次元及び、その次元を定めるもととなっている測度に関して、基礎的な事項の整理を行なう．その後、フラクタル及びフラクタル次元についてのあらましを述べることにする．

なお、以下の記述のうち、a）測度　b）次元の項に関しては『K．J．ファルコナー（畑政義訳）：フラクタル集合の幾何学』及び『石村貞夫＋石村園子：フラクタル数学』の記述をもとにしている．

a）測度

測度とは、集合の大きさを測るための数量のことである．

［σ集合体］

集合Xの部分集合を元にもつような空でない集まりSが、補集合をとる操作及び可算個の和集合をとる操作に関して閉じているとき、このSをσ集合体（σ－field）であるという．このとき、Sは差集合をとるような操作及び可算個の共通集合をとる操作に関しても閉じており、更に全体集合と空集合φを必ず含む．

即ち、E∈Sならば、$X \setminus E \in S$が成り立ち、またE_1、E_2、…∈Sならば$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in S$が成り立つとき、Sをσ集合体と呼ぶ．

［下極限と上極限］

ある集合列｛E_j｝が与えられたとき、下極限$\underline{\lim} E_j$と上極限$\overline{\lim} E_j$を以下のように定義する．

$$\underline{\lim}_{j\to\infty} E_j = \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcap_{j=K}^{\infty} E_j$$

$$\overline{\lim}_{j\to\infty} E_j = \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{j=K}^{\infty} E_j$$

即ち、下極限とは、有限個を除いた残り全てのE_jに共通に属するような点から成る集合のことであり、上極限とは、無限個のE_jに共通に属しているような点から成る集合のことである．全てのE_jがσ集合体Sに属していれば、$\underline{\lim} E_j$も$\overline{\lim} E_j$もともにSに属する．

［極限］

$\underline{\lim} E_j = \overline{\lim} E_j$が成り立つとき、この集合を｛$E_j$｝の極限と呼び、$\lim E_j$と表記する．例えば、｛$E_j$｝が単調増大列あるいは単調減少列であるならば、必ずその極限$\lim E_j$が存在する．

［生成されたσ集合体］

Xの部分集合を元にもつ任意の集まりCに関して、Cを含む最小のσ集合体をCによって生成されたσ集合体（σ－field generated by C）といい、S(C)と書く．即ち、Cを含む全てのσ集合体についての共通部分のことであり、これもまたσ集合体となっているので、このように呼ぶのである．

［測度］

あるσ集合体S上で定義され、値を［0，∞］にもつような集合関数μが、次の2つの性質を満たすとき、μを測度（measure）という．

① $\mu(\phi) = 0$

② Sに属し、互いに交わらない任意の可算個の集合｛E_j｝に対し、

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

このうち②は、測度の計算に関して加法性が成り立つことを示しており、またμは単調増大な集合関数であることがわかる．つまり、

$E, E' \in S,\ E \subset E'$　ならば　$\mu(E) \leqq \mu(E')$

が成り立つ．

［測度の連続性］

σ集合体S上の任意の測度μは、次の3つの性質を満たす．

σ集合体Sの上の任意の測度μは、次の性質を満たす．

① Sに属する単調壮大な集合列$E_1 \subset E_2 \subset \cdots$に対し

$$\mu\left(\lim_{j\to\infty} E_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j),$$

② Sに属する単調減少な集合列$F_1 \supset F_2 \supset \cdots$に対し

もし$\mu(F_1) < \infty$ならば

$$\mu\left(\lim_{j\to\infty} F_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(F_j),$$

③ Sに属する任意の集合列｛F_j｝に対し，

$$\mu\left(\underline{\lim}_{j\to\infty} F_j\right) \le \underline{\lim}_{j\to\infty} \mu(F_j),$$

［外測度］

測度の条件のうち、②の条件を弱めたものが外測度である．即ち、外測度ν（outer measure）とは、Xの全ての部分集合に対して定義され、値を［0，∞］に持つような集合関数で、次の3つの性質を満たすものである．この外測度νの有用な点は、あるσ集合体を選ぶことができて、その上ではνが測度の性質を満たしているようにできるということにある．

① $\nu(\phi)=0$、

② $A \subset A'$ならば、$\nu(A) \leqq \nu(A')$の

③ Xの任意の部分集合の列 $\{A_j\}$ に対して、

$$\nu\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{1}^{\infty} \nu(A_j)$$

[ν可測]

Xの部分集合 E が、外測度νに関して可測あるいは単にν可測（ν－measurable）であるとは、任意の$A \subset X$に対して

$$\nu(A)=\nu(A \cap E)+\nu(A \setminus E)$$

が成り立つときにいう.

逆に、集合Eがν可測であることを示すには、$\nu(A) \geqq \nu(A \cap E)+\nu(A \setminus E)$を示せば十分である. なぜなら、逆向きの不等号は、外測度の定義③より、容易に成り立つからである.

また、$\nu(E)=0$を満たす集合Eは、明らかにν可測となる.

νを任意の外測度とするとき、X の部分集合でν可算であるものの全体Mはσ集合体をなす. 更に、νをM上に制限したものは、M上の測度になる.

[正則]

任意の部分集合Aに対し、$\nu(A)=\nu(E)$を満たすν可測な集合で、Aを含むものが存在するとき、外測度νは正則（regular)であるという.

このとき、$\{A_j\}$を任意の単調増大列とすると、

$$\lim_{j\to\infty} \nu(A_j) = \nu(\lim_{j\to\infty} A_j)$$

が成り立つ.

[ボレル集合]

ボレル集合（Borel sets）とは、Xの開集合全体によって生成されたσ集合体に属する集合のことである. すると、開集合もボレル集合であり、F_σ集合（閉集合の可算和として表わされる集合）やG_δ集合（可算個の開集合の共通部分として表わされる集合）もボレル集合になる.

[距離外測度]

X上の外測度νが距離外測度（metric outer measure) であるとは、強分離している任意の部分集合EとFに関して、

$$\nu(E \cup F)=\nu(E)+\nu(F)$$

が成り立つときにいう.

ここで、EとFが強分離しているとは、

$$d(E,F)=\inf\{\ d(x,y) : x \in E,\ y \in F\} > 0$$

を満たすことを指す.

νが（X, d）上の距離外測度であれば、Xの任意のボレル集合はν可測である.

[Caratheodoryの補題]

νを（X, d）上の距離外測度とする. $\{A_j\}$をXの単調増大列とし、$A=\lim_{j\to\infty} A_j$とおく.

このとき、各 j に対して、$d(A_j, A \setminus A_{j+1}) > 0$が満たされていれば、$\nu(A)=\lim_{j\to\infty} \nu(A_j)$が成り立つ.

[ススリン集合]

この他、ススリン集合（Souslin stes）と呼ばれる重要な集合族がある. これは、閉集合の和及び交わりを用いて、直接に定義されるもので、距離空間（X, d）上のススリン集合とは、

$$E=\bigcup_{i_1 i_2 \cdots} \bigcap_{K=1}^{\infty} E_{i_1 i_2 \cdots i_k}$$

によって定義される集合のことである. 任意のボレル集合はススリン集合であり、考えている距離空間が完備であればススリン集合の任意の連続像もまたススリン集合になる.

距離空間（X, d）上の外測度νに対して、全ての閉集合がν可測であるならば、任意のススリン集合もν可測になる. もしνが（X, d）上の距離外測度であれば、ススリン集合はν可測である.

b）次元

《19世紀の終わり頃までは点は0次元、直線は1次元、平面は2次元…と直観をたよりにした、素朴な次元の概念しか存在しなかった. これに対し、ペアノは「ペアノ曲線」と呼ばれる有名な曲線を発見し、これを契機に次元に対する厳密な数学的考察が始まり、「次元論」という数学の一分野が芽ばえたのである. 》[31]

ここで、ペアノ曲線とは、fig-4 のような曲線のことであり、正方形を埋めつくす連続な曲線を指す. 実は、このペアノ曲線は、曲線でありながら、次元数2をもつ. つまり、古典的な次元の定義では、不十分であり、次元の厳密な定義についての探索が始まったのである. 以降、次元には、様々な定義が与えられたが、その中でも、現在最も広く研究され、かつ応用されているハウスドルク次元を中心として述べ、次に位相次元、相似次元の順に述べてゆく.

その他、フラクタルに関する実用的な次元の幾つかについては、フラクタルの項で扱う.

[ε近傍]

距離$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$を2点間PとQの距離とする. これは、通常、ユークリッド距離と呼ばれているものである. 2次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^2$上の点Pと、任意の正の数εに対し、

$$U_\varepsilon(P)=\{\ Q \in \mathbf{R}^2 \mid d(P,Q) < \varepsilon\}$$

となる集合を点Pのε近傍と呼ぶ.

[内点]

集合 $X \subseteq \mathbf{R}^2$と点 $P \in X$ に対し、点P_αの近傍で

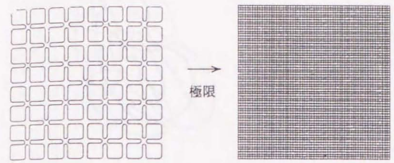


fig. 4　ペアノ曲線　（出典：[31]）

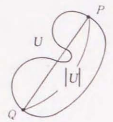


fig-5　集合の直径

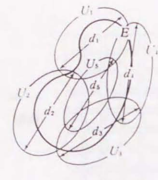


fig-6　集合Eのδ-被覆

$U_\varepsilon(P) \subset X$を満たすものが存在するとき、点PをXの内点という．つまり、集合Xの内部の点のことである．集合Xの内点全体の集合はX^oと表す．

［開集合と閉集合］

内点のみから成る集合のことを開集合と呼ぶ．つまり、その境界線を含まない集合のことを指す．逆に、開集合の補集合のことを閉集合と呼ぶ．これは、境界線の点を、それ自身に含む集合のことである．$\mathbf{R}^2$及び空集合ϕは開集合でもあり閉集合でもある．

［直径］

Uを$\mathbf{R}^2$上の閉集合とする．Uの直径（diameter）とは、集合Uのなかで、一番離れた２点間の距離として定義され$|U|$で表わす．

$$|U| = \sup\left\{ d(P,Q) \mid P,Q \in U \right\}$$

である．

［δ被覆（またはρ被覆）］

集合Eに関して$0<|U_i| \leq \delta$を満たす$\mathbf{R}^2$上の閉集合の組$\{U_1, U_2 \cdots U_n\}$が存在して、$E \subset \bigcup_i U_i$が各U_iについて成り立つとき、$\{U_i\}$は、Eのδ被覆（δ－cover）であるという．ここで、nは可算無限個までとれるものとする．よって、Eのδ被覆を、

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad \text{と表わすこともある．}$$

（δ被覆のかわりにρ被覆という用語も用いられる．）

［ハウスドルフＳ次元外測度］

集合Eのδ被覆を$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$とし、それぞれの直径を$|U_i|$とすると、任意の負でない実数Sに対して、$|U_i|$のS乗和をとることができるが、集合Eのδ被覆のとり方は無限にあるので、そのS乗和の集合の下限を、

$$\mathcal{H}_\delta^S(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} U_i$$

とおき、更に、δを０に近づけたときの極限をとって、これをEのハウスドルフS 次元外測度（Hausdorff s-dimensional outer measure）$\mathcal{H}^S(E)$と定める．

つまり、

$$\mathcal{H}^S(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^S(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^S(E)$$

このときの$\mathcal{H}^S$は距離外測度にもなっている．即ち、強分離しているEとFという２つの集合に対して、

$$\mathcal{H}_\delta^S(E \cup F) = \mathcal{H}_\delta^S(E) + \mathcal{H}_\delta^S(F)$$

が成り立ち、$\mathcal{H}^S$に対しても同じ等号が成り立つ．

［ハウスドルフＳ次元測度］

$\mathcal{H}^S$を$\mathcal{H}^S$可測集合体から成るσ集合体上に制限したものを、ハウスドルフS 次元測度（Hausdorff s-dimensional measure）という．

［ハウスドルフ次元］

$\sup\{S \mid \mathcal{H}^S(E)=\infty\} = \inf\{S \mid \mathcal{H}^S(E)=0\}$を満たす正の有限確定値Sがただ１つ決まる．

このときのSを集合Eのハウスドルフ次元といい、$\dim_H(E)$と表わす．

$0 \leq S < \dim_H(E)$ のとき　$\mathcal{H}^S(E)=\infty$

$\dim_H(E) < S < \infty$ のとき　$\mathcal{H}^S(E)=0$

［Ｓ集合］

$\mathcal{H}^S$可測集合$E \subset \mathbf{R}^n$で$0<\mathcal{H}^S(E)<\infty$を満たすものをＳ集合という．特に、Ｓ＝１のときは、線形可測集合ということもある．明らかに、Ｓ集合のハウスドルフ次元はＳである．ただし、Ｓ集合は、ハウスドルフ次元がＳの一般の可測集合にはない特別な性質を持っており、Besicovitchは任意の集合が、それと同じハウスドルフ次元を持つ互いに交わらない集合の連続濃度無限和によって表わされることを示した．

また、ハウスドルフ測度$\mathcal{H}^S$は正則であり、任意のＳ集合は閉集合によって内側から近似できる．

① $\mathbf{R}^n$の任意の部分集合Eに対し、Eを含むG_δ集合Gで、$\mathcal{H}^S(G)=\mathcal{H}^S(E)$を満たすものが存在する．特に、$\mathcal{H}^S$は正則な外測度である．

② 有限の$\mathcal{H}^S$測度をもつ任意の$\mathcal{H}^S$可測集合は、それと同じ測度をもつF_σ集合を含んでいる．したがって、いくらでも近い測度をもつ閉集合を含んでいる．

また、Eを$\mathcal{H}^S(E)<\infty$なる$\mathcal{H}^S$可測集合とする．このとき、任意の$\varepsilon>0$に対してEとεのみに依存する$\rho>0$が存在し、$0<|U_i| \leq \rho$を満たす任意のボレル集合列$\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$に対して、

$$\mathcal{H}^S\left(E \cap \bigcup_i U_i\right) < \sum_i |U_i|^S + \varepsilon$$

が成り立つ．

［ハウスドルフ・ベシコビッチの定理］

前と同じ内容の繰り返しとなるが、これらをまとめると、集合Eに対してある実数$D \geq 0$がただ１つ存在し、

Ｓ＞Ｄのとき　$\mathcal{H}^S(E)=0$

Ｓ＝Ｄのとき　$\mathcal{H}^S(E)$：有限確定値

Ｓ＜Ｄのとき　$\mathcal{H}^S(E)=\infty$

となる．

つまり、$\mathcal{H}^S(E)$が０となるか∞になるかの分かれ目を与える値が$k = D = \dim_H(E)$である．

これは次のような性質を有している．

① 2つの集合E, Fについて

$E \subseteq F$ ならば $\dim_H(E) \leqq \dim_H(F)$

② $E \subseteq \mathbf{R}^2$ のとき、$\dim_H(E) \leqq 2$

この$\dim_H(E)$の定義は、1937年にハウスドルフとベシコビッチが与えたもので、次に述べる位相次元に対し、距離的次元と呼ばれている．

[ハウスドルフ次元の意味するもの]

$\sum_{i=1}^{n} |U_i|^S$ というようなS乗和は、集合Eのもっている大きさ、つまり通常の「長さ」か「面積」のようなある量に相当するものと考えられる．同時にそのときの適切なSの値が重要となり、それがその集合の特徴を表わしていると解釈できる．

例えば、集合Eが曲線であるとき、曲線は「長さ」という量をもっているので、長さのような“ある量”を測るには、$\sum |U_i|^1$ とすれば良く、このS＝1という値が曲線Eを特徴づける数であると考えることができるのである．ここで、Sは常に自然数になるとは限らず、集合E（図形E）が、複雑になると、Sが非整数値となることもありうる．ところで、$\sum |U_i|^S$ を最小にするEのδ被覆とはEの最も効率的なδ被覆のことである．従って、ハウスドルフS次元測度及びハウスドルフ次元とは、対象とする集合Eを最も効率的に被覆するδ被覆をとることによって、その集合の大きさをあらわす“ある量”を測定し、また、その値を有限確定されるための適切な値Sを求めることによって、集合Eを特徴づける数（次元）を定めることであると言うことができよう．しかし、一般には最も効率的なEのδ被覆を見つけることはほとんど不可能であり、従って、ハウスドルフ測度や次元を厳密に求めることは困難である．特に下からの評価を与えることが難しい．

そのため、実際には、いくつかの実用的な定義及びその求め方が存在するのである．

ここで、効率的なδ被覆に関連して、ある与えられた集合Eを被覆している十分に大きな集合族のなかから、Eのほとんどの点を被覆し、かつ互いに交わらない様な部分被覆を選び出すことができることを主張する重要な定理がある．

[Vitaliの被覆定理]

① Eを$\mathbf{R}^n$の$\mathcal{H}^S$可測集合とし、$\mathcal{V}$を集合E に関する、閉集合からなるヴィターリ族とする．このとき、$\sum |U_i|^S = \infty$ または $\mathcal{H}^S\left(E \setminus \bigcup_i U_i\right) = 0$ が成り立つように、互いに交わらない有限または可算無限個からなる部分列 $\{U_i\}$ を$\mathcal{V}$から選び出すことができる．

② さらに、$\mathcal{H}^S(E) < \infty$であれば、任意の$\varepsilon > 0$に対して、

$$\mathcal{H}^S(E) < \sum_i |U_i|^S + \varepsilon$$

が成り立つように部分列を選び出すことができる．

ここで、集合族$\mathcal{V}$が、与えられた集合 Eに関するヴィターリ族（Vitali class）であるとは、任意の $x \in E$ と任意の$\delta > 0$に対して、$x \in U$ かつ $0 < |U| \leqq \delta$ を満たす$U \in \mathcal{V}$が常に存在するときにいう．

[位相次元（トポロジカル次元）]

位相次元は、単純な図形については、直観的な次元数と一致する次元であり、位相写像によって不変な次元という意味である．これには、いくつかの定義があり、「被覆次元」、「大きな帰納的次元」、「小さな帰納的次元」が知られている．ただし、ユークリッド空間の$\mathbf{R}^1$か$\mathbf{R}^2$では、これらの3つの次元は一致することがわかっている．

[位相写像]

写像 f：X→Yが連続写像で、次の2つの条件

① f は上への1対1対応

② 逆写像 f^{-1}：Y→Xも連続写像

を満たすとき、写像fを位相写像という．

簡単にいえば、位相写像とは、図形を連続的に伸ばしたり縮めたりする写像のことである．

[位相次元の定義]

ここでは、「大きな帰納的次元」の定義を述べる．ある図形Eに対し、位相次元 $\dim_\gamma X$を次のように、“帰納的に”定義する．

1．$X = \phi$ のときは $\dim_\gamma X = -1$ と約束する．

2．$\dim_\gamma X \leqq n-1$ まで定義されていると仮定する．このとき、

$\dim_\gamma X \leqq n$ とは、

共通部分のない、Xの任意の閉集合F_1，F_2に対し、このF_1，F_2が

$\dim_\gamma Y \leqq n-1$

をみたすXの適当な閉集合Yで分離されるときと定義する．そして、

$\dim_\gamma X = n$ とは

$\dim_\gamma X \leqq n$ であって $\dim_\gamma X \leqq n-1$ でないとき、

とする．

単純な図形については、直観的な次元と位相次元は一致し、しかもハウスドルフ次元とも一致する．即ち、

1点から成る集合Pに対して

$\dim_H(P) = 0 = \dim_\gamma(P)$

線分Lに対して

$\dim_H(L) = 1 = \dim_\gamma(L)$

円周Qに対して

$$\dim_H(Q)=1=\dim_\tau(Q)$$

正方形Sに対して

$$\dim_H(S)=2=\dim_\tau(S)$$

しかし、図形が複雑になってくると、

位相次元<ハウスドルフ次元

となる例が現われてくるのである．

また、位相次元が直観的な次元と一致しない場合もある．たとえば、ペアノ曲線の$\dim_\tau$は２となる．ただし、その他の連続曲線については、それが平面を充填していない限りは１であるが．

［自己相似集合］

最後に、規則的なフラクタルの基礎となる自己相似集合及び相似次元について述べる．周知の様に、自己相似性（self-similarity)は、フラクタル集合に於ける最も重要な性質である．一般の場合のハウスドルフ次元を求めることは困難であることを前に述べたが、規則的なフラクタルのように、これから述べる完全自己相似集合となっているものは、相似次元という形で、その図形の次元を求めることができるのである． 平面$\mathbf{R}^2$の集合Kと、KからKへのいくつかの縮少写像$f_1, f_2, \cdots, f_N : K \to K$があって

$K=f_1(K)\cup f_2(K)\cup\cdots\cup f_N(K)$で表わされるとき、集合Kを縮少写像$\{f_1, f_2, \cdots, f_N\}$に関する自己相似集合という．（ただしN≧２）

［内部自己相似集合］

$\mathbf{R}^2$ の集合をKとする．N個の縮小写像（N≧１）

$$f_1, f_2, \cdots f_N : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

と、Kの適当な部分集合K_0とがあって、集合Kが

$$K=f_1(K)\cup f_2(K)\cup\cdots\cup f_N(K)\cup K_0$$

と表されるとき、Kを縮小写像$\{f_1, f_2, \cdots, f_N\}$に関する内部自己相似集合という．

［完全自己相似集合］

自己相似集合を構成している各$f_1(K)$, $f_2(K)$, $\cdots$, $f_N(K)$のそれぞれの重なりを、できるだけ小さくするような$\{f_1, f_2, \cdots, f_N\}$を集合Kに関して定めることができるとき、この集合Kを完全自己相似集合という．

正確には、

$\mathbf{R}^2$における集合Kと、KからKへのK個の縮小写像の組

$$f_1, f_2, \cdots, f_N : K \to K$$

があって、２つの条件

① $K=f_1(K)\cup f_2(K)\cup\cdots\cup f_N(K)$

② $\dim_H(K)>\dim_H(f_i(K)\cap f_j(K))$

$(i, j=1, 2, \cdots, N ; i\neq j)$

を満たしているとき、

Kは縮小写像$\{f_1, f_2, \cdots, f_N\}$に関して完全自己相似集合である

という．

さて、完全自己相似集合のハウスドルフ次元は、一般の場合と違って、簡単に求められるのであるが、その前に次の重要な２つの性質を述べておこう．

［ハウスドルフ測度に関する性質］

集合X，Yに対して、$D=\dim_H(X)=\dim_H(Y)$とする．このとき、

$D>\dim_H(X\cap Y)$ならば

$$\mathcal{H}^D(X\cup Y)=\mathcal{H}^D(X)+\mathcal{H}^D(Y)$$

が成立する．

［ハウスドルフ次元と縮小率］

集合Kが縮小写像$\{f_1, f_2, \cdots, f_N\}$に関して完全自己相似集合であるとする．このとき、各縮小写像f_i（$i=1, 2, \cdots, N$）の縮小率λ_iについて

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^D=1 \qquad (D=\dim_H(K))$$

が成り立つ．

［相似次元］

さて、集合Kが完全自己相似集合であるとき、その各縮少写像に対して、Kのハウスドルフ次元Dが定まるのを見た．よって、この各縮少写像f_i（$i=1, 2, \cdots, N$）の各縮少率λ_iに関して、

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^s=1$$

を満たす実数ｓを集合Kの相似次元とし、

$$s=\dim_s(K)$$

と表わす．

定義より、明らかに完全自己相似集合のハウスドルフ次元と相似次元は一致する．

また、集合Kが、２組の縮少写像$\{f_1, f_2, \cdots, f_N\}$と$\{g_1, g_2, \cdots, g_N\}$に関して、それぞれ完全自己相似集合になっているから、それらから決まる相似次元はともに$\dim_H(K)$と一致することも知られている．

さて、この値$S=\dim_S(K)=\dim_H(K)$を求めるには、次の定理によれば良い．

［相似次元の計算］

集合Kが、すべて同じ縮小率λをもつ縮小写像$\{f_1, f_2, \cdots, f_N\}$に関して完全自己相似集合であれば、集合Kの相似次元は

$$\dim_S(K)=-\frac{\log N}{\log \lambda}$$

で与えられる．

［完全内部自己相似集合と相似次元］

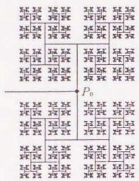


fig-7　完全内部自己相似集合

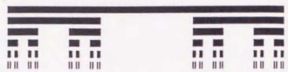


fig-8

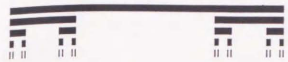


fig-9

fig-10

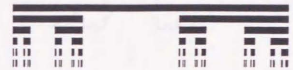


fig-11

集合Kが縮小率 λ_i の縮小写像 f_i（i ＝１，２，…，N）とKの部分集合 $V \neq \phi$
とについて、次の条件

（１）$K = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \cdots \cup f_N(K) \cup V$

