

相関係数に基づく乱流スカラーフラックス
のモデリングに関する基礎研究

鹿 園 直 毅

目次

相関係数に基づく乱流スカラーフラックス
のモデリングに関する基礎研究

鹿園直毅

1993年12月

目次

記号表	xi
1 序論	1
1.1 概論	1
1.2 乱流モデリング概説	3
1.2.1 支配方程式	3
1.2.2 レイノルズ応力及び乱流熱流束輸送方程式モデル	7
圧力変動相関項	7
Slow 項	9
Rapid 項	14
浮力項	21
Wall reflection 項	22
散逸項	24
乱流拡散項	27
1.2.3 ε 方程式のモデリング	32
1.2.4 ε_0 方程式のモデリング	33
1.2.5 渦粘性, 渦拡散係数モデル	36
1.3 本研究の目的	41
2 乱流熱流束輸送方程式モデル	50
2.1 温度圧力勾配相関項及び散逸項のモデリング	50

2.1.1	相関係数の導入	52
2.1.2	修正関数の決定	57
	圧力拡散項の省略	57
	局所平衡の仮定	59
	最終形	60
2.1.3	アプリオリテスト	62
	一様等方性乱流	63
	一様異方性乱流	64
	一様剪断乱流	65
	発達した平行平板間乱流	66
2.2	乱流拡散項のモデリング	67
2.3	分子拡散項のモデリング	69
2.4	k_B 方程式のモデリング	70
2.5	ε_B 方程式のモデリング	70
2.6	一様乱流温度場への適用	72
2.6.1	一様等方性乱流	72
2.6.2	一様異方性乱流	73
2.6.3	一様剪断乱流	74
2.7	壁面乱流温度場への適用	75
2.7.1	壁面補正	75
2.7.2	十分発達した平行平板間乱流温度場への適用	79
3	レイノルズ応力輸送方程式モデル	111
3.1	速度圧力勾配相関項及び散逸項のモデリング	111
3.1.1	オーダー評価	112
3.1.2	基本形	113
3.1.3	修正関数及び定数の決定	115
3.2	乱流拡散項及び ε 方程式のモデリング	117

3.3 一様乱流への適用	117
3.3.1 一様剪断乱流	118
3.3.2 一様純歪乱流	120
3.4 壁面乱流への適用	121
3.4.1 壁面補正	121
3.4.2 十分発達した平行平板間乱流	124
4 密度成層効果に対する考察	153
4.1 温度圧力勾配相関項及び速度圧力勾配相関項に対する浮力効果のモデリング	154
4.2 ε 方程式及び ε_θ 方程式に対する浮力効果のモデリング	157
4.3 一様成層剪断乱流場への適用	158
4.3.1 一様安定成層剪断乱流	159
4.3.2 一様不安定成層剪断乱流	165
5 結論	189
謝辞	192
参考文献	194
A 乱流モデルの基本原則及び拘束条件	212
A.1 乱流のモデリングにおける基本原則	212
A.1.1 Principle of receding influence	213
A.1.2 高レイノルズ数の仮定	213
A.2 乱流モデルが満足すべき数学的・物理的拘束条件	214
A.2.1 次元	214
A.2.2 テンソル量としての条件	215
A.2.3 フレーム不変性	216
A.2.4 Rapid distortion theory	218
A.2.5 Realizability	223

A.2.6 スカラー方程式の線形性	225
A.2.7 壁面漸近挙動	226
B 温度場 2 方程式モデルの導出	229
C 座標の回転に対する依存性の評価	233
D 本モデルの具体形	238
D.1 速度場	238
D.2 温度場	239
D.3 壁面補正	240

目 次

1.1 乱流モデルの構成	47
1.2 モデルの条件	48
1.3 モデル構築の手順 (既存の手順)	49
1.4 モデル構築の手順 (本研究での手順)	49
2.1 平行平板間乱流における $\overline{u_2\theta}$ の収支	82
2.2 平行平板間乱流における $\overline{u_i\theta}$ 及び $\Pi_{i\theta}$ の分布	83
2.3 エネルギースペクトル関数及び温度乱れスペクトル関数の分布 (Tennekes & Lumley, 1972)	84
2.4 温度変動及び速度変動の相関	84
2.5 一様等方性乱流における C_p 分布	85
2.6 一様剪断乱流における C_p 分布	85
2.7 平行平板間乱流における C_p 分布	86
2.8 $\Pi_{i\theta}$ 及び $\varepsilon_{i\theta}$ の時間変化	87
2.9 $C_{(2)}$ のブラントル数 (Pr) 依存性	88
2.10 $C_{(2)}$ の乱流レイノルズ数 (Re_t) 依存性	88
2.11 $C_{(2)}$ のタイムスケール比 (R) 依存性	89
2.12 一様異方性乱流における $C_{(2)}$ の時間変化	90
2.13 一様剪断乱流における $C_{(i)}$ の流れ方向変化	91
2.14 $\Pi_{1\theta}$ 及び $\varepsilon_{1\theta}$ の時間変化 (Case 1, $d\Theta/dx_1 \neq 0$)	92
2.15 $\Pi_{2\theta}$ 及び $\varepsilon_{2\theta}$ の時間変化 (Case 2, $d\Theta/dx_2 \neq 0$)	92

2.16 $\Pi_{3\theta}$ 及び $\varepsilon_{3\theta}$ の時間変化 (Case 3, $d\Theta/dx_3 \neq 0$)	93
2.17 平行平板間乱流温度場における $\Pi_{1\theta}^+$ 及び $\varepsilon_{1\theta}^+$ 分布 ($Pr = 0.71$)	94
2.18 平行平板間乱流温度場における $\Pi_{1\theta}^-$ 及び $\varepsilon_{1\theta}^-$ 分布 ($Pr = 0.025$)	95
2.19 $\overline{u_2\theta}$ の時間変化 (プラントル数の影響)	96
2.20 $\overline{u_3\theta}$ の時間変化 (乱流レイノルズ数の影響)	96
2.21 $\overline{w\theta}$ の時間変化 (タイムスケール比の影響)	97
2.22 一様異方性乱流中の $\overline{u_i\theta}$ の時間変化	98
2.23 一様剪断乱流における $\overline{u_i\theta}$ の予測	99
2.24 一様剪断乱流における $\overline{u_i\theta}$ の予測 (Case 1, $d\Theta/dx_1 \neq 0$)	100
2.25 一様剪断乱流における $\overline{u_i\theta}$ の予測 (Case 2, $d\Theta/dx_2 \neq 0$)	100
2.26 一様剪断乱流における $\overline{u_i\theta}$ の予測 (Case 3, $d\Theta/dx_3 \neq 0$)	101
2.27 平均温度分布 (等熱流束加熱条件)	102
2.28 平均温度分布 (一様発熱条件)	102
2.29 平行平板間乱流中の $\overline{u_i\theta}$ 分布 (等熱流束加熱条件)	103
2.30 平行平板間乱流中の $\overline{u_i\theta}$ の分布 (一様発熱条件)	105
2.31 $\overline{u_i\theta}$ 方程式の収支 ($Pr = 0.025$)	106
2.32 $\overline{u_i\theta}$ 方程式の収支 ($Pr = 0.71$)	107
2.33 平行平板間乱流中の温度乱れ強さ分布 (等熱流束加熱条件)	108
2.34 平行平板間乱流中の温度乱れ強さ分布 (一様発熱条件)	109
2.35 ヌッセルト数のプラントル数依存性	110
3.1 Π_{ij}/ε のレイノルズ数依存性	128
3.2 $\varepsilon_{ij}/\varepsilon - 2/3\delta_{ij}$ のレイノルズ数依存性	128
3.3 平行平板間乱流中の乱流レイノルズ数分布	129
3.4 $C_{nef_{no}}$ のレイノルズ数依存性	129
3.5 $C_{evf_{ev}}$ のレイノルズ数依存性	130
3.6 一様剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 Case C128U	131
3.7 一様剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 Case C128V	131

3.8 一様剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 Case C128W	132
3.9 一様剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 Case C128X	132
3.10 一様剪断乱流中の乱流レイノルズ数の分布	133
3.11 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 (DNS)	133
3.12 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 (本モデル)	134
3.13 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 (LRR モデル)	134
3.14 一様剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 $S = 84.0 (1/s)$	135
3.15 一様剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 $S = 39.9 (1/s)$	135
3.16 一様剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 $S = 29.0 (1/s)$	136
3.17 一様剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 $S = 13.6 (1/s)$	136
3.18 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 $S = 84.0 (1/s)$	137
3.19 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 $S = 39.9 (1/s)$	137
3.20 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 $S = 29.0 (1/s)$	138
3.21 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 $S = 13.6 (1/s)$	138
3.22 一様純歪乱流中のレイノルズ応力の予測	139
3.23 一様純歪乱流中のレイノルズ応力非等性の予測	139
3.24 平行平板間乱流における平均速度分布 (a) DNS (b) 本モデル	140
3.25 平行平板間乱流における乱流レイノルズ数分布 (a) DNS (b) 本モデル	141
3.26 レイノルズ剪断応力分布 $-\overline{u^+v^+}$ vs. y/δ	142
3.27 レイノルズ剪断応力分布 $-\overline{u^+v^+}$ vs. y^+	142
3.28 速度乱れ分布 (a) u_{rms}^+ vs. y/δ , (b) v_{rms}^+ vs. y/δ , (c) w_{rms}^+ vs. y/δ	143
3.29 速度乱れ分布 (a) u_{rms}^+ vs. y^+ , (b) v_{rms}^+ vs. y^+ , (c) w_{rms}^+ vs. y^+	144
3.30 レイノルズ応力非等方テンソル分布 (a) DNS (b) 本モデル	145
3.31 平行平板間乱流における $\overline{u^+u^+}$ 方程式の収支 ($Re_\tau = 150$)	146
3.32 平行平板間乱流における $\overline{v^+v^+}$ 方程式の収支 ($Re_\tau = 150$)	146
3.33 平行平板間乱流における $\overline{w^+w^+}$ 方程式の収支 ($Re_\tau = 150$)	147
3.34 平行平板間乱流における $\overline{u^+v^+}$ 方程式の収支 ($Re_\tau = 150$)	147

3.35 平行平板間乱流における Π_{11} の分布	148
3.36 平行平板間乱流における ε_{11} の分布	148
3.37 平行平板間乱流における Π_{22} の分布	149
3.38 平行平板間乱流における ε_{22} の分布	149
3.39 平行平板間乱流における Π_{33} の分布	150
3.40 平行平板間乱流における ε_{33} の分布	150
3.41 平行平板間乱流における Π_{12} の分布	151
3.42 平行平板間乱流における ε_{12} の分布	151
3.43 壁面補正関数 f_{wv}	152
4.1 $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (DNS; Holt, Koseff & Ferziger, 1992)	169
4.2 $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (本モデル)	169
4.3 $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (LRR + Basic モデル)	170
4.4 $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (Fu + Craft モデル)	170
4.5 $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (DNS; Holt, Koseff & Ferziger, 1992)	171
4.6 $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (本モデル)	171
4.7 $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (LRR + Basic モデル)	172
4.8 $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (Fu + Craft モデル)	172
4.9 $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のプラントル数依存性 (DNS; Holt, Koseff & Ferziger, 1992)	173
4.10 $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のプラントル数依存性 (本モデル)	173
4.11 $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のプラントル数依存性 (LRR + Basic モデル)	174
4.12 $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のプラントル数依存性 (Fu + Craft モデル)	174
4.13 $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のプラントル数依存性 (DNS; Holt, Koseff & Ferziger, 1992)	175
4.14 $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のプラントル数依存性 (本モデル)	175
4.15 $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のプラントル数依存性 (LRR + Basic モデル)	176
4.16 $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のプラントル数依存性 (Fu + Craft モデル)	176

4.17 $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のレイノルズ数依存性	177
4.18 $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のレイノルズ数依存性	177
4.19 Ri_s のレイノルズ数依存性	178
4.20 Ri_s のプラントル数依存性	178
4.21 安定成層乱流における $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数 (プラントル数効果)	179
4.22 安定成層乱流における $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数 (レイノルズ数効果)	179
4.23 安定成層乱流における $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数 (プラントル数効果)	180
4.24 安定成層乱流における $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数 (レイノルズ数効果)	180
4.25 安定成層乱流における $\overline{u_1^2 / u_2^2}$ (プラントル数効果)	181
4.26 安定成層乱流における $\overline{u_1^2 / u_2^2}$ (レイノルズ数効果)	181
4.27 安定成層乱流における $-\overline{u_2 \theta} / \overline{u_1 \theta}$ (プラントル数効果)	182
4.28 安定成層乱流における $-\overline{u_2 \theta} / \overline{u_1 \theta}$ (レイノルズ数効果)	182
4.29 安定成層乱流における乱流プラントル数 (プラントル数効果)	183
4.30 安定成層乱流における乱流プラントル数 (レイノルズ数効果)	183
4.31 不安定成層乱流における $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数 (プラントル数効果)	184
4.32 不安定成層乱流における $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数 (レイノルズ数効果)	184
4.33 不安定成層乱流における $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数 (プラントル数効果)	185
4.34 不安定成層乱流における $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数 (レイノルズ数効果)	185
4.35 不安定成層乱流における $\overline{u_2^2 / u_1^2}$ (プラントル数効果)	186
4.36 不安定成層乱流における $\overline{u_2^2 / u_1^2}$ (レイノルズ数効果)	186
4.37 不安定成層乱流における $-\overline{u_2 \theta} / \overline{u_1 \theta}$ (プラントル数効果)	187
4.38 不安定成層乱流における $-\overline{u_2 \theta} / \overline{u_1 \theta}$ (レイノルズ数効果)	187
4.39 不安定成層乱流における乱流プラントル数の逆数 (プラントル数効果)	188
4.40 不安定成層乱流における乱流プラントル数の逆数 (レイノルズ数効果)	188
C.1 座標系	236
C.2 Tavoularis & Corrsin の一様剪断乱流場予測における座標依存性	236
C.3 Rogers らの一様剪断乱流場予測における座標依存性	237

目 次

1.1 剪断乱流中での各生成項	6
1.2 安定成層乱流中での各生成項	7
2.1 無次元時間 $S \cdot t = 12$ における C_{ij} の値	66
2.2 乱流熱流束輸送方程式中の各項の壁面漸近挙動	77
3.1 Rogers ら (1986) の DNS の計算条件	118
3.2 レイノルズ応力輸送方程式中の各項の壁面漸近挙動	122
4.1 一様安定成層剪断流の計算条件	161
4.2 一様不安定成層剪断流の計算条件	166
A.1 レイノルズ応力及び乱流熱流束輸送方程式中の各項の壁面漸近挙動	227
C.1 時刻 $S \cdot t = 12$ における $-\overline{u_1 \theta} / \overline{u_2 \theta}$ 及び Pr_1 の値	234

記号表

a_{ij}	: レイノルズ応力非等方テンソル $= \overline{u_i u_j} / k - 2/3 \delta_{ij}$
A	: レイノルズ応力非等方テンソルの不変量 $= 1 - 9/8(A_2 - A_3)$
A_2	: レイノルズ応力非等方テンソルの第2不変量 $= a_{ij} a_{ij}$
A_3	: レイノルズ応力非等方テンソルの第3不変量 $= a_{ij} a_{jk} a_{ki}$
c_p	: 定圧比熱
C_p	: 圧力変動と乱れエネルギー間の比例定数 $= \sqrt{p^2} / \rho k$
$C_R, C_\varepsilon, C_{II}, C_{S^*}, C_{IIg}$: 乱流熱流束モデル定数
$C_{IIw}, C_{\varepsilon w}$: 応力方程式モデル定数
$C_{P1}, C_{P2}, C_{D1}, C_{D2}$: ε_θ 方程式モデル定数
D_{ij}	: $= -\overline{u_i u_k} U_{k,j} - \overline{u_j u_k} U_{k,i}$
$E(\kappa)$: エネルギースペクトル関数
$E_\theta(\kappa)$: 温度変動スペクトル関数
$f_{\varepsilon 1}, f_{\varepsilon 2}, f_{\varepsilon w}$: $\varepsilon_{1\theta}$ モデル及び ε_{ij} モデル中の修正関数
$f_{\Pi 1}, f_{\Pi 2}, f_{\Pi 3}, f_{\Pi w}$: $\Pi_{1\theta}$ モデル及び Π_{ij} モデル中の修正関数
$f_{cw}, f_{Dw}, f_w, f_{ww}$: 壁面補正関数
g	: 重力加速度
g_i	: 重力ベクトル
G_{ij}	: レイノルズ応力の浮力生成項 $= -\beta g_i \overline{u_j \theta} - \beta g_j \overline{u_i \theta}$
$G_{i\theta}$: 乱流熱流束の浮力生成項 $= -\beta g_i \overline{\theta^2}$
h	: 熱伝達率
k	: 乱れエネルギー $= \overline{u_i u_i} / 2$

- k_θ : 温度変動分散 $= \overline{\theta^2}/2$
 Nu : ヌッセルト数 $= h \cdot \delta / \lambda_d$
 p : 圧力変動
 P : 乱れエネルギー生成率 $= -\overline{u_i u_j} U_{i,j}$
 Pr : プラントル数 $= \nu / \alpha$
 P_{ij} : レイノルズ応力生成項 $= -\overline{u_i u_k} U_{j,k} - \overline{u_j u_k} U_{i,k}$
 $P_{i\theta}$: 乱流熱流束生成項 $= -\overline{u_i u_j} \Theta_{,j} - \overline{u_j \theta} U_{i,j}$
 P_θ : 温度乱れ分散生成率 $= -\overline{u_j \theta} \Theta_{,j}$
 R : タイムスケール比 $= k_\theta \varepsilon / \varepsilon_\theta k$
 Re_t : 乱流レイノルズ数 $= k^2 / \nu \varepsilon$
 Re_τ : レイノルズ数 $= u_\tau \delta / \nu$
 Rif : フラックスリチャードソン数 $= -G_H / P_{ij}$
 Rig : 勾配リチャードソン数 $= \beta g S_\theta / S^2$
 Ris : ステーションナリー・リチャードソン数
 S : 平均剪断 $= \partial U_1 / \partial x_2$
 S_{ij} : 平均歪速度テンソル $= 1/2 (U_{i,j} + U_{j,i})$
 S_θ : 平均温度勾配 $= \partial \Theta / \partial x_2$
 t : 時間
 T_{ij} : レイノルズ応力乱流拡散項 $= -\overline{u_i u_j} \overline{u_k k}$
 $T_{i\theta}$: 乱流熱流束乱流拡散項 $= -\overline{u_i u_j} \overline{\theta_{,j}}$
 T_ε : ε 方程式乱流拡散項 $= -\nu \overline{u_j u_{i,k}} \overline{u_{i,k} j}$
 T_{ε_θ} : ε_θ 方程式乱流拡散項 $= -\alpha \overline{u_j \theta_{,k}} \overline{\theta_{,k} j}$
 T_θ : k_θ 方程式乱流拡散項 $= -\overline{u_j \theta^2_{,j}}$
 U, V, W : 平均速度の x, y, z 方向成分
 u, v, w : 速度変動の x, y, z 方向成分
 U_i, u_i : 平均速度及び速度変動の x_i 方向成分
 u_τ : 壁面摩擦速度
 V_{ij} : レイノルズ応力分子拡散項 $= \nu \overline{u_i u_j} \overline{u_{k,k}}$

- V_{ij} : 乱流熱流束分子拡散項 $= (\nu \overline{\theta u_{i,j}} + \alpha \overline{u_i \theta_j})_{,j}$
 W_{ij} : 平均渦度テンソル $= 1/2(U_{i,j} - U_{j,i})$
 x, y, z : デカルト座標系
 x_i : デカルト座標系 ($i = 1, 2, 3$)
 α : 温度伝導率
 β : 体膨張係数
 δ : チャネル半幅
 ε : 乱れエネルギー散逸率 $= \nu \overline{u_{i,j} u_{i,j}}$
 $\tilde{\varepsilon}$: 乱れエネルギー散逸率 $= \varepsilon - 2\nu(\max[\partial\sqrt{k}/\partial y, 0])^2$
 ε_θ : 温度変動散逸率 $= \alpha \overline{\theta_{,j} \theta_{,j}}$
 $\tilde{\varepsilon}_\theta$: 温度変動散逸率 $= \varepsilon_\theta - 2\alpha(\max[\partial\sqrt{k_\theta}/\partial y, 0])^2$
 ε_{ij} : レイノルズ応力散逸率 $= 2\nu \overline{u_{i,k} u_{j,k}}$
 $\varepsilon_{i\theta}$: 乱流熱流束散逸率 $= (\alpha + \nu) \overline{u_{i,j} \theta_{,j}}$
 κ : 波数
 Θ, θ : 平均温度及び温度変動
 θ_+ : 壁面摩擦温度 $= q_w / \rho c_p u_\tau$
 λ_d : 熱伝導率
 λ : テーラースケール $= \sqrt{10\nu k / \varepsilon}$
 λ_θ : 温度場テーラースケール $= \sqrt{12\alpha k_\theta / \varepsilon_\theta}$
 ν : 動粘性係数
 Π_{ij} : 速度圧力勾配相関項 $= -(1/\rho)(\overline{u_i p_{,j}} + \overline{u_j p_{,i}})$
 $\Pi_{i\theta}$: 温度圧力勾配相関項 $= -(1/\rho)\overline{\theta p_{,i}}$
 ρ : 密度
 τ : 速度場タイムスケール $= k/\varepsilon$
 τ_θ : 温度場タイムスケール $= k_\theta/\varepsilon_\theta$
 ϕ_{ij} : 圧力歪相関項 $= (1/\rho)\overline{p(u_{i,j} + u_{j,i})}$
 $\phi_{i\theta}$: 圧力温度勾配相関項 $= (1/\rho)\overline{p\theta_{,i}}$

添 字

- $\overline{(\quad)}$: アンサンブル平均
()⁺ : u_r , θ_r 及び ν による無次元化
()_i : x_i による微分
()_r : 基準状態
()' : r.m.s. 値

第1章

序論

1.1 概論

数値流体力学 (Computational Fluid Dynamics, CFD) に対する工学及び物理学からの要請は、近年益々強くなってきている。この主な理由としては、第一に、実験で得ることが困難な物理量に対する時空間的に詳細なデータが得られるため、数値実験としての役割を担うまでに精度が向上してきたということ、第二点としては、実験よりも容易に、具体的には時間的及び経済的に有利に、流れ場を予測することが可能であるということが挙げられる。しかしながら、乱流の場合に質量、運動量、エネルギーの保存式を十分な精度で数値的に解くことは、全ての物理量の時間的・空間的変動を追跡する計算分解能が要求される。現在の所、乱流の直接数値シミュレーション (以後 DNS) は低レイノルズ数 (低ベクレ数) のごく単純形状の流れに限られており、また、現在のコンピューターの能力向上を考慮しても、直接解法が実用計算に適用されることは将来的にも困難であるといえる。一方、工学的な計算で通常要求されるのは平均速度等の巨視的な統計的情報であることが多く、従って、その場合我々は支配方程式に平均化操作を施した方程式群を解くことになる。この事によって計算負荷は大幅に軽減するが、新たに対流項の非線形性に由来する未知変数が現れる。この未知変数を既知の情報で表現することにより、閉じた方程式群を作ることが乱流のモデリングである。

一般に良い乱流モデルが満たすべき条件として、普遍性、信頼性及び経済性の三つが挙

げられる。しかし、これらの条件は互いに相反する性格のものであり、計算の目的に応じて三つの条件のバランスを考慮して、モデルの選択を行う必要がある。本論文では、アンサンブル平均モデル、即ち、アンサンブル平均化操作を施した運動量方程式中のレイノルズ応力、及びエネルギー保存式中の乱流熱流束のモデルを扱うが、これらのうち最も簡単で広く用いられているものは、渦粘性の概念に基づくモデルである。そのようなモデルは、歴史的には混合長理論に始まり、現在では乱れエネルギー及びその散逸率の二つの輸送方程式を解く2方程式モデルに発展している。しかしながら、これらの簡単なモデルは非常に大胆な仮説に基づいており、壁面剪断乱流等の使用経験の蓄積がある流れ以外では、定性的な予測結果を得るに留まっている。計算機能力の発達とともに、今後の乱流モデルの中心的存在となると考えられるのは、二次の相関量の輸送方程式に基づくモデルである。これは、個々のレイノルズ応力及び乱流熱流束の輸送方程式をモデル化し解くものであるが、その最大の魅力は、レイノルズ応力及び乱流熱流束の生成と消滅といった素過程が陽的に扱える点にある。即ち、平均速度歪や浮力等の生成に基づく乱流応力や熱流束の非等方性が精度よく表現できることである。輸送方程式モデルは、渦粘性モデルに比べ原理的に優れており、より普遍性が高いと言えるが、初期の最も単純なモデルは、例えば壁乱流や軸対称噴流等に対して必ずしも満足のいく結果を与えてはいない。近年では、より複雑な表現のモデルが多く提案されているが、広い範囲の流れに対して十分には検証されてはおらず、今後さらに検討が必要である。

また、我々が現実遭遇し扱う乱流は、配管や室内の乱流から海洋や大気乱流にまで及び、作動流体も水や空気にとどまらず液体金属や油等様々であり、従って、広い範囲のレイノルズ数やプラントル数の流れを扱うことになる。既存の乱流モデリングにおいては、次元解析が非常に強力な武器として用いられているが、その際には高レイノルズ数を仮定することで、単一の乱れの長さ及び時間スケールを仮定している。即ち、次元解析に立脚した理論では高レイノルズ数(高ペクレ数)流れしか扱うことはできず、これでは現実の様々な流れを統一的に扱うことはできない。新たな理論的な裏付けによるモデリングが望まれている。

本章では、まず既存の乱流モデルについて解説し、現在の乱流モデルの課題等を明らかに

にした後、本研究の目的について述べる。

1.2 乱流モデリング概説

ここでは、過去に行われた研究を全般的に紹介し、本研究と関連深い点については特に詳しく論じることとする。

1.2.1 支配方程式

支配方程式にレイノルズ分解に基づく平均化操作を施すと、以下に示す平均化された質量、運動量及びエネルギー保存式が得られる。なお、本論文ではスカラー量として温度を想定して記述することにする。また、流体は非圧縮性ニュートン流体とし、温度変化に起因する物性値の変化は浮力効果以外は無視する (Boussinesq 近似)。さらに、粘性散逸による発熱も無視する。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right] - g_i \beta (\Theta - \Theta_r) \quad (1.2)$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - u_i \theta \right] \quad (1.3)$$

ここで、 t は時間、 x_i はアカルト座標、 $D/Dt = \partial/\partial t + U_j \partial/\partial x_j$ は実質微分、 U_i, u_i は平均及び変動速度ベクトル、 Θ, θ は平均及び変動温度、 \bar{P}, p は平均及び変動圧力、 ρ は密度、 $\nu = \mu/\rho$ は動粘性係数、 $\alpha = \lambda/\rho c_p$ は温度伝導率、 g_i は重力加速度ベクトル、 β は体膨張係数、添え字 r は基準状態を表す。

上式には、未知相関項であるレイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ と乱流熱流束 $\overline{u_i \theta}$ が現れ、方程式系

を閉じるためにこれらの未知項をモデル化する必要がある。現在、用いられているモデルは大きく次のように分類される。

- レイノルズ応力及び乱流熱流束が、それぞれ平均速度テンソル及び平均温度勾配に比例すると仮定し、その比例定数としての渦粘性または渦拡散係数を用いる方法。
- レイノルズ応力及び乱流熱流束の輸送方程式の未知相関項をモデル化し、数値的に解いてレイノルズ応力及び乱流熱流束を求める方法。

前者の渦粘性・渦拡散係数モデルは、現在、工学的実用計算において最も普及しているモデルである。この理由としては、非常に簡単な表現であるにもかかわらず、ある程度の精度で解を与え、また、数値計算例の蓄積も大きいことなどが挙げられる。これらのモデルは、優れた工学的直感によって導かれたものであるが、これらは応力や熱流束の輸送方程式モデルの近似表現としても捉えることができ、このことが渦粘性・渦拡散係数モデルの大きな成功の裏付けとなっている。即ち、次に述べるようなレイノルズ応力や乱流熱流束の輸送方程式モデルの利点を、制約はあるものの反映できることが、渦粘性・渦拡散係数モデルの成功を導いたと考えられる。

後者のレイノルズ応力及び乱流熱流束の輸送方程式モデルは、以下に示す各輸送方程式をモデル化し、解くことで方程式系を閉じるものである。ここで、 $\overline{u_i u_j}$ の輸送方程式は以下のように表現される。

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} + G_{ij} + T_{ij} + V_{ij} + \Pi_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} & : \text{生成項} \\
 G_{ij} &= -\beta g_i \overline{u_j \theta} - \beta g_j \overline{u_i \theta} & : \text{浮力による生成項} \\
 T_{ij} &= -\overline{\frac{\partial u_i u_j u_k}{\partial x_k}} & : \text{乱流拡散項} \\
 V_{ij} &= \nu \overline{\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_k^2}} & : \text{粘性拡散項} \\
 \Pi_{ij} &= -\frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} \right) & : \text{速度・圧力勾配相関項} \\
 \varepsilon_{ij} &= 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} & : \text{散逸項}
 \end{aligned}$$

また、乱流熱流束 $\overline{u_i \theta}$ の輸送方程式は次のようになる。

$$\frac{D \overline{u_i \theta}}{Dt} = P_{i\theta} + G_{i\theta} + T_{i\theta} + V_{i\theta} + \Pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
 P_{i\theta} &= -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} & : \text{生成項} \\
 G_{i\theta} &= -\beta g_i \overline{\theta^2} & : \text{浮力による生成項} \\
 T_{i\theta} &= -\overline{\frac{\partial u_i \theta u_j}{\partial x_j}} & : \text{乱流拡散項} \\
 V_{i\theta} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \overline{\theta \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \alpha \overline{u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} \right) & : \text{分子拡散項} \\
 \Pi_{i\theta} &= -\frac{1}{\rho} \overline{\theta \frac{\partial p}{\partial x_i}} & : \text{温度・圧力勾配相関項} \\
 \varepsilon_{i\theta} &= (\nu + \alpha) \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} & : \text{散逸項}
 \end{aligned}$$

(1.4) 式及び (1.5) 両式に現れる生成項 (P_{ij} , G_{ij} , $P_{i\theta}$ 及び $G_{i\theta}$) は, $\overline{u_i u_j}$, $\overline{u_i \theta}$ や $\overline{\theta^2}$ の各変数に対する方程式を解く場合はモデル化を必要としないことがわかる。例えば, 平均速度勾配 $\partial U_1 / \partial x_2$ を有する剪断乱流中に, 平均温度勾配が x_2 及び x_3 の2方向に存在する場合 ($\partial \Theta / \partial x_2 \neq 0$, $\partial \Theta / \partial x_3 \neq 0$) を考えてみる。この場合, 各生成項は表 1.1 に示

表 1.1: 剪断乱流中での各生成項

P_{11}	P_{22}	P_{33}	P_{12}
$-2\overline{u_1 u_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$	0	0	$-\overline{u_2 u_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$
$P_{1\theta}$	$P_{2\theta}$	$P_{3\theta}$	
$-\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} - \overline{u_2 \theta} \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$	$-\overline{u_2 u_2} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2}$	$-\overline{u_3 u_3} \frac{\partial \Theta}{\partial x_3}$	

した様になる。これらの生成項を眺めると、次のことが予想される。

- $\overline{u_1^2}$ は $\overline{u_2^2}$ や $\overline{u_3^2}$ よりも大きい。
- $\overline{u_1 u_2}$ は $\partial U_1 / \partial x_2$ と異符号である。
- $\overline{u_2^2}$ と $\overline{u_3^2}$ の大きさが異なるので、 x_2 方向と x_3 方向の熱拡散が非等方的であること。
- x_1 方向の平均温度勾配が存在しないにもかかわらず、 $\overline{u_1 \theta}$ はかなり大きな値をとること。

第二の例として、重力ベクトル $g_i = (0, -g, 0)$ が存在する安定成層流 ($\partial U_1 / \partial x_2 > 0$, $\partial \Theta / \partial x_2 > 0$) を取り上げる。この場合の生成項は表 1.2 に示した様になり、従って次のようなことが予想される。

- $\overline{u_2 \theta} < 0$ であるから、浮力生成項 $2\beta g \overline{u_2 \theta}$ の影響で $\overline{u_2^2}$ が減衰すること。
- 浮力生成項 ($\beta g \overline{u_1 \theta} > 0$, $\beta g \overline{\theta^2} > 0$) の影響と $\overline{u_2^2}$ の減少により、 $|\overline{u_1 u_2}|$ と $|\overline{u_2 \theta}|$ が減少する。

このようなある特定の方向に生成が強く影響する場合に対しては、生成項をそのまま保持していることは乱流場の非等方性を予測するにあたり非常に有利であると言える。渦粘性及び渦拡散係数モデルのような等方的な乱流拡散を仮定したモデルでは、このような場を精度良く予測することは原理的に難しい。このことは、輸送方程式モデルが現在の乱流モ

表 1.2: 安定成層乱流中での各生成項

$P_{11} + G_{11}$	$P_{22} + G_{22}$	$P_{33} + G_{33}$	$P_{12} + G_{12}$
$-2\overline{u_1 u_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$	$2\beta g \overline{u_2 \theta}$	0	$-\overline{u_2 u_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \beta g \overline{u_1 \theta}$

$P_{1\theta} + G_{1\theta}$	$P_{2\theta} + G_{2\theta}$	$P_{3\theta} + G_{3\theta}$
$-\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} - \overline{u_2 \theta} \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$	$-\overline{u_2 u_2} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + \beta g \overline{\theta^2}$	0

デル研究における中心的な存在となっていることの一つの大きな理由となっている。

以下の各節では、レイノルズ応力・乱流熱流束の輸送方程式モデルを中心に、渦粘性・渦拡散係数モデル等の低次のモデルまで、そのモデル化手法及びその具体的表現を紹介する。

1.2.2 レイノルズ応力及び乱流熱流束輸送方程式モデル

レイノルズ応力，乱流熱流束の輸送方程式モデルでは，(1.4) 及び (1.5) 両式中に現れる未知相関項をモデル化し，そのモデル方程式を解くことになる。本節では，以下に各項のモデル化について簡単に解説する。

圧力変動相関項

速度・圧力勾配相関項 Π_{ij} と温度・圧力勾配相関項 $\Pi_{i\theta}$ は，通常次のように圧力・歪相関項 ϕ_{ij} ，圧力・温度勾配相関項 $\phi_{i\theta}$ と圧力拡散項 ψ_{ij} ， $\psi_{i\theta}$ とに分解される。

$$\underbrace{-\frac{1}{\rho} \left(u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)}_{\Pi_{ij}} = \underbrace{\frac{1}{\rho} p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u_i p}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j p}{\partial x_i} \right)}_{\psi_{ij}} \quad (1.6)$$

$$\underbrace{-\frac{1}{\rho} \left(\overline{\theta \frac{\partial p}{\partial x_i}} \right)}_{\psi_{i\theta}} = \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{p \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right)}}_{\phi_{i\theta}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left(\overline{\theta \frac{\partial p}{\partial x_i}} \right)}_{\psi_{i\theta}} \quad (1.7)$$

圧力拡散項 ψ_{ij} , $\psi_{i\theta}$ は一様乱流では厳密にゼロであり, また非一様乱流の場合でも通常その値は小さく, 乱流拡散項に含めてモデル化されるかあるいは無視される。従って, これ以降では圧力・歪相関項 ϕ_{ij} 及び圧力・温度勾配相関項 $\phi_{i\theta}$ のモデル化について解説する。

変動速度の運動方程式を微分し連続の式を用いて変形すると, 変動圧力 p に対するポアソン方程式が得られる。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (u_k u_i - \overline{u_k u_i}) + 2 \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \beta g_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \quad (1.8)$$

上式を Green の定理を用いて積分すると, 圧力・歪相関項 ϕ_{ij} と圧力・温度勾配相関項 $\phi_{i\theta}$ の二点相関積分が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \phi_{ij} = & \frac{1}{4\pi} \int \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial^2 u_k u_l}{\partial x_k \partial x_l} \right)^* + 2 \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)^* \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)^* \right. \\ & \left. + \beta g_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right)^* \right] \frac{dV}{L} + \text{surface integral} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \phi_{i\theta} = & \frac{1}{4\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial^2 u_k u_l}{\partial x_k \partial x_l} \right)^* + 2 \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)^* \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)^* \right. \\ & \left. + \beta g_k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right)^* \right] \frac{dV}{L} + \text{surface integral} \end{aligned} \quad (1.10)$$

両式より, ϕ_{ij} 及び $\phi_{i\theta}$ は変動分のみからなる項, 平均剪断に依存する項, 浮力項及び壁面の影響を表す項の四つからなることがわかる。これらに対応して, ϕ_{ij} と $\phi_{i\theta}$ をそれぞれ

れ四つに分解する.

$$\phi_{ij} = \phi_{ij1} + \phi_{ij2} + \phi_{ij3} + \phi_{ijw} \quad (1.11)$$

$$\phi_{i\theta} = \phi_{i\theta1} + \phi_{i\theta2} + \phi_{i\theta3} + \phi_{i\theta w} \quad (1.12)$$

ここで, ϕ_{ij1} と $\phi_{i\theta1}$ は slow 項, ϕ_{ij2} と $\phi_{i\theta2}$ は rapid 項, ϕ_{ij3} と $\phi_{i\theta3}$ は浮力項, そして ϕ_{ijw} と $\phi_{i\theta w}$ は wall reflection 項と呼ばれる. 以下に, それぞれについて代表的なモデル化手法について解説する.

Slow 項

まず, レイノルズ応力輸送方程式に現れる ϕ_{ij1} を考察する. 平均剪断, 体積力及び壁面の影響を受けない減衰過程にある一様非等方性乱流場を考えると, この場合のレイノルズ応力の輸送方程式は次式で表現される.

$$\frac{d\overline{u_i u_j}}{dt} = \phi_{ij1} - \varepsilon_{ij} \quad (1.13)$$

ここで, レイノルズ応力の非等方テンソルを次式で定義する.

$$a_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (1.14)$$

高レイノルズ数乱流の場合, $\varepsilon_{ij} \approx 2/3 \varepsilon \delta_{ij}$ と置けるので, (1.13) 式は次のように変形される.

$$k \frac{da_{ij}}{dt} = \phi_{ij1} + \varepsilon a_{ij} \quad (1.15)$$

ここで, ϕ_{ij1} に対する条件として, 等方性乱流の場合にゼロとなること, 添え字に関する対称性, ゼロトレース等を挙げることができる. これらの条件を満足する最も簡単なモデル

ルとしては,

$$\phi_{ij1} = -c_1 \varepsilon a_{ij} \quad (1.16)$$

がある (Rotta, 1951). 乱れの等方化がおこるためには, $c_1 \geq 1$ である必要があり, 通常 $c_1 = 1.8$ という値が推奨されている (Launder, 1984a).

このモデルは上述のテンソル的な条件は満足しているが, より一般的には, ϕ_{ij1} は a_{ij} の非線形結合で表現され则认为られる. Cayley-Hamilton の定理より, その表現は次のように与えられる.

$$\phi_{ij1} = -c_1 \varepsilon a_{ij} + c'_1 \varepsilon \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \quad (1.17)$$

定数 c_1, c'_1 は, 一般にレイノルズ応力非等方テンソルの第2及び第3不変量 A_2, A_3 と乱流レイノルズ数 $Re_t = k^2/\nu\varepsilon$ の関数となるものと考えられる. ここで, 不変量は次のように定義される.

$$A_2 = a_{ij} a_{ij} \quad (1.18)$$

$$A_3 = a_{ij} a_{jk} a_{ki} \quad (1.19)$$

また, A_2 と A_3 を組み合わせ, 次式で定義される "Flatness Parameter" (Lumley, 1978) を用いる場合も多い. この変数は壁面等の2次元乱流で0, 等方的な場合は1となる性質を持つ.

$$A = 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3) \quad (1.20)$$

Lumley & Newman (1977) は, 軸対称乱流場の等方化プロセスが $A_3 < 0$ の場合直ちに等方状態へ向い, $A_3 > 0$ の場合は, いったん軸対称乱れに近付いた後等方化するとい

う実験的事実を表現するために、次のような準線形なモデルの提案を行った。

$$c_1 = 1 + \frac{A}{18} \exp\left(-\frac{11.655}{\sqrt{Re_t}}\right) \left[\frac{108}{\sqrt{Re_t}} + 80.1 \ln \left\{ 1 + 62.4 \left(\frac{A_2}{8} + \frac{2.3A_3}{24} \right) \right\} \right] \quad (1.21)$$

$$c'_1 = 0 \quad (1.22)$$

島 (1988a) は、壁近傍の強い非等方性乱流を予測するために次のようなモデルを提案している。

$$c_1 = 1 + 2.58 \left\{ 1 - \exp[-(0.0067 Re_t)^2] \right\} A A_2^{1/4} \quad (1.23)$$

$$c'_1 = 0 \quad (1.24)$$

このモデルは凸壁面上の乱流境界層、回転チャネル乱流、圧力勾配を伴う乱流境界層や吹き出し・吸い込みを伴う乱流境界層等に適用され、良好な予測結果を与えている。

Sarkar & Speziale (1990) は、Schumann (1977) によって提唱された realizability[†]の拘束を満足する最も単純な非線形モデルを提案した。

$$c_1 = 1.7 \quad (1.25)$$

$$c'_1 = -1.5(c_1 - 1) \quad (1.26)$$

さらに、Craft, Fu, Launder & Tselepidakis (1989) は次の様なモデルを提案している。

$$c_1 = 1.0 + 3.1(A_2 A)^{1/2} \quad (1.27)$$

$$c'_1 = -3.72(A_2 A)^{1/2} \quad (1.28)$$

[†]付録 A 参照。

一方、温度・圧力勾配相関項 $\phi_{i\theta}$ についても (1.16) 式と同様に次のような簡単なモデルが Monin (1965) によって提案されている。

$$\phi_{i\theta} = -c_{1\theta} \frac{\varepsilon}{k} u_i \bar{\theta} \quad (1.29)$$

定数 $c_{1\theta}$ の値としては $c_{1\theta} = 3.0 \sim 4.0$ が推奨されている (Launder, 1984a)。また、Shih, Lumley & Chen (1985) は上式と形式的には同じであるが、realizability を満足する非常に複雑なモデルを提案している。

$$c_{1\theta} = \frac{\beta'}{4} + \frac{1}{2R} - \frac{(\beta' - 2)A_{2d}/12}{A_{2d}/3 + a_{ij}d'_{ik}d'_{kj}/2 - a_{ij}d'_{ij}/2} + \frac{1}{2}H'F_D^{1/2} \quad (1.30)$$

ここで、

$$\begin{aligned} H' &= 1.1 + 0.55(\beta' - 1) \tanh \left[4 \left(\frac{1}{R} - 1 \right) \right] \\ \beta' &= 2 + \frac{A}{9} \exp \left(-\frac{11.655}{\sqrt{Re_t}} \right) \left[\frac{108}{\sqrt{Re_t}} + 80.1 \ln \left\{ 1 + 62.4 \left(\frac{A_2}{8} + \frac{2.3A_3}{24} \right) \right\} \right] \\ d'_{ij} &= \frac{u_i u_j \bar{\theta}^2 - \bar{u_i \theta} \bar{u_j \theta}}{\bar{u_k u_k} \bar{\theta}^2 - \bar{u_k \theta} \bar{u_k \theta}} \\ A_{2d} &= d'_{ij} d'_{ij} \\ A_{3d} &= d'_{ij} d'_{jk} d'_{ki} \\ F_D &= \frac{9}{2} - \frac{27}{2} A_{2d} + 9 A_{3d} \\ Re_t &= \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \end{aligned}$$

である。ここで、 R はタイムスケール比であり、次式で定義される。

$$R = \frac{\tau_\theta}{\tau_u} = \frac{k_\theta \varepsilon}{\varepsilon_\theta k} \quad (1.31)$$

種々の流れにおいて R は 0.5~1.5 程度の値をとることが実験的に知られており (Launder, 1976)、一般に R を一定値と置くことはできない。このパラメータは速度場と温度場の乱れの状態の相違を記述するものであり、近年その重要性が強く認識されてきている (例え

ば, Shih & Lumley, 1986a).

さらに, $\phi_{i\theta}$ に関しても (1.17) 式と同様に, より高次の項を導入したモデルも提案されている (Lauder, 1984a).

$$\phi_{i\theta} = -c_{i\theta} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i \theta} + c'_{i\theta} a_{ij} \overline{u_j \theta} \right) \quad (1.32)$$

Lumley (1978) は realizability を保証するために上式中の a_{ij} を $\frac{\overline{u_i u_j} \theta^2 - \overline{u_i \theta} \overline{u_j \theta}}{\theta^2 k}$ で置き換えた, より精巧なモデルを提案している.

これらのモデルは, 基礎的な乱流場である一様乱流温度場においてまずテストされる. 例えば, 減衰過程にある一様等方性及び一様非等方性乱流場に平均温度勾配が存在する場合, また平均温度勾配が平均速度勾配と同方向に存在する一様剪断乱流, あるいは任意の方向に平均温度勾配が存在する一様剪断乱流等である. この中で特に問題となるのは, Tavoularis & Corrsin (1981) によって報告されたような平均温度勾配と同方向に強い剪断 $\partial U_1 / \partial x_2$ の加わる一様剪断乱流である. Tavoularis ら (1981) の実験結果によると, 流れ方向と流れに垂直方向の乱流熱流束成分の比が $-\overline{u_1 \theta} / \overline{u_2 \theta} \approx 2.2$ となり, これを予測するためには, 例えば (1.29) 式のモデルを用いると, $\overline{u_1 \theta}$ 方程式ではおよそ $c_{1\theta} = 3.5$, $\overline{u_2 \theta}$ 方程式では $c_{1\theta} = 9.5$ といった値を与える必要がある (Craft, 1991). (1.32) 式のような非線形モデルを用いると若干の改善は見られるが, $\phi_{1\theta}$ と $\phi_{2\theta}$ の非等方性を良好に与えるには不十分である.

Jones & Musonge (1983) は上述の問題について検討し, $\phi_{i\theta}$ モデル中に平均温度勾配に依存する項を含ませる必要があると結論づけた. その後, Dakos & Gibson (1987) も圧力・温度勾配相関項のフーリエ変換をとることで平均温度勾配に陽的に依存するモデルを導出している. 例えば, Gibson, Jones & Kanellopoulos (1988), Jones & Musonge (1988) は以下のような項を $\phi_{i\theta}$ に付加した¹.