（２）$\dim_H(K) > \dim_H(f_i(K) \cap f_j(K))$　（$i \neq j$）

$\dim_H(K) > \dim_H(f_i(K) \cap V)$

（i＝１，２，…，N）

を満たしているとき、集合Kを縮少写像 $\{f_1, f_2, \cdots, f_N\}$ とKの部分集合Vに関する完全内部自己相似集合と呼び、

このとき、方程式

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^s = 1$$

を満たす実数をｓとすると、不等式

$$s \leq \dim_H(K)$$

が成立する．特に、$\dim_H(V) < s$ のときには等号

$$s = \dim_H(K)$$

が成立する．

［カントール集合］

完全自己相似集合の例としてカントール集合と呼ばれているものについて触れておく．

閉区間Ｉ＝［０,１］とし、まず中央の 1/3 の部分を取り除く．そのようにしてできた区間［0,1/3］∪［2/3,１］のそれぞれについても同じ様に中央の1/3の部分を取り除く．同様の操作を無限回繰り返すと最後に得られるのは、長さ０の線分（つまり点）が区間［０,１］の中で無数（連続無限）に散らばった集合となる．（これらの点はカントール・ダストと呼ばれる．）この集合がいわゆるカントールの３進集合と呼ばれているものである．これは完全集合─即ち、孤立点を持たない閉集合となる．（fig-８）このときの相似次元は、ともに縮小率1/3を持つ二つの縮小写像によって得られるから、

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{3}\right)^s = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \qquad (S = \dim_S(K))$$

を満たす実数ｓが求める相似次元である．つまり、

$$s = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309\cdots$$

この値は、カントール集合のハウスドルフ次元にも一致するものである．

カントール集合を得るためには必ずしも３分割による必要はない．例えば、区間Ｉを４分割し、両側の1/4 ずつを残し、中央の1/2 の部分を取り除いていくという操作によっても得られる．（fig-９）ただし、このときの相似次元はD＝1/2となる．このことは任意の次元を持つカントール集合がつくれることを示している．あるいは、fig-10の様に、９分割して両側と中央の1/9 の部分だけを残していっても、同じD ＝ 1/2の集合が得られる．しかし、両方の図を比べて見れば分かる様に、同じフラクタル次元を持っているにも関わらず異なって見える．マンデルブローは、これを異なった空隙性（lacunarity）を持つと言っている．

また、例えば３分割カントール集合に於いて、残す線分の大きさが等しくない場合は、マルチスケール・カントール集合と呼ばれている．[32] fig-11には、区間Ｉ＝［０,１］を区間［０, 0.25］∪［0.6,１］に変換する操作を繰り返した場合のカントール集合（途中の段階）が示してある．

ｄ）フラクタルとフラクタル次元

［フラクタルとは］

フラクタル（fractal）ということばは、Benoit Mandelbrotによって、ラテン語のfractasという形容詞（物が壊れて不規則な破片になった状態を表す、ばらばらな、破片的な）を語源とし、1975年に始めて作られた造語である．ただし、そこでフラクタルと呼ばれているものの幾つかは、既にそれまでの数学に於いてもその存在が知られていた．しかしそれらは、数学の殿堂を揺るがす特異で、忌み嫌うべきものとされ、重大な関心が払われることもなく、見過ごされていたのである．あるものは特異集合と呼ばれ、あるものは、「悪魔の」という語を冠されて呼ばれていた．それらの持つ重要性を認識し、それらにことばを与え、そして、それらが自然界の形態の中でむしろ普通に発見できることを示したのは、何よりもマンデルブロの功績であり、大きな称賛に値するものである．

今では、フラクタルという語もそれほど目新しくはなくなったが、それでもフラクタルとは何か、という問に対して的確に答えることは依然として難しい．なぜなら、今のところ、フラクタル

[31] 石村貞夫+石村園子：フラクタル数学（東京図書、1990）
[32] J・フェダー：フラクタル（啓学出版、1991）

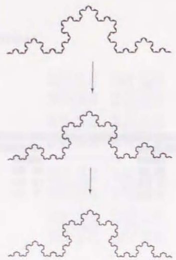


fig-12　コッホ曲線

についての厳密な定義が与えられていないからである．マンデルブロは、当初、フラクタルとはハウスドルフ次元がトポロジカル次元より真に大きいものという定義を与えていたが、後にこの定義を撤回している．ハウスドルフ次元が求められないものや、ハウスドルフ次元とトポロジカル次元が等しいものの中にも、非常に興味深い集合のあることが分かってきたからである．もともと、マンデルブロはフラクタルに厳密な定義を与えることには、それほど積極的でなかったふしがある．つまり、最初に厳密な定義を与えてそれ以外をシャットアウトしてしまうのではなく、とりあえずフラクタルと呼んだものに関する研究の総体によって、逆にフラクタルを定義付けようという構えが見える．この態度は、正しい．そして本論もまた、その構えを取っている．とりあえず＜ランダム＞と呼ぶものに関する研究の総体によって、＜ランダム＞のありかを見定めようとしているのである．

ここでは、数学的に厳密な定義についてではなく、フラクタルと呼ばれているものの性質について述べ、逆にそのような性質を持つものをフラクタルと呼ぶことにする．

[特徴的な長さを持たないもの]

高安[33]によれば、フラクタルとは特徴的な長さを持たないものである、ということができる．これは、後に述べる微分不可能性や自己相似性という性質とも関係しているのであるが、まずは特徴的な長さを持つものについて説明した方が分かり易いであろう．円や長方形等の初等幾何学に於ける図形や、人、車、建物といったものは全て特徴的な長さを持っている．例えば、円に於ける特徴的な長さとは半径であり、人間であれば身長である．これに対して特徴的な長さを持たないものも存在する．例えば、規則的なフラクタルの例として必ず登場するコッホ曲線は、非常に微細な部分から構成され、また大小様々な大きさの組み合わせによってできているために、それに関する特徴的な長さを指定することができない．このような性質を持つ形は、自然界に於いて多く見られる．例えば、雲の形や海岸線などの例は有名であろう．

[微分不可能性]

コッホ曲線の細部を無限に拡大していっても、その微細な部分の持つ複雑さは変わらず、常にギザギザな線のままである．一方、先程の特徴的な長さを持つ図形に共通する性質は、その形を構成する線や面が滑らかである、ということである．つまり、特徴的な長さを持つ図形が、幾つかの特異点を除けば基本的に微分可能であるのに対して、フラクタルな図形とは、至る所微分不可能なものであるということができるであろう．この微分の否定という性質は、歴史的に見ても画期的なものであり、我々が今まで築き上げてきた微積分という強力な道具が無力であることを意味する．それは、ことばを変えれば、連続的な世界観の否定であり、全く新しいものの見方を要求するとともに、別の道具立ての必要性をも迫るものである．

[自己相似性]

特徴的な長さを持たないということは、特徴的なスケールを持たないことでもある．そして、この特徴的なスケールのなさや至る所微分不可能であるという性質は、フラクタルの有する本質的な性質であるところの自己相似性に帰着することができるのである．あらゆるスケールにわたって自己相似が成り立っているがために、特徴的なスケールを指し示すことができず、しかも無限階層のレベルで自己相似な形が保持されているため、どのような微小部分に於いても、何かで近似しうるということがない．この自己相似性は、次のように説明できる．自己相似性を持っている図形の一部を拡大したとき、全体あるいはより大きな部分と同じような形が見いだせるということである．そして、それを無限に拡大していった先でも、同じように全体の形が見いだされるのである．あるいは、どのように拡大しても前と同じような複雑さをもっているということもできる．例えば、ある海岸線の写真があるとき、幾つか倍率を上げたり下げたりしても、ほとんど区別がつかない．つまり、その写真の縮尺を判断することは容易でないのである．フラクタルの持つこの性質は、言い方を変えるなら、スケール不変性でもある．観測の尺度をどのように変えても、常に同じような複雑さを保持しているようなもの、それがフラクタルである．

また、この自己相似性の範囲をどこまで拡げるかによっても、フラクタルの領域は変わってくる．前項で述べたような完全自己相似集合だけを対象にするなら、いわゆる規則的なフラクタルだけが含まれることになるし、もう少し条件を弛めて統計的な意味での自己相似性も含めるなら、もっと＜ランダム＞なものも対象に入ってくるの

である．ここで、統計的な自己相似性とは、統計的な確率分布の中に見られる自己相似性のことを指す．自然界で見られるフラクタルのほとんどは、統計的な自己相似性を持つものである．いづれにせよ、フラクタル理論ができたおかげで、それまで<ランダム>であるとか不規則であるとしか呼べなかったような、星の分布や雲の形、海岸線の形状についての性質を記述することができるようになったということは画期的なことである．本論の様な研究を始めたのも、フラクタル理論があったおかげであり、もしそれがなかったら、このような研究をしようにも皆目見当が付かなかったであろう．

[フラクタル次元]

フラクタルを定量的に表す量は、フラクタル次元である．このフラクタル次元によって、フラクタルを更に細分して類別化することが可能となる．このフラクタル次元は、直感的に言うと、図形の複雑さを表す量である．例えば、前項で見たペアノ曲線は、非常に複雑な曲線であるために、曲線でありながら平面と同じ２という次元を持つという言い方ができる．あるいは、星の分布は、基本的に点から構成されていると見做しうるにも関わらず、1.2という次元を持つが、この1.2という数字が、星の分布の複雑さを反映していると考えることができるのである．つまり、異なる次元を持つようなフラクタル図形が２つあったとき、一般的には次元の高い方がより複雑であると言える．

ところで、古典的なフラクタルの定義では、非整数次元を持つもののことをフラクタルと呼んでいた．しかし、この次元のとり方は一通りではなく、様々に有りうる．その中でも、最も代表的なものがハウスドルフ次元であり、特に、対象とする集合が完全自己相似集合となる場合は、相似次元として簡単に計算できることを前項で見た．この他、もう一つの良く知られている次元の定義として、コルモゴロフによって導入された容量次元がある．考えている図形をＥ次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^E$の中の有界な集合とする．半径εのＥ次元球によってその集合を被覆するとき、Ｎ（ε）を球の個数の最小値とする．このとき、容量次元D_cは、次のように定義される．

$$D_c \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log (1/\varepsilon)}$$

この定義は、ハウスドルフ次元の定義と良く似ているが、違いは同じ大きさのＥ次元球によって、効率的に被覆するという点である．つまり、ハウスドルフ次元の場合には、球の大きさをεより小さい任意の大きさとしていたが、容量次元では、それを一つの大きさに限定しているのである．ハウスドルフ次元をD_Hと表すとすると、一般には、

$$D_c \geqq D_H$$

が成り立つ．

この他にも、いろいろな次元の定義がある．また、実際に存在する形態には、それがどんなにフラクタル的なものであっても、自己相似性が成り立つ上限と下限が必ず存在する．あるいはまた、厳密に$\varepsilon = 0$の極限を考えることは、不確定性原理によって拒絶されているので、ハウスドルフ次元にしろ、容量次元にしろ、実際に適用しうるためにはもう少し実用的なものに改良する必要がある．これらの実用的な次元の定義については、第２章以降折に触れて述べていくことにする．自己相似性以外の性質を持つ拡張されたフラクタルの考え方については、本章１.４節　<構造>*を持つパターンの項で述べる．

[33] 前出　高安秀樹：フラクタル

2）積分幾何学

a）積分幾何学とは

いわゆる“幾何確率”を扱う分野が積分幾何学である．例えば、幾何確率を求める問題には、以下に述べる様な有名なものがある．

① Buffonの針の問題

平面の上に等間隔で平行線が引かれているとき、この平面上へ落とした針がこれらの平行線のどれかに交わる確率を求める．

② 凸閉曲線Ｃ1の内部に、凸閉曲線Ｃ2があるとき、Ｃ1に交わる任意の直線がＣ2にも交わる確率を求める．

積分幾何学とは、これらの問題のように《昔から幾何学的確率論として研究されてきたことを、現代数学の立場からその基礎を反省し、さらにこれを発展させたものである．》[34]

前節とも多少関連するのは、積分幾何学に於ける主要な概念として測度があるということであろう．

前に見たように、測度とは集合の大きさを測るための分量（簡単な場合は、長さや面積、体積に相当する）のことであるが、積分幾何学に於いて主題となるのはHaarの測度と呼ばれるような以下の３つの条件を満たすものに限っている．

集合Ｘの測度をm（X）で表わすとすると

Ⅰ）m（X）≧０

Ⅱ）互いに共通点のない点の集合X_1、X_2、X_3…（可付番個）を合わせた集合$X_1+X_2+X_3$…の測度は各X_1、X_2、X_3…の測度の和となっている．（即ち、単純加法性をもつ）

Ⅲ）合同な点集合の測度は等しい．

このうち、Ⅰ）Ⅱ）を満たすものが点集合の測度であることを考えると、積分幾何学に於ける測度に関しては、Ⅲ）の条件を満たすことが重要である．そして、積分幾何学では、様々な幾何図形の集まりに対して、平行移動や回転（こられをまとめて変位と呼ぶ）によって不変な測度を求め、これを用いて図形に付随した量の間のいろいろな関係を求めることが、最大のテーマとなっている．

ところで、積分幾何学という名称は、W.Blaschkeが初めて用いたとされているが、その考え方には、それ以前からの流れがある．例えばCrofton は1868年に測度の考え方を用いて、先述の②の問題を解いた．ただし、このときにはまだ、Haarの測度に於ける３条件を満たす測度という点が十分には意識されてはいなかったようではあるが、その後、PoincaréやE.Cartanによって、この測度の問題が

自覚され、徹底されたものである．1930年代に、W.Blaschkeとその一門がハンブルグ大学を中心として、種々の図形に関して変位により不変な測度を求め、特に凸閉曲面に関する様々な性質を導き、その基礎を確立した．積分幾何学という名称は、その測度の計算に積分が使われることに由来する．そして、その後のSantalóの業績にも特筆すべきものがある．

しかし、現代の積分幾何学の扱う範囲は、例えば微分幾何学などに比べると極めて限定されたものであり、むしろ微分幾何学の一分科とみなしても良いという見解もある．[34] ちなみに、積分幾何学に関する主な著書としては次のようなものがある．

W.Blaschke：Integralgeometrie 1 (1936), 2 (1937)

L.A.Santaló ：Introduction to Integral Geometry (1957)

[34] 栗田稔：積分幾何学（共立出版,1956）

b）積分幾何学に於けるランダムの定義 [35] [36]

ここでは、積分幾何学の全般について概説することはとても無理であるので、本論と特に関連のあるランダムというものについて、積分幾何学ではどのように定義しているかという点に絞って見てみることにする．その前に、積分幾何学で扱う重要な測度には、

ア）点の集合の測度

イ）直線の集合の測度

ウ）位置の測度

がある．これらのうち、ア）はランダムな点に、イ）はランダムな直線というものの定義に関わっている．結論から先に言うと、積分幾何学に於けるランダムは、言い換えれば、一様性の定義でもある．あるいは、出現の等確率性という点で、通常の統計・確率的な意味でのランダムをそのまま幾何学の問題に移行させたものであると言うこともできる．この意味から、積分幾何学に於けるランダムも狭義のランダムであり、常識的なランダムの定義となっている．ただし、注意を要するのは、それが幾何学上の問題であるということであり、特にランダムな直線の場合にはその測度の取り方によって、幾つかの異なった定義になりうるということである．有名なBertrandの逆説も、ここ

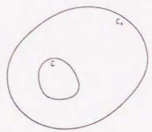


fig-13

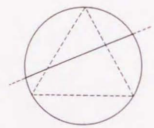
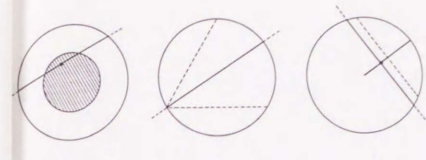


fig-14 "Bertrandの逆説"を引き起こす問題



ア）中点が一様に分布　イ）端点が一様に分布　ウ）中点が半径上で一様に分布

fig-15 代表的な３つの考え方（出典：［35］）

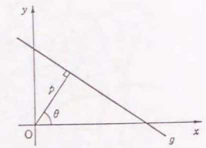


fig-16

に由来するものである．

① ランダムな点

ランダムな点の定義は、直感的にも分かりやすい．正確には、一様ランダムな点である．fig-13のように、領域C_0の内部に領域Cがあるものとする．このとき、C_0内にある点がCに含まれる確率をP、C_0、Cの面積をそれぞれS_0、Sとして、P＝S／S_0となるとき、このC_0内の点を一様ランダムな点という．ここで、この面積に相当するものが点の集合の測度であることは言うまでもないだろう．即ち、点の集合Xの測度は、次式で表すことができる．

$$m(x)=\int_x dxdy$$

このとき、この測度m（X）は、Haarの測度としての３条件を満たしている．

② ランダムな直線

直線の場合には、点の場合ほど単純にはいかない．そこでは、一様な直線とは何かということが問題となるのである．

［Bertrandの逆説］

まず、有名なBertrandの逆説について復習しておく．fig-14のように、"半径rの円とこれに交わるランダムな直線があるとき、この直線の円内での長さ（弦の長さ）が、この円に内接する正三角形の一辺の長さ（√3ｒ）よりも大きい確率を求めよ"という問題に対し、実に様々な解答がありうるというのが、逆説と呼ばれている所以でもある．代表的なものとしては、次の３つの相異なる解答がある．

ア）弦の中点が、この円の中で一様に分布すると考えると、この中点が円の中心より半径ｒ／２以内にありさえすれば弦の長さは√3以上となるから、円の面積比より、求めたい確率は、１／４となる．

イ）弦の端点が取りうる位置の可能性に着目するなら、例えば、弦の一方の端点を内接している正三角形の一点に固定したとき、弦の長さが√3ｒよりも大きくなる場合にもう一方の端点が取りうる位置の範囲は、円周上に於いて正三角形の２辺に囲まれた１／３の弧の上に限られるから、求める確率は１／３となる．

ウ）弦の中点が半径上で一様に分布すると考えることもできる．このとき、半径の方向は任意の角度に固定してもかまわないから、半径の中点ｒ／２のところで弦の長さが√3ｒとなるから、求めたい確率は１／２となる．

この他にも、求める確率を任意の数にすることができるやり方もあるが、このような違いは直線の測度の取り方がそれぞれ異なっていることによっているのである．それでは、Haarの測度としての３条件を満たす直線の測度とはどのようなものであるのだろうか．

［直線の集合の測度］

fig-16のように、平面上に直線Xがあるとき、原点からこの直線に向かっておろした垂線の長さをp、この垂線とx軸とのなす角度をθとする．このとき、直線の集合Xの測度m（X）は、次式で求められる．

$$m(x)=\int_x dp\alpha\theta$$

計算は省略するが、この測度はHaarの３条件をみたし、これによって確率の定まる直線がランダムな直線と呼ばれている．このことは、実はx-y平面上でのランダムな直線とは、p-θ平面に於けるランダムな点に対応していることを表しているのである．この観点からすると、Bertrandの逆説の解答はウ）が正しいことになる．

３）計算幾何学

ａ）画像処理と計算幾何学

図形や図像を扱うことは、現在のコンピュータが最も苦手としている所である．圧倒的な量の計算と瞬時の処理速度を誇るコンピュータも、ことパターンの問題に対しては、現在のところ、人間の持つ高い能力に遠く及ばない感がある．しかし、現代に於いては、処理すべきデータ量が飛躍的に増大し、もはや人の力によってだけでは到底処理しきれないような問題が一方に存在するのもまた事実である．計算幾何学は、図形や図像の問題に関して、このような要請に答えようとするための研究分野の一つである．図像の問題をコンピュータで扱おうとする分野は、大きく分けて画像処理と呼ばれる分野とこの計算幾何学に分けることもできるが、両者は密接に絡み合っており、むしろ計算幾何学も、広くは画像処理の中の一分野を形成していると言った方が、より適切であるかも知れない．なぜなら、計算幾何学の対象とする範囲はかなり明瞭に限られてはいるが、画像処理の扱う広い問題の中で、この計算幾何学の手法が必要となってくることもあり、また逆に画像処理の分野に於ける処理の手法なくしては、計算幾何学も成立しえないという相互に関連した関係をもって

いるからである．このうち、前者の画像処理に関わる技法は、図像をコンピュータによって扱おうとするときの基礎となるものであり、数理的あるいは計量的な形態学を指向する研究分野に於いて必須の事項にもなっている．そして、この画像処理の分野には、いわゆるパターン認識や画像理解と呼ばれる人間の高い知的認識能力と深い関連のある研究分野も含まれている．人間は、あるパターンを見て、それと似ているものを瞬時に見分けることができるが、コンピュータにとってはそれほど容易なことではない．この方面で、コンピュータが人間の能力に追い付くのは、まだ当分先のことになるだろう．おそらく、現在のフォン・ノイマン型と呼ばれる逐次処理型のコンピュータでは、図像という同時的多数の処理能力が要請される問題には全く不向きなのであり、スキャニングによって画素を一つ一つ調べていくやり方には明らかな限界がある．パターンの”全体性”に立ち向かう為には、ハードウエアそのもののアーキテクチャの変更が不可避なのであり、また、そのような研究も現在盛んに進められているはずである．もし、パターンの類似と差異の問題を、人間の直感と結び付けて捉える立場をとるなら、それは正しく画像理解の課題である．ただし、私は、人間の直感を無視するというわけではないが、必ずしもそれと直に結び付けて捉える必要もないという立場で、本論に臨んでいるものである．

　一方、計算幾何学の扱う課題は、これらとは少し趣を異にしている．そもそもは、コンピュータによって初等幾何学的な問題を数値的に解こうとするときの、効率的な解法を得ようとする要請に端を発したものである．Yele大学の大学院生だったM. I .Samos は、それらの問題に関して、算法理論、特に計算複雑度の理論の立場から独創的な改良を提案し、問題自身の複雑度によって解法の最適性を論じて、その基礎を確立した．[37]

b）計算幾何学の主要課題

計算幾何学は、具体的な”問題”と、その効率的な解法とのセットから構成される技法の集合体であるということができる．

　問題には、位相幾何学・組み合せ幾何学的側面と計量幾何学的側面とがある．位相的・組み合せ的側面とは、対象の間の接続関係、包含関係などであり、計量的側面とは、対象の定量的属性、すなわち点の座標、線分の長さ、面分の面積などで

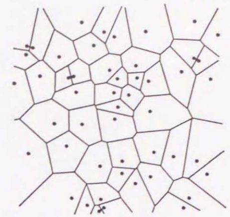


fig-17　Voronoi 図

ある．これら二つの側面は、あるときは相反するあるいは相補的な性質を有するが、またあるときは両者が一体となってさらに密接な関係を生ずる．[36]

例えば、平面上に於ける二つの直線が交わっているか否かといった簡単な問題でも、人間であれば一目で判別できるのに対して、コンピュータの場合は幾つかの計算を必要とする．問題が更に複雑になってくると、より込み入った計算をしなければな解けなくなってくるのである．また、問題によっては、むしろ人間にもうまく解けないか、解くのに非常に時間のかかる場合もある．このような問題の種類によって、計算幾何学に於ける主要な課題が幾つかに分類されているが、それらはまた相互に関連し合っており、厳密に分けられているわけではない．

① 幾何学的探索問題

　点位置決定問題および領域探索問題等がある．有名な郵便局問題は、点位置決定問題に帰着される．

　[郵便局問題]

　ある都市に郵便局がｎケ所設置されているとする．新しく家が建築されたとき、その家から最も近い郵便局はどれか．

　これは、全ての郵便局までの距離を調べてみれば済む問題ではあるが、郵便局の数が多くなってくると、そのままではかなり手間のかかる仕事になる．むしろ、調べる前に前処理を施して、あらかじめ点の分布から誘導される幾何学的構造を求めておけば、もっと小さな手間で探し出すことが可能になる．このときに利用するのがVoronoi図と呼ばれるものである．

② Voronoi 図構成問題

　Voronoi図というのは、fig-17に示されるように、平面上の点を、例えばそこから一番近い郵便局の勢力圏に割り当てて分割したものとして定義されるものであり、これを効率的に作成するアルゴリズムが開発されている．また、これを用いて様々な応用がなされている．Voronoi図構成問題に関連して、Delauney網作成問題、最大空円問題、最小木問題、最近点問題等がある．このうち、最近点とは、文字どおりある点から最も近い点のことであるが、最近点はVoronoi辺を挟んで隣り合うという性質を有しており、先程の郵便局問題も、この性質を利用すれば効率的に解くことができるのである．ただし、ある点Pの最近点がQであるとき、このQの最近点がPになるとは限らない．な

お、互いが最近点である組は、相互最近接ペアと呼ばれる.

③　多角形問題

多角形の単純性や凸性を判定する問題が多角形問題である.

④　重なり問題

線分の交差判定や多角形の交差判定がある.

⑤　凸包問題

凸包とは、平面上の点の集合に関して、それらの点を含む最小の凸多角形のことである. 凸包の構成問題には、平面上の点列だけではなく、多角形の集合に関する凸包を求める問題も含まれる. 幾何学的な理論の多くが凸領域を中心として展開されているのに対し、例えば都市に分布する面的要素には非凸的な要素が非常に多いので、特に、都市の問題を扱うためには、この凸包問題が重要となる.