¹Gibson ら (1988) は slow 項と rapid 項の明確な分離は行わず, $\phi_{i\theta}$ 項全体に対するモデル化を行っている. 21 ページ, (1.61) 式, (1.62) 式参照.

$$0.12a_{ij}k\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}$$

Jones ら (1983) は上のモデルを用いて, Tavoularis & Corrsin (1981) の一樣剪断乱流の実験結果を良好に予測している。

Craft (1991) は上述の議論を参考にしつつ, レイノルズ応力非等方テンソルに関して2次の項まで残すことで次のようなモデルを提案している。

$$\begin{aligned}\phi_{\theta 1} = & -1.7 \left[1 + 1.2(A_2 A)^{1/2} \right] \frac{1}{\sqrt{R} k} \left[\overline{u_i \theta} (1 + 0.6 A_2) - 0.8 a_{ik} \overline{u_k \theta} + 1.1 a_{ik} a_{kj} \overline{u_j \theta} \right] \\ & - 0.2 \sqrt{A} \frac{1}{R} a_{ij} k \frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\end{aligned}\quad (1.33)$$

ここで, 右辺最終項は $\overline{u\theta}$ 方程式中では source 項として, $\overline{v\theta}$ 方程式中では sink 項として作用する。また, レイノルズ応力非等方テンソルの不変量がモデル定数に含まれているのは, 一樣等方性乱流よりも一樣剪断乱流のような非等方乱流中で大きな値を与えるためである。

Pope (1983) はスカラー量の輸送方程式はスカラー量に関して線形であることから, タイムスケール比 $R = \tau_\theta / \tau_u$ はモデル中に現れてはならないとしたが, Shih, Lumley & Chen (1985) や Craft (1991) はその点を踏まえた上で, 敢えて R をモデル中に導入している。これは, 速度変動と温度変動の相関量特徴づける時間スケールは τ_u と τ_θ のいずれにも関与するであろうという直感的理由の他に, R を組み込んだ方が実験結果を良好に再現するためである (Elghobashi & Launder, 1983)。Launder (1984a) によれば, τ_u と τ_θ のうち小さい方が経験的に良好な結果を与えるとする。

Rapid 項

平均速度勾配に依存する項を考える。平均速度勾配がはは一定の場合, (1.9), (1.10) 両式の中右辺第二項中ではそれぞれ次のように変形される。

$$\phi_{ij2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \int \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)^2 \frac{dV}{L} \quad (1.34)$$

$$\phi_{i\theta 2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \int \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)^2 \frac{dV}{L} \quad (1.35)$$

また、異なった2点での微分が形式的に独立であるとする、

$$\phi_{ij2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \int \left(\frac{\partial u_i u_l^*}{\partial x_j \partial x_k^*} + \frac{\partial u_j u_l^*}{\partial x_i \partial x_k^*} \right) \frac{dV}{L} \quad (1.36)$$

$$\phi_{i\theta 2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \int \left(\frac{\partial u_l^* \theta}{\partial x_k^* \partial x_i} \right) \frac{dV}{L} \quad (1.37)$$

ここで、 $L \equiv x^* - x$ であるから、

$$\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\quad \right) \Big|_x = \frac{\partial}{\partial L} \left(\quad \right) \Big|_x \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\quad \right) \Big|_{x^*} = - \frac{\partial}{\partial L} \left(\quad \right) \Big|_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\quad \right) \Big|_x \quad (1.39)$$

が成立し、場が準一様 ($\partial(\quad)/\partial x|_x = 0$) であると仮定すると、

$$\phi_{ij2} = - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \int \left(\frac{\partial^2 u_i u_l^*}{\partial r_j \partial r_k} + \frac{\partial^2 u_j u_l^*}{\partial r_i \partial r_k} \right) \frac{dV}{L} \quad (1.40)$$

$$\phi_{i\theta 2} = - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \int \left(\frac{\partial^2 u_l^* \theta}{\partial r_k \partial r_i} \right) \frac{dV}{L} \quad (1.41)$$

となる。ここで、それぞれを次のように置く、

$$\phi_{ij2} = \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) (X_{ijkl} + X_{jikl}) \quad (1.42)$$

$$\phi_{i\theta 2} = \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) Y_{ikl} \quad (1.43)$$

但し、テンソル X_{ijkl} と Y_{ikl} に対しては次の様な制約がある。まず、対称性より、

$$X_{ijkl} = X_{ikjl}, \quad X_{ijkl} = X_{ijlk}, \quad Y_{ikl} = Y_{kil}. \quad (1.44)$$

また、連続の式より次の関係が得られる。

$$X_{iikk} = 0, \quad Y_{ikk} = 0. \quad (1.45)$$

さらに、 $r \rightarrow \infty$ の時 $\overline{u_i^2 u_i}$, $\overline{u_i^2 \theta} \rightarrow 0$ であるから、この場合 Green の定理 ($\int \nabla^2 \overline{u_i u_i} \frac{dV}{r} = -4\pi \overline{u_i u_i}$) により次の関係が得られる (normalization)。

$$X_{iikk} = 2\overline{u_i u_i}, \quad Y_{ikk} = 2\overline{u_i \theta}. \quad (1.46)$$

テンソル X_{ijkl} 及び Y_{ikl} がレイノルズ応力の線形結合で表現できると仮定すると、上の三つの条件を満足するモデルは次のようになる (Launder, Reece & Rodi, 1975; Launder, 1976)。

$$\begin{aligned} \phi_{ij2} = & -\frac{(c_2 + 8)}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - \frac{(30c_2 - 2)}{55} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{(8c_2 - 2)}{11} \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\phi_{i\theta 2} = 0.8 \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - 0.2 \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \quad (1.48)$$

ここで、 $D_{ij} = -\overline{u_i u_k} \partial U_k / \partial x_j - \overline{u_j u_k} \partial U_k / \partial x_i$ であり、 $P = 0.5 P_{kk}$ である。なお、このモデルは“Quasi-Isotropic (QI)”モデルと呼ばれており、 $c_2 = 0.3 \sim 0.4$ で多くの剪断乱流に適用されている。

しかしながら実際の複雑乱流の計算においては、上述の QI モデルよりも単純な “Isotropization of Production (IP)” モデルと呼ばれるものが多く使用される。これは、QI モデルが煩雑であるという理由の他に、多くの剪断乱流において IP モデルの方が良好な結果を与

えるということが経験的に知られているためである (Launder, 1984a). ϕ_{ij2} , $\phi_{i\theta2}$ に対する IP モデルは Naot, Shavit & Wolfshtein (1970) 及び Owen (1973) によってそれぞれ提案されており, 次のように表現される.

$$\phi_{ij2} = -c_2 \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (1.49)$$

$$\phi_{i\theta2} = c_{2\theta} u_k \theta \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (1.50)$$

定数 c_2 及び $c_{2\theta}$ はそれぞれ通常 0.6 及び 0.5 という値が与えられる.

上述のモデルはその簡便さの点で非常に魅力的であり, 多くの流れである程度満足のいく結果を与えるが, 次の様な欠点がある. 例えば, 単純剪断乱流では乱れの生成項と散逸の比 P/ε が大きくなるとレイノルズ応力非等方テンソルの成分の絶対値のうち $|a_{11}|$ と $|a_{22}|$ は大きくなり, $|a_{12}|$ は小さくなる事が実験的に知られているが (Harris, Graham & Corrsin, 1977), 上述のモデルでは a_{11} , a_{22} , a_{12} の全ての成分に対し絶対値が大きくなるという予測結果を与える. さらに, 両モデルは二次元乱流に対して非現実的な解を与える. 例えば, レイノルズ応力の主軸方向に座標をとると, 二次元乱流の場合レイノルズ応力成分は, $\overline{u_1^2} = k(1+\delta)$, $\overline{u_2^2} = 0$, $\overline{u_3^2} = k(1-\delta)$ と書ける (但し, $|\delta| \leq 1$). 歪も二次元的と考えると ($\partial U_1/\partial x_1 = -\partial U_2/\partial x_2$, $\partial U_3/\partial x_3 = 0$), ϕ_{222} に対して (1.47) 式は次の関係を与える.

$$\frac{\phi_{222}}{\frac{2}{3} k \partial U_1 / \partial x_1} = \frac{1}{55} [(90c_2 - 6) - (1 + \delta)(45c_2 + 30)] \quad (1.51)$$

上式より, いかなる c_2 によっても ϕ_{222} をゼロとすることはできない (即ち, realizability は満足されない) ことが判明する. この様な欠陥を改善するために, テンソル X_{ijkl} , Y_{ikl} をレイノルズ応力と乱流熱流束の非線形結合で表現するモデルが近年提案されるようになってきた. その大きな特色は, 項数を増加させることでモデル定数に対する自由度を与え, realizability の拘束条件を課す点にある. Realizability とは, モデルが次に示すような条件を常に満足することである (Shih & Lumley, 1985).

$$\overline{u_\alpha^2} \geq 0, \quad E_{\alpha\alpha} = \overline{u_\alpha^2} \overline{\theta^2} - \overline{u_\alpha \theta^2} \geq 0 \quad (1.52)$$

ただし、添え字 α に関しては縮約をとらない。具体的には、

$$\frac{D\overline{u_\alpha^2}}{Dt} \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad \overline{u_\alpha^2} \rightarrow 0, \quad \frac{D}{Dt} E_{\alpha\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad E_{\alpha\alpha} \rightarrow 0 \quad (1.53)$$

$$\frac{D^2\overline{u_\alpha^2}}{Dt^2} \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad \overline{u_\alpha^2} \rightarrow 0, \quad \frac{D^2}{Dt^2} E_{\alpha\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad E_{\alpha\alpha} \rightarrow 0 \quad (1.54)$$

をモデルが満足すればよい。ただし通常の場合、(1.53) 式のみを考慮することが多い。テンソル X_{ijkl} , Y_{ikl} をレイノルズ応力テンソル及び乱流熱流束ベクトルの2次までの項で表現すると、以下のようなモデルが得られる (Shih & Lumley, 1985)。

$$\begin{aligned} \phi_{ij2} = & -0.6 \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) + 0.3 \varepsilon a_{ij} \frac{P_{kk}}{\varepsilon} \\ & - 0.2 \left[\frac{\overline{u_m \overline{u_j}}}{k} \overline{u_i \overline{u_l}} \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) - \frac{\overline{u_i \overline{u_m}}}{k} \left(\overline{u_j \overline{u_m}} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + \overline{u_j \overline{u_m}} \frac{\partial U_l}{\partial x_j} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \phi_{i\theta 2} = & 0.8 \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - 0.2 \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + 0.15 \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i \theta} \frac{P_{kk}}{\varepsilon} \\ & + 0.1 \overline{u_k \theta} a_{il} \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \right) + 0.2 \overline{u_k \theta} a_{kl} \frac{\partial U_l}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.56)$$

しかしながら、(1.55) 式は単純剪断乱流に対して $\overline{u_j^2} > \overline{u_3^2}$ なる結果を与えてしまうため、Shih, Lumley & Chen (1985) は項を付加し、次のようなモデルを提案し、実際の計算に用いている。

$$\begin{aligned} \phi_{ij2} = & -0.6 \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) + 0.3 \varepsilon a_{ij} \frac{P_{kk}}{\varepsilon} \\ & - 0.2 \left[\frac{\overline{u_m \overline{u_j}}}{k} \overline{u_i \overline{u_l}} \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) - \frac{\overline{u_i \overline{u_m}}}{k} \left(\overline{u_j \overline{u_m}} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + \overline{u_j \overline{u_m}} \frac{\partial U_l}{\partial x_j} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0.8\sqrt{A} \left[\frac{1}{15} \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{8}{15} \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right) \right. \\
& \left. + \frac{2}{5} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (1.57)
\end{aligned}$$

一方, Craft, Fu, Launder & Tselepidakis (1989) は X_{ijkl} 中でレイノルズ応力テンソルの3次の項まで残すことで, より高次の ϕ_{ij2} モデルを提案し, (1.55) 式の欠陥の克服に成功した。

$$\begin{aligned}
\phi_{ij2} = & -0.6 \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) + 0.3 \varepsilon a_{ij} \frac{P_{kk}}{\varepsilon} \\
& -0.2 \left[\frac{\overline{u_m \overline{u_j}}}{k} \overline{u_i} \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) - \frac{\overline{u_l \overline{u_m}}}{k} \left(\overline{u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + \overline{u_j} \frac{\partial U_l}{\partial x_i} \right) \right] \\
& -r [A_2 (P_{ij} - D_{ij}) + 3 a_{mi} a_{nj} (P_{mn} - D_{mn})] \\
& + t \left\{ \left(\frac{7}{15} - \frac{A_2}{4} \right) \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) \right. \\
& \left. + 0.2 \varepsilon \left[a_{ij} - \frac{1}{2} \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \right] \frac{P}{\varepsilon} - 0.05 a_{ij} a_{lk} P_{kl} \right. \\
& \left. + 0.1 \left[\left(\frac{\overline{u_i \overline{u_m}}}{k} P_{mj} + \frac{\overline{u_j \overline{u_m}}}{k} P_{mi} \right) - \frac{2 \overline{u_l \overline{u_m}}}{3 k} P_{ml} \delta_{ij} \right] \right. \\
& \left. + 0.1 \left[\frac{\overline{u_l \overline{u_i}} \overline{u_k \overline{u_j}}}{k^2} - \frac{1}{3} \frac{\overline{u_l \overline{u_m}} \overline{u_k \overline{u_m}}}{k^2} \delta_{ij} \right] \left[6 D_{lk} + 13 k \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \right) \right] \right. \\
& \left. + 0.2 \frac{\overline{u_l \overline{u_i}} \overline{u_k \overline{u_j}}}{k^2} (D_{lk} - P_{lk}) \right\} \quad (1.58)
\end{aligned}$$

ここで, r 及び t は任意定数であり, それぞれ 0.6 及び 0 と置かれる場合が多い。

また, Craft (1991) は Y_{ikl} を, 乱流熱流束ベクトルの1次, レイノルズ応力テンソルの2次の項までで表現し, 次のようなモデルを得た。

$$\begin{aligned}
\phi_{\theta 2} = & 0.8 \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - 0.2 \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{1}{3} \varepsilon \overline{u_i \theta} \frac{P}{\varepsilon} \\
& - 0.4 \overline{u_k \theta} a_{il} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) \\
& + 0.1 \overline{u_k \theta} a_{ik} a_{ml} \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) \\
& - 0.1 \overline{u_k \theta} \frac{(a_{im} P_{mk} + 2 a_{mk} P_{im})}{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0.15a_{ml} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) (a_{mk} \overline{u_i \theta} - a_{mi} \overline{u_k \theta}) \\
& -0.05a_{ml} \left[7a_{mk} \left(\overline{u_i \theta} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_l}{\partial x_i} \right) - \overline{u_k \theta} \left(a_{mi} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + a_{mk} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right) \right] \quad (1.59)
\end{aligned}$$

Craft ら (1989) 及び Craft (1991) のモデルはレイノルズ応力及び乱流熱流束に関して 3 次以下の項で表現されているが, (1.53) 式の拘束条件を厳密に満足させると, (1.58) 及び (1.59) 両式はそれぞれ (1.55), (1.56) 式に帰着する. (1.52) 式で Schwarz の不等式を満足させることは joint realizability と呼ばれるが, この条件は $\overline{u_i \theta}$ のモデルだけでなく $\overline{u_i u_j}$ のモデルに対する拘束も与える場合がある. Craft ら (1989) 及び Craft (1991) は, 本来 “passive” であるべき温度場が速度場へ影響を与えるのは物理的に正しくないとし, 厳密な Schwarz の不等式ではなく, 2 次元乱流の極限における次のような条件を温度場モデルに与えている,

$$\frac{D\overline{u_i \theta}}{Dt} \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad \overline{u_i^2} \rightarrow 0 \quad (1.60)$$

上述の様に, 様々な物理的・数学的拘束条件 (付録 A 参照) を満足させるためにモデルは複雑化の一途をたどっており, 3 次元実用計算の場合, その複雑さはモデルの適用上大きな問題となる. また, これらの拘束条件の多くは極限的な状態でのみ意味を持つものであり, 我々が通常扱う乱流場に対してどれほど有効であるのかは不明である. 従って, 近年この様な極限的条件によってモデルの一般形を決定する方法を見直す動きがある. 例えば, Jones & Musonge (1988) は, (1.9), (1.10) 両式の右辺第一項は平均速度勾配及び平均温度勾配にも依存すると考え, ϕ_{ij1} と ϕ_{ij2} 及び $\phi_{\theta 1}$ と $\phi_{\theta 2}$ の明確な分離を行っていない. 従って, ϕ_{ij} , ϕ_{θ} 全体として対称性や連続の式を満足させればよいことになり, モデル定数に対する拘束を弱めることが可能となる. 彼らは項数の少ない次のようなモデルによって, 既存のモデルでは予測が困難であった乱流場の予測を行っている.

$$\phi_{ij1} + \phi_{ij2} = -1.5 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - 0.67 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right)$$

$$-0.12k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - 0.125 \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} \phi_{i\theta 1} + \phi_{i\theta 2} = & - \left(\frac{3}{1 + 1.5\sqrt{A_2}} \right) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i \theta} + 0.12 a_{ij} k \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \\ & + 1.09 \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + 0.51 \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Speziale, Sarker & Gatski (1991) 及び, 石井・河村 (1993) も同様な考察に基づいて, slow 項と rapid 項を分離せず, 表現の簡単なモデルを提案している。

浮力項

続いては浮力項であるが, 1975 年までは圧力変動相関項に対して浮力の影響を考慮するモデルは提案されていなかった (例えば, Monin, 1965; Mellor & Yamada, 1974)。しかし, (1.9), (1.10) 両式右辺第三項に示されるように, 浮力は圧力変動に何等かの影響を与えており, そのことを考慮するという立場が自然であると思われる。両項は準一様乱流の場合,

$$\phi_{ij3} = -\frac{\beta g_k}{2\pi} \int \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i \theta^*}}{\partial r_j \partial r_k} + \frac{\partial^2 \overline{u_j \theta^*}}{\partial r_i \partial r_k} \right) \frac{dV}{L} \quad (1.63)$$

$$\phi_{i\theta 3} = -\frac{\beta g_k}{2\pi} \int \left(\frac{\partial^2 \overline{\theta^* \theta}}{\partial r_k \partial r_i} \right) \frac{dV}{L} \quad (1.64)$$

となる。ここでも rapid 項と同様に QI モデルが導出でき, それぞれ次のように与えられる。

$$\phi_{ij3} = -c_3 \left(G_{ij} - \frac{1}{3} G_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (1.65)$$

$$\phi_{i\theta 3} = -c_{\theta 3} G_{i\theta} \quad (1.66)$$

ここで、定数は $c_3 = 0.3$, $c_{\theta 3} = 1/3$ であるが、局所平衡に近い成層流では $c_3 = 0.5$, $c_{\theta 3} = 0.5$ とした IP モデルが用いられる場合が多い¹。また、Craft (1991) は ϕ_{ij3} 及び $\phi_{i\theta 3}$ に対しても cubic モデルを提案している。

$$\begin{aligned} \phi_{ij3} = & -\left(\frac{4}{10} + \frac{3A_2}{80}\right) \left(G_{ij} - \frac{1}{3}G_{kk}\delta_{ij}\right) + \frac{1}{4}a_{ij}G_{kk} \\ & + \frac{3}{20}\beta \left(g_i \frac{\overline{u_m u_j}}{k} + g_j \frac{\overline{u_m u_i}}{k}\right) \overline{u_m \theta} - \frac{1}{10}\delta_{ij}\beta g_k \frac{\overline{u_m u_k}}{k} \overline{u_m \theta} \\ & - \frac{1}{4}\beta g_k \left(\frac{\overline{u_k u_i}}{k} \overline{u_j \theta} + \frac{\overline{u_k u_j}}{k} \overline{u_i \theta}\right) + \frac{1}{20}\delta_{ij}\beta g_k \frac{\overline{u_m u_m}}{k^2} \overline{u_n \theta} \\ & - \frac{1}{8}\beta g_k \left(\frac{\overline{u_m u_j}}{k} \overline{u_i \theta} + \frac{\overline{u_m u_i}}{k} \overline{u_j \theta}\right) \frac{\overline{u_m u_k}}{k} + \frac{1}{8}\beta g_k \left(\frac{\overline{u_k u_i}}{k^2} \overline{u_m u_j} + \frac{\overline{u_k u_j}}{k^2} \overline{u_m u_i}\right) \overline{u_m \theta} \\ & - \frac{3}{40}\beta \left(g_i \frac{\overline{u_m u_j}}{k} + g_j \frac{\overline{u_m u_i}}{k}\right) \frac{\overline{u_m u_n}}{k} \overline{u_n \theta} + \frac{1}{4}\beta g_k \frac{\overline{u_m u_k}}{k^2} \overline{u_i u_j} \overline{u_m \theta} \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$\phi_{i\theta 3} = -\frac{1}{3}G_{i\theta} - \beta g_k a_{ik} \overline{\theta^2} \quad (1.68)$$

ただし、このモデルは十分に検証されてはならず、その複雑さに見合う高い予測性能が得られるかは未知である。

Wall reflection 項

壁面近傍では、壁面垂直方向乱れ成分が抑制され、非等方性の非常に強い乱流場が観察される。その主な原因としては、壁面による変動圧力場に対する wall reflection 効果、非常に大きい mean shear rate $\left(\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial y}\right)$ の存在、及び低レイノルズ数効果等が考えられる(黒田, 1990)。しかしながら、それぞれの効果を分離することは困難であり、従って、通常 ϕ_{ijw} はこれらの効果をまとめて表現していることになる。今後、強い平均剪断の効果及び低レイノルズ数効果を表現するモデル化が発展すれば ϕ_{ijw} の相対的重要性は低くなってゆくと言えるが、現在までにそのようなモデルは提案されていないので、既存のモデルの多くは ϕ_{ijw} に強く依存せざるを得ないというのが現状である。

¹この場合 QI モデルと IP モデルは同形である。

Wall reflection 項は、次に示すように slow 項, rapid 項及び浮力項に対応して次の様に3つの項に分解される。

$$\phi_{ijw} = \phi_{ijw1} + \phi_{ijw2} + \phi_{ijw3} \quad (1.69)$$

$$\phi_{i\theta w} = \phi_{i\theta w1} + \phi_{i\theta w2} + \phi_{i\theta w3} \quad (1.70)$$

現在、最も広く用いられているモデルとしては、Shir (1973) によるもの

$$\phi_{ijw1} = C_{w1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i} n_k n_j - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j} n_k n_i \right) f \left(\frac{l}{y} \right) \quad (1.71)$$

及び Gibson & Launder (1978) によるもの

$$\phi_{ijw2} = C_{w2} \left(\phi_{km2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{kj2} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{ki2} n_k n_i \right) f \left(\frac{l}{y} \right) \quad (1.72)$$

$$\phi_{ijw3} = C_{w3} \left(\phi_{km3} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{kj3} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{ki3} n_k n_i \right) f \left(\frac{l}{y} \right) \quad (1.73)$$

$$\phi_{i\theta w1} = -C_{w1}^{\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_k \theta} n_k n_i f \left(\frac{l}{y} \right) \quad (1.74)$$

$$\phi_{i\theta w2} = -C_{w2}^{\theta} \phi_{k\theta2} n_k n_i f \left(\frac{l}{y} \right) \quad (1.75)$$

$$\phi_{i\theta w3} = -C_{w3}^{\theta} \phi_{k\theta3} n_k n_i f \left(\frac{l}{y} \right) \quad (1.76)$$

がある。ここで、 $f(l/y)$ は壁面の影響を表す関数であり、通常次式で与えられる。

$$f \left(\frac{l}{y} \right) = \frac{k^{3/2}}{2.5\varepsilon y} \quad (1.77)$$

また、壁面の存在しない安定成層流では、壁面垂直方向乱れ成分と流れ方向乱れ成分の比 $\overline{u_2^2}/\overline{u_1^2}$ は浮力生成項 G_{22} の影響で減衰するのに対し、安定成層境界層の場合は $\overline{u_2^2}/\overline{u_1^2}$ が Ri_f の増加とともに増加するとの実験報告 (Haugen, Kaimal & Bradley, 1971) がある。

Gibson & Launder (1978) は、その論文の中で壁面補正項に次のような浮力の効果を導入することでこの相反する現象の予測に成功した。ここで Ri_f は、 $Ri_f \equiv -G_{ii}/P_{jj}$ で定義されるフラックスリチャードソン数である。

$$f\left(\frac{l}{y}\right) = \begin{cases} \frac{1-5.5Ri_f}{1-Ri_f} & \text{for } Ri_f > 0 \\ \frac{(1-14Ri_f)^{1/4}}{1-Ri_f} & \text{for } Ri_f < 0 \end{cases} \quad (1.78)$$

定数は $C_{w1} = 0.5$, $C_{w2} = 0.3$, $C_{w1}^0 = 0.5$, $C_{w3} = C_{w2}^0 = C_{w3}^0 = 0.0$ と置かれる場合が多い。

散逸項

散逸率テンソル ε_{ij} に関しては、近年レイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ と同様にその輸送方程式を解くモデルが提案されているが (Tagawa, Nagano & Tsuji, 1991), ε_{ij} 方程式は各項のオーダーが異なることもあり、そのモデル化は $\overline{u_i u_j}$ 方程式と比較しても極めて困難であると言える。通常、散逸項テンソル ε_{ij} に対してはより単純な代数的なモデルを用いられ、以下ではそのようなモデルを紹介してゆく。

高レイノルズ (バクレ) 数乱流において、散逸を担う細かい変動は等方的であると仮定すると (局所等方性), (1.4) 式及び (1.5) 式中の散逸項 ε_{ij} , $\varepsilon_{i\theta}$ は次のようにおける。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (1.79)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = 0 \quad (1.80)$$

現在提案されているほとんどのモデルは、この等方的な散逸率を仮定しているが、近年の直接数値シミュレーション (DNS) データ (Mansour, Kim & Moin, 1988; 黒田, 1990; Rogers, Moin & Reynolds, 1986) によると、壁面近くや $Re_t \leq 500$ 程度の乱流場では散逸は非常に大きな非等方性を示している。また、高レイノルズ数であっても、プラント

ル数が非常に小さい場合は ε_{ij} は無視できない (大坪, 1992; Kasagi & Ohtsubo, 1993). 従って, これらの影響を考慮したモデルもいくつか提案されている. 例えば, Hanjalić & Launder (1976) は, 低レイノルズ数の場合に散逸は応力の非等方性の関数であるとして,

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_s) \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + f_s \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \varepsilon \quad (1.81)$$

$$f_s = \frac{1}{1 + 0.1 Re_t} \quad (1.82)$$

のようなモデルを提案した. ここでは $f_s(Re_t)$ なる関数を用いているが, 乱流レイノルズ数以外にも応力場の非等方性にも依存すると一般的には考えられる ($f_s(Re_t, A_2, A_3)$). 例えば, ごく最近になって Launder & Tselepidakis (1992) は ε_{ij} の壁面漸近挙動を満足する次のようなモデルを提案した.

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_s) \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + f_s \frac{\frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_k} n_j n_k + \overline{u_j u_k} n_i n_k + \overline{u_k u_l} n_i n_l n_j)}{\left(1 + \frac{3}{2} \overline{u_p u_q} n_p n_q\right)} \quad (1.83)$$

$$f_s = \exp(-20 A^2) \quad (1.84)$$

ここで, n_i は壁面垂直方向単位ベクトルである.

また, Hallböck, Groth & Johansson (1990) は ε_{ij} を a_{ij} の 3 次の項までで表現することと realizability を満足させ, その後 Cayley-Hamilton の定理を用いて 2 次モデルに変換し, 次のようなモデルを得た.

$$\varepsilon_{ij} = \left[1 + \alpha \left(\frac{1}{2} A_2 - \frac{2}{3}\right)\right] a_{ij} - \alpha \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij}\right) \quad (1.85)$$

ここで α は定数で, rapid distortion theory より $\alpha = 3/4$ と与えられる. ただしこのモデルでは, 高レイノルズ数においても等方的散逸を表現することはできない.

一方 ε_{ij} に関しても, Suzuki (1982a) は液体金属のような低プラントル数流体の乱流熱伝達問題を扱う場合には, モデル (1.80) 式は不適当であるとして次の形を提案した.

$$\varepsilon_{\theta} = 0.008 \left(1 + \frac{1}{Pr}\right) \frac{\varepsilon}{k} u_{\theta} \quad (1.86)$$

このモデルは液体金属の円管内乱流 (鈴木, 1982b; 鈴木・東角, 1983) 及び環状流 (鈴木・東角, 1985) の熱伝達予測において良好な結果を与えているが, $(1 + \frac{1}{Pr})$ という関数が単なる無次元化操作によって導出されている点が疑問として残る。変動量 $\partial u_i / \partial x_k$ と $\partial \theta / \partial x_k$ の相関そのものに対する考察を行うことが必要であると考えられる。Jischa & Rieke (1979) も, プラントル数依存性を考慮した乱流プラントル数 Pr_t モデルを得る際に, ε_{θ} に対して (1.86) 式と同様なモデル化を行っている。Kolovandin (1991) は, 温度場時間スケール $k_{\theta} / \varepsilon_{\theta}$ が平均温度勾配を特徴づける時間スケール α_t / k との比が一定であるという条件をモデルに課すことで, ε_{θ} に対する次のようなモデルを得た。

$$\varepsilon_{\theta} = \left(1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 140 / Re_t}}\right) \left\{ \frac{f_3 - (f_1 - 1) \frac{P}{\varepsilon}}{1 - \frac{2}{1 + Pr} \frac{P_{\theta}}{\varepsilon_{\theta}}} + \frac{f_2}{R} \right\} \frac{\varepsilon}{2k} u_{\theta} \quad (1.87)$$

$$f_1 = \left(1 - \frac{2}{1 + Pr} \frac{P_{\theta}}{\varepsilon_{\theta}}\right) + 1 \quad (1.88)$$

$$f_2 = \left[2 \left(P_{r_{\text{new0}}} + \frac{3}{5}\right) - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{R_{\text{new0}}} - \frac{3}{5}\right) \frac{1 + Pr}{2} \frac{\varepsilon_{\theta}}{P_{\theta}}\right] R_{\text{new0}} \quad (1.89)$$

$$f_3 = \frac{4 \left(1 - \frac{2}{1 + Pr} \frac{P_{\theta}}{\varepsilon_{\theta}}\right)}{\frac{6}{P_{\theta}} \frac{1}{1 + Pr} \frac{\varepsilon_{\theta}}{\varepsilon_{\theta}}} \left(\frac{1}{R_{\text{new0}}} - \frac{3}{5}\right) \frac{R_{\text{new0}}}{R} \quad (1.90)$$

$$R_{\text{new0}} = \frac{5Pr \left[1 - 2 \left(\frac{2Pr}{1 + Pr}\right)^{1/2} + Pr^{1/2}\right]}{1 - 2 \left(\frac{2Pr}{1 + Pr}\right)^{3/2} + Pr^{3/2}} \quad (1.91)$$

$$Pr_{\text{new0}} = \frac{\frac{3}{10} \frac{1 - Pr}{Pr}}{1 - \left(\frac{2Pr}{1 + Pr}\right)^{3/2}} \quad (1.92)$$

このモデルは一様等方性乱流及び安定成層流において検証されている (Bondarchuk, Kolovandin & Martynenko, 1991; Kolovandin, Bondarchuk, Meola & De Felice, 1993). さら

に, Lai & So (1990b) は壁面漸近挙動を満足する表現として次のモデルを提案している.

$$\varepsilon_{i\theta} = f_{s\theta} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i \theta} + \overline{u_k \theta} n_k n_i) \quad (1.93)$$

$$f_{s\theta} = \exp[-(Re_l/80)^2] \quad (1.94)$$

乱流拡散項

非一様乱流場では, 乱流拡散項のモデル化が必要となる. しかしながら, 工学的に重要な流れ場で乱流拡散が重要となるのは成層流等の限られたケースであり, 従って, 三重相関項に対しては比較的簡単なモデルがよく用いられる. 本節では, 三重相関項のモデル化の概略を示す.

レイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$, 乱流熱流束 $\overline{u_i \theta}$ 及び温度乱れ分散 k_θ の輸送方程式中に現れる三重相関項 $\overline{u_i u_j u_k}$, $\overline{u_i u_k \theta}$ 及び $\overline{u_k \theta^2}$ の輸送方程式は次のようになる.

$$\frac{D \overline{u_i u_j u_k}}{Dt} = P_{ijk1} + P_{ijk2} + G_{ijk} + d_{ijk} + \phi_{ijk} - \varepsilon_{ijk} \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned} P_{ijk1} &= \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_k u_m}}{\partial x_m} + \overline{u_k u_i} \frac{\partial \overline{u_j u_m}}{\partial x_m} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{u_i u_m}}{\partial x_m} \\ P_{ijk2} &= - \left\{ \overline{u_i u_j u_m} \frac{\partial U_k}{\partial x_m} + \overline{u_k u_i u_m} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + \overline{u_j u_k u_m} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right\} \\ G_{ijk} &= -\beta g_i \overline{u_j u_k \theta} - \beta g_j \overline{u_k u_i \theta} - \beta g_k \overline{u_i u_j \theta} \\ d_{ijk} &= -\frac{\partial}{\partial x_m} \left\{ \overline{u_i u_j u_k u_m} + \frac{1}{\rho} \overline{p u_j u_k \delta_{im}} + \frac{1}{\rho} \overline{p u_k u_i \delta_{jm}} + \frac{1}{\rho} \overline{p u_i u_j \delta_{km}} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_m} \right\} \\ \phi_{ijk} &= \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j u_k}{\partial x_i} \right) \\ \varepsilon_{ijk} &= 2\nu \left(u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{D \overline{u_i u_k \theta}}{Dt} = P_{ik\theta 1} + P_{ik\theta 2} + G_{ik\theta} + d_{ik\theta} + \phi_{ik\theta} - \varepsilon_{ik\theta} \quad (1.96)$$

$$\begin{aligned}
P_{ik\theta 1} &= \overline{u_i u_k} \frac{\partial u_m \theta}{\partial x_m} + u_i \theta \frac{\partial \overline{u_k u_m}}{\partial x_m} + \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{u_i u_m}}{\partial x_m} \\
P_{ik\theta 2} &= - \left\{ \overline{u_i u_k u_m} \frac{\partial \Theta}{\partial x_m} + u_i u_m \theta \frac{\partial U_k}{\partial x_m} + \overline{u_k u_m \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right\} \\
G_{ik\theta} &= -\beta g_i \overline{u_k \theta^2} - \beta g_k \overline{u_i \theta^2} \\
d_{ik\theta} &= -\frac{\partial}{\partial x_m} \left\{ u_i \overline{u_k u_m \theta} + \frac{1}{\rho} \overline{p u_k \theta} \delta_{im} + \frac{1}{\rho} \overline{p u_i \theta} \delta_{km} - \nu \theta \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_m} - \alpha u_i u_k \frac{\partial \theta}{\partial x_m} \right\} \\
\phi_{ik\theta} &= \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i \theta}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k \theta}{\partial x_i} \right) \\
\varepsilon_{ik\theta} &= \nu \left(\overline{\frac{\partial u_i \theta}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_m}} + \overline{\frac{\partial u_k \theta}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_m}} \right) + \alpha \overline{\frac{\partial u_k u_i}{\partial x_m} \frac{\partial \theta}{\partial x_m}}
\end{aligned}$$

$$\frac{D \overline{u_k \theta^2}}{Dt} = P_{k\theta\theta 1} + P_{k\theta\theta 2} + G_{k\theta\theta} + d_{k\theta\theta} + \phi_{k\theta\theta} - \varepsilon_{k\theta\theta} \quad (1.97)$$

$$\begin{aligned}
P_{k\theta\theta 1} &= \overline{\theta^2} \frac{\partial \overline{u_k u_m}}{\partial x_m} + 2 \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{u_m \theta}}{\partial x_m} \\
P_{k\theta\theta 2} &= - \left\{ \overline{u_m \theta^2} \frac{\partial U_k}{\partial x_m} + 2 \overline{u_k u_m \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x_m} \right\} \\
G_{k\theta\theta} &= -\beta g_k \overline{\theta^3} \\
d_{k\theta\theta} &= -\frac{\partial}{\partial x_m} \left\{ \overline{u_k u_m \theta^2} + \frac{1}{\rho} \overline{p \theta^2} \delta_{km} - \nu \theta^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_m} - 2 \alpha u_k \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_m} \right\} \\
\phi_{k\theta\theta} &= \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \theta^2}{\partial x_k} \right) \\
\varepsilon_{k\theta\theta} &= 2(\nu + \alpha) \theta \overline{\frac{\partial \theta}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_m}} + 2 \alpha u_k \overline{\frac{\partial \theta}{\partial x_m} \frac{\partial \theta}{\partial x_m}}
\end{aligned}$$

(1.95)~(1.97) 各式の中でモデル化の必要な項は拡散項 d_{ijk} , $d_{ik\theta}$, $d_{k\theta\theta}$, 圧力相関項 ϕ_{ijk} , $\phi_{ik\theta}$, $\phi_{k\theta\theta}$ 及び散逸項 ε_{ijk} , $\varepsilon_{ik\theta}$, $\varepsilon_{k\theta\theta}$ である。まず、これらの項のモデル化について紹介する。

拡散項 d_{ijk} , $d_{ik\theta}$ 及び $d_{k\theta\theta}$ で圧力拡散項と分子拡散項を無視すると四重相関項 $\overline{u_i u_j u_k u_m}$, $\overline{u_i u_k u_m \theta}$ 及び $\overline{u_k u_m \theta^2}$ が残り、さらに、これらの項の結合確率密度関数にガウス分布を仮定すると次のモデルが得られる。

$$d_{ijk} = -\frac{\partial}{\partial x_m} (\overline{u_i u_j u_k u_m} + \overline{u_j u_k u_i u_m} + \overline{u_k u_i u_j u_m}) \quad (1.98)$$

$$d_{ik\theta} = -\frac{\partial}{\partial x_m} (\overline{u_i u_k u_m \theta} + \overline{u_m u_k u_i \theta} + \overline{u_i u_m u_k \theta}) \quad (1.99)$$

$$d_{k\theta\theta} = -\frac{\partial}{\partial x_m} (2\overline{u_k \theta u_m \theta} + \overline{u_m u_k \theta^2}) \quad (1.100)$$

圧力変動相関項 ϕ_{ijk} , $\phi_{ik\theta}$ 及び $\phi_{k\theta\theta}$ に対しては, 2次モーメント量の場合の IP モデルと同様のモデル化を行うと,

$$\phi_{ijk} = -\frac{1}{c} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j u_k} - 0.5 P_{ijk1} - 0.5 P_{ijk2} \quad (1.101)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ik\theta} = & -\frac{1}{c_\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_k \theta} - 0.5 \left(\overline{u_i \theta} \frac{\partial \overline{u_k u_m}}{\partial x_m} + \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{u_i u_m}}{\partial x_m} \right) \\ & - 0.5 \left(-\overline{u_i u_m \theta} \frac{\partial U_k}{\partial x_m} - \overline{u_k u_m \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right) \end{aligned} \quad (1.102)$$

$$\phi_{k\theta\theta} = -\frac{1}{c_\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_k \theta^2} - 0.5 P_{k\theta\theta 1} - 0.5 \left(-\overline{u_m \theta^2} \frac{\partial U_k}{\partial x_m} \right) \quad (1.103)$$

となる。ここで, 定数は Dekeyser & Launder (1985) モデルでは $c = c_\theta = \hat{c}_\theta = 0.075$ である。

浮力が働く場合には, 圧力変動場にもその影響を考慮する必要がある。Lumley, Zeman & Siess (1978) は 2次モーメント量の QI モデルに対応する次の様なモデルを提案した。

$$\begin{aligned} \phi_{ijk}^G = & \frac{3}{10} (\beta g_i \overline{u_j u_k \theta} + \beta g_j \overline{u_k u_i \theta} + \beta g_k \overline{u_i u_j \theta}) \\ & - \frac{1}{10} (\beta g_m \overline{u_i u_m \theta} \delta_{jk} + \beta g_m \overline{u_j u_m \theta} \delta_{ki} + \beta g_m \overline{u_k u_m \theta} \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (1.104)$$

$$\phi_{ik\theta}^G = \frac{3}{10} (\beta g_i \overline{u_j \theta^2} + \beta g_j \overline{u_i \theta^2}) - \frac{2}{10} \beta g_m \overline{u_m \theta^2} \delta_{ij} \quad (1.105)$$

$$\phi_{k\theta\theta}^G = \frac{1}{3} \beta g_i \overline{\theta^3} \quad (1.106)$$

(1.104)~(1.106) 式をそれぞれ (1.101)~(1.103) 各式に加えて用いればよい。また, IP モデルとして用いる場合には, 各項右辺第一項のみを残し係数を約 0.5 とすればよい。

散逸項 ε_{ijk} , $\varepsilon_{ik\theta}$ 及び $\varepsilon_{k\theta\theta}$ に対しては, Dekeyser & Launder (1985) は勾配拡散型モデルを適用し, さらに局所等方性を仮定することで次のようなモデルを得た.

$$\varepsilon_{ijk} = -c_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} (\overline{u_k u_m} \delta_{ij} + \overline{u_j u_m} \delta_{ki} + \overline{u_i u_m} \delta_{jk}) \quad (1.107)$$

$$\varepsilon_{ik\theta} = -c_{\varepsilon\theta} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} (\overline{u_m \theta} \delta_{ik}) \quad (1.108)$$

$$\varepsilon_{k\theta\theta} = -\widehat{c_{\varepsilon\theta}} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_m} \overline{u_k u_m} \quad (1.109)$$

ここで, 定数は $c_\varepsilon = 0.2$, $c_{\varepsilon\theta} = 0.1$ 及び $\widehat{c_{\varepsilon\theta}} = 0.3$ である. Lumley ら (1978) はこれに対し, 勾配拡散近似は用いずに圧力相関項に似た表現のモデルを提案している.

$$\varepsilon_{ijk} = -\frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_m u_m} \delta_{jk} + \overline{u_j u_m u_m} \delta_{ki} + \overline{u_k u_m u_m} \delta_{ij}) \quad (1.110)$$

$$\varepsilon_{ik\theta} = -\frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_m u_m \theta} \delta_{ik} \quad (1.111)$$

$$\varepsilon_{k\theta\theta} = 0 \quad (1.112)$$

以上で方程式系が閉じたことになるが, 常にこれらの全てのモデル項を連立させて三重相関項を求める訳ではない. 例えば, Dekeyser & Launder (1985) は, $P_{ik\theta 2}$ 及び $P_{k\theta\theta 2}$ の平均速度勾配を含む項は平均温度勾配を含む項に比べ小さいとして無視¹⁾, 他の項をバランスさせるモデルを提案した.

ここで, $P_{ijk 2}$ 及び $P_{ik\theta 2}$ はその中に三重相関項を含むので, これを用いることはモデルの煩雑さを招く. また, 乱流拡散が重要となるのがそもそも平均速度及び平均温度勾配が小さい領域であるため, $P_{ijk 2}$, $P_{ik\theta 2}$ 及び $P_{k\theta\theta 2}$ の重要性は実際上の計算においては小さいと考えられる. Hanjalic & Launder (1972) はこのような考察に基づき, $P_{ijk 2}$ 及び ε_{ijk} を無視し, さらに ϕ_{ijk} の第一項のみを残すことで次のような単純なモデルを得た.

$$\overline{u_i u_j u_k} = -c \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} + \overline{u_i u_m} \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_m} + \overline{u_j u_m} \frac{\partial \overline{u_k u_i}}{\partial x_m} \right) \quad (1.113)$$

¹⁾従って, $\phi_{ik\theta}$ 及び $\phi_{k\theta\theta}$ 中の平均速度勾配を含む項も無視している.

ただし, ここでは $c = 0.11$ と最適化される. また, $\overline{u_i u_k \theta}$ 及び $\overline{u_k \theta^2}$ に対しても,

$$\overline{u_i u_k \theta} = -c_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u_i u_m} \frac{\partial \overline{u_k \theta}}{\partial x_m} + \overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_m} + \overline{u_m \theta} \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_m} \right) \quad (1.114)$$

$$\overline{u_k \theta^2} = -c_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left(2 \overline{u_m \theta} \frac{\partial \overline{u_k \theta}}{\partial x_m} + \overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_m} \right) \quad (1.115)$$

の様なモデルが得られるが, (1.114) 式右辺最終項は無視されることが多い (Launder & Samaraweera, 1978).

実用計算においては, さらに簡略化した勾配拡散 (Generalized Gradient Diffusion Hypothesis) 型モデルを用いる場合が多い.

$$\overline{u_i u_j u_k} = -c' \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} \quad (1.116)$$

$$\overline{u_i u_k \theta} = -c'_\theta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_m} \quad (1.117)$$

$$\overline{u_k \theta^2} = -c'_\theta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_m} \quad (1.118)$$

これらのうち (1.116) 及び (1.117) 式は添え字に関して対称ではない. しかしながら, これらが圧力拡散項を含めた全拡散をモデル化したものであると解釈するならば, 必ずしも対称性を満足する必要はない. 係数を $c' = c'_\theta = c'_\theta = 0.22$ 程度に与えれば, 剪断流に対して十分な精度で解を与えることが経験的に知られており, その単純さから多用されている.

ここで, 密度成層流での三重相関項モデリングにおいて Andréら (1976a,b) の提案した clipping approximation について言及しておく. Andréらは任意の三重相関項が Schwarz の不等式を満足しない場合には, その逸脱分を“摘み取る”ことで非現実的な解を生じないような条件をモデルに課した. 具体的には, モデルが常に次に示す条件を満足しない場合には, 強制的にその上限となる値を与えている.

$$|abc| \leq \min \begin{bmatrix} \{a^2(b^2c^2 + bc^2)\}^{1/2} \\ \{b^2(c^2a^2 + ca^2)\}^{1/2} \\ \{c^2(a^2b^2 + ab^2)\}^{1/2} \end{bmatrix} \quad (1.119)$$

ここで, a, b, c は任意の変動量である. この手法はモデルに realizability の拘束条件を課したものであり, 対流混合層 (Convective Boundary Layer) の予測において良好な結果が得られている (André et al., 1976b).

1.2.3 ε 方程式のモデリング

散逸率 ε の厳密な輸送方程式は非常に複雑であり, レイノルズ応力や乱流熱流束の輸送方程式のようにモデル化の際の指針となるものではない. 従って, ε 方程式のモデリングは直感的で経験的な手法に頼らざるを得ない. 最も広く用いられているモデルは

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} + c_{\varepsilon} \overline{u_k w_i} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon P}{k} (1 - \alpha R_f) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (1.120)$$

である. ここで, $R_f = -G_{kk}/P_{II}$ はフラックスリチャードソン数である. 通常, 定数は $c_{\varepsilon 1} = 1.44$, $c_{\varepsilon 2} = 1.92$, $c_{\varepsilon} = 0.18$ という値に設定される. また, α は浮力の働く場合に ε 生成の程度を示すパラメータであり, 成層流等の水平剪断乱流の場合は 0 (Gibson & Launder, 1976), プルーム等の垂直剪断乱流の場合は 1 (Rodi, 1980) という値が推奨されている. 一方, Viollet (1987) は安定成層流の場合は $\alpha = 0$, 不安定成層流の場合は $\alpha = 1$ を推奨している.

ε 方程式モデル (1.120) 式の良く知られた欠陥は, 軸対称噴流の拡大率が大きく予測されることである. 軸対称噴流は二次元噴流に比べゆっくりと拡大することが実験的に知られているが (Chen & Rodi, 1980), 通常用いられる second moment closure では逆の予測結果を与える. 軸対称噴流の場合 ε が過小評価され, その結果乱流粘性及び拡大率が大きく予測されることになる. 例えば, Pope (1978) は (1.120) 式に

$$0.79 \times \frac{1}{8} \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \quad (1.121)$$

を加えることで予測結果を改善し、また、Craft (1991) は軸対称噴流及び大きな平均剪断を伴う一様剪断乱流に対して良好な結果を与える次の様なモデルを提案している。

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} + c_\varepsilon \overline{u_i u_i} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + 0.35 \left\{ \frac{\varepsilon P}{k} + \frac{\varepsilon}{k} \nu_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\} - \frac{1.92}{(1 + 1.65 A_2^{1/2} A)} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (1.122)$$

また、標準的な ε 方程式を壁面乱流へ適用すると、壁面ごく近傍の ε が過小評価され、結果として例えば剥離位置がかなり下方で予測されたり、剥離後の熱伝達率が過大に予測されるという欠点が指摘されている (Launder, 1989)。Yap (1987) は、このような欠陥を克服するために、 ε 方程式に次のような壁面補正項を加えた。

$$\max \left[0.83 \frac{\varepsilon^2}{k} \left(\frac{k^{3/2}/\varepsilon}{c_l x_n} - 1 \right) \left(\frac{k^{3/2}/\varepsilon}{c_l x_n} \right)^2, 0 \right] \quad (1.123)$$

Yap (1987) は、この補正を用いて急拡大管内乱流の熱伝達を良好に予測している。

最後に注意として、他の項 (例えば乱流拡散項) の不備が結果的に散逸率 ε に押し付けられている可能性もあり (遠藤, 1994)、各項ごとのモデルの評価及び検証が進むにつれて、モデル定数やこのような補正等の全体的な見直しが必要となると考えられる。

1.2.4 ε_θ 方程式のモデリング

ε_θ 方程式のモデル化は、通常次のように行われる。まず、速度場も温度場も減衰過程にある一様等方性乱流を考える。Sirivat & Warhaft (1983) の実験結果によると、タイムスケール比 R はその減衰の過程ではほぼ一定値をとることが報告されており、その場合

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\theta k} \frac{dk_\theta}{dt} + \frac{k_\theta}{\varepsilon_\theta k} \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{\varepsilon_\theta} R \frac{d\varepsilon_\theta}{dt} - \frac{1}{k} R \frac{dk}{dt} = 0 \quad (1.124)$$

なる関係が得られる。上式に $dk/dt = -\varepsilon$, $dk_\theta/dt = -\varepsilon_\theta$, $dz/dt = -c_{t2}\varepsilon^2/k$ を代入すると,

$$\frac{dR}{dt} = -R \left[\frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{1}{R} + c_{t2} - 1 \right) + \frac{1}{\varepsilon_\theta} \frac{d\varepsilon_\theta}{dt} \right] = 0 \quad (1.125)$$

が得られる。一方、次元解析より ε_θ 方程式の基本形は次の形で与えられる。

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dt} = -c_{D1} \frac{\varepsilon_\theta^2}{k_\theta} - c_{D2} \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon_\theta \quad (1.126)$$

上式を (1.125) 式に代入すると,

$$\frac{k}{\varepsilon} \frac{dR}{dt} = (c_{D1} - 1) + R(c_{D2} - c_{t2} + 1) = 0 \quad (1.127)$$

となり、任意の R に対して上式が成り立つと仮定すると、定数 c_{D1} 及び c_{D2} は次のように決定される。

$$c_{D1} = 1 \quad (1.128)$$

$$c_{D2} = c_{t2} - 1 \quad (1.129)$$

しかしながら、一般にモデル定数はレイノルズ数やプラントル数の関数であると考えられ、その場合 (1.127) 式右辺第一項及び第二項がともにゼロとなる必要は必ずしもなく、(1.128) 及び (1.129) 式の条件は強すぎる拘束を与えることになる。