⑥　平面最小重みマッチング問題

平面上に与えられたｎ（偶数）個の点に対して、２点ずつのｎ／２個の対のうちでその長さの総和が最小となるものを求めるという問題である.

⑦　地理的・幾何学的最適化問題

例えば、幾何学的最適化問題は、広範囲の多数の問題を含み、先述した最大空円問題や最小木問題もこれに含まれる. その他、最大空正方形問題、最大空長方形問題、最小包含円問題、最小包含長方形問題、最遠点対問題、最小面積三角形問題、円配置問題、長方形配置問題等がある.

この他にも、計算幾何学が扱う問題には、様々なものがある. そこで得られた成果は、単なる実用性を越えて、幾何学的な構造に関する種々の知見を与えてくれるものである. しかしながら本論は、何かを探索したり、判定したりする問題とは、その目標に於いて異なるものであるために、対象とするパターンをコンピュータ処理する際の具体的な場では多少参考になる部分もあるものの、計算幾何学が蓄積している膨大な技法群をうまく使うことによってランダムパターンが記述できるというようなアイデアは、今のところ得られていない.

[35] 腰塚武志：積分幾何学について（1）
（オペレーションズ・リサーチ, 1977年１月号）

[36] 日本建築学会編：建築・都市計画のためのモデル分析の手法　（井上書院., 1992）

[37] 伊藤正夫監修：計算幾何学と地理情報処理
（共立出版, 1986）

1.2.3　物理科学関連

1）ランダム系の物理学 [38] [39]

物性物理学 [40] の分野に於いては、実に30年以上も前からランダム系の問題を扱うための様々な試みがなされており、また、近年特に注目を浴びている分野であるが、規則系には無い種々の困難 [41] が伴うために物理学全体の中でみれば、やはりまだ発展途上の分野に留まっている. しかし、この分野に於ける知見や考察によって、ランダム系に付随する問題の多くが明らかにされるとともに、秩序や無秩序、不規則と無規則の捉え方等についても参考になる点が多く、興味深い.（但し、物理学の問題は分析対象があらかじめ存在し、そこに内在する法則を明らかにすることが主眼であるため、ある意味ではアプローチが直線的であり、本論のように分析対象を限定せず、むしろランダム性の記述法そのものに意識が向かっている研究とは、おのずから目標が異なっていることも指摘しておく必要があろう.）

a）ランダム系の物理学における乱れの分類 [38]

乱れとは、相対的に規定される概念であることを、以前にみた.（1.1.1節参照）

やはり、我々の認識は、基準の設定とそこからの距離の評定でしか行ない得ないのであろうか. しかし、それにしても、まずは乱れについて知ること、乱れの様態について明らかにしてみること、それにより、乱れを定義し分類してみること、が重要である. それは同時に、我々が意識的にせよ無意識にせよ、基準として想定している”秩序”のあり様を明らかにすることにほかならない.

[38] 前出：ランダム系の物理学

[39] 前出：乱れの物理学

[40] もちろん、物性よりむしろ熱力学や統計力学の方がランダムな系を対象として古くから研究が行われてきた. それらの分野については、散逸系の理論の中で触れる.

[41] ランダム系物理学の問題が難しい理由の代表的なものとして次のようなものがある.

1. 例えば、電子の関与する物性を求める際、結晶に対するブロッホの定理に相当するような、問題を簡略化するための統一原理がいまだ発見されていないこと. 従って、ランダム系の問題は、おびただしい数の多体問題となる.
2. 同じ巨視的な状態に対する微視的な状態がただ一つではないこと. 即ち、ある条件例えば密度とか、構成要素の濃度比とかが与えられている場合、その条件を満たす微視的な原子配置は複数個可能になる. それら複数個の配置のうちのどれが実現されていても、巨視的に観測される物性からは、区別がつかない. 従って、巨視的な物性を理論的に求めるには、どのような微視的配列が可能であるのか、またそれぞれの配置はどういう確率で実現されるのかをまず知らねばならない.
3. そもそも、物理学の基本的な方法は、対象をできるだけ単純化し、条件をできるだけ純粋に、かつ明確にして不定な要素を排除することにより、物質の因果関係を究め法則性を見だすものであるが、ランダム系の問題はこの哲学に反するものがあるため扱いにくい、という見解がある.

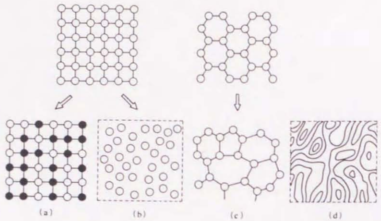


fig-18　乱れの分類（出典：[42]）

空間的な乱れの様態は、次のように分類されている．

(a)セル型の乱れ（置き換え型の乱れ、成分の乱れ、定量的な乱れ）
　　混晶、不規則合金、不純物半導体、など

(b)構造型の乱れ（位置の乱れ、定量的な乱れ）
　　液体、アモルファス金属、など

(c)トポロジー型の乱れ（ネットワークの乱れ）
　　酸化物ガラス、アモルファス半導体、など

(d)連続型の乱れ
　　巨視的なランダム媒質、など

(a)は、原子配列の位置関係そのものは規則的でありながら、格子点を占める原子の種類がランダムであるものをいい、セル型の乱れまたは置き換え型の乱れと呼ばれている．

(b)は、原子の位置そのものが、ばらばらに乱れたものであり、構造的型の乱れまたは位置の乱れと呼ばれている。

(c)は、原子の位置は乱れているものの、共有結合の手（ボンド）のネットワークは保存されているものをいう．これは、トポロジー型の乱れと呼ばれている．

(d)は、連続型の乱れと呼ばるもので、空間的に分布するある物理量を等高線表示したときに現われる乱れの様相である．(d)だけはかなり巨視的なスケールで現われるもので、(a)〜(c)の微視的なレベルでの乱れとは異なっている．

b）短距離秩序と長距離秩序

(a)〜(c)の図をみれば明らかなように、これらは基準となる秩序を何らかの形で壊したものとして乱れが定義されている．その中でも、配位数や原子間距離といったそれぞれの原子のまわりで成立している秩序は、短距離秩序ＳＲＯ（short range order）と呼ばれる．それに対して、結晶に於ける原子の位置関係のように、比較的広い範囲で成立している秩序は、長距離秩序ＬＳＯ（longe range order）と呼ばれている．(a)〜(c)では、厳密な意味での長距離秩序は失われているが、短距離秩序は残っている．(b)に於いても”完全乱れ”ではなく、化学的な凝集力によって短距離構造が支配されており、それぞれの原子に固有のＳＲＯをつくり出しているのである．このような秩序は、比較的分かり易いものであり、例えば、位置的には乱れたものであっても、スピンのように方向性を持っているものであれば、距離的に隔てたものどうしの相関として、長距離秩序を措定することが容易にできる．しかしながら、向きその他の属性を何ら持たない一般のランダムパターンについて、これらの短距離秩序や長距離秩序がどのように定義できるのかは、中心的な課題の一つとして残されている．

それでは、”乱れていない”完全結晶中で見られる秩序とはどのようなものであるのかを、もう一度きちんと確認しておくことにしよう．

c）並進対称性、回転対称性、鏡転対称性 [42]

完全結晶中で見られるような原子や分子の規則正しい並び方のことを、数学的には、並進操作の下で格子が不変である、または、並進対称性を持っていると言う．即ち、結晶中では、ある点r に於ける物理的な状況が、

$$\mathbf{r}+\boldsymbol{l} \equiv \mathbf{r}+l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+l_3\mathbf{a}_3$$

で表わされる任意の点に於いて正確に再現されていることを指す．ここで、$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$、$\mathbf{a}_3$は、同一面内にない三つのベクトルであり、l_1, l_2, l_3は、整数である．この他、実際の結晶では、ほとんどどれでも、これらの並進操作に加えて点群操作が存在し、この点群操作、つまり、軸の回りの回転や、鏡映、反転などに関しても系は不変性を持っている．

よって、完全結晶にみられる秩序とは、並進対称性や点群操作に関する系の不変性のことであると言い換えることができる．

[42] 前出：乱れの物理学

2）非平衡物理化学（散逸系の理論）

a）保存系と散逸系

散逸系とは、保存系に対置されるものであり、様々な対概念によって、説明することができるものである．散逸系を扱う物理化学の主題は、一言で言えば、それまで生物系にのみ特有のものと考えられていた、自己組織化[43]の過程を探求することであり、また「時間」の問題を扱うことでもある．更に、例えばプリゴジンはまた、複雑性の科学の名の下に、次節で見るカオス理論も含めて、偶然と必然の関係をも、統合化しようとしている．[44]（私見では、偶然性と必然性を巡る思考には、いまだに大きな問題が含まれていると思われるのだが．）

古典科学の時代は、いわば機械主義的な世界観の時代であり、原理的には、精度良く決められた初期条件によって、あらゆる事象が決定されうると考えられていた．そこでは、すべての部分があたかも世界機械の歯車のように組み合わされていた．そして、全てが予測可能であるかどうかは別として、この機械論的世界観に適合するのが、ニュートン力学を代表とする保存系の力学である．保存系とは、「閉じた系」であり、別の言い方をすれば、外部との交換のない「孤立系」のことである．そこでは、様々なものが保存される．エネルギー保存の法則は、その端的な例であろう．それゆえこれは、可逆的な過程からなる系でもある．例えば、摩擦のない孤立系に於ける振り子の運動や調和振動子と呼ばれる一端が固定された水平で摩擦のない弾性バネの他端に、ある質量を取付けたときに示されるような運動がそうである．ただし保存系が、古典力学に制限されてしまうという訳ではないということは注意を要する．マクスウェルの方程式で記述される真空中の光の伝播は、電磁気学に於ける重要な保存系の例である．この機械的世界観あるいは古典科学に対して、まず１９世紀の初めに、熱力学の分野から、そこには「時間」の観念がないとして批判が加えられた．またもし世界が巨大な機械であるとしても、その機械はエントロピーを増大させながら停止する方向に向かっている、と彼らは主張したのである．一方、生物学の分野では別の考え方が持ち込まれた．世界機械は確かに停止しつつあり、エネルギーと組織を失いつつあるだろうが、少なくとも、生物学的な系はますます成長し、より組織化の方向に向かっていると．２０世紀の初頭、世界機械は観測の問題とともに、その観測者の位置、あるいは、そのあらゆる実用的な目的に対して、異なって見え出したが、アインシュタインは決して神のサイコロ遊びを認めなかったし、量子力学の登場によってかなり世界モデルが揺さぶられたとは言うものの、この機械のパラダイムは依然として物理学の「基準点」で在り続けている．[45]次に見る最先端のカオス理論でさえ、扱う対象は決定論的なものに限っている．もっとも、そこではもはや、どんなに精度良く初期条件を測定しても、系の最終的な振る舞いを予測することは（それが決定されているにもかかわらず）困難であるという見解へと達してはいるが．これに対して、プリゴジンとその共同研究者からなる「ブリュッセル学派」の人々は、ニュートン的なモデルを包含しつつ、それを拡張することを試みたのである（このあたりの事情は、相対性理論がニュートン力学を包含したのと似ている）．彼らによれば、機械の時代の伝統的科学は、安定・秩序・均質・平衡を強調する傾向があり、ほとんどの場合、閉じた系や線形関係だけを対象にしていたが、その対象範囲を拡げることによって、逆に、無秩序、不安定性、多様性、非平衡、非線形関係そして時間が重要性を帯びてくると言うのである．古典的な保存系に対するものは、散逸系と呼ばれている．例えば、摩擦のある系は、散逸系の非常に単純な例である．つまりそれは、外界あるいは環境と常に交換が行なわれる「開いた系」のことである．そこでは、可逆的な過程ではなく、不可逆な過程が主要なものとなる．

b）散逸構造と平衡構造

散逸系（開放系）に於いて、特に「平衡から遠く離れた状態」にある系が示す興味深い協同現象、あるいはそこで初めて現われる巨視的な構造のことを、プリゴジンは散逸構造と呼んだ．ここでの構造には、空間的な構造（空間パターン）だけでなく、時間的な構造（時間的リズム）その他も含まれる．主として熱平衡低温相に於いて見られる、平衡構造（平衡状態に於ける構造）と区別してこの語が用いられる．また、平衡構造がエントロピーを生成しないのに対して、散逸構造は、エントロピー生成を伴うという点でも対置される概念である．例えば、平衡構造の端的な特徴は均質性と対称性（統計的な意味での対称性も含む）であり、その極限には、一方に於いて、完全結晶中で見られるような静的な「秩序」があり、もう一方には、「熱的な死」と呼ばれるエントロピーが最大の状態に見られるような均質性の極　―これはもはや、構造のない構造である―　がある．

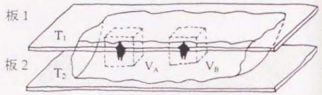


fig-19　二枚の板と液体，微少観測者の関係

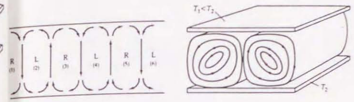


fig-20　ベナール細胞　（出典：[44]）

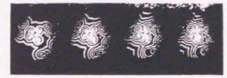


fig-21　　　BZ反応
（出典：物理学大辞典、丸善、1989）

それは、安定性や不変性と結び付いている．これに対して、散逸構造に於ける「秩序」（構造）は、かなり変質しており、静的ではなく動的で、変化の観念と結び付き、強制力よりもむしろ「自発的な」協同作用あるいは相関のことを指している．あるいは、後に見るように、対称性よりもむしろ、空間的、時間的な対称性の破れによって「秩序」が生じると見做す．散逸構造は、平衡構造の一様性に対して、多様性を生み出すものであるが、そこでは、基本的に不安定性が大きな役割を果たしていると捉えられている点でも大きく異なるものである．この散逸系をはじめとする複雑な系の極限には、生物系がある．次に、散逸構造の一例として、熱対流とＢＺ反応を挙げておく．

［熱対流］

1900年にフランスの物理学者ベナールが行なった簡単な実験を基に説明を加えていく．今、２枚の平行板の間に液体、例えば水の層があるものとする．ここで、平行板の大きさは液体の厚さよりもずっと大きい．この液体は、ある温度を持っているが、そのまま放置しておくと、速やかに均質な状態へと移行していき、どの部分も統計的に見て同一の状態となる．最終的には、この液体は外部環境と同一の温度を持つに至るであろう．この状態が平衡状態である．ここでは、全てにわたって均質性と対称性が支配しており、どの部分も他の部分と同一である．もし、この液体の内部に微小な観測者がいたとしても、彼には自分がどこにいるのかを見極めることはできないであろう．境界面に達しない限り、全ての位置で密度も温度も同一であり、それ故、この微小な観測者が空間の観念を得るための内在的な方法は存在していないことになる．

次に、この平行板のどちらかに短時間の熱刺激を加えたとする．このとき、その部分の温度は瞬間的に変わり、系の性質は局所的に変化を被ることになる．これが摂動と呼ばれるものである．しかしながら、この熱刺激が短時間のものであれば、もともと平衡状態にあった系は、急速に元の状態へと戻っていく．比較的短時間に摂動の影響は失われ、系はその痕跡を留めることなく、元の状態へと帰されるのである．従って、ここでは全ての瞬間が同一であり、「時間」の観念が生じる契機すら与えられていない．

今度は、下から連続的に液体の層を熱することを考える．加えられる熱エネルギーが比較的少ない場合には、熱は下の板から上の板へと伝達された後、外界へと放出されていく．ただし、ここではもはや系の状態は均一ではなく、下から上へと線形的で連続的な温度変化及び密度変化が引き起こされている．この現象は、良く知られている様に、熱伝導と呼ばれているものである．ここでの振る舞いは、まだ単純さが支配しているが、更に熱を加え続けていくと、ある時点で液体が突然体積運動を行ない始める．このときの温度を臨界温度あるいは臨界点と呼ぶ．そこでの運動は、もはや乱雑ではなく、fig - 20 のように、渦を巻くような幾つかの部分（ベナール細胞と呼ばれる）に分けられて、協同的な振る舞いを開始するのである．ある液体分子は、どこかのベナール細胞に属し、近傍の分子と同じ方向に向かって移動して行く．もし、先程の微小観測者がここに存在するなら、様相が一変したことに気づく筈である．そこではもはやそれぞれの部分は同一ではなく、例えば、回転の向きを観測することによって、自分の位置を標定するための根拠を得ることができるであろう．つまり、そこでは対称性が破られることによって（対称性の破れ）、空間の概念が発生してくるのである．また、近傍の分子の協調した振る舞いによって、新たな秩序が形成されたことを見て取れる．そこでの秩序は、コヒーレンスや相関に関わっている．ここに見られる様な分子の構造化が、散逸構造と呼ばれているものである．

更に熱を加え続けていくと、今度は２番目の臨界点へと達する．このときの変化は、より劇的なものである．突然、新たな乱雑性が現われ出す．これが、まさにカオス的な、乱流と呼ばれるものの前兆なのである．そこでの変化は、もはや不連続で、様々な選択肢を持ち、結果を予め予測することが非常に困難なものとなる．

［ＢＺ反応］

この他、散逸構造の例として、化学反応系がある．特に、ＢＺ反応（ベルーソフ-ジャボチンスキー反応）として知られているものは有名である．そこでは、時間的に振動する反応状態（時計の様な振る舞い—時間対称性の破れ）とともに、種々の空間パターンの発生を見てとることができる．(fig-21)

[43] 現在、オートポイエーシス論の提起を受けて、自己組織化の論理そのものが改良されつつある．
[44] 前出：複雑性の探究
[45] I・プリゴジン／I・スタンジェール：混沌からの秩序（みすず書房、1987）

3）カオス理論

ある系に於いて、その初期状態が決まっているとき、それ以降の状態が偶然性の入り込む余地の全く無しに決まるならば、その系は決定論的である、あるいは確定系である、と言う．（それに対して、初期条件以外に途中で偶然性の影響を受ける運動は確率過程と呼ばれる．）例えば、２体問題として見たときの天体の運動は、見事なまでにニュートンの運動方程式によって記述されている．長い間、そしてごく最近まで、決定論的な系は、予測可能であると信じられてきた．ところが、決定論的であるにもかかわらず、予測不能であるような現象（運動）のあることが分かってきたのである．このような現象、あるいはその振る舞いのことを総称してカオスと呼ぶ．これは、言い換えれば、規則の作り出す複雑な不規則運動のことである．しかも、ごく簡単な規則から非常に複雑な現象あるいは挙動が起こり得て、最終的には、その不規則さがサイコロを振るのと同程度に無秩序になってしまうというような場合があり得るのである．このことは、複雑性や予測不可能性に関する新たな認識を呼び覚ました．これらはほとんど全て、ここ最近の20〜30年間の成果である．もっとも、このカオスを扱うための数学理論である現代力学系の先駆者ポアンカレは、既にこの現象の持つ重要性に十分気づいていた．ただし、それをカオスとして認識するまでには至らなかったのである．このようなカオスと呼ばれる現象の特徴の一つに、初期値やパラメータに関する鋭敏な反応性がある．同じ規則に従っていながら、初期値あるいはパラメータがほんの少しずれただけでも、全くかけ離れた結果が導かれる．従って、その系が最終的にどのような振る舞いを示すのかを知るためには、ワンステップずつ、その動きをトレースしてみる以外に方法はないのである．非線形なものであれば、簡単な方程式からでもカオスが生じることを次に見てみよう．

a）１次元カオス

１次元カオスとは、次のような１次元の差分方程式から得られるカオスのことである．

$$x_{n+1}=f(x_n)$$

特に、$x\in[0,1]$ のように区間を限った場合は、離散時間の区間力学系となり、そのとき得られる数列 $\{x_n\}$ のことを、軌道と呼んでいる．この中でも、次のような関数形によるものは、ロジスティック方程式（ロジスティック写像）と呼ばれているものである．

$$x_{n+1}=a\,x_n(1-x_n)$$

例えば、P・F・フェアフルストは、1845年に成長の限界を取り込んだ成長法則を定式化したが、《彼はひとつの生物の群れはせいぜいある一定の最大個体数Ｘを維持することができるのにすぎないのであって、個体数がＸに近づけば個体数の増加率は下がらざるを得ないと論じた．》[46] 実のところ、フェアフルストの考えた増大法則は、彼自身が当初考えていた以上の複雑な挙動を示し、特に増加率の高い場合に、それが乱流のある側面を精密に描写していることを1963年気象学者ローレンツが見い出したのである．例えば、ある時点での、ある生物の個体数を x_0 として、それから n 年後の個体数を x_n とすると、この生物の年間増殖率Ｒは、$R=(x_{n+1}-x_n)/x_n$ と表される．もし、この率が一定で定数 r に等しいならば、この変動は次のように書くことができるだろう．（このような増大法則は線形であると言う．）

$$x_{n+1}=(1+r)\,x_n$$

ただし、このままだと、n 年後の個体数は、$x_n=(1+r)^n x_0$ となり、指数関数的に増加の一歩を辿ることになる．しかし、限られた餌の下では、このように増加し続けることは不可能であると思われる．そのため、フェアフルストは、最大でもある一定の個体数しか育たないと考え、個体数に依存する増殖率が $1-x_n$ に比例すると仮定した．つまり、$R=r(1-x_n)$ とおいたのである．このときの変化の法則は、

$$x_{n+1}=(1+r)\,x_n-r\,x_n^2$$

となり、上述のロジスティック方程式に近似する．これは先程とは違って非線形のプロセスを与える．ここでの r は増殖パラメータであり、$x_n<1$ であれば、個体数は増殖していくが、$x_n=1$ となれば増殖は止まる．$x_0=0$ の場合と $x_0=1$ の場合には何も変化しないが、$r>0$ で、$0<x_0\ll 1$ ならば生物は増大していく．ただし、パラメータ r の値によって、その増減の仕方は大きく異なるのである．$r<2$ のとき、その挙動はおとなしく、最終値 $x_n=1$ へと落ち着いてゆく．ところが、$r>2$ のときには、もはや最終値は１とならずに、パラメータの値の増加に伴って、複雑な挙動を示し始める．例えば、$2\leqq r<2.449$ のときには、二つの値を交互にとるような周期的な振動（２周期）へと漸近してゆく．$r=2.5$ のとき、このプロセスは、周期が４の安定な振動へと漸近する．このようにして、$r=2.570$ までは周期が２倍２倍となってゆく現象が見られる．それ故、このような分岐は周期倍分岐と呼ばれている．ところが、r＝

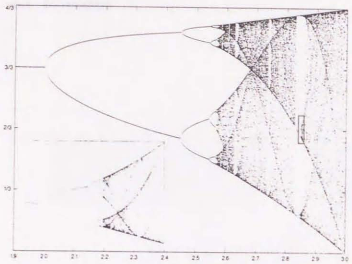


fig-22　左下の小さな図は、図中の黒枠で示した部分の拡大図である　（出典：[46]）

2.570を境にして、このプロセスは周期的では無くなってしまう．fig - 22 には、増殖パラメータ r の値が1.9から3.0の間をとるとき、ある初期値から出発して5000回反復した後の、120回の反復によって得られる挙動が示されている．このうち r ≦2.570以降で、白く帯状となって見えている領域は、窓と呼ばれ、周期解をとる部分である．それ以外の領域がカオス領域であり（熊手型分岐と呼ばれる）、その値は無限個の異なった値を不規則に跳び回り、果てしなくさまよい続けるのである．従って、その長期的な挙動がどうなるのかを予め予測することはもはや困難となる．

第 n 番目の分岐が起こる増殖パラメータの値を r_n とすれば、順次出てくる区間の長さの比の値

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$$

がある値に収束することがグロスマン、トメ、ファイゲンバウムらによって発見された．即ち、

$n \to \infty$ のとき、$\delta_n \to \delta = 4.669201660910 \cdots$

実は、これと同じ数がこのフェアフルストの力学系以外でも出現し、多くの１次元力学系に於ける周期倍分岐を特徴づけるような普遍定数であることが、ファイゲンバウムによって示されたのである．そのため、この $\delta = 4.669201660910 \cdots$ は、ファイゲンバウム定数と呼ばれている．

一番最初に挙げたロジスティック方程式についても、フェアフルストの力学系に触発された数理生態学者メイが、初期値 $x_0 \in [0,1]$ 、$x \in [0,1]$ として、$0 \leqq a \leqq 4$　の区間でその挙動を調べたところ、$3 \leqq a \leqq 4$　の範囲で同様の挙動を示すことが明らかになった．このときのカオス領域が始まる点は $a_\infty = 3.570$　である．ここでのカオス領域に於ける挙動は、後に述べるようなストレンジ・アトラクターになっているのであるが、この部分の特性は、次のようなリアプノフ指数と呼ばれる量によって特徴づけることができる．リアプノフ指数とは、近接した２点から出発した２つの軌道の時刻 $n \to \infty$ での乖離度を測定するもので、

$$\lambda(f) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \frac{df^N(x_0)}{dx_0} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log \left| f'(x_i) \right|$$