平均速度勾配及び平均温度勾配を伴う流れ場においては、 ε_θ 方程式にどのような生成項を含ませるかが問題となる。Newman, Launder & Lumley (1981) は、平均温度勾配に依存した項を導入し次のようなモデルを提案した。

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = \frac{P_\theta}{k_\theta} \varepsilon_\theta - 1.01 \frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} \varepsilon_\theta - B \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon_\theta \quad (1.130)$$

ここで,

$$\begin{aligned} B &= 0.5\psi - 1 - 0.01R_e \\ \psi &= \frac{14}{5} + 0.98\{1 - 0.337\log(1 + 110/A_2)\} \exp\left(-\frac{4.245}{\sqrt{Re_t}}\right) \\ R_e &= 0.6 + 0.4\{1 - 0.337\log(1 + 110/A_2)\} \exp\left(-\frac{4.245}{\sqrt{Re_t}}\right) \\ P_\theta &= -\frac{u_i\theta}{\partial x_i} \end{aligned}$$

である。Elghobashi & Launder (1983) は、このモデルと同じ形式であるが、次の単純化した形で、格子乱流における温度混合層の発達を予測した。

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = 0.9\frac{P_\theta}{k_\theta}\varepsilon_\theta - 1.1\frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta}\varepsilon_\theta - 0.8\frac{\varepsilon}{k}\varepsilon_\theta \quad (1.131)$$

Jones & Musonge (1988) は、平均速度勾配が存在する流れに適用することを目的に、次に示すような乱れエネルギーの生成項を含むモデルを提案した。

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = 1.7\frac{\varepsilon}{k}P_\theta + 1.4\frac{P}{k}\varepsilon_\theta - \frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta}\varepsilon_\theta - 1.8\frac{\varepsilon}{k}\varepsilon_\theta + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(0.22\frac{k}{\varepsilon}u_ju_k\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial x_k}\right) \quad (1.132)$$

彼らはこのモデルによって、Tavoularis & Corrsin (1981) の一様剪断乱流温度場及び温度混合層の発達過程を良好に予測している。

Nagano & Kim (1988) は、その温度場 2 方程式モデルの中で次の形を提案している (ただし、ここでは拡散項及び壁面補正項は省略)。

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = 0.9\frac{P_\theta}{k_\theta}\varepsilon_\theta + 0.72\frac{P}{k}\varepsilon_\theta - 1.1\frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta}\varepsilon_\theta - 0.8\frac{\varepsilon}{k}\varepsilon_\theta \quad (1.133)$$

長野・田川・辻 (1990) も、定数は異なるが同形の ε_θ 方程式を用いた壁面漸近挙動を満足する温度場 2 方程式モデルを提案した。さらに、Yoshizawa (1988) も同じ項からなるモデルを提案している。

Shih, Lumley & Chen (1990) は、2 次元及び軸対称噴流を予測するため、次のような

モデルを提案した。このモデルでは、平均温度勾配に依存する項は含まれているが、乱れエネルギー生成項 P を含む項は用いられていない。

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = \psi_1^f \frac{\varepsilon_\theta}{2k_\theta} P_\theta - \psi_0^f \frac{\varepsilon_\theta}{2k_\theta} \varepsilon_\theta \quad (1.134)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \psi_0^f &= 2 - (2 - \psi_0)R - \frac{3}{4}A_2R \left(\frac{1}{1.6R} - 1 \right) \\ \psi_1^f &= \begin{cases} 2.25(1.6R)^{10} & \text{if } R > 0.625 \\ 2.25(0.9 + 0.16R) & \text{if } R \leq 0.625 \end{cases} \\ \psi_0 &= \frac{14}{5} + 0.98 \{ 1 - 0.33 \log(1 + 55.4A_2/8) \} \exp \left(-\frac{4.245}{\sqrt{Re_t}} \right) \end{aligned}$$

である。

Craft (1991) は噴流や plume の計算における数値安定性を重視し、次のようなモデルを得た。

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = 1.6R \frac{\varepsilon}{k} P_\theta + 2.6R\nu_t \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - \left(\frac{1}{1 + 0.5A_2^{1/2}A} \right) \left(\frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} \varepsilon_\theta + 0.92 \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon_\theta \right) \quad (1.135)$$

上式左辺第一及び第二項に R が乗じてあるが、これによって計算の安定化がはかられている。

1.2.5 渦粘性、渦拡散係数モデル

最も簡単な応力モデル (slow 項として (1.16) 式, rapid 項として (1.49) 式を採用したもの)

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + c \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} \right) - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \\ &\quad - c_1 \varepsilon \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) - c_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.136)$$

の対流項と拡散項に代数応力近似 (Rodi, 1976)

$$\frac{D\bar{u}_i\bar{u}_j}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i\bar{u}_j}{\partial x_k} + c' \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_k \bar{u}_m \frac{\partial \bar{u}_i\bar{u}_j}{\partial x_m} \right) = \frac{\bar{u}_i\bar{u}_j}{k} (P - \varepsilon) \quad (1.137)$$

を施すと、次の関係が得られる。

$$\bar{u}_i\bar{u}_j = \frac{2}{3}k\delta_{ij} + \frac{1-c_2}{P} \frac{k}{\varepsilon - (1-c_1)} \left(P_{ij} - \frac{2}{3}P\delta_{ij} \right) \quad (1.138)$$

ここでさらに、局所平衡 ($P = \varepsilon$) 及び

$$\left(P_{ij} - \frac{2}{3}P\delta_{ij} \right) = -\zeta k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.139)$$

を仮定すると[†], (1.138) 式は,

$$\bar{u}_i\bar{u}_j = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.140)$$

と変形される。ただし、 $C_\mu = \zeta(1-c_2)/c_1$ である。 $c_1 = 1.8$, $c_2 = 0.6$ 及び剪断乱流中の $i=1$, $j=2$ 成分に対する値 $\zeta = \overline{u_2^2}/k \approx 0.4$ を代入すると、 $C_\mu = 0.0889$ となる。もともと歴史的には、この表現はレイノルズ応力と分子粘性応力とのアナロジーから導かれたものであり、定数の値としては経験的に $C_\mu = 0.09$ が用いられている。

続いて、最も簡単な乱流熱流束輸送方程式モデル^{††}

$$\frac{D\bar{u}_i\bar{\theta}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \bar{u}_i\bar{\theta}}{\partial x_k} + c_\theta' \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_k \bar{u}_m \frac{\partial \bar{u}_i\bar{\theta}}{\partial x_m} \right) - \bar{u}_i\bar{u}_k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} - \bar{u}_k\bar{\theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - c_{1\theta} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_i\bar{\theta} + c_{2\theta} \bar{u}_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (1.141)$$

の対流項と拡散項に対しても、代数熱流束近似 (Gibson & Launder, 1986)

[†]この近似は、非対角成分に対してはおおよそ妥当なものである。

^{††}Slow 項のモデルとして (1.29) 式, rapid 項として (1.50) 式を採用したもの。

$$\frac{D\overline{u_i\theta}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \overline{u_i\theta}}{\partial x_k} + c_\theta^k \frac{\overline{u_k u_m}}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u_i\theta}}{\partial x_m} \right) = \frac{1}{2} \overline{u_i\theta} \left[\frac{P - \varepsilon}{k} + \frac{P_\theta - \varepsilon_\theta}{k_\theta} \right] \quad (1.142)$$

を施し、変形を行うと、

$$\overline{u_i\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{P}{\varepsilon} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} - 1 \right) + c_{1\theta}} \frac{k}{\varepsilon} \left(-\overline{u_i u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - (1 - c_{2\theta}) \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \quad (1.143)$$

が得られる。ここでまた、局所平衡 ($P = \varepsilon$, $P_\theta = \varepsilon_\theta$) 及び

$$-\overline{u_i u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - (1 - c_{2\theta}) \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -C_\theta k \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \quad (1.144)$$

を仮定すると¹, (1.143) 式は、

$$\overline{u_i\theta} = -C_\lambda \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \quad (1.145)$$

となる。ただし、 $C_\lambda = C_\theta / c_{1\theta}$ である。剪断乱流中では $i = 2$ の場合 $C_\theta = \overline{u_2^2}/k \approx 0.4$ であるので、 $c_{1\theta} = 3.0$ を代入すると、 $C_\lambda = 0.133$ となる。

(1.140), (1.145) 両式の平均速度勾配及び平均温度勾配にかかる係数は、それぞれ渦粘性係数及び渦拡散係数と呼ばれる。

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.146)$$

$$\alpha_t = C_\lambda \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.147)$$

これらの係数は、 k 及び ε を与えれば決定することができる。特に、 ν_t を乱れエネルギー k 及びその散逸率 ε の輸送方程式を解き、与えるものを $k-\varepsilon$ 方程式モデルと呼び、 $k-\varepsilon$ モデルでは、(1.140) 式を導くにあたり用いた様々な仮定や壁面の影響を、修正関数 f_μ を

¹これも特殊な場合、即ち、 $\partial U_i / \partial x_2 \neq 0$, $\partial \Theta / \partial x_2 \neq 0$ で $i = 2$ の場合に対しては妥当なものである。

導入することで表現する。

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.148)$$

ここで、 C_μ は比例定数で通常その値は改めて $C_\mu = 0.09$ とされる。 f_μ は Jones & Launder (1972) によって初めて提案され、その後数多くの提案がなされている (Patel, Rodi & Scheuerer, 1985)。壁面補正関数を含まない $k-\varepsilon$ モデルは、壁法則に基づく壁関数を壁面境界条件として用い、比較的計算が安定であり工業上の実用計算で多く用いられている。壁面補正関数 f_μ を含むモデルは、特に低レイノルズ数型モデルと呼ばれ、壁面までそのまま適用できるので、壁法則が成立しない流れ場に対してもその有効性が期待できる。実際に、壁面剪断乱流の乱流遷移問題 (Savill, 1993) や急拡大流路の剥離再付着乱流 (安倍・長野・近藤, 1992) 等に適用され良好な予測結果が得られている。

渦拡散係数 α_t に対しては、現在の所実用計算レベルでは乱流プラントル数 Pr_t を用いる方法が主流である。ここでは渦粘性係数 ν_t を既知として、乱流プラントル数 Pr_t の値を何かしらの方法で仮定し、渦拡散係数 α_t を求めるものである。

$$\alpha_t = \frac{\nu_t}{Pr_t} \quad (1.149)$$

Pr_t は、(1.145) 式を導くまでに用いられた温度場に対するあらゆる近似や仮定を表現するものであるから、一般的には乱流場の特性に依存し、流れ場・温度場の境界条件や作動流体が変わるとその値も変化させる必要がある。しかし、速度場と温度場の相似性がある程度期待できる場合には、乱流プラントル数を一定と仮定すること、あるいは解析的、実験的相関式を用いることで実用的に満足のいく精度で温度場が予測できることも示されている。例えば、Myong & Kasagi (1989) は、乱流プラントル数を分子プラントル数 $Pr = \nu/\alpha$ の弱い関数として次のように表し、広いプラントル数範囲の円管内乱流の熱伝達を予測した。

$$Pr_t = 0.75 + \frac{1.63}{\ln[1 + (Pr/0.0015)]} \quad (1.150)$$

また, Jischa & Rieke (1979) は乱流熱流束の輸送方程式を局所平衡条件を基に近似することで, 円管内乱流に対してプラントル数及びバルクのレイノルズ数 ($Re = 2\delta U_m/\nu$) に依存する乱流プラントル数表現を提案している.

$$Pr_t = 0.85 + \frac{B}{Pr} \quad (1.151)$$

$$B = \begin{cases} 0.012 \sim 0.05, & \text{for } Re = 2 \times 10^4 \\ 0.005 \sim 0.015, & \text{for } Re = 10^5 \end{cases}$$

この他にも多くの提案がなされているが, それらは主に Pr , Re , 及び壁からの距離 y の関数となっている (例えば, Reynolds, 1975).

乱流プラントル数モデルが有効なのは前述のように速度場と温度場の相似性がある程度期待できる場合であるが, 一般的には温度場は速度場とは異なった伝熱的境界条件の下で発達するため, そのような状況が常に期待できるわけではない. 例えば, 発達した管内乱流場が途中から加熱される場合や, 流れの再付着点近傍で壁面が加熱 (冷却) される場合である. 後者の場合などは, 壁面剪断応力はゼロとなるが壁面熱流束はゼロとはならず, むしろ極めて大きな値をとる. 従って, この様な状況においても有効な渦拡散係数 α_t を求めるのであれば, 温度乱れを特徴付ける時間スケールを用いることが考えられる. 温度場2方程式モデルでは, 温度乱れの分散 $k_\theta = \overline{\theta^2}/2$ 及びその散逸率 ε_θ を変数として2つの輸送方程式を解き, 以下のようにモデルに組み込む.

$$\alpha_t = C_\lambda f_\lambda \frac{k^2}{\varepsilon} f(R) \quad (1.152)$$

ここで C_λ は定数であり, およそ $C_\lambda = 0.1$ である. また, f_λ は f_μ と同様に壁面補正関数である. ここでは, タイムスケール比 R の影響は $f(R)$ として一般的に表現されているが, この関数に対していくつかの提案がなされている. 例えば, 長野・金 (1987) は $f(R)$ として次の形式を提案している.

$$f(R) = R^{1/2} \quad (1.153)$$

この表現は、速度場と温度場の時間スケールの相乗平均を用いることに相当し、円管内乱流の温度助走区間に対して良好な結果が得られている。

また、Yoshizawa (1988)、長野・田川・辻 (1990) はそれぞれ統計理論及び温度乱れの壁面漸近挙動条件から次のモデルを提案した。

$$f(R) = R^2 \quad (1.154)$$

長野ら (1990) のモデルは、壁面温度乱れがゼロとなる場合とそうでない場合の2種の異なった境界条件を扱える表現となっている。なお、ここで示した関数は全て $f(R) = R^n$ と R のべき乗の関数として与えられているが、この様な表現をとるべきだとする理論的根拠が必ずしもあるわけではない。Launder (1984a) は、 τ_u 、 τ_θ のうち小さい方を選択することを推奨はしているが、具体的な表現は示していない。

この様に、低次のモデルではタイムスケール比やプラントル数の影響をモデル内に導入する試みが多くなされているが、そもそもこれらのパラメータの影響は (1.141) 式から (1.140) 式への変形中に導入されるものではなく、もともとの Π_{10} や ε_{10} モデル中で表現されるべきものである。従って、これらのパラメータの影響を適切に表現するには、輸送方程式モデルのレベルでの研究が非常に重要であると考えられる。

1.3 本研究の目的

以上見てきたように、現在用いられている乱流モデルは2次以下の統計量で方程式系を閉じるものが主流となっている。図 1.1 に、レイノルズ平均に基づく乱流モデルの構成をまとめたものを示す。輸送方程式モデルでは、対流、拡散、生成などの素過程を陽的にある程度の近似のもとで表現出来るのに対し、代数方程式モデルでは対流及び拡散効果が十分満足には表現できなくなる。さらに、渦粘性・渦拡散係数モデルでは、生成や消滅の効果もまとめてモデル化されており、その使用が2次元剪断流等の特殊な状況下に限られることがわかる。扱う乱流場によって重要となる素過程は異なるが、広い範囲の乱流場を扱

うためには各素過程を独立に扱うことのできる輸送方程式モデルが原理的に有利である。特に、生成項を厳密に扱えることが非常に大きな魅力となっていることは、第1.2.1節で述べた通りである。また、輸送方程式モデルでは他のモデルに比べ realizability や rapid distortion theory 等の物理的・数学的拘束条件が、具体的にどの素過程に対して課されなければならないかが明白であり、従って、乱流モデルの拡張にあたってはこのレベルでの議論が不可欠であると言える。さらに、レイノルズ数やプラントル数の影響は、レイノルズ応力や乱流熱流束の消滅・散逸機構に強く影響を及ぼすことが近年の DNS (例えば、黒田, 1990; Kasagi & Ohtsubo, 1993) から明かにされており、これらのパラメータの影響を適切に組み込む場合にも、各素過程に対する検討が非常に重要となる。また、図1.1に示したどの近似レベルでのモデリングも、他のレベルのモデルと整合性を持つことが望ましく、例えば、ある新たなパラメータを含む渦拡散係数モデルを提案したい場合に、そのモデルがより高次のモデルと矛盾する(原理的な限界は除いて)ものであってはならない。このような立場からは、より近似程度の小さい輸送方程式モデルに対する検討を加えた後にさらなる近似を行うことで、より低次のモデルへと帰着させる手法が簡単かつ適切であると考えられる。以上、輸送方程式モデルの利点をまとめてみると、次のようになる。

- 各素過程を独立に扱うことが可能である。
- 生成項が厳密であり、従って特定の方向に生成が卓越する場合に特に有効である。
- 物理的・数学的条件の与え方が明確となる。
- レイノルズ数・プラントル数等の影響を適切に表現することが可能である。
- より低次のモデルへのフィードバックが可能である。

このような原理的な優位性から、現在の乱流モデル研究は主に2次の統計量であるレイノルズ応力や乱流熱流束の輸送方程式モデルに焦点が当てられている。

近年の乱流モデル研究は、上述の様な理由から輸送方程式モデルに対するものが中心となっているが、その中でも realizability, rapid distortion theory や material frame indifference 等の条件¹を課すことでモデルの精度向上及び適用範囲を広めることに大きな関心が払わ

¹付録A 参照。

れてきた。しかしながら、これらの手法は学術的には興味深いものの、モデルの普遍性向上に直接結びつく訳ではなく、工学的意味での性能（モデルの普遍性）向上には必ずしも有効ではないという報告が最近なされている（Murakami, Mochida & Ooka, 1993; Lien & Leschziner, 1993）。この理由としては、通常我々の扱う乱流場は常にそのような極限的状況に置かれている訳ではないということ、また特殊な状況での精度向上をはかるために第一次近似である基本形に付加した補正項が、他の異なる状況のもとで必ずしも好結果をもたらすとは限らないことが明かにされてきたこと等が挙げられる。さらに、複雑な表現は計算の安定性の上で非常にマイナスであることも指摘される。このようなことから、ごく最近ではこのような拘束条件を厳密にモデルに課すことを見直す動きが見られる。例えば、圧力・歪相関項の slow 項と rapid 項を分離せず、まとめてモデル化することで拘束条件を緩めることや（Jones & Musonge, 1988; 石井・河村, 1993）、ある拘束条件を敢えて無視すること（Speziale, Sarkar & Gatski, 1991）等が行われるようになってきた。このことは、図 1.2 に示す乱流モデルの工学的な意味での良否を判定するための3つの一般的な要素（大路, 1980）、即ち、精度が高いこと（信頼性）、適用範囲が広いこと（普遍性）及び表現が簡素で計算時間が短いこと（経済性）のバランスを考えるとより明白になる。特定の状況下での信頼性向上に研究の主眼を置くことは、一般にモデルの複雑さを招き、従って経済性の悪化につながる。また、これらの手法が期待されていたほどはモデルの普遍性向上につながらないこともその後の研究で明らかとなっており、この意味で乱流モデル研究は大きな岐路の立っていると言える。図 1.2 に示した3要素は相反する性格を持つため、全ての要素を満足させることは非常に困難である。現在の計算機的能力向上を考えると、このうち経済性に対する要請は今後益々小さくなっていくことが予想され、従って今後の乱流モデル研究は、特定の状況下で高精度な解を与えるためのモデルの特殊化と、任意の広い範囲の流れ場である程度の精度の解を与えるモデルの普遍化の2つを大きな柱として2極化し発展してゆくと予想される。

現在の乱流のモデリングが抱えている課題を具体的に列挙してみると、乱流熱流束輸送方程式モデルでは、次の3点が挙げられる。

- 速度場モデルの精度に強く依存する。

- プラントル数の異なる流体へ適用可能なモデルを構築するための手法が不明である。
- 非等方性の強い剪断乱流で破綻する。

第一点は、即ち、温度場のモデルは速度場の予測結果以上の精度では予測することができないということである。現在の速度場モデルはたとえ応力モデルであっても完璧なものは存在しないので、いたずらに精度の高い温度場モデルを用いても意味をなさないことになる。例えば、Launder (1993) は現時点での乱流モデルの精度では、速度場に応力モデルを用いたとしても、温度場モデルとしてはより単純な勾配拡散型モデルで十分であると述べている。このことは乱流モデルを利用する立場からは適切な指摘であると思われるが、本節の始めで述べたように乱流モデルを構築する場合、即ち、モデル条件を適切に与えることや、プラントル数やレイノルズ数の影響を考慮するためには、輸送方程式モデルを扱うことがやはり重要となる。第二の点は、我々が工学上多種のプラントル数流体を扱わねばならないという要請からのものである。例えば、高速増殖炉等の高熱流束除熱を必要とする分野においては低プラントル数流体である液体金属が冷却剤として用いられ、また、プラントル数の高い油等の熱伝達問題やシュミット数の高い流体の物質拡散を扱う場合にも多々遭遇する。プラントル数依存性を考慮したモデルは、乱流プラントル数モデルレベルでいくつか報告され¹⁾、温度場2方程式モデルによる円管内乱流を予測した報告もあるが(Nagano & Kim, 1988; 佐藤・長野, 1992)、本来これらのパラメータの影響は乱流熱流束輸送方程式モデルのレベルで考慮されるべき問題であると考えられる。輸送方程式モデルでのプラントル数依存性を表現したモデルは、低ベクレ数乱流を扱った Suzuki (1982a) や Kolovandin (1991) によるものが報告されている程度で、研究例が少なく未知点が多い。具体的には、モデル化の際に必要な時間スケールを決定する明確な指針がないことが主な課題となっている。速度変動と温度変動の相関量である乱流熱流束を特徴づける時間スケールとしては、速度場時間スケール k/ε 、温度場時間スケール $k_\theta/\varepsilon_\theta$ 、そして低プラントル数では $\sqrt{\alpha/\varepsilon}$ 等を考慮する必要があるといえる。これらの時間スケールは Pr 、 R 及び Re_t の三つのパラメータで関係づけられるが、次元解析のみではその影響をモデルに組み込むことが出来ないため、どのような手法を用いるかがモデル構築の際に大きな問題

¹⁾39 ページ参照

となる。既存の乱流熱流束モデルの多くは、基本的にレイノルズ応力輸送方程式モデルと同様のモデル化手法によって得られたものであり、従って、プラントル数が1に近い場合に対しては、この様なモデルの有効性がある程度は期待できるが、その他の流体に対しての有効性は不明である。温度場モデル第三の問題点は、温度圧力勾配相関項と乱流熱流束の2つのベクトルを単純な関係式で結びつけることができない点にある、このことは剪断乱流中において特に顕著となるが、この場合2つのベクトルの方向は一致せず、乱流熱流束の非等方向性が十分な精度では予測できない。

一方、レイノルズ応力輸送方程式モデルでは、

- Rotta モデル及び IP モデルで代表される基本形の特殊化については研究が進んでいるが、モデルの普遍化に対してはその具体的手法が明かではない。
- レイノルズ数依存性を適切に表現できていない。

等が挙げられる。第一の点は、厳しい拘束条件をモデルに課すことが結果としてモデルの自由度を奪い、必ずしもモデルの普遍性向上に有効ではないことが明かとなっている状況の中で、新たなアプローチが求められているということであり、先に述べた様に乱流モデル研究は大きな岐路に立たされていると言える。レイノルズ応力輸送方程式モデルの第二の問題点は、単一スケールを用いたモデル化の基礎となる高レイノルズ数の仮定(付録 A 参照)が、常に妥当であるとは言えないことである。近年の DNS や実験結果から、レイノルズ数効果は予想されていたよりもかなり高レイノルズ数域にまで及ぶことが明らかになってきた(例えば、Hallböck (1993) は $Re_\tau \sim O(10^3)$ のオーダーまでレイノルズ数依存性は残ると指摘している)。モデルの検証例として用いられる DNS や実験のレイノルズ数はおおよそ $Re_\tau \sim O(10^3)$ 以下であるので、この影響を無視することは出来ないとと言える。このように、普遍性の高いモデル構築にあたってはレイノルズ数依存性を適切にモデル化することも重要であると考えられる。

以上のような背景を踏まえ、本研究では乱流モデルの普遍性の向上、特に、既存の手法では表現することのできなかった物性値の異なる任意の流体に対して適用可能な乱流モデルを提案することをその主な目的とする。具体的には、乱流レイノルズ数 Re_τ 、プラントル数 Pr 及びタイムスケール比 R の三つのパラメータの影響を、適切かつ普遍的に表現