で表される．$a > a_\infty$ のカオス領域では、次の２つの場合のうち、いづれかに限られる．[47]　即ち、

① 周期点が存在し、リアプノフ指数は負である．

② 非周期的ではあるが有界な軌道を与える初期値 x_0 が非可算個存在し、リアプノフ指数は正である．

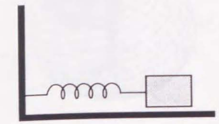


fig-23　調和振動子

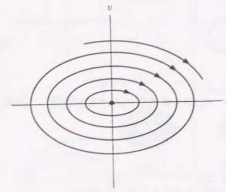


fig-24　保存系の場合の相空間

さて、カオス領域の中間には大きな３周期の窓があるが、この３周期点の出現には次のような意味がある．それについて説明するには、シャルコフスキーの順序とその意味するものを示した定理について述べなければならない．[48]

［シャルコフスキーの順序］

自然数全体に対して、次の順序をシャルコフスキーの順序と呼ぶ．

$$3 \to 5 \to 7 \to \cdots$$
$$\cdots 2 \cdot 3 \to 2 \cdot 5 \to \cdots$$
$$\cdots 2^2 \cdot 3 \to 2^2 \cdot 5 \to \cdots$$
$$\cdots 2^3 \cdot 3 \to 2^3 \cdot 5 \to \cdots$$
$$\vdots$$
$$\cdots \to 2^n \to \cdots \to 2^3 \to 2^2 \to 2 \to 1$$

[シャルコフスキーの定理]

$f(x)$ を $I = [0,1]$ から I への連続関数とする．f が k 周期点を持てば、$k \to n$ であるような任意の n に対して、f は n 周期点を持つ．

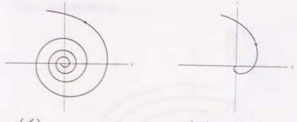
更に、カオスという用語を初めて用いたリー・ヨークによる有名な論文の中で、次のことも示された．

［リー-ヨークの定理］

p 周期点を持ち、それより「上の」シャルコフスキーの順序の n に関しては、n 周期点を持たないような、$I = [0,1]$ から I への連続写像が存在する．

b）相空間

系の状態を表す n 個の状態変数で張られたパラメータ空間のことを、状態空間（state space）または相空間（phase space）と呼ぶ．系の状態の変化は、相空間中の連続的な状態点の軌跡として描かれる．例えば、fig - 23 のような調和振動子と呼ばれるものの運動について考えてみる．床の上に一端を固定してばねを置き、他端に物体（質量）を付けて、ばねを伸ばすか縮めるかしてから手を放すと、物体は振動を始める．このとき、床が滑らかで摩擦がないとすると、この振動は保存系に於ける運動の例となる．ここで、位置を表す変数 x とそのときの速度を表す v という２つの変数が張る相空間上でこの運動を表すと、fig - 24 のように閉じた閉曲線として示される．この場合、閉曲線として表された状態点の軌跡が軌道と呼ばれるものである．この図からも分かるように、保存系に於ける調和振動子の運動は周期的であり、一回転すると元の状態に戻ってくる．このときの原点は釣り合いの位置を示し、物体の状態は変化せずに



（イ）　　　　（ロ）

fig-25　散逸系に於ける相空間　（出典：[49]）

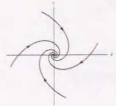


fig-26

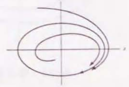


fig-27　リミットサイクル

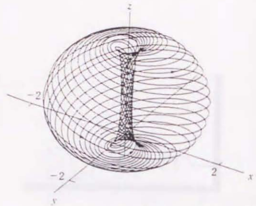


fig-28　準周期アトラクター
（出典：[47]）

同じ状態を持続し続ける（この場合は静止）ことに対応している．このような点のことを定常点と呼ぶ．一方、床が滑らかではなく、摩擦があったとしよう．このときの運動は、徐々に減衰し始めてついには静止状態へと至るであろう．そこではエネルギーは保存されず、徐々に失われていくことになる．これが散逸系と呼ばれるものである．先程と同様に、この運動を相空間上で表すなら、fig - 25 の（イ）あるいは、摩擦が大きいときには（ロ）のようになる．また、様々な初期状態から出発して流れを描くと、fig - 26 のように表される．そこでは、もはや周期軌道はなくなって、全ての流れ（軌道）が原点に向かって引き寄せられていく．このときの原点はアトラクターと呼ばれる．ただし、アトラクターは点とは限らない．もう少し詳しくいうと、アトラクターとは、$n\to\infty$ の極限に於いて、あらゆる初期値から出発した系の状態が、最終的に引き寄せられていく極限集合のことであり、あるいはまた別の言い方をすると、不変集合のことでもある．それは、自分自身を自分自身に向かって写像する点から構成されているものである．特に散逸系のカオスの場合には、この相空間上での非常に複雑な挙動や興味深いアトラクターの存在を見て取ることができる．

c）様々なアトラクター

先程の例に見られた摩擦のある系での調和振動子に於ける原点は、平衡点アトラクターと呼ばれている．また、振幅が大きいときには正の摩擦が働き、振幅が小さくなると負の摩擦が働くような場合の相空間軌道は、fig - 27 として示されるが、このときの周期軌道はリミットサイクルと呼ばれ、内側および外側から流れが巻き付いていく線状（1次元）のアトラクターとなる．このようなアトラクターは、周期アトラクターと呼ばれる．これらの平衡点アトラクターや周期アトラクターは、構造が比較的単純であり分かりやすいが、例えば3次元の相空間になると、より複雑なアトラクターが存在するのである．例えば、3階常微分方程式がつくり出す準周期アトラクターの例を見てみよう．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(z-\beta)x-\omega y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=\omega x+(z-\beta)y \\[2ex] \dfrac{dz}{dt}=\lambda+\alpha z-\dfrac{z^3}{3}-(x^2+y^2)(1+\rho z)+\varepsilon z x^3 \end{cases}$$

これは、分岐現象を研究するためにアメリカの数学者ラングフォードが導いた方程式である．このとき、パラメータ及び初期値を（$\alpha,\beta,\lambda,\omega,\rho,\varepsilon$）＝（1,0.7,0.6,3.5,0.25,0）、（x , y , z）＝（0.1,0,0）とした場合の相空間軌道を表したものが、fig - 28 に示されている．この軌道は、２次元トーラス（浮き輪状曲面あるいはドーナツ状の曲面のこと）上に拘束されており、ある点を通過した軌道は曲面をおよそ一周した後、再度その近くに戻ってくる．このようにして、様々な初期値から出発した軌道の全体は２次元トーラス上を埋めつくしていく．このトーラス状のアトラクターを準周期アトラクターと呼ぶ．[48]　また、

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-\sigma x+\sigma y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=\gamma x-y-xz \\[2ex] \dfrac{dz}{dt}=-bz+xy \end{cases}$$

という式に於いて、例えばパラメータの値を　$\sigma=10$、$b=8/3$、$\gamma=28$　として描いた解軌道の様子は、fig - 29 のようになり、ローレンツのマスクあるいはローレンツの蝶々などと言われているものである．これには次のような性質がある．

① 解軌道は周期的でない．

② 解軌道は２枚の蝶の羽の一方から他方へと飛び回るようにして不規則な動き方をする．

③ 解軌道の作る２枚の蝶の羽のような概形は初期条件には依存しない．

④ ③とは対照的に、解軌道の具体的な動き方は、初期条件に敏感に依存する．また、その解軌道の長期的な挙動を予測することは困難である．

このときの解軌道によって作りだされるような極限集合即ちアトラクターを、ストレンジアトラクターと呼ぶ．ストレンジアトラクターの幾何学的構造については徐々に解明されつつあり、まずフラクタルであることが知られているので、正確にはフラクタルアトラクターと呼ぶべきものである．[49]　この他にも、レスラー系のアトラクターやミラのアトラクター、ベナール対流系に於けるアトラクター等が知られている．fig - 32 には、アトラクターに関する４つの分類を示す．[50]

ここで述べたものは、全て実空間上での力学系に関するものであったが、複素空間上でも非常に興味深い力学系が形成されている．それに関しては、第５章に於いて詳しく述べることとする．

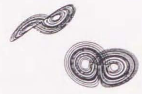


fig-29　ローレンツのアトラクター
（出典：[48]）

fig-30　ミラのアトラクター
（出典：[50]）

fig-31　ベナール対流系に於ける
アトラクター
（出典：[50]）

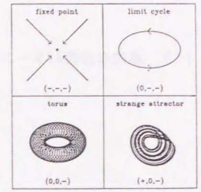


fig-32　リアプノフスペクトラムによる
アトラクターの分類
（R. Shauによる．出典：[50]）

[46] パイトゲン／リヒター：フラクタルの美
（シュプリンガー・フェアラーク東京、1988）
[47] 合原一幸 編著：カオス　（サイエンス社、1990）
[48] 西沢清子他：フラクタル　数の世界
（海文堂出版、1991）
[49] 竹山協三：カオス　（裳華房、1991）
[50] 高安芳樹 編著：フラクタル科学（朝倉書店、1987）

1.3　点的な分布パターンの分類・記述に関する既往の研究例

1.3.1　点的事象の分布パターンに関する分類と立場

1）関連する研究分野と目的

平面上に様々に分布する現象や事象の特性を分析・記述しようという試みは、建築や都市の分野に限らず、地理学や生態学を始めとして生物学や病理学、行動科学など多岐にわたる分野の中で常に関心が払われてきた．これは、いわゆる空間的な事象をその研究対象とする分野に於ける共通の課題であると言っても良く、事実、現在までに多くの研究が成されてきている．その中でもとりわけ点的な分布パターンの研究は、その基本的な性格と、他に比べて取り扱いが比較的容易であるが故に、豊富な蓄積がある．地理学に於いては、1950年代後半にアメリカ地理学会の人文地理学分野で始まった、いわゆる計量革命によって、それまでの地理学研究には見られなかった計量的、数理的な手法が持ち込まれ、またそれと相前後して、生態学の分野でも、例えば、植物群落の分布を精密に記述しようという動機から、数理的な手法が盛んに用いられるようになってきた．これらの研究分野は、特に、計量地理学とか数理生態学などと呼ばれ、従来の研究法とは一線を画するものであった．

そして、序章でも述べたように、これらの分野に於いて平面的な分布パターンを研究する最大の目的は、対象とする現象や事象が、どのような要因によってそのパターンに結果するに至ったのか、言い換えれば、背後にあると想定される法則や原因、あるいはパターン形成のメカニズムを探ることにあると言える．従って、そのパターンが、何の法則性も持たずに現われているものなのかどうかを見分けることが、まずは必要になる．それ故に、出現に関して全く規則性のない（狭義の）ランダム、つまりは一様なランダムに対応するパターンが、最も重要な基本型となるのである（いろいろな呼び名があるが、一つにはランダム型と呼ばれる）．対象とするパターンを一様ランダムなパターンと比べて、もし同じと見做せれば、そこには何の因果関係（確率的に一様で独立という意味での法則性はあるが）も相関関係も存在しないし、逆に、明らかな違いがあれば、そこには何らかの要因が隠されているはずであると見て、研究を進めるわけである．実際、これら様々の分野に於ける点の分布パターンの分類・記述にあっては、常にこのランダム型が基本となって行なわれてきたと言って良いだろう．

そして更に、これらの問題にアプローチするための最大の道具が、統計・確率的な手法であり、

隠された規則の推定も、専ら、背後にあるであろう確率分布との関係に於いて捉えられたきた面がある．よって、点のパターンの分類・記述は、いきおい対象とするパターンと理論的な確率分布との対応関係に力が注がれることになるのである．もちろん、それぞれの分野に於ける固有の問題や目標もあって一概には言えないだろうが、敢えて点的な分布パターンに関する目的や研究手法についてまとめるなら、大枠は上記のように言って間違いではないと思われる．

ただし、これに対して、本論の目的や手法に関する問題意識は、大きく二つの点で異なっている．繰り返しになるが、まず第一は、固有の現象や事象とは切り離された、静的なパターンそれ自体の記述に最大の目的があるため、実際の現象に於ける因果関係や要因を探るという視点が無いこと、第二には、それ故に、理論的な確率分布との対応関係を調べることには、何の特権も存在せず、統計・確率的な手法だけでなく、幅広く道具立ての考案を目指す必要があること、である．

2）二つの着眼点

点の分布パターンの特性をとらえる場合に、その着眼点の違いによって、次のような二つの立場に大別することができる．

（1）分布の中心傾向やばらつきを調べようという立場

（2）分布の型の違いに着目し、その特色を分析しようという立場

ただし、これら二つは、その立場に於いて全く異なっているという訳ではない．なぜなら、分布の中心傾向やばらつきの違いが、型の違いに反映してくると思われるからである．従って、本来は一体的に扱うべきものと考えるが、実際のところ、（1）の立場に於いては、複数のパターン相互の関係には言及せず、あまり型の問題が扱われていないことや、その位置を捉えるに当たっても、個別の分布の、言わば絶対座標的な位置に着目しているという点で、二つに分けて述べることが可能となっているのである．

1.3.2　点の分布の中心傾向とばらつき [51]

1）分布の中心傾向

分布の中心傾向に関する統計学的概念として、代表値がある．また、代表値には、平均値（mean）、中央値（median）、モード（mode）の三つがあるのに対応して、点の分布の中心傾向についてもそれぞれ三つの測度がある．

a）平均中心点（mean center）

平均中心点は、各点の位置（座標）の算術平均により求められる．即ち、n個の点から成る分布の、各点の座標を（x_i, y_i）で表すとすると、平均中心点は次式によって与えられる．

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

b）中央中心点（median center）

中央値に対応するものが、中央中心点である．これは、言い換えれば、その分布に属する自分以外の全ての点までの距離の和が、最小となるような点のことである．

従って、中央中心点は、

$$D=\sum_{i=1}^{n}d_{ij}$$

を最小にするような点j であると書き表すことができる．ここで、d_{ij}は2点i、j間の距離である．ただし、この中央中心点を求めることは容易ではなく、近似的にしか求められない性格のものである．その理由は、《この中心点を最初に求めようとしたHayford（1902）が指摘しているように、「１７個の点を等分するような直交軸は３対あり」、それゆえに、中央中心点が三つも存在することになるからである．》[51]

c）最多中心点（modal center）

モードに対応するのは、最多中心点である．この中心点は、ある間隔δの方眼（メッシュ）を被せたとき、一つ一つのマス目（方格）内の点の個数が、最大となる方格の「位置」として定義される．これは、被せるメッシュに依存する．また、実際に最多中心点を求めることは、かなり困難である．

d）その他

その他、加重平均中心点、調和平均中心点、幾何平均中心点等がある．このうち、加重平均中心点は、いわゆる重心点（gravity center）であり、各点の重みが、全て同じ場合は、平均中心点に一致する．重心点の座標は、次式で表される．

$$\bar{x}_w=\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i},\quad \bar{y}_w=\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i}$$

2）分布のばらつき

各測定値のばらつきあるいは散らばりの程度を表す統計学的概念としては、散布度がある．また、散布度には、標準偏差、分散、レンジ（範囲）、変異（変動）係数等がある．

標準偏差に対応する点の分布についてのばらつきを表す測度としては、Bachi による標準距離（standard distance）がある．それは、次式で定義される．

$$d=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_{ic}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ここで、d が、求める標準距離、d_{ic}は、平均中心点cからi番目の点までの距離である．[51]

また、この考え方を発展させて、n個の点から成る一つの大地域を、そのばらつき方に着目して、k個の小地域に分割するとき、その分割が果たして合理的かどうかの判定基準を構成することができる．まず、k個に分割された小地域のうち、j番目の小地域にn_j個の点が含まれているとき、各小地域について、その小地域ごとの平均中心点からそこに含まれるn_j個の各点までの距離を合計し、更に、k個の小地域全体について平均化する．j番目の小地域の平均中心点の座標を（x_j,y_j）とすると、ここで求められたものは、

$$d_w=\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left[\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)^2+\left(y_{ij}-\bar{y}_j\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

である．これは、言わば小地域に関する標準距離であり、分割された小地域内部の点のばらつきがk個の小地域全体を通してどうであるかを表すものである．次に、各小地域の、それぞれの平均中心点のばらつきがどうなっているかを調べる．これは、次式で与えられる．

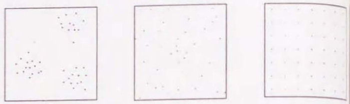
$$d_b=\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}n_j\left[\left(\bar{x}_j-\bar{x}\right)^2+\left(\bar{y}_j-\bar{y}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

これは、小地域相互間で点がどの程度ばらついているかを表すものであり、言い換えれば、d_wは、小地域内の標準距離、d_bは、小地域間の標準距離である．[51]

d及びd_w、d_bの間には、次の関係式が成り立つ．

$$d^2=d_w^2+d_b^2$$

ここでもし、小地域の分割が合理的なものであれば、d_wは極めて小さく、他方d_bは大きくなっている筈である．dは、分割によらず一定であるので、d_w^2/d_b^2が0に近くなっていると言うこともできる．逆に、分割があまり合理的でなければ、d_w^2/d_b^2が1に近づくことになり、これらを利用して、分割の目安とすることができる．ただしこ



凝集型　ランダム型　均等型

fig-33　分布の型

の際には、d_w^2 / d_b^2がどの程度０に近ければ、合理的と判断して良いかという検定法が必要になる．また、いくつの地域に分割したら良いかという指針がないので、一般には、最も良い唯一の分割を求める方法というものは存在していない．これは、いわゆるクラスター分析と呼ばれる分野の問題とも関連している．

１.３.３　分布の型に関する分析

１）分布の型とそれに対応する理論的な確率分布

点の分布パターンは、それぞれ統一された名称ではないにせよ、分野によらず、次の三つの型に分けられるのが通例である．

ａ）ランダム型（ランダム分布、機会分布とも呼ばれる）

ｂ）凝集型（集中型）

ｃ）均等型（規則型）

ａ）ランダム型

これは、既述のように、点の出現確率が平面内のどの場所に於いても一様であり、かつそれぞれが独立に生起するとき生じるパターンであり、ランダム型と呼ばれている．これは、私の言う狭い意味でのランダムに対応するものなので、以後は区別の為に、（狭義の）ランダム型と呼ぶことにする．また、これに対応する理論的な確率分布は、１.１.２節３）項で求めた様に、二項分布あるいは点の数が多いときにはポアソン分布となる．ここで、（1.2）式によって求めたのは、点の存在確率がポアソン分布に従うというものであったが、同様にして、面積Ｓの小領域内にｘ個の点が含まれるという確率もまたポアソン分布として表すことができる．この確率をＰ（ｘ，Ｓ）とすると、全体の数密度をρとして次のように表される．

$$P(x,\ S)=\frac{(\rho S)^x}{x\,!}e^{-\rho S}$$

このランダム型が、分類に関しても指標に関しても基準となっているのである．

ｂ）凝集型

一箇所ないし数箇所に点が集中したパターンは、凝集型または集中型と呼ばれる．

このパターンは、ランダム型と比較して、集中した部分とそうでない部分の偏りの差が大きなパターンであると言うことができる．凝集型の極は、一箇所に全ての点が集中したパターン、即ち、ただ一点のみから成るパターンである．この型には、負の二項分布が対応する．それは、例えば次のように導かれる．[52] ランダム型は、その密度ρが場所によらず一定であったが、これに対して凝集型は、密度ρが一定でない場合に相当する．（1.2）式のポアソン分布は、ρが定まったときの条件付き確率

$$P(x,\ S \mid \rho)=\frac{(\rho S)^x}{x\,!}e^{-\rho S}$$

であると考える．ρが、仮にガンマ分布に従う確率密度関数とすると、

$$f(\rho)=\frac{1}{a\Gamma(p)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{p-1}e^{-\frac{\rho}{a}}$$

上の２式より、面積Ｓの領域にｘ個の点が存在する確率は、

$$P(x,\ S)=\int_0^\infty P(x,\ S \mid \rho)f(\rho)\,d\rho$$

$$=\frac{\Gamma(x+p)}{x\,!\,\Gamma(p)}\left(\frac{1}{1+aS}\right)^p\left(\frac{aS}{1+aS}\right)^x$$

となり、これは負の二項分布である．

ちなみに、ポアソン分布は、負の二項分布の極限として考えることができる．

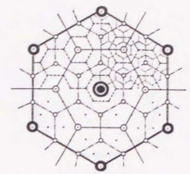


fig-34　クリスタラーの中心地の大系

（出典　クリスタラー：都市の立地と発展）

ｃ）均等型

正方格子点配列や正三角格子点配列のような規則的なパターンあるいはそれに近いものは、均等型または規則型と呼ばれている．このパターンは、まさに名前の通り、偏りが小さく均等に分布し、また規則的である．この型に属する純粋なパターンは、マクロレベルでは、自然に見られるものはほとんどなく、人工的なパターンであるといっても良いだろう．その中でも、正三角格子点配列は、周囲にある点間の距離が全て等しいという意味で最も均等なパターンである．有名なW. Christaller の中心地理論に出てくる中心地も、正三角形の頂点に配置されている．ただし、この均等型だけは、対応する理論的な確率分布を指定することができない．

２）分析法

対象とするパターンがどの型に属するかという問題に関する分析法には、大きく分けて、区画法と距離法の二つがある．[53]

ａ）区画法（方格法 [51]）

点的事象の分布している地域に対して、ある任

意の幅δで等形状・等面積の方眼（メッシュ）を被せ、各方格に含まれる点の個数を数えて、その個数と方格数との度数分布を調べ、それがどの理論的な確率分布に当てはまるかによって、型を識別する方法である.

ただし、これはメッシュの被せ方に依存する．とくに凝集型の場合にはメッシュの幅の違いによってゆらぎが大きくなる傾向が見られる．逆に、明らかに分布形状が違っても同じ度数分布を示すこともありうる.

b）距離法

この方法は、距離の分布に着目するものであり、近隣単位法[51]とも呼ばれている．これは、Clark&Evans（1954）によって考案されたものである.

ある基準点から最も近い点までの距離を最近隣距離と言い、その対応する点を最近隣単位と呼ぶ．また、これを一般化したものとしてｊ番目の距離にある点及びその距離を、ｊ位近隣単位及びｊ位近隣距離と呼ぶ.

ただし、例えば最近隣距離の計算には、基準点のとり方によって次のような二つの方法がある.

①分布を構成しているそれぞれの点相互の最近隣距離

②ある任意の点（分布を構成している点が存在しない場所であっても良い）を基準としたときの最近隣距離

通常は、①の方法によって最近隣距離を求め、その頻度分布によって型を識別するという手続きを踏む．しかし、これによって厳密に識別できるのはランダム型だけであり、凝集型及び均等型については、有効な検定統計量の欠如のために識別ができないのが現状である．そのため、後述する様に、例えば最近隣距離の平均値（最近隣平均距離）と、理論的な確率分布に於ける最近隣距離の期待値を比較することによって、対象としている分布パターンが、どの型に近いかを調べるための指標が幾つか考案されている.

2）指標[53]

次に、代表的な指標を幾つか列挙する.

a）R指標（最近隣測度[51]）

これは、Clark & Evans によって考案されたもので、距離法による代表的な指標の一つとなっている．前述したように、与えられたパターンの最近隣距離の平均値と、（狭義の）ランダム型に於ける最近隣距離の期待値を比べることによって、（狭義の）ランダム型を基本としたときの位置づけを知ろうというものである．これは、次式で定義される.

$$R = \frac{\overline{r}}{\overline{r}_E}$$

ここで、

$\overline{r}$ ：与えられたパターンを構成している点それぞれについての最近隣距離の平均値

$\overline{r}_E$ ：（狭義の）ランダム型に於ける最近隣距離の期待値

① $\overline{r}$ の求め方

分布中のそれぞれの点について最も近い点を探し出して平均をとっていく訳であるが、点の数が多くなると、かなり煩雑な作業となる．このような、ある点に関して最も近い点を捜し出すという問題は最近点問題と呼ばれ、計算幾何学に於ける主要な問題の一つとなっている．これは、ある点の最近点はVoronoi辺を挟んで隣り合う点のうちの一つであるという性質を利用すると、効率的に求めることができる.

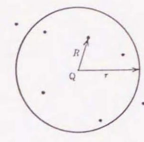


fig-35

② $\overline{r}_E$ の求め方[52] [53]

fig-35のように、与えられた点（区別のために母点と呼ぶ）が分布している平面上の任意の位置に点Qをとる．点Qから最も近い母点までの距離をRとすると、$0 < R < r$である確率は、Qから半径rの円内に少なくとも一つ点が存在する確率に等しいから、Rの確率密度関数を$f(r)$とし、Qから半径r以内に母点が一つも存在しない確率を、$P(0, \pi r^2)$とすると、

$$\int_0^r f(r')dr' = 1 - P(0,\ \pi r^2)$$

となる．もしこの両辺がrに関して微分可能であれば、この式の両辺をrで微分して、

$$f(r) = -\frac{dP(0,\ \pi r^2)}{dr}$$

ここで、母点の分布がポアソン分布に従っているとすると、$P(0, \pi r^2) = e^{-\rho\pi r^2}$となるから、

$$f(r) = 2\rho\pi r\, e^{-\rho\pi r^2}$$

よって期待値は次のように求められる.

$$E(R) = \int_0^\infty 2\rho\pi r\, e^{-\rho\pi r^2} dr = 1/2\sqrt{\rho}$$

つまり、

$$\overline{r}_E = 1/2\sqrt{\rho}$$

である.