する乱流熱流束輸送方程式モデルを構築することを試みる。その際に、モデルの経済性を考慮し、可能な限り簡便なテンソル表現を用いることで、いたずらにモデルを複雑なものとしないう配慮する。続いて、レイノルズ数依存性を表現するレイノルズ応力輸送方程式モデルを提案し、温度場モデルとあわせ浮力の働く乱流場、特に密度成層乱流場への適用を試みる。以上のことは、モデル構築にあたり図 1.3 に示されるような従来のモデル化で採用されている手順ではなく図 1.4 に示した様な手順を踏むことを意味するが、これは各種パラメータの影響を表現するという本研究の目的からは適切なものと考えられる。それは、速度場モデルは2階のテンソル量であるので、1階のテンソル(ベクトル)量である温度場モデルでは不必要なテンソルの対称性やトレースに対する条件を考慮しなければならない、モデル化が非常に困難なためである。レイノルズ数やプラントル数等のパラメータは、変動量間の相関係数に強く影響を及ぼし(Tennekes & Lumley, 1972)、従ってこの相関係数の微妙な変化に注目したモデル化を行う際には、ベクトル量のモデリングの方が格段に容易となる。

本論文の構成は以下の通りである。まず、第2章で変動量の相関係数に対する乱流レイノルズ数 Re_t 、プラントル数 Pr 及びタイムスケール比 R の三つのパラメータの効果を考察することで、各パラメータの影響を表現する乱流熱流束輸送方程式モデルを構築する。その後、第3章でレイノルズ応力輸送方程式モデルに同様の手法を適用し、レイノルズ数依存性を表現するモデルを提案する。さらに第4章では、浮力効果をモデル中に組み込み、密度成層乱流へ適用し、上に挙げた各パラメータの影響を検証する。

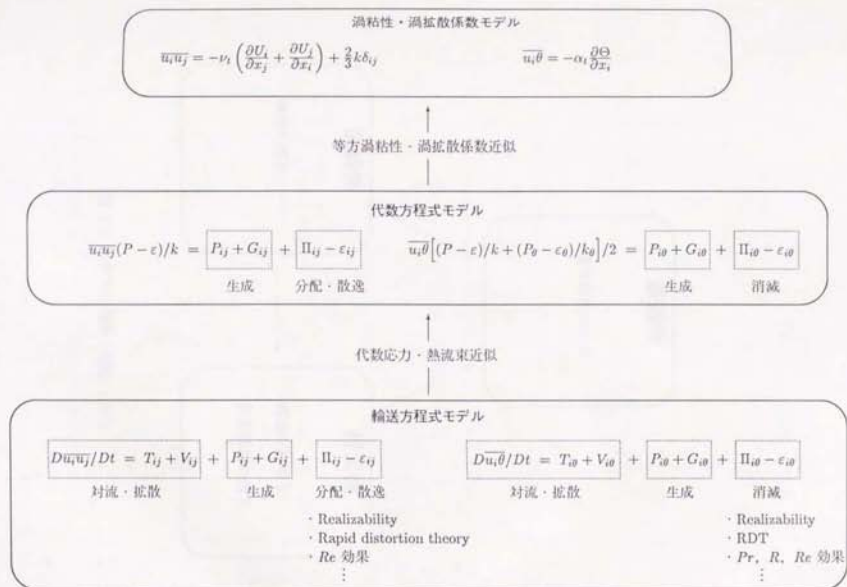


図 1.1: 乱流モデルの構成

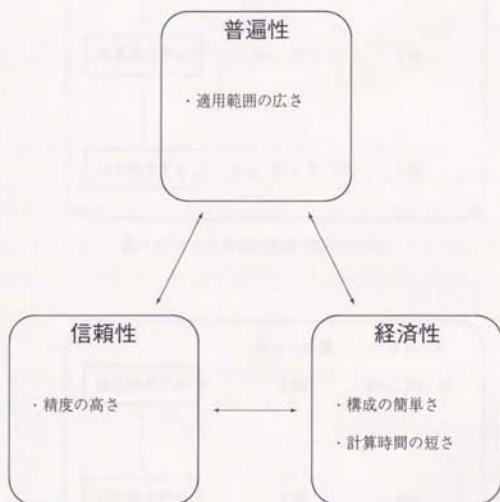


図 1.2: モデルの条件 (大路, 1980)

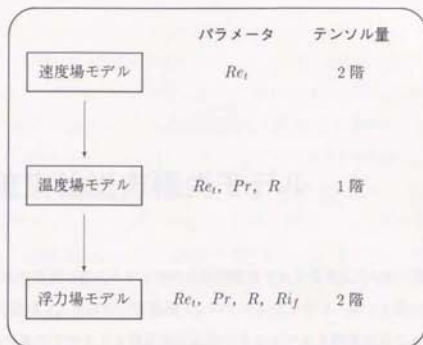


図 1.3: モデル構築の手順 (既存の手順)

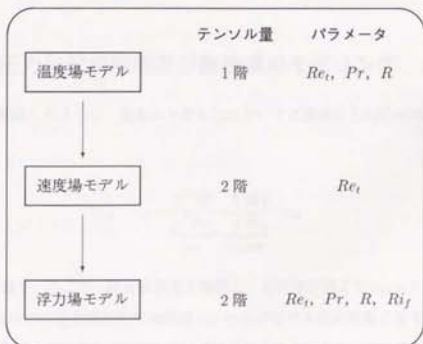


図 1.4: モデル構築の手順 (本研究での手順)

第2章

乱流熱流束輸送方程式モデル

本章では、乱流熱流束方程式モデル中の未知相関項である温度圧力勾配相関項 $\Pi_{i\theta}$ 、散逸項 $\varepsilon_{i\theta}$ 、乱流拡散項 $T_{i\theta}$ 及び分子拡散項 $V_{i\theta}$ のモデル化を行う。第1.3節で述べたように、本研究では任意のプラントル数流体に適用できるモデルを開発することを目的として、新たなモデル化手法を用いる。以下では、それぞれの項のモデル化について考察してゆく。なお、圧力変動項中の浮力の影響については第4章で述べる。

2.1 温度圧力勾配相関項及び散逸項のモデリング

第1.2.2節で解説したように、通常のモデル化においては温度圧力勾配相関項と散逸項の和に対して、

$$\Pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} = \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}}_{\phi_{i\theta}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta p}{\partial x_i}}_{\text{圧力拡散}} - \varepsilon_{i\theta} \quad (2.1)$$

のような分解を施す。ここで、圧力拡散項を無視し、局所等方性より $\varepsilon_{i\theta} = 0$ を仮定すると、(2.1)式右辺中では圧力温度勾配相関項 $\phi_{i\theta}$ のみがモデル化の対象となり、結果として、散逸の非等方性の効果はその中で陰的に表現されることになる。この手法は応力方程式モデルにおいては広く受け入れられているが、本来、温度圧力勾配相関項と散逸項は乱

流熱流束の異なった消滅機構を表現し、プラントル数やレイノルズ数に対する依存性も異なるので、両項を明確に分離せずにモデル化する立場は一般性に欠けると言える。例えば、DNS (Kasagi, Tomita & Kuroda, 1992; Kasagi & Ohtsubo, 1993) による両壁面より等熱流束加熱された平行平板間乱流温度場における壁面垂直方向乱流熱流束 $\overline{u_2\theta}$ の輸送方程式の収支を図 2.1 に示す。 $Pr = 0.71$ の場合は生成項と温度圧力勾配相関項がバランスしているが、 $Pr = 0.025$ の場合は温度圧力勾配相関項は非常に小さい値をとり、散逸項によって $\overline{u_2\theta}$ が消滅することがわかる。このような温度場を予測する際に、散逸項を無視し、圧力スカラー勾配相関項のみをモデル化することが不適切なことは明らかである。本研究では、広い適用性を有するより一般的なモデルを構築することを目的に、それぞれの項を独立にモデル化する。なお、本研究では圧力拡散は壁乱流等の特殊な場合を除いて無視できるものとし、圧力温度勾配相関項 $\phi_{p\theta}$ と温度圧力勾配相関項 $\Pi_{p\theta}$ とは基本的に等しいとしてモデル化を進める。

また、序論で述べたように乱流熱流束ベクトルと温度圧力勾配相関項ベクトルの対応が悪いことが、温度場モデリングを一層複雑なものとしている。図 2.2 に、平行平板乱流での乱流熱流束ベクトルと温度圧力勾配相関項ベクトルの 2 成分を示すが、壁近くでの剪断の強い領域での両ベクトルの分布は大きく異なっており、両者を関係づけることの困難さが伺える。最近では、Realizability 等の拘束条件をモデルに課し、複雑なモデル関数を用いることで、これらのベクトル間の関係式を与える研究が試みられている (Craft, 1991; Shih, 1986a)。しかしながら、平均スカラー勾配が平均速度勾配と異なる方向に存在する場合などを含めた一般的な場合に対しては、基本的なモデルと比較して、同等あるいはより劣った予測結果しか得られていない (Craft, 1991)。

本研究では、以下に示すように相関係数を導入することで、このような温度場のモデリングの困難さを克服することを試みる。

2.1.1 相関係数の導入

まず、温度圧力勾配相関項及び散逸項を次のように無次元化する。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x_{(i)}} \bigg/ \left[\frac{1}{\rho} \sqrt{\theta^2} \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x_{(i)}} \right)^2} \right] \quad (2.2)$$

$$(\nu + \alpha) \frac{\partial u_{(i)}}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \bigg/ \left[(\nu + \alpha) \sqrt{\left(\frac{\partial u_{(i)}}{\partial x_k} \right)^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_l} \right)^2} \right] \quad (2.3)$$

ここで、() 内の添字に関しては縮約をとらない。もし変動量間の相関が十分に高い場合には、これらの無次元量のオーダーは1となるが、変動量の微分量を含む相関は一般に低いことが知られている (Tennekes & Lumley, 1972)。図 2.3 に、エネルギースペクトル関数 $E(\kappa)$ 及び温度乱れスペクトル関数 $E_\theta(\kappa)$ を示すが、特に高波数域におけるスペクトルの分布形がプラントル数の影響を強く受けることがわかる。これは、高プラントル数流体では温度乱れは速度乱れよりもはるかに細かいスケールまで拡散せずに生き残り、逆に低プラントル数の場合は温度乱れが高波数領域に伝達される過程で分子拡散によって直ちに消滅するためである。上式中の u や θ は低波数域、即ち、大きなスケールのゆっくりとした運動に主に支配されるが、 $\partial p / \partial x_i$ や $\partial u_i / \partial x_j$ 、また $\partial \theta / \partial x_i$ はそれぞれ速度場及び温度場の変動量の微分値であるので、高波数域の細かく速いスケールに支配される。また、プラントル数が変化すると高波数でのスケールの相対的關係も大きく異なったものとなる。図 2.4 に温度場及び速度場の変動のスケールの違いによる分類を示すが、このような異スケールに支配される変動量は互いに相関を持たずに変動し、その相関係数は各スケール間の時間スケール比、即ち、レイノルズ数やプラントル数に強く依存しながら低下してゆく。図 2.3 に示されるスペクトル関数及び図 2.4 を眺めると、速度場と温度場の変動量間の相関を考える場合には、

- 低波数域の大きくゆっくりとしたスケールの速度 (温度) 変動と、高波数域の細かく短時間のスケールの温度 (速度) 変動の相対関係
- 高波数域における速度場と温度場のスペクトルのずれ

の2つの効果を考慮することが特に重要であると考えられる。従って、普遍的乱流モデルの構築の際には、これらの効果を表現する新たなパラメータの導入が最重要課題となる。

また、相関係数を用いることで(2.2)及び(2.3)両式に上限を与えることが出来るという利点もある。これは即ち、 Π_{ij} 及び ε_{ij} に対して一種の realizability 条件を課したことに相当し、従って、このような拘束を受ける相関係数を用いてモデル化を行えば、いかなるケースにおいても現実からかけ離れた結果は与えないことが期待される。それでは、以下にモデル化の手順を示す。

第1.2.2節(1.8)式から明らかなように、圧力変動は一樣乱流中では速度変動のみに由来する成分 p_s 、平均速度勾配に由来する成分 p_R 及び浮力に由来する成分 p_G の3つに分解される。

$$p = p_s + p_R + p_G \quad (2.4)$$

本章では、浮力効果を除く成分について考察を加える¹。(2.2)式中の圧力変動に対しても上述の分解を施し、 p_s と p_R に対応するそれぞれが乱流熱流束や生成項ベクトル等の関数であると仮定すると、

$$\frac{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x_{(i)}}}{\frac{1}{\rho} \sqrt{\overline{\theta^2}} \sqrt{\left(\frac{\partial p_s}{\partial x_{(i)}}\right)^2}} = C_{ns} f_{n1} f_{n2} f \left(\frac{\overline{u_{(i)} \theta}}{\sqrt{u_{(i)}^2} \sqrt{\overline{\theta^2}}}, \dots \right) \quad (2.5)$$

$$\frac{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_R}{\partial x_{(i)}}}{\frac{1}{\rho} \sqrt{\overline{\theta^2}} \sqrt{\left(\frac{\partial p_R}{\partial x_{(i)}}\right)^2}} = C_{nR} f_{n1} f_{n2} f \left(\frac{\overline{u_{(i)} \theta}}{\sqrt{u_{(i)}^2} \sqrt{\overline{\theta^2}}}, \frac{-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j}}{P \sqrt{k_\theta/k}}, \frac{-\overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}{P \sqrt{k_\theta/k}}, \dots \right) \quad (2.6)$$

となる。ここで、両式右辺中に現れる変数 $(\overline{u_i \theta} / \sqrt{u_i^2} \sqrt{\overline{\theta^2}}, \dots)$ は速度場と温度場の大スケールの変動間の相関を表現すると考えられるが、図2.4に示した相関の低下する他の2つ

¹浮力の効果については第4章を参照されたい。

の効果はこの変数のみでは表現できない。本研究ではこれらの効果、即ち、速度場と温度場の大スケールと小スケール間の相関、及び小スケールでの速度場と温度場の変動の相関のそれぞれの相関が低下する効果を f_{n1} 及び f_{n2} を用いて表現する。第一次近似として (2.5), (2.6) 両式右边が乱流熱流束の相関係数のみの関数であると仮定すると、両式をまとめてモデル化することが可能となる。また、無次元化した散逸 (2.3) 式に関しても同様に乱流熱流束の相関係数のみの関数であると仮定することで、以下の関係式が得られる。

$$\frac{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_{(i)}}}{\frac{1}{\rho} \sqrt{\theta^2} \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x_{(i)}}\right)^2}} = C_{n1} f_{n1} f_{n2} \frac{\overline{u_{(i)} \theta}}{\sqrt{u_{(i)}^2} \sqrt{\theta^2}} \quad (2.7)$$

$$\frac{(\nu + \alpha) \frac{\partial u_{(i)}}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}}{(\nu + \alpha) \sqrt{\left(\frac{\partial u_{(i)}}{\partial x_k}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_l}\right)^2}} = C_{\varepsilon} f_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 2} \frac{\overline{u_{(i)} \theta}}{\sqrt{u_{(i)}^2} \sqrt{\theta^2}} \quad (2.8)$$

ここで、

$$0 \leq f_{n1}, f_{n2}, f_{\varepsilon 1}, f_{\varepsilon 2} \leq 1$$

である。 f_{n1} 及び $f_{\varepsilon 1}$ は、レイノルズ数が大きくなるに伴い変動量のスペクトルが広域化し、高波数域の変動が等方的になることで相関が低下する影響を表し、 f_{n2} と $f_{\varepsilon 2}$ は、 $Pr < 1$ 又は $Pr > 1$ の場合、速度変動とスカラー変動のスペクトルが一般に高波数域で重なり合わないため、両者の相関が落ちることを表す修正関数である。また、 C_{n1} と C_{ε} はオーダーが1の定数である。(2.7), (2.8) 式の関係は座標依存性を示すものの、その両辺は任意のプラントル数流体の任意の流れ場に対して1を超過せず、従って如何なる状況においても破綻する可能性が低いと期待される。ただし、このままでは未知変数を含むためモデルとして用いることはできない。以下にそのモデル化の手順を示す。

(2.7), (2.8) 両式は圧力変動や微分量の rms 値等の未知数を含むため、これらを既知の変数を用いて表現する必要がある。圧力変動のオーダーは

$$\sqrt{p^2}/\rho = O(k) = C_p \cdot k \quad (2.9)$$

と見積られる。係数 C_p は、先に分解した p_S と p_R の両者の効果を含ませたものと解釈される。また、 $\Pi_{\theta\theta}$ が支配的な高レイノルズ数において、テンソル $\overline{p_{\alpha}p_{\beta}}$ は等方的になると仮定すると、次の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} \sim \frac{1}{3} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial p}{\partial x_k} \delta_{ij} \sim C_p^2 \frac{k^2}{\lambda^2} \delta_{ij} \quad (2.10)$$

ただし、 $\lambda (= \sqrt{10\nu k/\varepsilon})$ はテラースケールである。従って、(2.7) 式左辺分母中の $(1/\rho)\sqrt{(\partial p/\partial x_{(i)})^2}$ を

$$\frac{1}{\rho} \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x_{(i)}}\right)^2} \sim C_p \frac{k}{\sqrt{\nu k/\varepsilon}} \quad (2.11)$$

で置き換える。

一方、速度変動 u_i が瞬時の変動圧力勾配 $\partial p/\partial x_i$ によって駆動されると仮定すると、テンソル $\overline{p_{\alpha}p_{\beta}}$ はレイノルズ応力テンソル $\overline{u_i u_j}$ と関係づけられ、

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} \sim \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} \sim C_p^2 \frac{k^2}{\lambda^2} \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \quad (2.12)$$

となるので、(2.7) 式左辺分母中の $(1/\rho)\sqrt{(\partial p/\partial x_{(i)})^2}$ はこの場合次の様に書ける。

$$\frac{1}{\rho} \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x_{(i)}}\right)^2} \sim C_p \frac{k}{\sqrt{\nu k/\varepsilon}} \sqrt{\frac{\overline{u_{(i)}^2}}{k}} \quad (2.13)$$

(2.7) 式を (2.11), (2.13) の両関係式を用いて置き換えると、それぞれ、

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = C_0 f_{\Pi 1} f_{\Pi 2} \sqrt{k_\theta} \left(C_p \frac{k}{\sqrt{\nu k/\varepsilon}} \right) \frac{\overline{u_{(i)} \theta}}{\sqrt{u_{(i)}^2} \sqrt{2k_\theta}}$$

$$= C_{\Pi} f_{\Pi 1} f_{\Pi 2} C_P \sqrt{Re_i} \sqrt{\frac{k}{2u_{(i)}^2}} \frac{\varepsilon}{k} u_i \bar{\theta} \quad (\text{Model 1}) \quad (2.14)$$

$$-\frac{1}{\rho} \bar{\theta} \frac{\partial p}{\partial x_i} = C'_{\Pi} f_{\Pi 1} f_{\Pi 2} C_P \sqrt{Re_i} \frac{\varepsilon}{k} u_i \bar{\theta} \quad (\text{Model 2}) \quad (2.15)$$

となる。ここで、(2.14) 式で表現されるモデルを Model 1、(2.15) 式を Model 2 と呼ぶことにする。ただし、両モデルが一樣等方性乱流において同形となるように $C'_{\Pi} = \frac{\sqrt{3}}{2} C_{\Pi}$ と与える。また、式変形の際に現れる比例定数は C_{Π} に含ませた。

Model 1 は、第 2.1.3 節で示すように、壁乱流等の非等方性の強い剪断乱流において非常に望ましい性質を示すが、Model 1 は Model 2 とは異なり、座標回転に対する依存性を示す。詳しくは、付録 C を参照されたい。

散逸率に対しても同様なモデル化を行う。散逸が重要な役割を果たす低レイノルズ数で

$$\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\varepsilon}{2k} \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (2.16)$$

を仮定すると、(2.8) 式中の $\sqrt{(\partial u_{(i)}/\partial x_j)^2}$ は、次のように書ける。

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u_{(i)}}{\partial x_j}\right)^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}} \sqrt{\frac{u_{(i)}^2}{2k}} \quad (2.17)$$

従って、(2.8) 式は次式に置き換えられる。

$$\begin{aligned} (\nu + \alpha) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} &= C_\varepsilon f_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 2} (\nu + \alpha) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{u_i \bar{\theta}}{\sqrt{2k} \sqrt{2k_\theta}} \\ &= C_\varepsilon f_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 2} \frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{R} k} \bar{u}_i \bar{\theta} \end{aligned} \quad (2.18)$$

以下では、これらに含まれる修正関数 $f_{\Pi 1}$ 、 $f_{\Pi 2}$ 、 $f_{\varepsilon 1}$ 、 $f_{\varepsilon 2}$ 及び定数系を決定する。

2.1.2 修正関数の決定

修正関数を導入しない場合には、次に示す条件の下でモデルは非現実的な値を与える。具体的には、圧力拡散項が微小なこと、局所平衡及び局所等方性等の物理的条件を表現できない。このことを避ける為に修正関数を導入するが、以下に各物理的条件からの要請について考察する。

圧力拡散項の省略

圧力拡散項が省略できる場合には、スカラー圧力勾配相関項 ($\Pi_{i\theta}$) と圧力スカラー勾配相関項 ($\phi_{i\theta}$) は等しくなる。

$$\underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\Pi_{i\theta}} = \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}}_{\phi_{i\theta}} \quad (2.19)$$

この関係は一樣流に対しては厳密に成立し、また、非一樣流の場合でも局所平衡に近い状態では近似的に成立する。

圧力温度勾配相関項 $\phi_{i\theta}$ に関しても (2.14) 式と同様な手順でモデル化を行うことが可能である。(2.7) 式と同様に、 $\phi_{i\theta}$ を無次元化し乱流熱流束の相関係数と関係づける。

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x_{(i)}}}{\frac{1}{\rho} \sqrt{p^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_{(i)}}\right)^2}} = C_\theta f_{\phi 1} f_{\phi 2} \frac{\overline{u_{(i)} \theta}}{\sqrt{u_{(i)}^2} \sqrt{\theta^2}} \quad (2.20)$$

上式の分母に現れるテンソル $\overline{\theta_{,i} \theta_{,j}}$ が、高ベクレ数において等方的であると仮定すると、(2.17) 式と同様に

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_{(i)}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_\theta}{\alpha}} \quad (2.21)$$

が得られる。これを (2.20) 式に代入すると、最終的に Π_{θ} の Model 1 に相当するモデルとして次のような表現が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= C_{\phi} f_{\phi 1} f_{\phi 2} C_p k \sqrt{\frac{\varepsilon_{\theta}}{\alpha}} \frac{\overline{u_{(1)} \theta}}{\sqrt{u_{(1)}^2} \sqrt{2k_{\theta}}} \\ &= C_{\phi} f_{\phi 1} f_{\phi 2} C_p \sqrt{Re_t} \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \sqrt{\frac{k}{2u_{(1)}^2}} \frac{\varepsilon}{k} \frac{u_{(1)} \theta}{\theta}\end{aligned}\quad (2.22)$$

(2.14), (2.22) 両式の相違は、次式で示すように変動値の微分を特徴づける長さスケールとして速度場テラースケール ($\lambda = \sqrt{10\nu k/\varepsilon}$) とスカラー場テラースケール ($\lambda_{\theta} = \sqrt{12\alpha k_{\theta}/\varepsilon_{\theta}}$) のいずれを用いたかということに由来する。

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{or} \quad O\left(\frac{1}{\lambda_{\theta}}\right) \quad (2.23)$$

任意のレイノルズ数で (2.19) 式の関係が成り立つためには¹、高波数域における温度場と速度場のスペクトルの違いを表現する関数 (ここでは f_{n2} 及び $f_{\phi 2}$) によって (2.14), (2.22) 両式をバランスさせればよい。即ち、 f_{n2} と $f_{\phi 2}$ は次の不等式を満足する必要がある。

$$f_{n2} \leq \min \left[1, \frac{C_{\phi} \sqrt{Pr}}{C_n \sqrt{R}} \right] \quad (2.24)$$

$$f_{\phi 2} \leq \min \left[1, \frac{C_n \sqrt{R}}{C_{\phi} \sqrt{Pr}} \right] \quad (2.25)$$