与えられたパターンが、完全な狭義ランダム型であるとすると、明らかにR指数は１に等しくなる．また、このパターンが凝集型に近いとすると、R指数＜１となり、逆に、均等型に近い場合は、R指数＞１となる．R指数が、最も小さくなるのは、一箇所に全ての点が集中したパターン、つまりただ一点のみから成るパターンのときであり、これは明らかに０である．一方、R指数が最大となるのは、最も典型的な均等型を呈する正三角格子点パターンの場合であり、R指数は約2.149となる．

（∵正三角格子点に於ける$\overline{r}_E=\sqrt{2/\sqrt{3}\rho}$）

従って、$0 \leqq R \leqq 2.149$　である．

ただし、前項でも述べたように、求められたR指数の数値によっても、型を特定できるのは、いまのところ検定法のあるランダム型だけであり、他の型については、R指数がどの範囲にあれば凝集型あるいは均等型として良いかの検定法がないために、厳密な識別はできない．もっとも、これらの型は、（狭義の）ランダム型を含めて連続的なものであり、そもそも対照すべき基本となる型が三つしか容易されていない以上、この指標によってどの型に近いかが分かれば十分であるとも考えられる．

b）Rp指数

これは、区画法によって求められる指標であり、一つの方格に含まれる点の数の平均と分散の比によって指数化するものである．

次式で表される．

$$R_p=\frac{(N/M)}{\left(\sum_{i=1}^{M}\left(N_i-\frac{N}{M}\right)^2/M\right)}$$

ここで、

N　：分布に於ける点の総数

M　：方格数

N_i：i番目の方格に含まれる点の数

これも、（狭義の）ランダム型を基準としており、ポアソン分布の平均と分散が等しいという性質を利用している．この場合もR指数と同じく、（狭義の）ランダム型のとき、Rp＝１となり、凝集型に近いとき、Rp＜１、均等型に近いとき、Rp＞１となる．

c）Morisitaの指数　Iδ

これも、区画法に関する指標であり、この場合には、（狭義の）ランダム型のとき、Iδ＝１となるのは上と同様であるが、凝集型に近いとき、Iδ＞1、均等型に近いとき、Iδ＜1と逆になる．

$$I\delta=\frac{\delta}{\delta_{ran}}$$

ここで、

$$\delta=\frac{\sum_{i=1}^{S}x_i(x_i-1)}{N(N-1)}$$

$$\delta_{ran}=\frac{1}{S}$$

N：点の総数

S：方格数

x_i：i番目の方格に含まれる点の数

d）Eberhardtの指標

これは、距離法で得られた最近隣距離の度数分布を求め、それをもとに指数化するもので、次のように表される．

$$I=\frac{N\sum x_i^2}{\left(\sum x_i\right)^2}$$

ここで、

N：点の総数

x_i：クラスiに於ける頻度

与えられた分布が、ポアソン分布に従っているとき、I＝4／πとなる．

e）Hopkins - Skellamの指数

対象としているパターンに対して、新たにランダムな点を散布し、この新たに散布された点に関する最近隣の点までの距離をr_1、母点に関する最近隣距離をr_2とすると、それぞれN個のデータを求め、次式で指数化する．この方法によれば、境界の問題に煩わされなくて済むという利点がある．

$$A=\frac{\sum_{i=1}^{N}{r_{1i}}^2}{\sum_{i=1}^{N}{r_{2i}}^2}$$

この場合も、（狭義の）ランダム型のとき、A＝１であり、凝集型に近いとき、A＞１、均等型に近いとき、A＜１となる．

[51] 奥野隆史：計量地理学の基礎（大明堂、1977）

[52] 谷村秀彦他共著：都市計画数理　（朝倉書店、1986）

[53] 前出　及川清昭：1986年度東京大学学位論文

3）まとめ

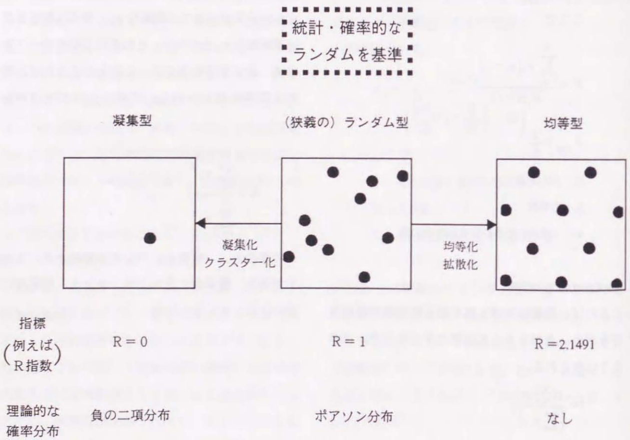


fig -36　点の分布パターンに関する既存の分類法

1.3.4　伝統的集落における住居配列の記述に関する原・藤井研究室の研究成果

原・藤井研究室では、海外の伝統的集落に関して、70年代に５回（５地域）、そして90年代の初頭から現在までの期間に４回の調査を行なってきた．この他、日本の集落に関しても、主に、離島集落を対象に調査が行なわれた．調査の経緯については、４章に於いて改めて述べるとして、ここでは、点の分布パターンの分析という観点から、これらの調査によって得られた資料に対して用いられた分析手法について、その特長を簡単にまとめてみたい．

1）形態学的な視点と手法の考案

住居あるいはその集合を調査するといっても、様々な視点、アプローチがありうる．それが、見知らぬ土地の集落であれば尚更である．集落は、風土や歴史、社会制度などを含めた様々な文化的土壌の上に立っている．しかし一方で、集落は、そうした目に見えない深い背景をともなっているとともに、現に、いま目に見える形でも存在している．そして、それら様々な背景も、少なからず、目に見える物象に投影され凝縮されていると考えることもできるだろう．（ただし、我々の理解力が不足していれば、目に見えているものでも、認識できずに見過ごしてしまうということも往々にしてありうるが．）そうした意味で、我々の調査が比較的短時間に「通り過ぎる者の目」でしか行なえないという限界もあり、極力、目に見える形態の観察や把握に調査の主眼が置かれた．そしてそこでは、調査した集落そのものの記述や分析もさることながら、その分析のための手法や道具を考案することも重要な課題として位置づけられていた．題材がなければ分析はできないが、手法がなくても分析することはできない．

形態学は分類学である．分類するためには、分類のための基準、いってみればふたつのものを切断する包丁がいる．その包丁が、集落は結局はひとつの原理でできているという同一性を示すものであればよい．だから、集落という対象が問われているのではなく、包丁が問われている．・・・包丁の刃は二面からできている．その一面は、概念であって、もうひとつの面は技法である．・・・概念は、集落をとらえる視点を示し、技法は諸概念を表現し連鎖させる．だから包丁はいいかえれば論理である．[54]

2）住居配列の記述と分析－ＡＣ論の適用

a）ＡＣ論に於ける場的な考察と情報の保存

集落調査と平行して進められてきた分析手法は、大きく分けると、つぎのような四つの領域に分けられる．

① ＡＣ論（活動等高線論）
② グラフ理論
③ 位相空間論
④ 記号論

このうち、グラフ理論は主として容器的な性格をもつ住居内の平面形の分析に対して適用され、複数の住居群が作り出す、その集合状態の記述に対しては、ＡＣ論が適用された．ＡＣ論とは、空間の、特に平面方向に拡がるそれぞれの場所に対して、そこで行なわれる人間の諸活動を対応させ、それをポテンシャル曲面（活動等高線図 Activity Contour map）として描いたときの特性を分析することによって、空間の場的な性格を把握しようという研究手法を指す．グラフ理論が、位置や距離という情報を捨象して、そのつながり方に重点を置いた分析を行なうのに対して、AC論では、基本的に位置や距離が保存された情報を扱う．私見では、離散的に分布した複数のものの集合状態に関しては、この位置や距離が決定的な役割を果たしていると考えている．パターンの問題を「記述」と「分析」という二つの問題に分けたとき、分析のためにパターンから必要な情報を取り出すと、他の多くの情報は失われてしまう．同じように、パターンからその特徴を取り出したとして、逆にその特徴をいくら積み重ねてみても、簡単な図形や高い規則性を持ったパターンでない限り、元のパターンには、決して到達できない．これに対して、位置の情報だけが、元のパターンの再構成を可能にする．このことは、結局、パターンはパターンをもってしか表せない、という結果を導く．これは言わば、パターンに関する研究が必ず直面する不可避の課題であると言っても良い．この意味から言うと、ＡＣ論はパターンによるパターンの記述である、と言うことができるだろう．このことが、通常の、パターンに関する分析法と異なる、大きな特長であると考えている．その他にも、様々の特長があるが、この情報の保存という、「記述」についての利点は、一方で、「分析」を難しくするという反面も持っている．ＡＣ論の課題は、その分析法にある．

以下に、住居の集合状態をポテンシャル図に変換することによって得られる主な特長を幾つか列挙する．

① 密度分布（密集状態）の可視化（より把握し易くなる）
② 構造（中心、R*）の抽出
③ 領域的な考察を可能にする

b）住居集合のポテンシャル

住居集合をポテンシャル図に変換する仕方も一通りではなく、その観点や考察に於ける力点のありかによって、様々にありうるだろう．むしろ、そこでの変換法に、まず第一のアイデアが求められる．どのような図が書けるかが問われている、と言っても良い．ただしここでは、いままでに行なわれてきた方法の概略について述べるだけにとどめておく．

① まず、それぞれの住居を中心とした影響量のようなものを、ポテンシャルとして視覚化するものとする．その際、一つの住居の影響量は、その住居の中心で最大となり、そこから離れるに従って、等方的に、なめらかに減衰していくものと仮定する．また、その影響量は、それぞれの住居の大きさに比例するものと考える．そして、それらそれぞれの住居について書かれた図の重ね合わせとして、住居集合全体のポテンシャル図が表されるものとする．

② さて、このように仮定したとき、ひとつの住居のポテンシャルは、その住居を中心としたときの、距離ｄの関数として表される．当然この関数の与え方にも様々な可能性があるが次のような関数が採用された．ある住居のポテンシャルをＺ、その住居の重心からの距離をｄ、その住居の投影面積をＳとすると、

$$Z(d, S) = S\exp(-0.045\,d^{1.18})$$

（単位：Ｓ［㎡］，ｄ［m］）

全ての住居からの影響量を重ね合わせると、ある点(x,y)に於けるポテンシャル$f(x,y)$は、

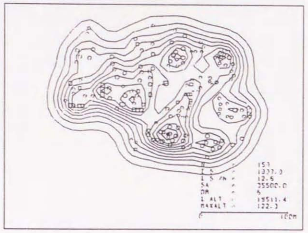
$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} Z(d_i, S_i) = \sum_{i=1}^{n} S_i \exp\left(-0.045\,d_i^{1.18}\right)$$

で求められる．[55]

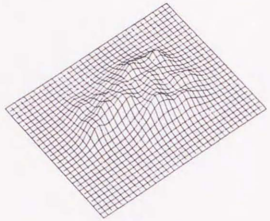
ここで、

S_i：i番目の住居の建築投影面積［㎡］

d_i：i番目の住居の重心から点(x,y)までの距離［m］



等高線図

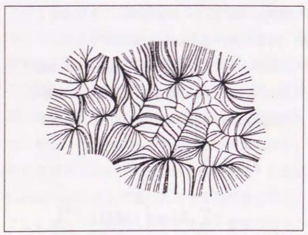


アイソメトリック図

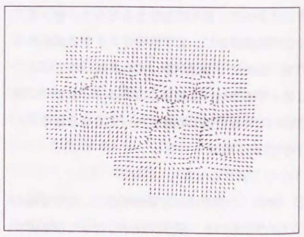
c）図化の手法

ポテンシャル曲面の表現には、通常、等高線図が用いられる．等高線の粗密が曲面の傾きの緩急を表し、曲面を地形として捉えた場合の頂点や尾根、谷などがその位置と対照させて読み取り易くなる．また、３次元的に表現できるものとして、アイソメトリック図がある．この手法は、部分部分の位置が多少読み取りにくい面はあるものの、集落全域に於けるポテンシャル曲面全体の形状を表現または把握するのに適している．この他、ポテンシャル曲面の性状を表現するものとして、それを地形としてみた場合の雨滴の落下流路を表わす流線図がある．これは最急勾配に沿う経路を示す．流線図の表現方法にも２種類ある．

fig・37 には、幾つかの集落を対象にして書かれた、これら四つの図を示す．



流線図



矢線ベクトルによる流線図

fig・37　ポテンシャル曲面の表現

d）ポテンシャル曲面の形態分析

① 中心概念の拡張ーリッジの抽出

このようにして書かれた等高線図形の特性を表す概念として、リッジ（Ridge, R＊）がある．これは、等高線を地形と見立てたときの尾根を結んだ図形として得られるもので、等高線図、言い換えれば、平行閉曲線図形の中心に相当する．例えば、単一閉曲線ＣのＲ＊は、次のように定義される．《ある点Ｐから、閉曲線Ｃまでの距離を、d(P，C)=inf {d(P，C) | x∈C} とし、Ｃに対する距離ε（≧０）の平行閉曲線C'εを次のように決める．すなわち、C'ε＝{P | d(P，C)=ε}（P、Ｃは同一平面上にある）．C'εはＣの内外に書ける．これを、C'ε［i］、C'ε［e］と書く．C'εを媒介にして、Ｃの特異点の集合Rcを次のように定義する．Rc＝{x＊ | x＊∈C，∀ε（＞0）［d（x＊，C'ε［i］）＞ε　あるいは　d（x＊，C'ε［e］）＞ε］}．Ｃの内外に描かれる平行閉曲線の集合を{C'ε}で表せば、{C'ε}の特異点の集合をＣのRidge（R＊）とする．》[56]　このリッジは、言わば、２次元あるいは3次元の図形に関する背骨または骨格を表していると言うことができ、より次数の少ない１次元の図形に変換することによって、元の図形の特性を抽出しようとするものである．

②多重閉曲線のグラフ化

等高線図の特性を捉えるもう一つのやり方は、閉曲線の包含関係をグラフに変換して、そのグラフの分析を行なうことである．ただし、ポテンシャル曲面は連続的なものであるため、それを多重閉曲線に変換する仕方は幾通りもある．例えば、ポテンシャルの最高値をｎ等分した幅で曲面を水平方向に切断して行くやり方や、絶対量としての幅を決めて変換するやり方が考えられる．いままでにやられたのは、前者の方法であり、ｎ＝５として行なわれた．このようにして得られた層構造の包含関係によって、更にグラフへと変換される．

ポテンシャル曲面をこのようにグラフに変換する利点は、以下の通りである．

・集落の規模、密度によらず、住居の配列の状態を粗密の度合いという点から自立した構造として一律に比較することが可能となる．

・グラフ化へ至る手続きが簡単であり、また

一意性を有している.

・グラフに変換することにより、ポテンシャル曲面の凹凸の形状を数量化することが可能となる. [55]

以上のようにして得られたグラフから、辺頂点比、平均分散度、最大固有値、等の指標が計算された.

集落名（国名）	住居数 N(戸)	住居の総建築面積 ΣSi(m²)	平均建築面積 ΣSi/N(m²/戸)	領域面積 S_A(m²)	総ポテンシャル値 ΣΣALTij	最大ポテンシャル値 MAXALT	平均ポテンシャル値 ΣΣALTij/S_A	ピーク数 Np	R 示数 R	辺頂点比 E/V	平均分散度 ΣΣdij/V(V-1)	最大固有値 λ1	Pw	Pt
1. SHVLI (INDIA)	74	4458.7	60.8	297000.0	41351.4	436.4	1.39	10	1.099	0.86	2.48	1.93	20	10
2. ROUGOUBIN (UPPER VOLTA)	61	1079.9	17.7	219000.0	10007.7	102.0	0.46	9	1.031	0.86	2.38	1.97	18	8
3. GHOTWAL (INDIA)	118	3806.2	32.3	327000.0	35268.9	256.7	0.95	9	0.932	0.89	2.88	2.04	18	11
4. JUNAPANI (INDIA)	81	3301.7	40.8	298000.0	30572.2	337.5	1.03	5	1.075	0.88	2.39	2.16	23	13
5. MEYANDARE (IRAN)	194	8596.7	44.3	681000.0	79670.3	326.9	1.17	30	1.033	0.90	2.78	2.19	25	15
6. SHIBA (JAPAN)	199	5961.3	30.3	507000.0	55245.0	279.4	1.09	16	0.872	0.90	2.80	2.21	26	16
7. SAMANAZANGARO (PERU)	87	4105.9	47.2	529000.0	38044.6	242.5	0.72	10	0.765	0.93	4.00	2.24	40	19
8. PTO. VALDIVIA (COLOMBIA)	75	4479.9	59.7	505000.0	41520.9	375.4	0.82	24	0.703	0.90	2.82	2.24	25	13
9. OXCACO (MEXICO)	98	4199.3	42.8	493000.0	38901.7	239.2	0.79	13	0.894	0.92	2.97	2.33	28	15
10. TARAVITAS (MEXICO)	61	1740.1	28.5	344000.0	16135.7	152.1	0.47	18	0.950	0.90	2.56	2.34	25	19
11. SANEKU (JAPAN)	147	3295.3	22.4	519500.0	30526.9	179.0	0.59	15	0.494	0.94	3.40	2.44	41	21
12. ALIABAD (IRAN)	83	2898.6	34.9	530000.0	26863.0	178.6	0.51	23	0.901	0.94	3.58	2.59	37	26
13. SANJORGE (GUATEMALA)	140	4955.7	35.4	517000.0	45901.1	417.7	0.89	12	0.778	0.91	2.55	2.68	25	15
14. BOLBOL (NIGER)	159	1997.9	12.6	355000.0	18511.4	122.3	0.52	12	0.959	0.92	2.56	2.77	38	25
15. KAYIKRAZ (TURKEY)	154	6051.3	39.3	641000.0	56089.1	243.7	0.88	23	0.785	0.93	2.59	2.95	43	31
16. MATANWARI (INDIA)	98	5644.4	57.6	644000.0	52320.7	371.2	0.81	20	0.676	0.94	2.93	2.98	38	24
17. MALILA (MEXICO)	50	1926.2	38.5	456000.0	17852.2	121.8	0.39	23	0.420	0.96	3.63	3.20	60	36
18. LALZADHI (NEPAL)	54	2326.4	43.1	68950.0	21547.9	86.0	0.31	39	0.664	0.99	3.92	4.75	145	85
19. GATAZO CHICO (ECADCR)	69	2603.1	37.7	747000.0	24128.3	168.2	0.32	42	0.841	0.97	2.75	5.03	56	35
20. TONAMI (JAPAN)	104	7913.8	76.1	149200.0	73227.5	268.6	0.49	38	0.559	0.98	3.44	5.20	109	68

分析示標一覧表
fig-38

[54] 東京大学生産技術研究所　原研究室：住居集合論その2（鹿島出版会,1974）

[55] 東京大学生産技術研究所　原研究室：海外の伝統的住居の類型化とその集合状態に関する形態学的研究（1）(2)（財団法人新住宅普及会　住宅建築研究所報1980,1981）

[56] 新建築学体系編集委員会編：新建築学体系23　建築計画（彰国社,1982）

1.4　＜構造＞*をもつパターン

1.4.1　ランダムパターンの＜構造＞*とは

序章に於いて、ランダムパターンを捉える上での＜相＞*と＜型＞*という観点を示したが、そこでの＜型＞*の概念を更に発展させて、より大きな＜構造＞*について考えてみる. 従って、一般論としての「構造」ではなく、これはあくまでもランダムパターンを語る上での＜構造＞*に過ぎない. ただし、その＜構造＞*は、1.2.1節で述べた形態学的思考と関連するものでなければならず、基本的には、その考え方の源としてゲーテ形態学にまで遡る必要があるのかも知れない. しかしながら、ここでは、その考え方を端的に示していると思われる、次のようなレヴィ＝ストロースのことばを確認するに留めたい. 《〈構造〉とは、要素と要素間の関係とからなる全体であって、この関係は、一連の変形過程を通じて不変の特性を保持する. 》[57] そして更に、この定義に於ける注目すべき3点として、①要素と要素間の関係を同一平面に置いている点、②不変の概念、③変形の概念、があると述べている. [58] このことばが示している様に、端的に言うならば、構造とは、《全体の中の諸要素及び諸構成分の組み立て》であり、《ある全体としての事物の内部で、それの個々の部分が相互に結合しているその関係》[59] を指すとされる. つまり、構造もまた秩序と同様に、予め規定されているものではなく、発見するものであると言って良い. 一方、数学的構造と言うときには、基礎になる集合と、そこに於ける関係、算法などを指定して、一つの数学的対象として確定されたものを指す. 言い換えれば、これはある条件を満たした関係性である. 一般に、「構造化」というときにも、ある条件を満たしていることが前提となっているのではないだろうか. このように考えてくると、少なくとも、＜構造＞*を持つパターンというときの＜構造＞*は、予め基本となるものを指定あるいは登録しておく必要がある様に思われる.

このことを確認した上で、次にもう一度、フラクタルのことを思い出そう. フラクタルの持つ重要な性質は、自己相似性であった. それは、様々なレベルで部分と全体（より大きな部分）との間に成り立つ相似関係のことであった. そして、それは、拡大・縮小という操作を施しても（変換）常に成り立ち、一定の測度あるいは次元を持っている（不変）のであった. とすれば、非常に粗雑な議論ではあるけれども、先程のレヴィ＝ストロースの言う〈構造〉と、自己相似性に於けるそれとの大きな違いは、ただ一点である. 自己相似性に

於ける関係性は、要素と要素間の関係を土台としながらも、むしろレベルの異なる部分と全体（様々なレベルでのより大きな部分）との間に取り結ばれる関係性のことなのである．そもそも、レヴィ＝ストロースの言う様に、科学には還元主義的方法と構造主義的方法の二通りしかないとして、我々が今まで微積分を主要な武器として進めてきた科学的方法とは、現象を要素に分解し、その要素間の基本法則によって全てを説明しようという立場であったことを思えば、たとえ当初の還元主義が関係を顧みなかったとしても、レヴィ＝ストロースの言う〈構造〉の定義の中にすら、敵対すべき現代の還元主義が既に取り込んでしまった、要素と要素間の関係に依拠した認識が含まれている．ただし、ここで要素と要素間の関係を否定しようというのではない．もう一段階上位の〈構造〉を考える契機が、例えば、自己相似性の中に見い出しうるのではないか、ということなのである．そこで、私は、要素と要素間の関係の代わりに、部分と全体の間に見い出しうる関係性を置いて、これを新たに、ランダムパターンの＜構造＞*と呼びたいと思う．ただし、この全体という語は、対象とする部分よりも大きな任意の部分という語で置き換えられるものとする．

1.4.2　幾つかの＜構造＞*

さて、このように定義したとき、部分と全体の間にありうる関係とはどのようなものが考えられるのであろうか．この試みは第３章に於いて行なうとして、ここでは、現在考えられている＜構造＞*と呼びうるものについてまとめてみる．結論から言うと、前項に於ける＜構造＞*の定義の契機ともなっている自己相似性あるいはスケール不変性だけが、今のところ＜構造＞*と呼びうるものであるが、それを基にした幾つかの拡張概念があるので、それらについて述べることとする．

1）自己相似性あるいはスケール不変性、統計的自己相似性

もう一度復習になるが、重要な点が一つある．フラフタルと自己相似性の関連についてである．自己相似性がフラクタルに於ける重要な性質であることは既に述べたとおりであるが、厳密には、フラクタルであることと、自己相似性を有することは同義ではない．《対象がフラクタルであるというのは、対象のより微細な縮小図を考えた際に、各構成部分が任意の縮小率において意味のある細部を備えている場合を指す．》[60] これは、言い方を変えるなら、任意の倍率で拡大あるいは縮小し

ても、常に対象は滑らかにはならず、至る所微分不可能なままであるようなとき、それをフラクタルと呼ぶということなのである．そして、そこで縮小した細部が、拡大した際の細部と相似の関係にあれば、その対象は自己相似性を有しているというのである．このことは、フラクタルであることと厳密な自己相似性とは必ずしも一体の概念ではないことを表し、自己相似性が拡張できる可能性を示すものである．

ここで、集合ＳがＮ個の部分集合から構成されていて、それぞれの部分集合が、全体を比率ｒで縮小したｒ・Ｓと統計的に同一視できるような場合、この集合を統計的自己相似と言う．[61] 実際には、分布のあらゆる統計的モーメントが同一であることを確かめるのは不可能であり、通常は幾つかの統計的モーメントが等しいことで統計的自己相似としている．海岸線のような場合には、あらゆる比率ｒで統計的自己相似が成り立つことが多い．

2）自己アフィン性

これは、言うなれば、異方的な自己相似性のことである．まず、アフィン変換について確認する．アフィン変換とは、点xのＥ個の座標について、それぞれ異なる比率（$r_1, r_2, \cdots, r_E$）でスケールを変える変換のことである．XEROXに於ける独立変倍コピーのようなもの、といった方が分かりやすいだろうか．集合Ｓは、このアフィン変換によって $r(x) = (r_1x_1, r_2x2, \cdots, r_Ex_E)$ の点の集合ｒ（Ｓ）に移される．このとき、集合Ｓが自己アフィンであるとは、集合ＳをＮ個の互いに重ならない部分集合に分けたとき、それぞれがｒ（Ｓ）と合同になることを言う．また、集合Ｓを構成するＮ個の部分集合が確率分布からみてｒ（Ｓ）と合同であるとき、集合Ｓを統計的自己アフィンであると言う．ここで、合同であるとは、移動や回転によって一致する関係のことである．

3）マルチフラクタル

マルチフラクタルとは、自己相似性の概念を更に拡張したものであり、それぞれ固有のフラクタル次元をもったフラクタル部分集合の和集合として表されるようなフラクタルのことあるいはその考え方を指す．そこでは、様々なフラクタル次元が交じりあっているため、それを特徴づける量として次のような一般化次元D_qが導入される．

ａ）一般化次元

このようなフラクタルは、非一様な確率分布を

持っているということができ、それらを具体的に捉えるため、ヘンケルとクロカチアによって一般化次元と呼ばれる量が導入された．これは、q次の相関係数に基づくものであり、原理的には無限個の次元を定義することができるものである．この無限個の次元の階層のことを、一般化次元D_q（$-\infty<q<+\infty$）と呼ぶ．後に見るように、分布が一様な場合には、次数qに依らずD_qは常に一定値をとり、埋め込まれているユークリッド空間の次元Eに等しくなるが、非一様な場合には、次数qの取り方によって異なる次元が得られる．

b）質量指数と一般化次元

N点から成る集合Sに於いて、集合Sを含む空間を幅δのメッシュに切り、i番目のボックスの中にN_i個の点があるとする．このとき、$\mu_i=N_i/N$として、次のような測度を構成する．[62]

$$M_d(q,\delta)=\sum_{i=1}^{N}\mu_i^q\,\delta^d=N(q,\delta)\,\delta^d$$

この測度には、$\delta\to 0$のとき、発散したり0になったりしないような$d=\tau(q)$が存在する．この$d=\tau(q)$のことを質量指数（mass exponent）と呼ぶ．$\mu_i(\delta)$が、$\delta\to 0$に於いて、

$\Sigma\mu_i(\delta)\sim\delta^{-\tau(q)}$なる関係を持つならば、

$$\tau(q)=-\lim_{\delta\to 0}\frac{\log N(q,\delta)}{\log\delta}$$

$$=-\lim_{\delta\to 0}\frac{\log\sum_{i=1}^{N}\mu_i}{\log\delta}$$

ここで、一般化次元D_qは、次のように表される．

$$D_q=\frac{1}{q-1}\,\tau(q)$$

$$\therefore\ D_q=\frac{1}{q-1}\lim_{\delta\to 0}\frac{\log\sum\mu_i^q}{\log\delta}$$

この中の因子（1－q）は、E次元中の一様な分布の場合に、$D_q=E$となるように補正するためのものである．従って、一様な分布の一般化次元は、モーメントの次数qには依らず、常に一定値Eをとる．これは、何も構造を持っていないという結果を意味するものである．

ここで、

$$S_q=\frac{-1}{q-1}\log\sum\mu_i^q$$

は、q次のレニーエントロピーと呼ばれている量であり、正値性、加法性、単調性などシャノンエントロピーとほとんど共通の性質を有している．

c）特異性指数と特異スペクトル

一般化次元D_qと深く関係した量として、特異スペクトル（大域的スペクトラム）$f(\alpha)$と呼ばれるものがある．

先程の$\mu_i(\delta)$は、δに関して、$\mu_i(\delta)\sim\delta^{\alpha}$なる依存性を持つと考えられる．このとき、αは、$i$番目の箱の局所的なフラクタル次元とも解釈できるが、一般には、特異性指数あるいは、リプシッツ・ヘルダー指数と呼ばれ、確率分布の特異性を支配している指数である．今、この特異性指数αが、非一様であり、ある値の範囲内でゆらいでいるものとすると、αが、α'と$\alpha'+d\alpha'$の間の値をとる回数$N(\alpha')d\alpha'$は、次式で表される．

$$N(\alpha')d\alpha'\ \sim\ d\alpha'\rho(\alpha')\delta^{-f(\alpha')}$$

ここで、指数$f(\alpha')$は、特異性指数α'が乗っている集合のフラクタル次元を表わしている．従って、いろいろなαに対する$f(\alpha)$の曲線は、マルチフラクタルに於ける様々なフラクタル次元の分布を表わしており、特異スペクトルまたは大域的スペクトラムと呼ばれている．

d）特異性指数及び特異スペクトルと質量指数の関係

特異性指数αは、質量指数を微分することによって求められる．より正確には、モーメント次数qに応じて様々な$\alpha(q)$の値を得ることができる．即ち、

$$\alpha(q)=-\frac{d\tau(q)}{dq}$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{\sum\mu_i^q\log\mu_i}{\left(\sum\mu_i^q\right)\log\delta}$$

また、$f(\alpha)$も、$\alpha(q)$と$\tau(q)$より、次のように求められる．

$$f(\alpha(q))=q\,\alpha(q)+\tau(q)$$

例えば、q＝1のときの、

$\alpha(1)=-(d\tau(q))/dq=fs$　は、測度の集中している部分集合のフラクタル次元を表している．また、$f(\alpha)$の最大値は、0次のD、即ち、D_0に等しい．$f(\alpha)-\alpha$　のグラフを書いたとき、原点から$f(\alpha)$へ接線を引いたとき、その接線の傾は1で、接点のαの値は、1次の一般化次元、即ち、D_1に等しい．

この$f(\alpha)-\alpha$　曲線や、$\tau(q)-q$曲線は、いづれもマルチフラクタルの特性をよく表すものである．

e）一般化次元とその他の次元との関係

ここで、例えば、0次の一般化次元は、容量次元に等しく、1次の一般化次元は第2章で見る情報量次元に等しい．また、2次の一般化次元は、相関次元と呼ばれる次元に等しい．

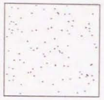


fig-39

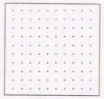


fig-40

一般に、q＞q'に対して、Dq≦Dq'　となる.

3）ファットフラクタル

通常のフラクタルは、体積（ルベーグ測度）が0の集合を扱うが、ファットフラクタル次元は、体積が0でない集合も特徴づけることができる. εを空間刻みの分解能としてε精度で粗く見たときの集合の面積を$\mu(\varepsilon)$と置いたとき、$\varepsilon \to 0$の極限で$\mu(\varepsilon)$は、次のように書けるとする.

$$\mu(\varepsilon) \sim \mu(0) + A \cdot \varepsilon^{\beta}$$

このとき、βをファットフラクタル次元と呼ぶ. [63]　このファットフラクタルという考え方は、例えば、カオス理論に於けるパラメータ集合等の特徴付けのために適用されるものである.

4）自己同型性*

次に、一様あるいは均質ということについて考えてみる.

統計的に一様な分布とは、1.1.2節2）項に於いて述べた様に、ある物の存在確率が、空間中のどの位置についても同一である様な分布のことであった. この分布は、ポアソン分布に従い、fig-39の様な空間パターンを示すことも述べた. この様な場合、一般には構造を持たないと言われる.

一方、その分布確率は必ずしも一様ではないけれども、均質と呼べる様なパターンもある. 例えば、fig-40に挙げた格子点配列である. また、これは、完全結晶中で見られる原子配列のパターンでもあり、並進対称性を持っているということは先に述べた通りである. fig-39もfig-40も同じ様に一様で均質でありながら、分布確率という点では、かなり異なった構造をしていると言うことができるだろう. 即ち、fig-40の分布確率は、明らかに非一様性を持っているのである. また、このパターンは、同質な部分から構成されており、正方形が完全自己相似集合であることを考えると、自己相似とまでは言わないまでも、少なくとも、同質の単位の繰り返しによって得られていることは確かである. （極限に於いては、正方形と一致し、完全自己相似集合となる. ）

つまり、全体が同質の単位（部分）の加算的な集合として形成されているのである. これは、部分と全体の関係性という要件を満たす. よって、＜構造＞*の一つに数え、このような性質を自己同型性*と呼ぶことにしたい.

[61] 前出：フラクタル・イメージ
[62] 前出　J. フェダー：フラクタル
[63] 前出：フラクタル科学

2

＜相＞*の記述ーランダムパターンの特徴量と指標の考案

／それ自身における差異

Chapter 2

2. ＜相＞*の記述－分布パターンの特徴量と指標の考案

2.1 形状特徴量 [1]

画像処理の分野に於いては、ある対象物を認識するために、その形状に関する種々の特徴量（形状特徴量と呼ばれる）が抽出されている．また、ある形状を識別するために、幾つかの指標（形状係数と呼ばれることもある）が考案されている．

1）拡がりに関する形状特徴量

形状特徴量には様々なものがあるが、主なものは、ある図形的な対象に関する面積や、長さ、幅、方向性、周囲長等といった、パターンの大きさや拡がりに関する特徴量である．従って、これらが扱うのは、何らかの意味で一かたまりになったパターン（内部に穴のあいたものも含めて）が、主である．

この他、本論でもしばしば用いるモーメント特徴がある．（モーメント一般については1.1.2節参照）

2）モーメント特徴

a）重心回りのセントラル・モーメント

図形の特徴を表すものとして、（p＋q）次の重心回りのセントラル・モーメントがよく用いられる．これは、次式で与えられる．

$$M_{pq} = \int_A \left(x-\bar{x}\right)^p \left(y-\bar{y}\right)^q dA$$

ここで、$\bar{x}$、$\bar{y}$ は重心の座標を表す．

建築構造で使う断面１次モーメントや断面２次モーメントもこれに含まれる．

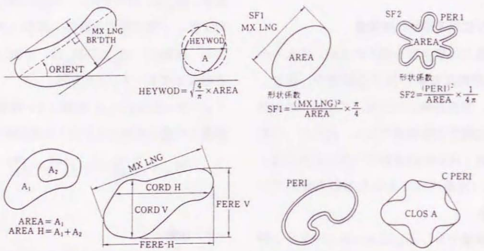
即ち、M_{00}は、面積を表し、M_{10}及びM_{01}は、それぞれｘ軸、ｙ軸に関する断面１次モーメントに相当する．同様に、M_{20}及びM_{02}は、ｘ軸、ｙ軸に関する断面２次モーメントである．

ディジタル図形$f(i, j)$に関して、図形の各画素が質量１の重さを持つものとして離散的に書くと、

$$M_{pq} = \sum_i \sum_j \left(i-\bar{i}\right)^p \left(j-\bar{j}\right)^q$$

b）主軸

ある与えられた図形の重心を通る直交座標軸に関する各モーメントの値は、その座標軸の傾きによって変化するが、そのなかでM_{11}（断面相乗モーメントに相当する）が０となる直交座標軸が必ず存在する．このとき、この直交軸に関する二つの２次モーメントM_{20}とM_{02}が最大値と最小値を与える．この直交軸を主軸と呼ぶ．ｘ軸となす主軸の傾きをθとすると、この主軸の方向は以下のように計算できる．



絶対最大長 MX LNG……………（maximum length）
　画像の周上の任意の２点間の距離のうち最大の長さ
幅：BR'DTH……………………………（breadth）
　最大長に平行な２本の直線で画像をはさんだときの２直線間の最短距離
方向 ORIENT……………………………（orientation）
　水平線と最大長の方向との成す角度
円相当径 HEYWOD……………（Heywood diameter）
　図形の面積（A）を測定して，その図形と等しい面積をもつ円を仮定し，その円の直径を表す
形状係数 SF1（丸さの度合）
　SF2（凹凸の度合，逆数は円形度）
　SF3（針状の度合）$= \frac{\text{MX LNG}}{\text{BR'DTH}}$

面積 AREA……………………………………（area）
　画像の実面積
穴を含んだ面積 AREA H………（area including holes）
　穴のあいた画像の穴を含んだ面積
水平方向最大弦長 CORD H……（maximum chord H.）
　画像を横長に細長く切断した切片のうち最長のものの長さ
垂直方向最大弦長 CORD V………（maximum chord V.）
水平方向フェレ径 FERE H………（Feret's diameter H.）
　２本の垂直線で画像をはさんだときの２本の垂直線間の距離
垂直方向フェレ径 FERE V……（Feret's diameter V.）
周囲長 PERI……………………………………（perimeter）
画像の周囲長 C PERI…………………（convex perimeter）
　画像の凸部を結んでいったときの周囲長
閉曲線の面積 CLOS A……………（closed circuit area）
　包絡線で囲まれた中の面積

fig - 1　形状特徴量の例（出典：［１］）

$$\theta = (1/2)\tan^{-1}\left\{2M_{11} / \left(M_{20} - M_{02}\right)\right\}$$

この主軸方向は、特に細長く伸びている図形に関する特徴量として非常に有効である．ただし、対称軸は主軸の一つとなるが、正多角形や円形などのように直交しない対称軸のある図形では、特に主軸の方向は決まらず、どの方向の軸に関してもM_{20}及びM_{02}の値は同じであり、またM_{11}は０となる．[2]

３）形状係数[1]

指標や形状係数には、以下のようなものがある．

【円形度】　$4\pi A / L^2$

A：図形の面積（図形が占める画素数）

L：周長（輪郭を形成する画素数）

円形度は、真円に近いほど１に近い値となる．

【複雑度】　ＳＦ2＝円形度の逆数で与えられ、凹凸の度合いを表す．

【丸さの度合い】

$$SF1 = \pi \cdot MXLNG^2 / 4A$$

MXLNG：絶対最大長（画像の周上の任意の２点間の距離のうち最大の長さ）

【針状の度合い】

$$SF3 = MXLNG / BR'DTH$$

BR'DTH：幅（最大長に平行な２本の直線で画像をはさんだときの２直線間の最短距離）

これらの形状特徴量は、分布の拡がりやその傾向についての情報を与えてはくれるものの、一まとまりになった図形に関するものがほとんどであり、今考えているような、もっと複雑なパターンについてはあまり役立たない．もともと画像処理の分野に於ける形状特徴量を求めるための目標（コンピュータに対象を識別させるため）と、本研究とは、その目標に於いて異なっているため、当然であると思われる．従って、これらとは別の特徴量を抽出し、それに関する指標を考案していく必要がある．

［１］高木幹雄他：画像解析ハンドブック
（東京大学出版会、1991）
［２］山田孝一郎＋松本芳紀：建築構造力学（森北出版、'77）

2.2　乱れの計量

2.2.1　分布パターンの便宜的な分類

《自然界に存在するあらゆる形や、人類がいままでに考えたあらゆる図形は、おおまかに次のように２つに分類することができるであろう．一方は特徴的な長さをもつ図形であり、もう一方は特徴的な長さをもたない図形である．ここで、特徴的な長さとは、たとえば球を考えるならばその半径、また人間の形を扱うならば身長というように、そのものに付随する長さのうち代表的なものを指す．・・・フラクタルとは、これらの、特徴的な長さをもたないような図形や構造、現象などの総称である．》[3]

上で、「特徴的な長さ」というときの長さには、何cmかというような単位を伴う絶対的な大きさやスケールという意味も含まれていると思われる．あらゆる階層のスケールに於いて、特徴的な長さを持たないものの代表が、フラクタルである．ところで、上に倣って言うなら、普通の意味で規則的なパターンとそうでないパターンとを比べてみると、規則的と言われるようなパターンには、半径を始めとして周期や間隔という、特徴的な寸法を指摘することができる．ただし、絶対的な単位を伴うような寸法ではないということと、本論では、複数のものから成る離散的な分布を主たる考察対象とするので、ここでは、区別のために、特徴的な距離ということにする．

さて考察に先立ち、この見方に基づいて、２次元平面上の点的な（離散的な）パターンを次のように（便宜的に）分類してみる．

Ａ．　特徴的な距離をもつパターン
Ｂ．　Ａ.の特徴的な距離をもつパターンの乱れとして記述できるパターン
Ｃ．　特徴的な距離をもたないパターン（または、特定できないパターン）

A）　特徴的な距離をもつパターン
　　幾何学的なパターン
　　規則的なパターン
　　周期的なパターン
　　は、（規則的なフラクタルを除いて）これに含まれる．

B）　特徴的な距離をもつパターンの乱れとして記述できるパターン

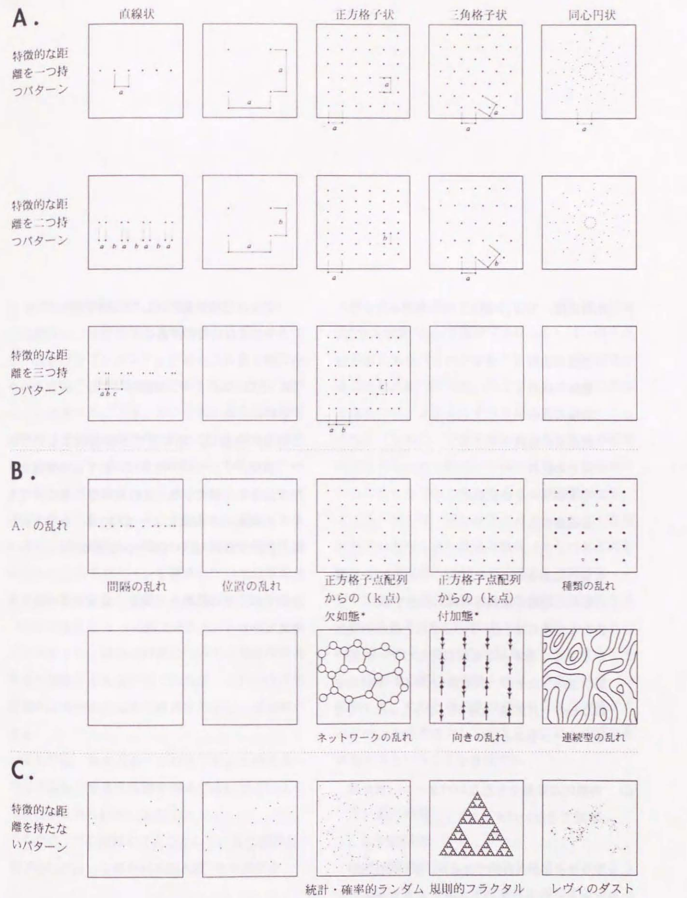


fig-2　パターンの便宜的な分類

乱れには、1.2.3節1）a）項でみたように

位置の乱れ
距離の乱れ
種類の乱れ
大きさの乱れ
向きの乱れ
ネットワークの乱れ
連続型の乱れ

等様々にあるが、ここでは、主として、位置の乱れと距離の乱れを考察対象とする．
またこの中には、fig-3のように、乱れの程度が小さく、基本となる規則的なパターンの一部が欠如したもの（欠如態*と呼ぶ）や付加されたもの（付加態*と呼ぶ）とみることのできるパターンもある．

C) 特徴的な距離をもたないパターン（または、特定できないパターン）

フラクタルが代表的であるが、**B**．の乱れが更に大きくなったものとみることもできる．
なお、フラクタルには、規則的なフラクタル（完全自己相似集合として記述できるもの）とそうでないものがある．

B．と**C**．のパターンを総称してランダムパターンと呼ぶ．
これらの分類は、あくまでも便宜的なものであり、また、それぞれの境界は、必ずしも厳密なものではない．特に、**B**．は相対的な位置づけであり、その乱れの程度によっては、**B**．というより**C**．に含めた方が良いパターンもある．

次節では、この乱れを計量し、定量化することを考えてみる．

［3］高安秀樹：フラクタル（朝倉書店、1986）

2.2.2　自己相関度* の定義

乱雑性または複雑性を表す指標としてエントロピー及びコンプレキシティがあることを１章でみた．しかし、空間的分布に対してそのエントロピーを計量することは、その分布が確率的な現象であり、その確率が予めわかっている場合には可能であるが、一般には、結果として現われたパターンからその背後にある確率を特定することは困難である．従って、それが確率的な現象であるか決定論的な現象かに関わらず、形態学的な見地からみた、あるパターンを構成している分布の分布確率を推定または定義する機構が必要となる．（この問題は2.3.4の項で考える．）一方、コンプレキティは、個別の対象についての論理的な複雑さや無秩序さを表す量であるが、これを空間的な分布に直接あてはめて計算することには困難がある．

それでは、あるパターンのランダムさの度合いのようなものを表す指標を構成するにはどのようなことが考えられるであろうか．
ここでは、その指標のひとつとして、自己相関度*及びそれによって導かれる乱れ度*を考案する．

1）考え方

ランダムなパターンのいくつか（例えば、付加態*や欠如態*として記述できるもの）は、何らかの基本となるパターンからの乱れとして記述できることを前節で述べた．そうであれば、その基本となるパターンからのずれを計量すれば良いことになる．しかし、一般の場合に、その乱れの程度が大きくなるにつれて、もはやどのような基本形からの乱れなのかを特定することは困難となる．
そこで、例えば、正方格子点パターンのような規則的な分布が、高い並進対称性（または自己同型性*　1.4項参照）を持っていることに着目し、一般のパターンは、乱れによってその並進対称性あるいは自己同型性*が失われていったものであるという見方から、乱れを計量することを考えてみる．これは、言い方を変えれば、全てのパターンに対して、それと同じ数の点から成る正方格子点パターンを基本形として与え、そこからのずれを計量するということを意味する．

2）自己相関

a）自己相関関数

自己相関関数には、いくつかの定式があるようであるが、ここでは、次の表式を採用することとする．

相関関数：

xとyという２つの変量の相関関数を、

$C \equiv E\,[\,x\,y\,]$ とする.[4]

ここで、E［　］はアンサンブル平均（母集団平均、1.1.2項参照）を意味する.

自己相関関数：

一方、時間に関する不規則変量を$x(t)$とするときτ時間隔たった２つの変動の積の平均値

$$C \equiv E\,[\,x(t)\,x(t+\tau)\,] \tag{2.1}$$

で定義される統計的関数を自己相関関数（auto-correlation function）と呼ぶ. ここでの平均操作は、原義的にはアンサンブル平均であるが、例えば、定常確率過程では、これを（2.2）式のように時間平均で置き換えることができ、また時刻τには無関係でラグ（lag）τのみの関数である.[4]

$$C(\tau) \equiv \overline{x(t)\,x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,x(t+\tau)\,dt \tag{2.2}$$

（ここに、$\overline{\quad}$ は時間平均を表す.）

空間的自己相関：

距離的に隔たったものの相関関数及び自己相関関数も定義でき、これを時間変動に関するものと区別して、特に、空間的自己相関（Spatial auto-

correlation）と呼ぶことがある. また、２次元図形$f(x,y)$の自己相関関数を次式で表す.[5]

$$C(s,t) \equiv \lim_{XY\to\infty} 1/4XY \int_{-Y}^{Y}\int_{-X}^{X} f(x,y)\,f(x+s,y+t)\,dx\,dy \tag{2.3}$$

また、このときのs、tをSpatial lagと呼ぶ.

b）自己相関係数

$C(\tau)$を$\tau=0$の値$C(0)$で割って正規化したものを、自己相関係数（auto-correlation coefficient）$R(\tau)$と呼ぶ.

$$R(\tau) \equiv C(\tau)/C(0)$$

空間的自己相関のときも同様に、

$$R(s,t) \equiv C(s,t)/C(0,0)$$

３）自己相関度*

a）密度相関関数

ここで、空間的にランダムに分布しているある量（ex.質量など）の座標$\boldsymbol{x}$における密度を$\rho(\boldsymbol{x})$とすると相関関数$C(\boldsymbol{r})$は次式で表わされる.[6]

$$C(\boldsymbol{r}) \equiv \langle \rho(\boldsymbol{x})\,\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \rangle \tag{2.4}$$

ここに、〈　〉は平均を表し、場合によってアンサンブル平均でも空間平均でもよい.

また、粒子化された点分布（以後、粒子点と呼ぶ、また粒子化については後述する）の密度相関関数と呼ばれる量は、次のように表わされる.[7]

$$C(\boldsymbol{r}) \equiv \langle n(\boldsymbol{r}_i)\,n(\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{r}) \rangle \tag{2.5}$$

ここに、$n(\boldsymbol{r}_i)$は格子点$\boldsymbol{r}_i$が、粒子に占められている場合を1、空である場合を0とする変数である.

従って、$n(\boldsymbol{r}_i)\,n(\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{r})$は、互いに$\boldsymbol{r}$だけ離れた格子点が共に粒子によって占められているときにのみ1をとり、それ以外は0となる. つまり、$C(\boldsymbol{r})$は、$\boldsymbol{r}$だけ離れた点に２つの粒子が存在する確率を表わす量である. また、

$$C(\boldsymbol{r}) = 1/N\ \Sigma\, n(\boldsymbol{r}_i)\,n(\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{r}) \tag{2.6}$$

で求められる. ここに、Nは総粒子数である.