これらは、 Π_{θ} 及び ϕ_{θ} 中に現れる変動値の微分を特徴づける長さスケールとして、 λ と λ_{θ} のうち大きい方、もしくはそれ以上のものを選択したことに相当する。従って、(2.24), (2.25) 両式の物理的意味は、“ Π_{θ} 及び ϕ_{θ} の相関係数は、高波数域での温度場と速度場のスペクトルが重なり合わない場合、少なくとも各テラースケールの比 λ/λ_{θ} に比例して減少する必要がある”ということである。

¹例えば、低レイノルズ数の場合 $f_{n1} \approx f_{\phi 1} \approx 1$ とおけるので、 f_{n1} と $f_{\phi 1}$ では (2.14), (2.22) 両式をバランスさせることはできない。

局所平衡の仮定

局所平衡が仮定できる場合には、乱流スカラー束の輸送方程式は次式のように簡略化される。

$$0 = P_{i\theta} + \Pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \quad (2.26)$$

ここで、 $\overline{u_i \theta} \sim \sqrt{k k_\theta}$, $\overline{u_i u_j} \sim k$, 並びに局所平衡 $P \sim \varepsilon$, $P_\theta \sim \varepsilon_\theta$ より $\partial U_i / \partial x_j \sim \varepsilon / k$, $\partial \Theta / \partial x_i \sim C_R \varepsilon_\theta / \sqrt{k k_\theta}$ を仮定すると、各項のオーダーは次のように見積られる。

$$P_{i\theta} = O\left(\frac{\varepsilon}{k} \sqrt{k k_\theta} \left[\frac{C_R}{R} + 1\right]\right) \quad (2.27)$$

$$\Pi_{i\theta} = O\left(\frac{\varepsilon}{k} \sqrt{k k_\theta} \left[\sqrt{Re_t f_{n1} f_{n2}}\right]\right) \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = O\left(\frac{\varepsilon}{k} \sqrt{k k_\theta} \left[\frac{1 + Pr}{\sqrt{Pr} \sqrt{R}} f_{c1} f_{c2}\right]\right) \quad (2.29)$$

次に、 Re_t , Pr 及び R の各パラメータがゼロから無限大の任意の値をとる場合に対して、 $\Pi_{i\theta}$ と $\varepsilon_{i\theta}$ が $P_{i\theta}$ を超過してはならないという条件を課す。即ち、

$$\sqrt{Re_t f_{n1} f_{n2}} \leq c' \left(\frac{C_R}{R} + 1\right) \quad (2.30)$$

$$\frac{1 + Pr}{\sqrt{Pr} \sqrt{R}} f_{c1} f_{c2} \leq c'' \left(\frac{C_R}{R} + 1\right) \quad (2.31)$$

を常に満足するように関数 f_{n1} , f_{n2} , f_{c1} 及び f_{c2} を決定する (c' 及び c'' はオーダーが1の定数)。例えば、レイノルズ数が無限大の場合に相関が低下しないと、 $\Pi_{i\theta} \gg P_{i\theta}$ という結果を与える。このことをスペクトルの広域化効果を表現する関数 (この場合 f_{n1}) を用いて回避する。即ち、高ペクレ数において

$$f_{n1} \propto r \equiv \frac{C_R/R + 1}{\sqrt{Re_t f_{n2}}} \quad (2.32)$$

となり、低ペクレ数の場合には $f_{\eta 1} = 1$ となる関数を導入する¹。ここで、 r は高波数域の速度場変動と低波数域の温度場変動の相関、あるいは低波数域の速度場変動と高波数域の温度場変動の相関を支配するパラメータであると考えられる。

最終形

本研究では、第 2.1.1 節で述べた相関係数の減少を支配する2つの効果を、それぞれ r 及びテラースケール比 $\sqrt{Pr/R}$ の2つのパラメータを用いて記述する。 $f_{\eta 1}$ と $f_{\varepsilon 1}$ を r の関数、 $f_{\eta 2}$ と $f_{\varepsilon 2}$ を $\sqrt{Pr/R}$ の関数とし、各関数が(2.24)、(2.30)及び(2.31)各式の要請を満足するように、以下のように与える。

$$f_{\eta 1} = f_{\varepsilon 1} = 1 - \exp(-10r) \quad (2.33)$$

$$f_{\eta 2} = \min \left[1, \frac{1}{1.2} \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \right] \quad (2.34)$$

$$f_{\varepsilon 2} = \min \left[6 \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}}, 1, \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{Pr}} \right] \quad (2.35)$$

ここで、

$$r \equiv \left(\frac{C_R}{R} + 1 \right) / \left(\sqrt{Re_\tau} f_{\eta 2} \right) \quad (2.36)$$

である。モデル関数中に現れる比例定数は、実験及びDNSの結果を再現するように最適化した。なお、 $f_{\varepsilon 1}$ は式(2.24)、(2.30)及び(2.31)の要請のみからでは決定することができないが、 $r \rightarrow 0$ の場合に局所等方性 $\varepsilon_{10} \rightarrow 0$ を満足するように $f_{\varepsilon 1} = f_{\eta 1}$ と与えた。これらを(2.14)、(2.15)及び(2.18)各式に代入することで、本報で提案するモデルの最終形を得る。

ここで、 $f_{\eta 1}$ 、 $f_{\varepsilon 1}$ 及び $f_{\eta 2}$ 、 $f_{\varepsilon 2}$ の物理的意味について考察してみる。まず、 λ と λ_θ とを速度スケール \sqrt{k} を用いて時間スケールに書き換えると

¹低ペクレ数の場合、乱れは低波数成分で支配されるので、変動量間の相関は低下しないと考えられる。

$$\sqrt{\frac{Pr}{R}} \propto \frac{\lambda/\sqrt{k}}{\lambda_\theta/\sqrt{k}} \propto \frac{\sqrt{\nu/\varepsilon}}{\sqrt{\nu/\varepsilon}\sqrt{R/Pr}} \quad (2.37)$$

となり、 $\sqrt{\nu/\varepsilon}$ はコルモゴロフ時間スケールであるから、 $\sqrt{Pr/R}$ は速度場と温度場の高波数域の細かい変動量の時間スケールの比と解釈することもできる。また、 r に関しては、

$$r = \frac{\max \left[\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}, 1.2 \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{R}{Pr}} \right]}{\frac{k}{\varepsilon} \left(1 + \frac{C_R}{R} \right)} = \frac{\max \left[\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}, 1.2 \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{R}{Pr}} \right]}{1 / \left(\frac{1}{k/\varepsilon} + \frac{C_R}{k_\theta/\varepsilon_\theta} \right)} \quad (2.38)$$

と変形されることから、これは、 k/ε と $k_\theta/\varepsilon_\theta$ の小さい方を低波数域の時間スケール τ_{low} とし、また $\sqrt{\nu/\varepsilon}$ と $\sqrt{\nu/\varepsilon}\sqrt{R/Pr}$ の大きい方を高波数域の時間スケール τ_{high} とした場合のそれぞれの波数域を特徴づける時間スケール比 $r = \tau_{high}/\tau_{low}$ であると解釈することができる。即ち、 f_{n1} 、 f_{c1} 及び f_{n2} 、 f_{c2} は、それぞれこの2つのタイムスケール比の関数となっており、これらは第2.1.1節で述べたように相関係数が各々の変動の時間スケールの比に比例して減少することを表現している。

定数は $C_n = -0.264$ 、 $C_\varepsilon = 0.8$ 、 $C_R = 0.7$ と最適化した。また、 C_p は圧力変動と乱れエネルギーを結び付ける比例定数であるが、一般に平均速度勾配が存在する場合にはこの係数は増加する傾向を示す。また、壁面近傍では乱れの生成が活発で非等方性も大きい。が、圧力変動は速度変動の様な鋭いピークを持たず、従って C_p をこの領域でダンピングさせる必要がある。本報では、 P/ε 及び応力の不変量を用いてこれらの影響を表現させることにし、以下の様にと与えた。

$$C_p = \sqrt{A} \left(0.8 + 0.3 \frac{P}{\varepsilon} \right) \quad (2.39)$$

一様等方性乱流、一様剪断乱流及び平行平板間乱流の DNS データ (それぞれ、飯田、笠木、1993a; 松本、長野、辻、1992; 黒田、1990) を用いて C_p と (2.39) 式との比較を行った結果を図2.5~2.7に示す¹。壁面ごく近傍を除いて (2.39) 式は上に述べた傾向を不十分ではあ

¹ 松本らの DNS では、計算中に計算格子を remesh しており、これが圧力変動の振動の一つの原因では

るが再現することがわかる。

2.1.3 アプリオリテスト

本節では、温度圧力勾配相関項 $\Pi_{i\theta}$ モデル¹¹及び散逸項 $\varepsilon_{i\theta}$ モデル¹²の評価を行うが、これは、各式の両辺に実験値または DNS データを直接代入し、そのバランスを見るという方法 (a priori test) で行う。直接数値シミュレーション (DNS) データを用いれば、 $\Pi_{i\theta}$ と $\varepsilon_{i\theta}$ とを個別に評価することが可能であるが¹³、実験の場合には両者の分離は困難なので、両者の和を以下のように無次元化して比較を行う。

$$\Pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta} = -C_{(1)} \frac{\varepsilon}{k} u_1 \theta \quad (2.40)$$

$$\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta} = -C_{(2)} \frac{\varepsilon}{k} u_2 \theta \quad (2.41)$$

$$\Pi_{3\theta} - \varepsilon_{3\theta} = -C_{(3)} \frac{\varepsilon}{k} u_3 \theta \quad (2.42)$$

ここで、無次元係数 $C_{(i)}$ は本モデルの場合、(2.14)、(2.15)、(2.18) 各式より次のように表現される。

$$C_{(i)} = 0.264 f_{\Pi 1} f_{\Pi 2} \sqrt{A} \left(0.8 + 0.3 \frac{Pr}{\varepsilon} \right) \sqrt{Re_t} \sqrt{\frac{k}{2u_{t(i)}^3}} \\ + 0.8 f_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 2} \frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}\sqrt{R}} \quad (\text{Model 1}) \quad (2.43)$$

$$C_{(i)} = 0.264 \frac{\sqrt{3}}{2} f_{\Pi 1} f_{\Pi 2} \sqrt{A} \left(0.8 + 0.3 \frac{Pr}{\varepsilon} \right) \sqrt{Re_t} \\ + 0.8 f_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 2} \frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}\sqrt{R}} \quad (\text{Model 2}) \quad (2.44)$$

ないかと考えられる。

¹¹Model 1 (2.14) 式及び Model 2 (2.15) 式。

¹²(2.18) 式

対象とする温度場は、一定の平均温度勾配が存在する一様等方性乱流、一様異方性乱流及び一様剪断乱流である。さらに、壁乱流への適用を考慮して等熱流束加熱された平行平板間乱流もとりあげる。

一様等方性乱流

まず、 x_2 方向にのみ平均スカラー勾配が存在する一様等方性乱流でモデルの精度を評価する。この場合、乱流熱流束成分のうち $\overline{u_2\theta}$ のみが発生し、従って、 $\Pi_{2\theta}$ 及び $\varepsilon_{2\theta}$ のモデルが検討の対象となる。なお、一様等方性乱流の場合、Model 1 と Model 2 は同形となる。取り上げたデータは、飯田 (1992) 及び飯田・笠木 (1993a) の DNS データ、Sirivat & Warhaft (1983) 並びに前川・小林 (1977) による実験データである。それぞれ、プラントル数 (Pr)、タイムスケール比 (R) 及びレイノルズ数 (Re_t) の影響に注目して行われたシミュレーション及び実験である。なお実験の場合には、 ε 及び ε_θ はそれぞれ k 及び k_θ の輸送方程式の残差より求めた。

まず、プラントル数の影響を見るために飯田 (1992) 及び飯田・笠木 (1993a) のデータとの比較を行う。なお、無次元化は DNS の立方体計算領域辺長の $1/2\pi$ を代表長さ L_r にとり、代表速度 $q_r (\equiv 300\nu/L_r)$ 及び代表温度 $\theta_r (\equiv -L_r d\Theta/dx_2)$ を用いて行った。図 2.8 に、スカラー束の消滅項としての $\Pi_{2\theta}$ と $\varepsilon_{2\theta}$ の時間変化を、 $Pr = 0.025$ 及び 0.71 の場合に対して示す。 $Pr = 0.025$ の場合には $-\varepsilon_{2\theta}$ が卓越し、 $Pr = 0.71$ の場合は $\Pi_{2\theta}$ と $-\varepsilon_{2\theta}$ とがほぼ同じ値をとる様子がモデルによっても良好に再現されている。図 2.9 には、時刻 $t = 3.0$ における係数 $C_{(2)}$ のプラントル数依存性を Basic モデル (12ページ (1.29) 式で $c_{1\theta} = 3.0$)、Shih らのモデル ((1.30) 式) 及び Craft モデル (14ページ (1.33) 式) の結果とともに示す。Basic モデル以外は、低プラントル数で大きな値をとり、高プラントル数で一定値に漸近する傾向をとらえているが、Shih ら及び Craft のモデルは、低プラントル数での $C_{(2)}$ の増加傾向が DNS に比べ小さい¹。

次に、 $C_{(2)}$ の乱流レイノルズ数依存性を図 2.10 に示す。 $C_{(2)}$ は時間に対する依存性が

¹低プラントル数における $C_{(2)}$ の増加は高レイノルズ数の場合は抑制されると考えられるので、その場合には彼らのモデルの予測結果は妥当なものと言える。

弱い、図には実験の行われた全ての時間における値を表示してある。実験結果より、 $C_{(2)}$ はレイノルズ数とともに増加するが、この傾向は本モデルによってのみ再現されている。これは、 Π_{θ} モデル中に $\sqrt{Re_t}$ が乗じてあるためである。

また、 $C_{(2)}$ のタイムスケール比依存性を図 2.10 に示すが、図中白ぬきの記号は初期レイノルズ数が低い実験結果を示し ($x/M = 100$ で $Re_t \approx 90$)、塗りつぶされた記号はレイノルズ数が高いケースに対応する ($x/M = 100$ で $Re_t \approx 160$)。Basic モデル以外は R 依存性を良好に表現しているが、本モデルはこの微妙なレイノルズ数依存性を再現している。

一様異方性乱流

ここでは、Iida & Kasagi (1993b) の DNS データを用いた検証を行う。流れ場は、 $\overline{u_3^2} > \overline{u_1^2} = \overline{u_2^2}$ 及び $\overline{u_3^3} < \overline{u_1^3} = \overline{u_2^3}$ の 2 種類の軸対称乱流場であり、ともに x_2 方向に平均温度勾配が存在している。図 2.12 に前節で挙げた本モデルを含む 4 つのモデルによる $C_{(2)}$ の予測結果を示す。本モデル及び Shih らのモデルの結果は良好であるが、Basic モデル及び Craft モデルは両ケースで $C_{(2)}$ を過大評価している。特に Craft モデルは乱流場の非等方性に過度に依存した結果を示し、これは主にモデル中での平均温度勾配を含む項に原因があると考えられる¹。一方、Basic モデルが DNS に比べ大きな値を与えてしまうのは、レイノルズ数が小さいことが主な原因であると考えられる。

DNS の結果では、 $\overline{u_3^2} > \overline{u_1^2} = \overline{u_2^2}$ の場合に $C_{(2)}$ が大きく、逆に $\overline{u_3^2} < \overline{u_1^2} = \overline{u_2^2}$ の場合に小さくなる傾向を示している。Model 1 はこの傾向を非常によく再現しているが、Model 2 ではやや不十分である。なお、この傾向は 13 ページ (1.32) 式で示される高次のモデルを用いても表現出来ることが知られている (前川・小林・沢井・佐藤, 1979)。

¹(1.33) 式中の $-0.2\sqrt{A}a_{22}k\partial\theta/\partial x_2$ は、Case (a) の場合は $\overline{u_2^2}$ 式の sink、Case (b) の場合は source として働く。

一様剪断乱流

本節では、まず Tavoularis & Corrsin (1981) の実験を取り上げる。強い平均剪断 dU_1/dx_2 と同方向に一定の平均温度勾配 $d\Theta/dx_2$ が存在するケースである。13ページで解説したように、この温度場を予測することは非常に困難とされてきたが、近年それを克服しようとする試みがいくつかなされている。この場合、乱流熱流束成分は平均温度勾配の方向 $\overline{u_2\theta}$ のみならず流れ方向 $\overline{u_1\theta}$ にも存在するので、(2.40), (2.41) 両式より $C_{(1)}$, $C_{(2)}$ が定義される。図 2.13 に実験値及びモデルによる予測値を表示した。実験結果から $C_{(1)} = 5.0 \sim 5.5$, $C_{(2)} = 8.0 \sim 9.0$ であることがわかるが、両成分に対してこれだけ異なる係数を与える必要があることが、この問題の予測を困難なものとした最大の原因である。Model 2, Basic モデル及び Shih のモデルは、 $C_{(2)}$ が過小評価されるという既存のモデルの典型的な傾向を示しているが、Model 1 及び Craft モデルの結果には大きな改善が見られる。ただし、両者のモデル化手法は大きく異なる。Craft モデルでは Jones & Musonge (1983) にならい、圧力温度勾配相関項に平均温度勾配を含む項を導入することで上述の欠陥を克服しているが、本 model 1 では相関係数ベクトルを用いることでこの問題を克服している。この問題に限っては、平均温度勾配に比例する項の導入等、より複雑な関数形の採用によって解決することが可能であると考えられるが、例えば一様異方性乱流場でのテストにおいてその方法が破綻したように、モデルの広い適用性を失わずにこれを遂行することは極めて困難であると思える。

次に、Rogers, Moin & Reynolds (1986) の DNS データを用いた検証を行う。Rogers らは、一様剪断乱流場 (dU_1/dx_2) に平均温度勾配が x_1 , x_2 , x_3 の各方向に存在する3つのケース (それぞれ Case 1, 2, 3) に対してシミュレーションを行っており、これはモデルの一般性を検証する恰好のテストケースであるといえる。図 2.14～図 2.16 に $\Pi_{i\theta}$ 及び $\varepsilon_{i\theta}$ の時間変化をそれぞれのケースに対して示す。Model 1, Model 2 ともに Case 1 の $\varepsilon_{2\theta}$ の符号が逆であること、及び Case 2 の $\Pi_{1\theta}$ が若干小さいことを除いて良好な予測結果が得られている。なお、時間とともに $\Pi_{i\theta}$ が支配的となる挙動が十分に表現できているが、これは Re_τ 依存性が適切に組み込まれたためであるといえる。また、表 2.1 に無次元時間 $S \cdot t = 12$ における $C_{(i)}$ の値を示した。Model 1, Model 2 とも、全てのケースに対しは

表 2.1: 無次元時間 $S \cdot t = 12$ における $C_{(i)}$ の値

	Case 1		Case 2		Case 3
	$C_{(1)}$	$C_{(2)}$	$C_{(1)}$	$C_{(2)}$	$C_{(3)}$
DNS (Rogers et al.)	2.71	2.98	3.35	4.04	3.72
Present Model 1	2.96	4.54	2.76	4.22	3.89
Present Model 2	3.51	3.51	3.27	3.27	3.64
Basic Model	3.52	3.00	4.08	3.00	3.00
Craft Model	4.51	-0.88	4.54	3.77	5.18
Shih et al. Model	2.75	-0.63	3.56	0.82	1.97

は妥当な結果を与えている。Craft 及び Shih らのモデルの rapid 項は realizability を満足するようにモデル化されたものであり、全てのケースではほぼ同じ値を示したが、slow 項と符号が逆になる場合が存在した。そのような状況では互いが打ち消し合い、両者の微妙なバランスによって結果が左右される。Case 1 の $C_{(2)}$ は、両項のバランスが崩れモデルが破綻した例である。全体的にみて、本モデルや Basic モデルのように項数が少ない単純なモデルの方が、広い流れに適用する際には破綻を生じることなく robust であると言える。

発達した平行平板間乱流

ここでは、十分に発達した平行平板間乱流の DNS データ ($u_\tau \delta / \nu = 150$) による検証を行う。このテストケースは工学的に重要な壁乱流への本モデルの適用可能性を探るうえで意義深い。ここで用いる DNS データは、 $Pr = 0.71$ (Kasagi, Tomita & Kuroda, 1992) 及び $Pr = 0.025$ (Kasagi & Ohtsubo, 1993) の二種類の流体に対するものであり、従って、強い平均剪断とプラントル数の影響を評価することが可能である。図 2.17 に $Pr = 0.71$ の場合の Π_{ij}^+ 及び ε_{ij}^+ 分布を示す。Model 1 の場合、 Π_{ij}^+ と $-\varepsilon_{ij}^+$ の大小関係が $y^+ \approx 50$ で入れ替わる様子や、壁面ごく近傍以外の全領域で Π_{23}^+ が $-\varepsilon_{23}^+$ よりも支配的であること

など、大きく値の異なる $\overline{u_1\theta}$, $\overline{u_2\theta}$ の各々の乱流スカラー束に関わる消滅項の挙動が良好に予測されている。一方、Model 2 では $\Pi_{1\theta}$ は過大評価され、逆に $\Pi_{2\theta}$ は過小評価されている。実際の使用においては非常に強い壁面補正が必要となるであろう。また、図 2.18 には $Pr = 0.025$ の場合の $\Pi_{1\theta}^+$ 及び $\varepsilon_{1\theta}^+$ 分布を示す。この場合は $-\varepsilon_{1\theta}^+$ が卓越し、 $\Pi_{1\theta}^+$ は非常に小さい値をとる特異な様子が再現されている。なお、ここに示した結果は、通常この種のモデルに導入される壁面補正を全く用いずに得られたもので、従って、壁面乱流に実際に適用する場合にも、Model 1 は比較的軽微な補正を行えば十分な予測が可能であるといえる。

以上、各流れ場で検証してきたように、Model 1 は剪断乱流において非常に良好な結果を与える。ただし、このモデルは付録 C で示すように、座標変換に対する不変性を満足しない。しかしながら、壁乱流を含む広い流れ場で用いることが可能であるという性質は、工学的には大きな魅力であると言える。どちらのモデルが有利であるかという問題は、扱う流れ場や目的によって異なるであろうが、これ以降では Model 1 を $\Pi_{i\theta}$ のモデル式として採用し、Model 1 による予測結果のみを示す。

2.2 乱流拡散項のモデリング

続いて、本節では乱流拡散項 $T_{i\theta}$ のモデル化を行うが、ここでは、最も簡単な generalized gradient diffusion hypothesis (GGDH) モデルを用いる。

$$-u_k\phi = c_\phi \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (2.45)$$

$T_{i\theta}$ にこのモデルを適用すると、

$$T_{i\theta} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\theta 1} f_R \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_j} \right) \quad (2.46)$$

となる。ただし、 f_R はタイムスケール比 R の関数であり、以下のように渦拡散係数モデルより決定する (鹿岡・笠木, 1991b)。

平均温度勾配が平均速度勾配と同方向に存在する二次元剪断乱流を考える ($\partial U_1 / \partial x_2 \neq 0$, $\partial \Theta / \partial x_2 \neq 0$). 局所平衡がおよそ仮定できる場合には, モデル化された輸送方程式は (2.15), (2.18) 両式を用いて,

$$0 = -\overline{u_2^2} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + C'_n f_{n1} f_{n2} C_p \sqrt{Re_t} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_2 \theta} - C_t f_{t1} f_{t2} \frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}\sqrt{R}} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_2 \theta} \quad (2.47)$$

と書ける. さらに変形して

$$-\overline{u_2 \theta} = \frac{1}{-C'_n f_{n1} f_{n2} C_p \sqrt{Re_t} + C_t f_{t1} f_{t2} \frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}\sqrt{R}}} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_2^2} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} \quad (2.48)$$

となる. 高ペクレ数の場合 ($r \rightarrow \infty$) 上式は次のように書ける.

$$-\overline{u_2 \theta} = \frac{1}{-10 C'_n C_p \left(\frac{C_R}{R} + 1 \right)} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_2^2} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} \quad (2.49)$$

(2.49) 式より, 本モデルより導かれる乱流プラントル数は,

$$Pr_t \propto C_p \left(\frac{C_R}{R} + 1 \right) \quad (2.50)$$

のように与えられることがわかる. 従来の温度場2方程式モデルでは R のべき乗を含む関数が採用されていたが¹⁾, (2.50) 式では各タイムスケールの調和平均が用いられている点が注目される. ここで, P/ε 及び A (即ち, C_p) を一定, また三重相関項も乱流熱流束と同様なタイムスケール比依存性を示すと仮定すると, (2.45), (2.46) 両式より, f_R としては次の関数が適当であると考えられる.

$$f_R = \frac{2}{\left(\frac{C_R}{R} + 1 \right)} \quad (2.51)$$

¹⁾40ページ参照.