さて、今問題としているのは、中間調の無いパターンそれ自体であるため、質量のような分布量は存在しない. つまり、ある座標には、位置の他に、そこが点で占められているかどうかという属性しか無い.　従って、粒子化された空間の座標xにおける密度$\rho(x)$とは、（2.5）式における$n(r_i)$に他ならない.　即ち、この場合には（2.4）式と（2.5）式は同じ内容を表わしていると言って良い.

よって、以後は、まとめて（2.4）式を用いることにする. 即ち、$\rho(\boldsymbol{x})$は格子点$\boldsymbol{x}$が、粒子に占められている場合を1、空である場合を0とする変数となる.

これにより、（2.6）式も次のように書き換えられる.

$$C(\boldsymbol{r}) = 1/N\ \Sigma\, \rho(\boldsymbol{x})\,\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \tag{2.7}$$

b）密度に関する自己相関関数

粒子化された空間に於ける（2.4）式は、言い換えれば、２値をとる粒子の密度に関する空間的な自己相関関数（以後、密度に関する自己相関関数と略す）である.

従って、（2.4）式は次のようにも書ける.

$$C(s,t) \equiv \langle \rho(x,y)\,\rho(x+s,y+t) \rangle \tag{2.8}$$

ただし、座標（x,y）の密度$\rho(x,y)$は、次の２値をとる変数である.

座標（x,y）に粒子点が存在するとき、

$$\rho(x,y) = 1$$

座標（x,y）に粒子点が存在しないとき、

$$\rho(x,y) = 0$$

また、（2.3）式及び（2.7）式より

$$C(s,t)=1/N\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,y)\rho(x+s,y+t)dxdy \quad (2.9)$$

C）自己相関度* $\mathcal{A}$

ここで、

$$C(0,0)=1/N\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,y)\rho(x,y)dxdy$$
$$=N/N$$
$$=1$$

よって、密度に関する自己相関係数は、

$$R(s,t)\equiv C(s,t)/C(0,0)$$
$$=C(s,t)$$

となり、この場合に於いては自己相関関数と自己相関係数は等しくなると共に、これらは0を含む正の整数値、即ち非負の整数値を値として持つ.

そこで、$s=0$、$t=0$を除く全領域にわたって、$C(s,t)$（もしくは$R(s,t)$でも良い）を計算し、0以外の値を持つ$C(s,t)$に関する集合平均をとることを考えて、これを自己相関度*（auto-correlation degree）と呼び、$\mathcal{A}$で表す. 即ち、

$$\boxed{\mathcal{A}=\langle C(s,t)\rangle \quad (2.10)\quad (C(s,t)\neq 0 \text{に関して、ただし} s,\ t\neq 0)}$$

このとき、0以外の値をとる$C(s,t)$の数をνとすると、$\mathcal{A}$は$C(s,t)$の総和をとってνで割れば良いから

$$\mathcal{A}=1/\nu\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C(s,t)\,dsdt$$
$$=\frac{1}{\nu\cdot N}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,y)\rho(x+s,y+t)\,dxdydsdt$$

（ただしs，$t=0$は含めない）　(2.11)

離散的に書くなら、

$$\mathcal{A}=1/\nu\sum_{i=1}^{\nu}C(s_i,t_i)$$
$$=\frac{1}{\nu\cdot N}\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{X}\sum_{Y}\rho(x,y)\rho(x+s_i,y+t_i) \quad (2.12)$$

・ここで、$\sum_X$ 及び$\sum_Y$ は、それぞれx座標、y座標の全範囲にわたって総和をとるという記号とする.

・s，$t=0$は含めない

・座標（x,y）に粒子点が存在するとき、

$$\rho(x,y)=1$$

座標（x,y）に粒子点が存在しないとき、

$$\rho(x,y)=0$$

補足：

これらの式は、2次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^2$における表式となっているが、

$\rho(x,y)\rightarrow\ \rho(r_1,r_2,r_3,\cdots,r_E)$　とすれば、

E次元空間$\mathbf{R}^E$に拡張できると思われる.

d）空間の粒子化／ディジタル化

これまで、空間の粒子化ということばを使ってきた. これは、ふたつの意味を含んでいる. 第1に、これは、E次元空間$\mathbf{R}^E$を微小間隔δで粗視化して、間隔δのE次元（超）格子に変換することを意味する. そして第2に、空間内に存在する点は、本来「大きさを持たないもの」であるが、直近の格子点へと移動し、規格化されることによって、あたかも、ひとつの粒子の様に扱うことができるようになるのである. これは、言い換えれば、空間の離散化である. 粒子化された空間は、ちょうどコンピュータディスプレイの画面における画素の並びと同じであり、この考え方は、パターンをコンピュータ処理する際にも都合が良い.

即ち、これは、与えられたパターンをコンピュータで扱う際に、微小解像度δで粗視化して（微小間隔δのメッシュをかけて）、ディジタル画像に変換する手続きに相当する. 今問題とするのは、中間調のないパターンであるので、各格子点（メッシュ）は、0か1という2つの値のみを持つ. また、このディジタル化により、点のパターンかそうでないかを区別せずに取り扱うことができるのである. ただし、当然ながら、ディジタル化されたあとのパターンの性質は、微小解像度δとメッシュの方向に依存する. これは、観測の精度とも関連する内容を持っている. つまり、何桁めまでの違いを捨象せずに保存するかは、考察しようとしている問題の中身によるのである. 例えば、電柱を10m間隔で配置するという設計をしたとする. 施工された電柱が、果たして等間隔に規則正しく並べられているかどうかの検査をする際、どこまでの精密さを要求すべきであろうか. 鉄骨の建て入れ精度が±5mm程度であることを考えると、どんなに厳しい検査官でもmm単位の測定さえ満足すれば十分とすべきであろう. これが、100m間隔の信号機を問題とする場合には、cm単位の測定でも良しとすべきかも知れない. つまり、規則的かどうかの判定には精度の問題が常に付きまとうのである. つまり、ランダムさを巡る問題は、結局は、差異と類似をどう捉えるかということに帰着されるのであり、本論のように、個

別の対象から離れた図像としてのパターンを問題にする場合でも、そのパターンをどのように認識するかという問題と無縁ではない．とはいえ、通常のフラクタル次元の測定において、与えられた対象によっては、0.2〜0.3程度もの開きがでることもあることを考え合わせると[8]、本論に於いては、指標の数値の有効数字を大きくとって精密さを問題とすることには、あまり意味がないと思われる．それよりも、ある統一した規則によってパターンをディジタル化し、そこから得られる指標によってパターンを序列づけられることを示すことに、まず重点を置くべきであると考える．（2.2.3節2）b）項参照）

他方、（2.3）式を用いて、関数f（x、y）に、格子点位置で最大となるような任意の分布確率を与え、連続量として直接自己相関度*を求める考え方もできるが、その場合でも、結局は、f（x、y）の与え方に依存することには変わりがない．

4）自己相関度*の計算

a）計算の際の考え方

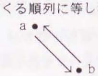
対象：粒子化された任意のパターンまたは、ディジタル化された2値ディジタル画像とする．

粒子化により、対象とするパターンは、離散的な格子点上の分布に置き変えられている．

この場合、$C(s, t) \neq 0$ となるのは自己像を空間的にs、tだけずらしたときに、少なくとも1点以上元の像と重なる場合である．そして、$C(s, t)$の値は、そのとき重なっている粒子点の数である．

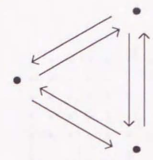
そこで、N点から成るパターンの場合、$C(s, t) \neq 0$となるための(s, t)の組み合わせ、すなわち自己像が少なくとも1つ重なるための移動ベクトル$\boldsymbol{v}(s, t)$の総数を求めると、これが、（2.11）式または、（2.12）式におけるνである．

一回の移動でそれぞれ1点ずつしか重ならない場合には、ベクトルの±方向の違いを考慮すると、νは、N個の点から2つとってくる順列に等しいから、この総数は

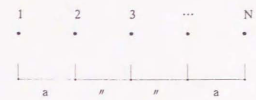


${}_{N}P_{2} = N(N-1)$となる．

ただし、たとえば、正方格子点パターンのように



三点から成るパターン



1次元規則鎖点列

規則性（対称性）をもっているような場合には，一回の移動で多くの点が重なるために，移動ベクトル$\boldsymbol{v}(s, t)$の総数は $N(N-1)$より小さくなる．（$\boldsymbol{v}(s, t)$が重複するため）

つまり、自己相関度*は、これらの性質を利用して規則性（対称性）やそこからの乱れを計量するための機構であるということができる．よって、より正確に言うなら、自己相関度*が計量するのは並進対称性及びそこからの乱れなのである．

b）ただ1点から成るパターンの自己相関度*

まず、（2.11）式または、（2.12）式に於て、$s=0$、$t=0$は含めていないので、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,y)\rho(x+s,y+t)\,dx\,dy\,ds\,dt = 0$$

母集団の成員が0の場合、平均はとれないので、ただ1点のみから成るパターンの自己相関度*は定義できない．これは、そもそも、ただ1点のみのパターンにおいては、規則的であるとか、ランダムだとかいうことが、意味をなさないことを反映しているのである．

c）2点から成るパターンの自己相関度*

$N=2$、$\nu=2$及び

$$\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{X}\sum_{Y} \rho(x,y)\rho(x+s,y+t) = 2 より$$

$$\mathcal{A} = 2/(2\times 2) = \underline{1/2}$$

d）3点から成るパターンの自己相関度*

$N=3$、$\nu={}_{3}P_{2}=6$、

$$\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{X}\sum_{Y} \rho(x,y)\rho(x+s,y+t) = 6 より$$

$$\mathcal{A} = 6/(3\times 6) = \underline{1/3}$$

e）1次元規則鎖点列の自己相関度*

まず、点に1からNまで順に番号を付ける．

→方向のベクトルの総数は、1番目の点を2、3、・・・、N番目の点まで順に重ね合せる組み合わせに等しいので、これを仮にν_{+}とすると、

$$\nu_{+} = N-1$$

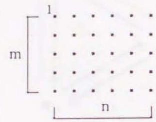
←方向のベクトルの総数も同様にして、

$$\nu_{-} = N-1$$

$$\therefore\ \nu = 2(N-1)$$

よって、

$$\mathcal{A} = \frac{1}{N\cdot 2(N-1)}\sum_{i=1}^{2(N-1)}\sum\sum \rho(x,y)\rho(x+s,y+t)$$



$$= \frac{1}{N \cdot 2(N-1)} \left[2 \left\{ (N-1) + (N-2) + \cdots + 1 \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{N \cdot 2(N-1)} \cdot 2 \,(N-1)\,!$$

$$= \frac{1}{N \cdot 2(N-1)} \cdot 2 \cdot \frac{N(N-1)}{2}$$

$$= 1 / 2$$

つまり、（1×N）の1次元規則点列の $\mathcal{A}$ は点の数には依らず常に、1／2である.

f）正方格子点パターンの自己相関度*

m行n列の正方格子点パターンの自己相関度*は，次式で求められる.

$$\mathcal{A} = \frac{(mn-1)}{2(2mn-m-n)}$$

導出：

点の総数はmnで与えられる.

A. まず、初めに上下左右方向の移動ベクトルのみに着目する.

1．→方向の移動ベクトルに関して計算する.

（2.12）式に於ける

$$\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{X} \sum_{Y} \rho(x,y)\rho(x+s,y+t)$$ を

Σ_{A1} と置くと、

$$\nu = n-1$$

$$\Sigma_{A1} = (n-1)\,m + (n-2)\,m + \cdots + m$$

$$= (n-1)\,! \cdot m$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \cdot m$$

$$= \frac{mn(n-1)}{2}$$

2．←方向のベクトルも同様に、

$$\nu = n-1$$

$$\Sigma_{A2} = \Sigma_{A1}$$

3．↓方向のベクトルは、

$$\nu = m-1$$

$$\Sigma_{A3} = (m-1)\,n + (m-2)\,n + \cdots + n$$

$$= (m-1)\,! \cdot n$$

$$= \frac{m(m-1)}{2} \cdot n$$

$$= \frac{mn(n-1)}{2}$$

4．↑方向のベクトルも同様に、

$$\nu = m-1$$

$$\Sigma_{A4} = \Sigma_{A3}$$

∴A に関してまとめて、

これを ν_A、Σ_A とすると、

$$\nu_A = 2\,(m-1+n-1)$$

$$= 2m+2n-4$$

$$\Sigma_A = 2\Sigma_{A1} + 2\Sigma_{A3}$$

$$= mn\,(n-1) + mn\,(m-1)$$

$$= mn\,(m+n-2)$$

B．次に、対角線方向の移動ベクトルに関して計算する.

1．まず、↘方向のベクトルについて計算する.

左上にある1番目の点を、1行目及び1列目の点を除いたすべての点に向けて重ね合せる移動の仕方の総数を ν_{B1} とすると、これは ↘ 方向の移動ベクトルを全て尽くしている.

$$\therefore \nu_{B1} = (m-1) \cdot (n-1)$$

左上にある1番目の点を、m行目（最後の行）の各点を目標にして重なるように移動する場合の $\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{X} \sum_{Y} \rho(x,y)\rho(x+s,y+t)$ を求め、Σ_{B1m} とすると、

$$\Sigma_{B1m} = (n-1)\,!$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

これを、X とおくと、

2行目に向けて重ねる場合は、

$$\Sigma_{B12} = (m-1)\,X$$

以下同様に、

$$\Sigma_{B13} = (m-2)\,X$$

よって、これらの総和を求めると、

$$\Sigma_{B12} = (m-1)\,X$$

$$\Sigma_{B13} = (m-2)\,X$$

$$\vdots$$

$$+)\ \Sigma_{B1m} = X$$

$$\Sigma_{B1} = (m-1)\,! \cdot X$$

$$= (m-1)\,! \cdot (n-1)\,!$$

$$\therefore \Sigma_{B1} = \frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$$

2．パターンの対称性より、↙方向のベクトルについても同様に、

$$\nu_{B2} = \nu_{B1}$$

$$\Sigma_{B2} = \Sigma_{B1}$$

3．↗方向のベクトルについても同様に、

$$\nu_{B3} = \nu_{B1}$$

$$\Sigma_{B3} = \Sigma_{B1}$$

4．↖方向のベクトルについても同様に、

$$\nu_{B4} = \nu_{B1}$$

$$\Sigma_{B4} = \Sigma_{B1}$$

∴

$$\nu = 4\,(m-1) \cdot (n-1)$$

$$\Sigma_B = 4 \cdot \frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$$

$$= mn\,(m-1) \cdot (n-1)$$

よって、

$$\nu_A+\nu_B=2m+2n-4+4mn-4m-4n+4$$
$$=4mn-2m-2n$$
$$=2(2mn-m-n)$$

また、

$$\Sigma_A+\Sigma_B=mn(m+n-2)+mn(mn-m-n+1)$$
$$=mn(mn-1)$$

∴

$$\mathcal{A}=\frac{mn(mn-1)}{mn\cdot 2(2mn-m-n)}$$

$$=\frac{(mn-1)}{2(2mn-m-n)}$$ （導出終り）

m、nを大きくしていくと、

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{(mn-1)}{2(2mn-m-n)}$$

$$=\lim_{m,n\to\infty}\left(\frac{mn}{4mn-2m-2n}-\frac{1}{4mn-2m-2n}\right)$$

$$=\lim_{m,n\to\infty}\left(\frac{1}{4-\frac{2}{m}-\frac{2}{n}}-\frac{1}{4mn-2m-2n}\right)$$

$$=1/4$$

$$\therefore\quad\lim_{m,n\to\infty}\mathcal{A}=1/4$$

即ち、空間全体が真っ黒に塗りつぶされたパターンの自己相関度*は、1／4である.

g）自己相関度*の下限

N個の粒子点から成るパターンが，最も無秩序であるとき、即ち、自己像の移動による重ね合わせ1回に対して、たかだか1点しか重ならないとき、自己相関度*の下限値（この場合は、最小値とも一致する）が与えられる.

このとき、

$$\mathcal{A}=1/N\cdot\nu\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{X}\sum_{Y}\rho(x,y)\rho(x+s_i,y+t_i)$$
$$=(1/N\cdot\nu)\cdot\nu$$
$$=1/N$$

つまり、

$\mathcal{A}=1/N$ が，自己相関度*の下限である.

もちろん、

$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{A}=0$$

h）自己相関度*の上限

厳密な証明はできないが、自己相関度*の上限及び最大値は、おそらく1／2である.

これは、ただ2点のみから成るパターンまたは1次元規則鎖点列に於いて与えられる.

推定：

定義より、明らかに$\mathcal{A}$は1を越えない．また、$\mathcal{A}$＝1となることも在り得ない．可能性があるのは、ただ1点のみから成るパターンの場合であるが、既述の様に、これは定義できないので除外されている.

従って、　$0\leq\mathcal{A}<1$

一方、最も$\mathcal{A}$が大きくなりそうなのは、空間全体が真っ黒に塗りつぶされたパターンであるが、これは既述の様に、（m× n）正方格子点パターンの極限として考えることができるので、$\mathcal{A}=1/4$

よって、今のところ分かっている最大の $\mathcal{A}$ は、1／2である.

［4］高木幹雄：スペクトル解析（森北出版、1977）
［5］磯部孝編：相関関数とスペクトル
（東京大学出版会、1968）
［6］前出　高安秀樹：フラクタル
［7］タマス・ヴィチェック：フラクタル成長現象
（朝倉書店、1990）
［8］前出　石村貞夫他：フラクタル数学

2.2.3　乱れ度*の提案

1）乱れ度*$\mathcal{D}$の定義

前項で定義した自己相関度*をもとに、ランダムさの度合いを表す指標の一つとして、乱れ度*を定義する．

前述したように、N点から成るパターンの自己相関度*$\mathcal{A}$の下限値は、1／Nで与えられ、このとき、並進対称性からの隔たりが最も大きくなると考えられる．そこで、この下限値1／Nを基準として、N個の粒子点からなる乱れ度*（degree of disorder）を次式で定義する．

$$\boxed{\mathcal{D} = (1/N)/\mathcal{A} = \frac{1}{N \cdot \mathcal{A}} \qquad (2.11)}$$

明らかに、$\mathcal{A} = 1/N$のとき、$\mathcal{D} = 1$となり、このとき、乱れ度*$\mathcal{D}$は、最大となる．

また、格子点パターンのようなとき、$N \to \infty$で

$\mathcal{D} = 0$　となる．

$$\therefore \quad 0 \leq \mathcal{D} \leq 1$$

なお、例えば、格子点パターンの場合には、点の数が比較的少ない場合でも、$\mathcal{D}$は0に近い数値となる．また、点の数が増えるに従って、0に漸近する．これにより、乱れ度*は、並進対称性からの乱れを表し、$\mathcal{D}$が1に等しいとき、その乱れが最大となるという意味で、$\mathcal{D} = 1$を持つパターンを完全乱れ*（perfect disorder）または、1.1.2項で述べた統計・確率的な狭義の一様ランダムないし完全ランダムと対比して、幾何学的ランダム*（geometrical random）と呼ぶことにする．（ただし、2点または3点のみから成るパターンは、常に$\mathcal{D} = 1$となるため、これらの用語は4点以上から成るパターンについて適用する．）

統計・確率的にランダムなパターンも、$\mathcal{D}$は1に近い値をとることが予想されるが、後述のコンピュータ・シュミレーションに見られるように、点の数が増えるに従って、$\mathcal{D} \neq 1$となる場合が多くなってくる．これは、次に述べる凝集性を反映しているためでもあるが、いずれにせよ、統計・確率的ランダムと幾何学的ランダムとは、概念的にも、また実際的にも、別の事柄を表わしているため、区別して扱う必要がある．事実、今まで、幾何学的な意味での＜ランダム＞が定義されたことはなかったと思われる．この乱れ度*による幾何学的ランダムも、あくまでも並進対称性を基にした一つの定義に過ぎないが、その意味に於いてなら、幾何学的ランダムは乱れの極限である、ということも許されるだろう．

つまり、自己相関度*及び乱れ度*は、スケールに依存することなく、あるパターンの自己参照によって、それ自身における差異を検出する機構であると言うことができるだろう．

2）いくつかの補足

a）乱れ度と微小解像度δの関係

この自己相関度*及び乱れ度*は、座標値の確定している点の分布パターンのような場合には、必ず一つの数値に定まるが、それ以外の一般のパターンに於いては、粒子化の際の微小解像度δの影響を受ける．これは、自己相関度*や乱れ度*それ自体の問題ではなく、乱れというものを規定する際の精度や誤差をどの程度まで許容して考えるか、という問題に直結している．つまり、現実世界に於いては、厳密に言えば、同じ二物が存在しえない様に、等距離にあるものもまた存在しない．等間隔とされるものも、厳密には、何らかの誤差を含んでいる．我々が、何かを論じる際や、その距離を問題とするときには、その問題に対して適当と思われる精度で、距離や寸法を丸めて考えているのである．（2.2.2節3）d）項参照）
測定の精度を細かくすればするほど、違いが強調されていくため、乱れ度*は大きくなり、逆に精度を下げれば、細かな違いが無視されていくため、乱れ度*は小さくなるという性質を有している．従って、一般の対象の乱れ度*を論じる際には、測定の精度即ちディジタル化の際の微小解像度δと常にセットにして考える必要がある．とはいえ、対象から分離され、スケールも持たないパターンを扱う本論のような立場にあっては、いかなる精度が果たして適当であるかを決める根拠は別段無いので、2.3.3節に述べる階層的格子変化法*との関係から、本論を通じて、特に断らない限り、以下のようなルールによってパターンのディジタル化を行なうことに統一することとする．

b）ディジタル化のルール

① まず、パターンにある二つの主軸[10]のうち、長い方の主軸（以下、長軸と略す）方向とX-Y平面に於けるX軸方向が一致するように、パターンを回転して置く．ただし、対象とするパターンが正方形の場合には、四つある主軸のうち、対角線方向の主軸は無視する．

② 対象とするパターンを丁度含む最小の正方形領域を、そのパターンに被せる．その際、パターンの主軸方向と正方形領域の辺方向が一致するよ

[10] 主軸とは、断面相乗モーメントを0とするような重心を通る直交座標軸のことである．対称軸は主軸の一つである．正多角形や円形では特に主軸の方向は決まらない．

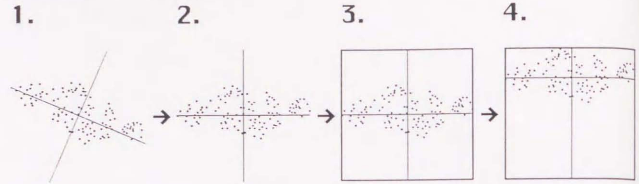


fig-3

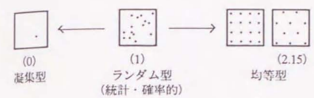


fig-4

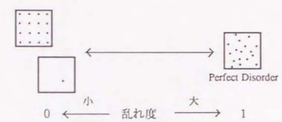


fig-5

うな向きで被せる．また、パターンの短軸方向（Y軸方向と一致している）には、余裕があるので、fig-３のように、正方形領域の上辺と、パターンの中の一番上にある点が一致するようにパターンを移動させる．これで、パターンと正方形領域の関係が一通りに決定できた．（実際には、乱れ度*の計算だけならば、パターンに対して正方形領域の大きさと向きを一通りに決めさえすればそれで良いのであるが、後述の階層的格子変化法*との関係から、このような上方への移動を行なっている．）

③　被せた正方形領域を、縦横ともに　５１２（2^9）分割して、対象パターンを含むマス目（ボックス、方格、細胞などと呼ぶことがある）の座標に、パターンを変換する．

従って、対象パターンは、１～５１２の間の整数値をとる座標データの組（格子座標）に置き換えられることになる．よって、この場合の解像度は、対象パターンそれ自身の大きさによって相対的に決められ、しかも、パターン相互において同じ重みを持つ．

より精度を細かく論じる必要のあるときには、分割を細かくすれば良い．

c）粒子化と凝集性の反映

ａ）に於いて、解像度の精度と乱れの関係を述べたが、もう一つ、粒子化の際の微小解像度δが影響する事項がある．それは、パターンの凝集性である．パターンの凝集性については、節を変えて改めて論じるが、粒子化の際にδを法(module)として格子座標に変換するため、δに近い間隔で分布している点が多くあると、通常の格子点配列に近くなり、並進対称性を示し易くなる．この結果、乱れ度*は、小さくなる傾向を示す．つまり、ある部分にかたまったパターンの乱れ度*は、その凝集性を反映して小さくなるのである．しかし、このことは弱点ではなく、一箇所にかたまるというのも、ある規則性と考えれば、むしろ凝集性を持ったパターンの乱れ度*が小さくなるのは、歓迎すべき事態なのである．

d）従来の分類指標との違い

従来の、例えば点の分布パターンに関する分類指標には、R-指標と呼ばれるものを始めとして幾つかの指標があるが、それらによるほとんどの分類あるいはパターンの位置づけが、fig-４で示されるものであることは、１章に於いてみたとおりである．この分類は、（狭義の）ランダム型を基準にして、言わば、集中・分散の度合いによって並べたものである．これは、点相互の距離関係を統計的な手法を用いて分析し、類型化しているものであり、様々な分野に於いてこの類型及び順番（序列）が踏襲されてきていることも、１章に於いてみたとおりである．これに対して、パターンの規則性という観点からすると、（狭義の）ランダム型をはさんで、その両極に凝集型と均等型がある、という並べ方よりも、凝集型や均等型のように、割とわかりやすい規則性を指摘できるようなものは、むしろ近くにまとめられて、その対極に、今のところ明確に規則を記述できないような、私の言う意味でランダムなパターンを位置づけるfig-4 のような序列の方が（決して、どちらが優位にあるかということではなく）、相応しいと言うことができる．そして、乱れ度*は、この序列の中に於ける、対象パターンの位置づけを表わす指標なのである．これは、単なる順番の違いを超えた大きな観点上の相違を反映していると思われる．しかし、これも一つの観点に過ぎず、更に別の観点がないかについても今後探っていく必要が残されている．

e）反転したパターンの扱い

通常の、図形としてパターンの問題を扱う場合には、白黒を反転させたパターンどおしを同一のパターンとして論じることもあるが、本論では、白と黒を逆転したパターンは、別のパターンとして考える．なぜなら、点が一つも存在しない状態と、空間全体が点で埋め尽くされている状態とは、明らかに同一視できないからである．

f）並進対称性以外の規則に関して

乱れ度*は、今までにも何度か繰り返し述べてきたように、あくまでも並進対称性を持つパターンを基準とし、そこからの乱れを計量するものである．その他、凝集性を反映する以外は、例えば、回転対称性やもっと複雑な規則については検出できない．一方、複雑な規則を扱えば扱うほど、そのときの乱れの性格は、あいまいなものになっていくという側面があることも否めない．確かに、秩序とは発見するものである、という見解に立つなら、より複雑な規則性を検出する機構が、乱れ度*とは別に必要となることも事実である．しかしながら、その機構は、むしろ〈パターン認識〉や〈画像理解〉という分野に於いて扱うのが相応しいような、本論の目指すものとは異なる問題へと移行して行かざるを得ないだろう．

3）正方格子点配列の自己相関度*と乱れ度*

n×nの正方格子点配列に関して計算すると以下の様になる．点の数が多くなればなるほど、自己相関度*は、極限値1／4に近づいてゆくのが分かる．

2 * 2	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.3750	DEGREE OF DISORDER= 0.6667
3 * 3	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.3333	DEGREE OF DISORDER= 0.3333
4 * 4	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.3125	DEGREE OF DISORDER= 0.2000
5 * 5	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.3000	DEGREE OF DISORDER= 0.1333
6 * 6	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2917	DEGREE OF DISORDER= 0.0952
7 * 7	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2857	DEGREE OF DISORDER= 0.0714
8 * 8	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2813	DEGREE OF DISORDER= 0.0556
9 * 9	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2778	DEGREE OF DISORDER= 0.0444
10 * 10	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2750	DEGREE OF DISORDER= 0.0364
11 * 11	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2727	DEGREE OF DISORDER= 0.0303
12 * 12	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2708	DEGREE OF DISORDER= 0.0256
13 * 13	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2692	DEGREE OF DISORDER= 0.0220
14 * 14	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2679	DEGREE OF DISORDER= 0.0190
15 * 15	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2667	DEGREE OF DISORDER= 0.0167
16 * 16	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2656	DEGREE OF DISORDER= 0.0147
17 * 17	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2647	DEGREE OF DISORDER= 0.0131
18 * 18	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2639	DEGREE OF DISORDER= 0.0117
19 * 19	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2632	DEGREE OF DISORDER= 0.0105
20 * 20	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2625	DEGREE OF DISORDER= 0.0095
21 * 21	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2619	DEGREE OF DISORDER= 0.0087
22 * 22	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2614	DEGREE OF DISORDER= 0.0079
23 * 23	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2609	DEGREE OF DISORDER= 0.0072
24 * 24	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2604	DEGREE OF DISORDER= 0.0067
25 * 25	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2600	DEGREE OF DISORDER= 0.0062
26 * 26	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2596	DEGREE OF DISORDER= 0.0057
27 * 27	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2593	DEGREE OF DISORDER= 0.0053
28 * 28	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2589	DEGREE OF DISORDER= 0.0049
29 * 29	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2586	DEGREE OF DISORDER= 0.0046
30 * 30	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2583	DEGREE OF DISORDER= 0.0043
31 * 31	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2581	DEGREE OF DISORDER= 0.0040
32 * 32	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2578	DEGREE OF DISORDER= 0.0038
33 * 33	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2576	DEGREE OF DISORDER= 0.0036
34 * 34	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2574	DEGREE OF DISORDER= 0.0034
35 * 35	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2571	DEGREE OF DISORDER= 0.0032
36 * 36	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2569	DEGREE OF DISORDER= 0.0030
37 * 37	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2568	DEGREE OF DISORDER= 0.0028
38 * 38	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2566	DEGREE OF DISORDER= 0.0027
39 * 39	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2564	DEGREE OF DISORDER= 0.0026
40 * 40	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2562	DEGREE OF DISORDER= 0.0024
41 * 41	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2561	DEGREE OF DISORDER= 0.0023
42 * 42	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2560	DEGREE OF DISORDER= 0.0022
43 * 43	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2558	DEGREE OF DISORDER= 0.0021
44 * 44	AUTO-CORRELATION DEGREE= 0.2557	DEGREE OF DISORDER= 0.0020

表-1

2.3　凝集性と集群性

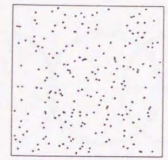


fig-6　統計的に一様な分布

2.3.1　分布パターンの一様性と遍在性

1）一様な分布

まず、本論でも何度か顔を出した一様な分布ということについて、改めて確認しておく．このときの一様性とは、何よりも実現確率としての一様性であり、既往の分類法では、その最も基本となる（狭義の）ランダム型を与えるものである．これは、空間密度が同じならば、最も高いエントロピーを持つ．従って、これはまた、平衡状態に於ける分子がつくりだす分布でもある．

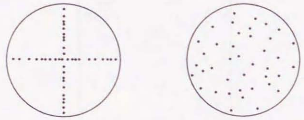
一様な分布というものを定式化しておこう．空間を、一辺δのE次元超立方体に分割したとき、その小立方体の密度がδに依らず一定であるなら、その分布は一様であるという．即ち、

$$N \propto \delta^{E}$$

つまり、一様な分布とは、E次元分布のことである．ここで、Eは、その分布が埋め込まれている空間のユークリッド次元である．これを拡張して、統計的な意味での一様性も定義できる．各立方体に於ける実現確率μ_iがiに依らずに全て等しいとき、δに関して分布は一様と言える．これが、即ち、δのスケールで見たときの統計的な一様性である．一般に、一様な分布といえば、この統計的な一様性を指すことが多い．

2）分布の偏り（粗密の具合）

ただし、fig-6　を見ても分かる様に、統計的に一様なパターンも、点の分布として見れば決して均一ではなく、偏りを持っている．そもそも、本論が対象としている様なパターンは、それが点の分布パターンか否かには関わらず、位置の情報しか持っていない．とすれば、そこに何らかの構造なり規則なりを見い出すとしても、それは結局、分布の偏り具合から結果してくるものであると言えるだろう．即ち、全ては、偏り具合を問題としているのである．このような理由から、分散・集中（凝集）あるいは分布の粗密の具合という観点は、何かの分布パターンを対象とする場合に、常に問題とされてきた．例えば、凝集型配置は、密度の場所によるばらつきが大きい配置の型であるし、一方、均等型配置は、それぞれの点の間隔が保たれていることが特徴であり、密度の場所によるばらつきが小さい配置の型である．従って、この節で取り扱おうとする凝集性や集群性という観点は、既往のそれと近いものであり、その延長線上で、更にその指標化の可能性を探ろうとするものである．例えば、既往の研究に於けるR- 指標も、集中・分散あるいは凝集・拡散という観点からの指標であると言えるだろう．



（イ）　　　　　（ロ）

fig-7

2.3.2　パターンの凝集性に関する指標

1）パターンの密度

まず、パターンの密度というものを考えてみる．簡単のために、点の分布パターンを対象とする．この場合の密度は数密度である．点の総数が分かっているとして、密度を計算するためには、範囲の指定が必要となる．仮に、点分布の重心を中心として、そこから最も遠い点までの距離 r を半径とする円内を、密度を計算するための領域として設定するなら、その面積 $\pi r^2 = A$ として、密度は N／A で与えられる．

しかし、このやり方には、2つの問題点がある．第一には、このままでは r の絶対的な大きさに依存した尺度となってしまうという点である．例えば、r＝1㎞と r＝100㎞では、同じ数の点が存在するものとして、明らかに後者の方が密度が薄い．実際の、人口密度等は、このように求める．しかし、今問題としているのは、あくまでもパターンの密度であり、それはスケールに依存する量であっては都合が悪い．第二番目としては、たとえ r が絶対スケールに於いて等しいとしても、例えば、fig-7 の（イ）と（ロ）の様な場合（点の数も等しいとして）、きめの細かさが明らかに異なるにも関わらず、同じ密度を与えることになる．このことから考えると、パターンの大域的な密度という様な尺度では、今問題としているパターンの凝集・拡散の度合いを的確に表すことができない．それはむしろ、局所的な密度の変動ないし分布の状態を調べていくことに向かわざるを得ないのである．

2）拡散度*

では、fig-7（イ）、（ロ）の違いを端的に表しているものは何であろうか．それは、凝集・拡散という観点からすると、やはり最近隣距離の分布ということになる．1.3.3節で見たように、R-指標をはじめとして距離法の指標は、ほとんど全て最近隣距離の分布に基づく指標であった．ただし、一つ気がかりであったのは、統計・確率的なランダム型を基準としていることであった．とすれば、この基準を変更してみれば良い．即ち、スケールに依存しない尺度を求めようとしているのであるから、あくまでも、パターンそれ自身の大きさとの比較によって、拡散あるいは凝集の度合いを計算することが必要である．

よって、凝集・拡散の度合いを表す拡散度*$\mathcal{S}$（degree of scattering）を次のように定める．分布の重心から、最も遠い点までの距離を r_{max} としたとき、

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{S} = 最近隣距離の平均値／（2 \cdot r_{max}） \\ 0 \leqq \mathcal{S} \leqq 1\end{array}}$$

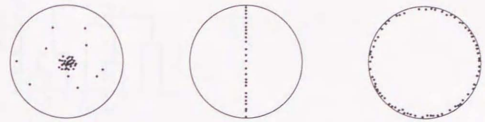
ここで、ただ一点に凝集しているときのみ、$\mathcal{S}=0$ と定める．また、$\mathcal{S}=1$ となるのは、2点から成るパターンのときである．

例えば、線分等の場合は、2.2.3節で述べたデジタル化のルールに従って、粒子化するものとする．従って、線分の $\mathcal{S}=1／512=0.001953\cdots \ll 1$

つまり、この拡散度*は、連鎖・稠密の度合を表わすものであり、言い換えれば、分離の度合を表わすものでもある．拡散度*が0に近いほど、稠密であり、逆に、1に近ければ、分離の度合が高いと言える．この意味からすると、ただ2点から成るパターンが、最も分離されている．

3）中央集中的か周縁的かを表す指数／周縁度*

例えば、fig-8 の（イ）、（ロ）、（ハ）のパターンは、どのパターンも拡散度*は小さいが、これらのパターンの性格はかなり異なっていると言える．従って、拡散度*だけでは、これらのパターンの違いを表すことはできない．ここでは、これらのパターンの違いを反映できる様な指標の構成を試みる．



（イ）　　　　　（ロ）　　　　　（ハ）

fig-8

これらのパターンの違いは、パターンの拡がり、あるいは、パターン全体の中で、どこに点が集中しているかの違いであると言える．つまり、中央付近に点が多く集中しているか、むしろ周縁付近に集まっているかの違いである．例えば、fig-8の（ロ）のようなパターンはその中間であると言える．

そこで、天下り的ではあるが、このような違いを反映する指標として、以下のような周縁度*（degree of "Peripherality"）$\mathcal{P}$ を設定する．

あるパターンが与えられたとき、断面極2次モーメント I_p が軸の方向に依らず、一つ決まる．$I_p = I_x + I_y = M_{02} + M_{20} =$ 一定．また、点の数やスケールに依存しない尺度とする必要があるから、

$$\mathcal{P} = \frac{1}{r_{max} \cdot N}\left(M_{20} + M_{02}\right)$$

ここで、r_{max}：拡散度*の計算と同様

M_{pq}：重心周りの（p＋q）次のセントラル・モーメント

あるパターンの持つ拡がり（ここでは、重心を中心とした円形の領域として考えている）に対して、その中心付近に多くの点が集まっているときには周縁度*$\mathcal{P}$ は小さく、逆に周辺付近に多くの点

があるパターンほど、Pの値は大きくなる．従って、円周上に乗るような点列が、Pの最大値を与えることになる．例えば、ただ2点から成るパターンや2×2の正方格子点配列は、円周の上に乗るので、最大値1をとる．よって、

$$0 \leqq P \leqq 1$$

2.3.3　パターンの集群性に関する指標

1）クラスター分析

同じ凝集型の配置でも、1ヶ所に凝集したパターンと、何ケ所かに分かれて凝集している場合がある．これは、言い換えれば、そのパターンが幾つのグループを構成しているかの違いである．もっとばらばらで拡散的になる場合あるいは均等なパターンとなるにつれて、グループと呼べるようなものが無くなり、一つ一つの点が孤立的になっていく．一般に、ある集団を幾つかのグループに分ける場合には、クラスター分析が行なわれる．ただし、クラスター分析とは、必ずしも、単一の完成された技法を指すのではなく、応用統計学の発見的手続きを含めて、様々な技法や手続きを包括的に言い表わすことばである．[12] また、幾つの群に分けるべきかという問題に対しても、自動的に決定できる訳ではなく、普通は、直観に基づいて予めどの程度に分けるのが適当であるかを決定しておく必要があり、結果を見ながら修正していくことになる．

クラスター分析の考え方を大きく二つに分けるとすると、一つは、個体あるいは属性（点の分布パターンの場合にはそれぞれの点）によって定められる類似度（点の分布パターンの場合には、距離）をもとにして、似たものどおしをグループ化していくものであり、他方は、分散の概念をもとにして、クラスター間の分離の度合いを基準に分類するというものである．通常は、前者の方が実用的であり、よく用いられる．[13]

例えば、点のパターンの分析との関連から言うと、"近さ"という基準によって群化していく場合、まず最初は、点の一つ一つをそれぞれ別のクラスターと見做して、一番近いクラスター（点）どおしを組にし、次に、今できた組（新たなクラスター）を含めて、再度、その中で一番近いクラスターどおしを組にするという操作を繰り返してゆく．この場合、融合されたクラスターとまだ融合していないクラスター（点）との距離のとり方によって、以下のような幾つかの異なる方法がある．

①　最短距離法

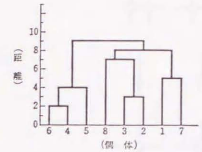


fig-9　樹状図

②　最長距離法

③　メジアン法

④　重心法

⑤　群平均法

⑥　ウォード法

どの方法によっても、最終的には、全ての点が一つのクラスターを形成することになる．ただし、上に挙げた内のどの手法が最も妥当であるかはデータに依存するので、得られた結果を良く検討する必要がある．また、クラスター分析には、得られた結果に対する検定の議論が含まれていないので注意を要する．

このようにしてできたクラスターの群を図化すると、fig - 9 に示した様な図が得られる．この図は、樹状図（dendrogram）と呼ばれているものである．この図をもとにして適当な位置で切断すると、ある距離以下で近接しているクラスターの分類が得られる仕組みになっている．しかし、いくつか気になる点もない訳ではない．まず、樹状図では位置の情報が失われているために、パターンの分析をするという観点からは、その傾向を把握しづらい面がある．例えば、各ステップごとのクラスターをその都度表示させることも可能ではあるが、点の数が多くなってくるとかなり煩雑になってきて、ときにはかなり冗長となることも十分考えられる．また、通常のクラスター分析が対象とするのは、それぞれ異なった個体であったり属性であったりするので、樹状図での表示が意味のあるものとなるが、今問題としている様なパターンの集群性を捉えるという観点からすると、どの点がどのクラスターに属するかということよりも、大局的に見て、パターンを構成する各部分の偏り方に、どの様な特徴があるのかを調べることの方にこそ重点がある．

2）くりこみ*によるパターンのクラスタリング（群化）

a）くりこみ群 [14] [15]

ところで、物理学の分野では、ウィルソンによってつくられたくりこみ群という考え方がある．これは、簡単に言うと、N個の粒子の問題を$N' < N$であるようなN'個の問題に変換することである．また、くりこみ群の目的は、観測に於いてこの様に粗視化をしていったときの物理量の変化を、定量的に捉えることにある．

《あるスケールの粗視化のもとで測定した物理量をpとする．このスケールよりも2倍だけ大きな

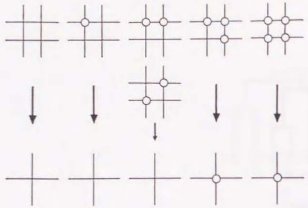


fig-10

スケールで粗視化した場合に、その物理量が p'になったとする．この p'は、適当な粗視化に関する変換 f_2によって元の p と次のように関係づけることができるだろう．

$$p' = f_2 (p)$$

ここで f の添字 2 は 2 倍の粗視化を意味する．もしも、粗視化の度合いをさらに 2 倍すれば、次のような関係が成り立つ．

$$p'' = f_2 (p') = f_2 \cdot f_2 (p) = f_4 (p)$$

このような関係を一般化すれば、変換 fが次のような性質をもつことがわかるだろう．

$$f_a \cdot f_b = f_{ab}$$

$$f_1 = 1$$

ここで 1 は恒等変換を表す．》[14]

この変換 f は、一般には逆変換を持たないので、本来であれば、くりこみ半群と呼ぶべきものである．

例えば、2 次元の格子の上に、金属がランダムに分布している状態を考える．このときの物理量 p としては、金属の存在確率をとる．fig-10のように、2 × 2 の格子点を粗視化して、一つの格子にまとめていくのである．この様にしてできた新しい格子を超格子、粗視化される 2 × 2 の格子点をブロックと呼ぶことがある．[14] このとき、ブロック内の 4 点全てに金属がある場合には、明らかに超格子点上にも金属があると見做してよい．また、ブロック内の 3 点に金属がある場合にも、どちらの方向に対しても電気を通すから、超格子点に金属があるとして良いだろう．ただし、ブロック内の点の数が 2 点以下となると、どちらか電気を通さない方向があるので、超格子点に金属がないとした方が妥当である．この様に、どんどん粗視化して格子点の数を減らしてゆくことができる．ここで、誤差を減らすためには、一度にくりこむブロックの大きさが大きければ大きいほど良い様である．この方法は、そのままでは検討できないような大きな系の問題を、より小さな問題へと変換することによって、その取り扱いを可能にする．

b）くりこみ*によるパターンのクラスタリング（群化）

このくりこみ群の考え方を援用して、パターンの集群性を捉えるための方法を考えてみる．つまり、粗視化することによって、大まかに、グループ化する傾向を捉えていこうというのである．前に見た様に、一般のクラスター分析に於いては、基本的に 1 ステップずつ群化を進めていくのであった．しかし、くりこみ群の考え方からすると、一度にくりこむ大きさが大きいほど、逆に誤差は小さくなる．そこで、ここでは、できるだけざっくりと群化していくことを考えたい．

以下、点の分布パターンとして説明していく．まず、群をつくるための基準は、ユークリッド距離として測ったときのクラスター間の近さとする．また、あるクラスターと別のクラスターとの距離は、それぞれのクラスターに於ける重心点の位置で計測する．一度に粗視化する大きさをできるだけ大きくするための一つの方法として、平均を基準にすることが考えられる．平均を境にして、それ以上のものとそれ以下のものが、ある場合を除いて、必ず存在するからである．ある場合とは、いわゆる均等型の配置であり、全ての最近隣距離が等しいため、最近隣距離の平均とも一致する．そこで、例えば、最近隣距離の平均未満の距離で近接しているものを、一度にグループ化するということにすれば、均等型の場合は変化せず、全ての点は孤立したままである．このように、ある基準を設定して、その基準より近いもの（類似しているもの）を一度に群化していくという方法を、くりこみ*によるクラスタリング（群化）と名付けることにする．繰り返しになるが、現在あるクラスター分析の手法が、一度にまとめるクラスターの数をできるだけ小さくしているのと、対照的である．（一度にまとめられるクラスターの数は、常に 2 である．）即ち、この方法では、一度に、多くのクラスターがまとめられていくことになる．つまり、既存の手法が近視眼的であるのに対して、この方法は大域的であると言うことができるだろう．もちろん、採用する基準によって、異なった手法になり得る．これは、既存の手法に於いても、距離の取り方の違いによって、主なものだけで①〜⑥の手法があったのと同様である．くりこみ*によるクラスタリング（群化）には、様々の手法をつくり出す可能性があると思われるが、ここでは、パターンの集群性（グループをつくる傾向）を調べるという観点から、次のように定式化するものとする．基準となる距離は、最近隣距離の平均を採用する．従って、これはくりこみ*によるクラスタリング（群化）の中の平均法と呼ぶことができる．その際、平均値以下とするか平均値未満とするかによって、得られる結果は異なるが、集群性という観点からすると、例えば先程の均等型のような場合、各点は孤立していると見た方が好ましいので、ここでは平均値未満を採用することにする．（均等型を一つのグループと見做した方が良い場合は、平均値以

下の距離を採用すれば良い．どちらを選択するかは、問題の種類によって判断する必要がある．）

［くりこみ*によるクラスタリング（群化）に於ける平均法］

i．まず、全ての点のそれぞれを、一つのクラスターとして考える．つまり、N点から成るパターンの場合、N個のクラスターから成っているものと見做して、作業を始める．

ii．それぞれのクラスターの最近隣距離を計算しその平均値を出す．その際、クラスター間の距離としては、それぞれのクラスターの重心点の間で測定するものとする．

iii．最近隣距離の平均未満の距離にあるクラスターを一つにまとめていく．（この作業をくりこみ*と呼ぶ．）

iv．このようにしてまとめられたクラスターは、その重心位置で、塗りつぶされた円として表示する．このとき、一つのクラスターに属する点の数に比例して表示する円の大きさを決めると、クラスター間の関係をより把握し易くなると思われる．ここまでで、第1段階に於ける群が得られ、図に表示される．

v．次に、第2段階としてi～ivの操作を繰り返す．このとき、第2段階での群が表示されている．

vi．同様にして、クラスターの数が2になるまで繰り返していく．（∵ここでは、くりこむ為の基準を平均値未満としているので、2つ以下のクラスターは、それ以上まとめられることはない．）

3）集群性の把握

fig-11には、この方法によって得られた各段階でのクラスターが表示してある．もちろん、点の総数にはある程度依存するが、偏り方が大きいパターンほど早く収束し、均等型に近いようなパターンほど、最後の段階に到達するまでの段階数が多くなるという傾向を示す．つまり、グループをつくる傾向（集群性）が大きい程、段階数は小さく、逆に、集群性の小さいものほど、段階数は多くなると言える．ただし、これを何かの指標に反映させるには、点の数の影響を除外する必要があるが、もう一つ集群性を反映するものとして、各段階に於ける孤立点の割合がある．ここで、孤立点と呼んでいるのは、ただ一つの点から構成されているクラスターを指している．孤立点の割合の小さいものほど、集群性は高く、逆に、その割合が

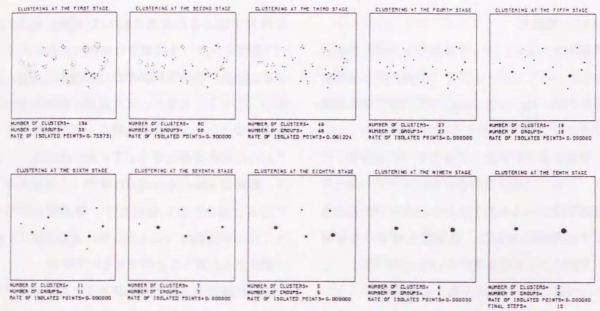


fig-11

大きいものほど、集群性は低いと言える．この孤立点の割合を使えば、点の総数の影響がある程度除去されるので、その割合の変化を調べることによって、集群性を特徴づけることが可能となると思われる．

この方法は、クラスターの重心間距離で計算しているので、通常のクラスター分析で言うと重心法に一番近いが、一度に群化する数の違いが反映してか、かなり近い結果にはなるものの、全く一致するわけではない．

---

［12］マンデルベルグ：クラスター分析とその応用（内田老鶴圃、1988）

［13］河口至商：多変量解析入門II（森北出版、1978）

［14］前出　高安秀樹：フラクタル

［15］H. O. パイトゲン／D. ザウペ：フラクタル・イメージ（シュプリンガー・フェアラーク東京、1990）