本研究では (2.51) 式を用い, タイムスケール比の影響を表現する. この関数は, 時間スケール k/ε と k_0/ε_0 のうち小さい方を選択する表現となっており, これは経験的に推奨されている知見 (Launder, 1984a) と合致する.

なお, 定数は $C_{\theta 1} = 0.3$ と最適化した.

2.3 分子拡散項のモデリング

乱流熱流束方程式中の分子拡散項 $V_{i\theta}$ は未知相関項を含んでおり, モデル化が必要である.

分子拡散項は次のように変形されるが,

$$\begin{aligned} V_{i\theta} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \overline{\theta \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \alpha u_i \overline{\frac{\partial \theta}{\partial x_j}} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{(\alpha + \nu)}{2} \overline{\frac{\partial u_i \theta}{\partial x_k}} + \frac{(\alpha - \nu)}{2} \left\{ u_i \overline{\frac{\partial \theta}{\partial x_k}} - \theta \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

プラントル数が1に近い場合, もしくはプラントル数が1から大きく異なっても $\overline{u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_k}} \approx \theta \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}$ の場合には, 上式右辺第二項は無視することができる,

$$V_{i\theta} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{(\alpha + \nu)}{2} \overline{\frac{\partial u_i \theta}{\partial x_k}} \right] \quad (2.53)$$

が得られる. 本研究では上式を分子拡散項モデルの基本形として用いるが, これは分子拡散項が支配的になる壁近傍での壁面漸近挙動は満足していない. 壁面漸近挙動を満足するモデルについては第2.7.1節で述べる.

2.4 k_θ 方程式のモデリング

スカラー変動分散値 k_θ 方程式は次式で与えられる。

$$\frac{Dk_\theta}{Dt} = \alpha \frac{\partial^2 k_\theta}{\partial x_i^2} + T_\theta + P_\theta - \varepsilon_\theta \quad (2.54)$$

ここで、 $P_\theta = -\overline{u_i \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$ であり、 T_θ は乱流拡散項である。 T_θ に関しては (2.46) 式と同様に以下の様にモデル化する。

$$T_\theta = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\theta 2} f_R \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_j u_k} \frac{\partial k_\theta}{\partial x_j} \right) \quad (2.55)$$

$C_{\theta 2} = 0.3$ とし、また T_θ にも R の影響を含ませ、(2.51) 式で与えられる f_R を用いた。

2.5 ε_θ 方程式のモデリング

ε_θ 方程式のモデル化の困難な点は、1.2.4節でも解説したように、どの時間スケールを用いるかについて未知な点が多いことである。 ε_θ の輸送方程式中の各項は次元的に [長さ³×温度/時間³] であるので、 P_θ 及び ε_θ を時間スケールで除すればモデル方程式の source 項が得られることになる。ここで、時間スケールとして次の4つを考えると、

$$\frac{k_\theta}{P_\theta}, \quad \frac{k}{P}, \quad \frac{k_\theta}{\varepsilon_\theta}, \quad \frac{k}{\varepsilon}$$

ε_θ 方程式の source 項としては

$$\frac{P_\theta}{k_\theta} P_\theta, \quad \frac{P}{k} P_\theta, \quad \frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} P_\theta, \quad \frac{\varepsilon}{k} P_\theta, \quad \frac{P}{k} \varepsilon_\theta, \quad \frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} \varepsilon_\theta, \quad \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon_\theta$$

の7つが考えられる。平均速度勾配も平均温度勾配もともに存在しない場合には、上の7つの項のうち最終2項が残る。この2つを用いると (1.126) 式のモデルが得られる。問題と

なるのは、 $P \neq 0$ 及び $P_\theta \neq 0$ の場合で、 P または P_θ を含む項のうちどれを省略するか、あるいは全て残すか等について、現在の所明確な論拠が存在しない。例えば、Newman, Launder & Lumley (1981) 及び Elghobashi & Launder (1983) は $\frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} P_\theta$ のみを用い、Jones & Musonge (1988) は $\frac{\varepsilon}{k} P_\theta$ と $\frac{P}{k} \varepsilon_\theta$ 、Nagano & Kim (1988) は $\frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} P_\theta$ と $\frac{P}{k} \varepsilon_\theta$ を用いている。さらに、上述の7つの項にタイムスケール比 R の関数を乗じた項まで含めれば、無数の組合せが存在する。Craft (1991) は $R \frac{\varepsilon}{k} P_\theta$ と $R \frac{P}{k} \varepsilon_\theta$ という組合せを用いている。

しかしながら、無制限にどの項を用いてもよいかと言えば、必ずしもそうではない。広いプラントル数流体に適用可能なモデルを考えると、以下に述べる事柄は少なくとも満足することが望ましい。局所平衡が成り立つ場合 ($P \approx \varepsilon$, $P_\theta \approx \varepsilon_\theta$)、 P または P_θ を含む5つの項はオーダー評価より大きく2つに分類される。

$$\frac{P_\theta}{k_\theta} P_\theta, \frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} P_\theta = O\left(\frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} \varepsilon_\theta\right) \quad (2.56)$$

$$\frac{P}{k} P_\theta, \frac{\varepsilon}{k} P_\theta, \frac{P}{k} \varepsilon_\theta = O\left(\frac{\varepsilon}{k} \varepsilon_\theta\right) \quad (2.57)$$

ε_θ 方程式の sink 項に (1.126) 式のモデルを用いる場合、sink 項のオーダーは $O(\varepsilon_\theta^2/k_\theta)$ 及び $O(\varepsilon_\theta/k)$ となるので、 ε_θ 方程式も局所平衡条件を満足するためには、source 項もこれらと同じオーダーとなっていることが望ましい。従って、(2.56) 式及び (2.57) 式中からそれぞれ少なくとも1つずつ項を選ぶ必要がある。本研究では、Nagano & Kim (1988) と同様に $\frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} P_\theta$ と $\frac{P}{k} \varepsilon_\theta$ を用いることにする。これは見方を変えれば、 ε_θ を k_θ/P_θ , P/k , $\varepsilon_\theta/k_\theta$ 及び ε/k の4つの時間スケールで除した項を用いたモデル化と言うこともでき、従って、この4つの時間スケールによって現象が整理できる場合は妥当な結果を与えることが予想される。最終的に、モデルとして

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = & \alpha \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x_i^2} + T_{\varepsilon_\theta} \\ & + C_{P1} \frac{P_\theta}{k_\theta} \varepsilon_\theta + C_{P2} \frac{P}{k} \varepsilon_\theta - C_{D1} \frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} \varepsilon_\theta - C_{D2} \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon_\theta \end{aligned} \quad (2.58)$$

を得る。定数は一様等方性乱流、一様剪断乱流及びチャネル乱流で好結果を与えるよう

に, $C_{P1} = 0.8$, $C_{P2} = 0.3$, $C_{D1} = 1.0$ 及び $C_{D2} = 0.3$ と決定した.

また, T_{ts} は乱流拡散項であるが, ここでも GGDH モデルを用いる.

$$T_{ts} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{g3} f_R \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_j \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} \right) \quad (2.59)$$

ここで, $C_{g3} = 0.3$ とした. また, f_R は (2.51) 式で与えられる.

2.6 一様乱流温度場への適用

本節ではこれまでに示したモデルを一様乱流温度場に適用し, その有効性を検証する. 取り上げるのは, 減衰過程にある一様等方性乱流及び一様異方性乱流, 一様剪断乱流であり, それぞれ一定の平均温度勾配が存在している. 計算は, 速度場データ (U_i , $\bar{u}_i \bar{u}_j$, ε) として実験値または DNS データを与え, 温度場諸量 (Θ , $\bar{u}_i \bar{\theta}$, k_θ , ε_θ) の方程式のみを解く. 従って, 予測結果の成否は全て温度場のモデリングに依存する. なお, 本研究では強い剪断を伴う乱流場への適用を考えているので, これ以降では Model 1 の結果のみを示す.

数値計算は, 陽解法を用いて時間または流れ方向に積分を行ったが, 時間刻み (もしくは流れ方向格子間隔) を十分に細かく設定することにより, 計算結果にその影響のないことを確認している.

2.6.1 一様等方性乱流

ここでは本モデル, 及び比較のため Shih, Lumley & Chen モデル^{†1} 及び Craft モデル^{††} による予測結果を示す. これらのモデルは全て $\bar{u}_i \bar{\theta}$ の他に k_θ 及び ε_θ を解く必要があり, 現在のところスカラー場モデルとしては最も高次レベルのモデルであると言える. 検証の

^{†1}12ページ (1.30) 式, 19ページ (1.57) 式, 及び 36ページ (1.134) 式.

^{††}14ページ (1.33) 式, 20ページ (1.59) 式, 及び 36ページ (1.135) 式.

対象は63ページで示したのと同様に、ある一方向に一定の平均スカラー勾配が存在する一様等方性乱流である。

まず、図 2.19 に飯田 (1992) 及び飯田・笠木 (1993a) の DNS データとの比較結果を示す。プラントル数の異なる3つのケースに対して本モデルは良好な予測結果を与えている。Shih ら及び Craft のモデルは、プラントル数が変化しても同一の値に漸近する傾向を示し、プラントル数依存性が十分に表現できていない。88ページ図 2.9 に示したように、これらの圧力スカラー勾配相関項モデルはプラントル数依存性を弱いながらも若干は示しているので、ここでの不十分な予測結果の原因は主に ε_θ 方程式の不備であると考えられる。

続いて、図 2.20 に前川・小林 (1977) の実験データとの比較を示す。彼らの格子乱流実験では、格子直径 d と格子間隔 M との比を変えることにより、初期の乱れのレイノルズ数を変化させている。例えば $d/M = 0.3$ の場合、初期乱流レイノルズ数はおよそ $Re_t^{\text{init}} \approx 330$ であり、 $d/M = 0.15$ の場合、 $Re_t^{\text{init}} \approx 100$ である。本モデルは4つのレイノルズ数に対して良好な結果を与えているが、Craft 及び Shih らのモデルは88ページ図 2.10 より明らかに、特に高レイノルズ数で予測精度が悪い。

最後に、Sirivat & Warhaft (1983) の実験結果との比較結果を図 2.21 に示す。どのモデルによってもおよそ妥当な結果が得られているが、平均スカラー勾配が大きいケースで Craft モデルは結果を過大評価する。これも主に ε_θ 方程式によるものと考えられる。

2.6.2 一様異方性乱流

ここでは、減衰過程にある一様軸対称乱流場において、前節で取り上げた3つのモデルの他に Basic モデル¹⁾及び Jones & Musonge モデル¹¹⁾の計5つのモデルの検証を行う。Iida & Kasagi (1993b) の DNS データを比較の対象とするが、ケース (a) は $\overline{u_3^2}$ 成分が他の2成分に比べ卓越する軸対称乱流場であり、ケース (b) は逆に $\overline{u_3^2}$ が小さい場合である。そ

¹⁾12ページ (1.29) 式で $c_{1\theta} = 3.0$ としたものと、及び17ページ (1.50) 式。

¹¹⁾21ページ (1.62) 式。

それぞれのケースにおいて平均温度勾配は x_2 又は x_3 方向に存在している。図 2.22 に乱流熱流束の時間変化を示す。本モデル以外の全てのモデルは、全てのケースにおいて $u_i \bar{\theta}$ の減衰率が大きく、破綻している。90ページ図 2.12 を見ると、本モデルと Shih らのモデルのみが圧力相関項に対して良好な結果を与えており、上述の結果を裏付けている。Shih らのモデルがここで破綻したのは、 ε_θ 方程式の精度が不十分なためと考えられる。

Shih らのモデルを含めて既存のモデルは、主として剪断乱流を対象に構築されている。一般的に剪断乱流中では、一様等方性乱流中に比べ乱流熱流束消滅項のモデル定数を大きく与える必要があることが知られており、従って、既存のモデルが全て本流れ場で破綻した主な原因は、平均剪断とは無関係に与えられた応力非等方性がモデル中で剪断乱流中のように作用したためであると考えられる。

2.6.3 一様剪断乱流

本節では、一定の平均速度勾配 $\partial U_1 / \partial x_2$ が存在する一様剪断乱流を取り上げる。ここでも前節で取り上げた5つのモデルを検証する。

まず、Tavoularis & Corrsin (1981) の実験データによる検証を行うが、この実験は平均スカラー勾配と平均速度勾配が同方向に存在する場合のものである。既存の多くの乱流モデルでは、乱流熱流束の両成分の比 $(-\overline{u_1 \bar{\theta}} / \overline{u_2 \bar{\theta}})$ が小さく予測され、十分良好な結果を得ることが困難であった。図 2.23 に $\overline{u_i \bar{\theta}}$ の流れ方向変化を示すが、本モデル、Craft モデル及び Jones & Musonge モデルと実験との一致は良好である。Craft モデル及び Jones & Musonge モデルでは、圧力温度勾配相関項に平均温度勾配を含む項を取り入れることで上述の欠陥を克服しているが、本モデルの場合は、相関係数ベクトルの導入によってこの問題を解消している点特徴である。

次に Rogers, Moin & Reynolds (1986) の DNS データによる検証を行う。彼らは平均スカラー勾配が3つの各直交方向に存在する場合に対して DNS を行っており、図 2.24～図 2.26 に本モデルを含む5つのモデルによる予測結果を示す。本モデルの結果は良好であり、また Basic モデルも全てのケースに対してほぼ妥当な結果を与えている。これに対

し、より複雑な関数形を採用している他のモデルでは、いずれかのケースで破綻している。この原因として、これらのモデルが主に平均速度勾配と平均スカラー勾配が平行な場合のみを想定して構築されていることが第一に挙げられるが、これは一方で、モデルの項数を増加させて多くの拘束条件を課す手法が、必ずしもモデルの普遍性向上には結び付かない事を暗示している。

2.7 壁面乱流温度場への適用

壁乱流におけるスカラー輸送のモデル化で著しい困難を伴うのは、高プラントル数流体を扱う場合である。この場合、壁面ごく近傍の乱流スカラー場の予測が熱伝達率などの予測結果を大きく左右し、従って精度を保つための特別な補正が必要となる。以下にその概略を示す。なお、本節では Model 1 に対してのみ壁面補正を施すことにする。

2.7.1 壁面補正

本研究では壁面上のスカラー変動をゼロと仮定するが、その場合には次の関係が得られる。

$$R = Pr \quad \text{at} \quad y = 0 \quad (2.60)$$

ここで、 y は壁面からの距離である。(2.60)式より、壁面近傍で速度場とスカラー場のテラースケールは同じオーダーとなることがわかる ($\lambda \sim \lambda_\theta$)。また、局所のレイノルズ数が十分に小さくなる ($r \gg 1$)¹⁾ 事から、60ページ (2.33)~(2.35) 式に示される修正関数は、 $f_{n1} \sim f_{n2} \sim f_{e1} \sim f_{e2} \sim 1$ のように見積られる。さらに、壁近傍では拡散項に含まれる平均量の微分はテラースケールによって見積られると仮定すると ($\partial/\partial x_i \sim 1/\lambda \sim 1/\lambda_\theta$)、

¹⁾60ページ、(2.36)式参照。

(2.14), (2.18), (2.46) 及び (2.53) 式中の各項のオーダーは次のようになる.

$$\Pi_{i\theta} = O\left(\frac{\varepsilon}{k}\sqrt{kk_\theta}\sqrt{Re_t}\right) \quad (2.61)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = O\left(\frac{\varepsilon}{k}\sqrt{kk_\theta}\left[\frac{1}{Pr}+1\right]\right) \quad (2.62)$$

$$T_{i\theta} = O\left(\frac{\varepsilon}{k}\sqrt{kk_\theta}\sqrt{Re_t}\right) \quad (2.63)$$

$$V_{i\theta} = O\left(\frac{\varepsilon}{k}\sqrt{kk_\theta}\left[\frac{1}{Pr}+1\right]\right) \quad (2.64)$$

次に生成項 $P_{i\theta}$ のオーダーを見積る. 高プラントル数流体の場合, 壁ごく近傍では $P_\theta \sim \varepsilon_\theta$ は妥当であるが $P \sim \varepsilon$ はもはや成立せず, $\partial U_i/\partial x_j \sim \varepsilon/k$ の関係を用いることはできない. この領域では, 平均運動エネルギーの粘性散逸率 $\nu(\partial U_i/\partial x_j)^2$ と ε とは同オーダーであり, 従って, 平均速度勾配の見積りとしては $\partial U_i/\partial x_j \sim C_S\sqrt{\varepsilon/\nu}$ が適切である. 以上のことから, 高プラントル数流体の壁面近傍流れでは, $P_{i\theta}$ のオーダーは以下のようになる.

$$P_{i\theta} = O\left(\frac{\varepsilon}{k}\sqrt{kk_\theta}\left[\frac{C_R}{R} + C_S\sqrt{Re_t}\right]\right) \quad (2.65)$$

(2.64), (2.62) 及び (2.65) 各式より, レイノルズ数が小さい場合に $V_{i\theta}$ 及び $\varepsilon_{i\theta}$ は $P_{i\theta}$ を超過する可能性があることがわかる. 従って, この領域で $\overline{u_i\theta}$ 方程式が局所平衡を満足するためには, f_{Dw} 及び $f_{\varepsilon w}$ を導入し, $V_{i\theta}$, $\varepsilon_{i\theta}$ 両項を以下のように修正する必要がある.

$$V_{i\theta} = \frac{(\nu + \alpha)}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[f_{Dw} \frac{\partial \overline{u_i\theta}}{\partial x_k} \right] \quad (2.66)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = C_\varepsilon f_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon w} \frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}\sqrt{R}} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i\theta} \quad (2.67)$$

本研究では, 両修正関数を次のように与える.

$$f_{\varepsilon w} = f_{Dw} = \min \left[1, \frac{C_R}{R} + C_S\sqrt{Re_t} \right] \quad (2.68)$$

表 2.2: 乱流熱流束輸送方程式中の各項の壁面漸近挙動

	$V_{i\theta}$	$-\varepsilon_{i\theta}$	$\Pi_{i\theta}$
$i = 1$	$(\nu + \alpha)\overline{a_1 d_1}$	$-(\nu + \alpha)\overline{a_1 d_1}$	$O(x_2)$
$i = 2$	$(4\nu + 2\alpha)\overline{b_2 d_1 x_2}$	$-(2\nu + 2\alpha)\overline{b_2 d_1 x_2}$	$-2\nu\overline{b_2 d_1 x_2}$
$i = 3$	$(\nu + \alpha)\overline{c_1 d_1}$	$-(\nu + \alpha)\overline{c_1 d_1}$	$O(x_2)$

ただし, $C_S = 0.1$ とした. この補正は高プラントル数流体を扱う場合のみ影響を及ぼすので, プラントル数のオーダーが 10^4 程度以下であれば用いる必要はない. 分子拡散項に上式のようなダンピング関数を導入したことは, 主に (2.52) 式で無視した右辺第二項の影響であると考えられるが, ここでは簡単のため (2.52) 右辺第一項を補正するというモデル化手法をとった.

次に, 各項の壁面漸近挙動について考察する. 壁面上に座標軸の原点をとり x_2 を壁面垂直方向と定義すると, 速度及びスカラー変動は x_2 に関して次のように展開される.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots \\
 u_2 &= b_2 x_2^2 + \cdots \\
 u_3 &= c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \cdots \\
 \theta &= d_1 x_2 + d_2 x_2^2 + \cdots
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

上式の間係を5ページ (1.5) 式の各項に代入すると, 各項の壁面漸近挙動が得られ, 壁面上では表 2.2 に示すように $V_{i\theta}$, $\varepsilon_{i\theta}$ 及び $\Pi_{i\theta}$ が x_2 の最低次でバランスする. これらの項を $\overline{u_1 \theta} = \overline{a_1 d_1 x_2^2}$, $\overline{u_2 \theta} = \overline{b_2 d_1 x_2^3}$, $\overline{u_3 \theta} = \overline{c_1 d_1 x_2^2}$ 及び $k/\varepsilon = x_2^2/2\nu$ 等の関係を用いてモデル化するが, 本報では, 壁面法線方向単位ベクトル n_i を導入し, 次のように一般的に表現する.

$$V_{i\theta} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{(\nu + \alpha)}{2} \frac{\partial \bar{u}_i \bar{\theta}}{\partial x_k} + n_i n_j \frac{(\nu - \alpha)}{6} \frac{\partial \bar{u}_j \bar{\theta}}{\partial x_k} \right] \quad (2.70)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = \frac{1 + Pr}{2Pr} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_i \bar{\theta} + \frac{1 + Pr}{2Pr} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_k \bar{\theta} n_i n_k \quad (2.71)$$

$$\Pi_{i\theta} = -\frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_k \bar{\theta} n_k n_i \quad (2.72)$$

最終的に、この3つの式と、(2.14)、(2.66)、(2.67) 各式を、壁面で1、壁面から離れると0になる壁面補正関数 f_w で関係づけることで、壁乱流の全領域に適用可能なモデルを得る。

$$V_{i\theta} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left\{ \frac{(\nu + \alpha)}{2} \frac{\partial \bar{u}_i \bar{\theta}}{\partial x_k} + n_i n_j \frac{(\nu - \alpha)}{6} \frac{\partial \bar{u}_j \bar{\theta}}{\partial x_k} \right\} f_w + \left\{ \frac{(\nu + \alpha)}{2} \frac{\partial \bar{u}_i \bar{\theta}}{\partial x_k} \right\} (1 - f_w) \right] \quad (2.73)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = \left\{ \frac{1 + Pr}{2Pr} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_i \bar{\theta} + \frac{1 + Pr}{2Pr} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_k \bar{\theta} n_i n_k \right\} f_w + \left\{ C_\varepsilon f_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 2} f_w \frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr} \sqrt{Rk}} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_i \bar{\theta} \right\} (1 - f_w) \quad (2.74)$$

$$\Pi_{i\theta} = -\frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_k \bar{\theta} n_k n_i f_w + C_{\Pi} f_{\Pi 1} f_{\Pi 2} C_p \sqrt{Re_t} \sqrt{\frac{k}{2u_{(i)}^2}} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_{(i)} \bar{\theta} \quad (2.75)$$

f_w は、高プラントル数の場合に良好な結果が得られるように、次のように最適化した。

$$f_w = \exp[-c_{w1} \sqrt{A}] \quad (2.76)$$

なお、 $c_{w1} = \max[4, 0.6Pr^{3/4}]$ である。

また、本研究では河村・羽田 (1992) を参考にし、壁乱流の場合は ε_θ 式¹⁾の代わりに $\bar{\varepsilon}_\theta$ ($= \varepsilon_\theta - 2\alpha \max[\partial \sqrt{k_\theta} / \partial y, 0]^2$) 方程式を解くことにする。

$$\frac{D\bar{\varepsilon}_\theta}{Dt} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_\theta}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\theta 3} f_R \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_j \bar{u}_k \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\theta}{\partial x_j} \right)$$

¹⁾1ページ、(2.58) 式参照。

$$+C_{P1}\frac{P_{\theta}}{k_{\theta}}\varepsilon_{\theta}+C_{P2}\frac{P}{k}\varepsilon_{\theta}-C_{D1}\frac{\varepsilon_{\theta}}{k_{\theta}}\varepsilon_{\theta}-C_{D2}\frac{\varepsilon}{k}\varepsilon_{\theta}+E-\frac{\varepsilon_{\theta}\varepsilon_{\theta}}{k_{\theta}} \quad (2.77)$$

ここで、 $\varepsilon = \varepsilon - 2\nu \max[\partial\sqrt{k}/\partial y, 0]^2$ 、 $\varepsilon_{\theta} = 2\alpha \max[\partial\sqrt{k_{\theta}}/\partial y, 0]^2$ である。また、 E は付加項であり、

$$E = 2\alpha C_{w2}\frac{k}{\varepsilon}\bar{v}^2\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right)^2 \quad (2.78)$$

で定義される。ただし $C_{w2} = \min[0.1, 0.35 - 0.21Pr]$ とした。また (2.77) 式右辺最終項は、壁面で分子拡散項とつり合い $\varepsilon_{\theta} \propto x_2^2$ を保証する項である。

なお注意として、 ε_{θ} 及び ε は壁面ごく近傍の修正を意図して導入されたものであるため、 $\partial\sqrt{k_{\theta}}/\partial y < 0$ 及び $\partial\sqrt{k}/\partial y < 0$ の場合は、 $\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}$ 及び $\varepsilon = \varepsilon$ とする。即ち、

$$\bar{\varepsilon} \equiv \varepsilon - 2\nu \left(\max \left[\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial y}, 0 \right] \right)^2 \quad (2.79)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\theta} \equiv \varepsilon_{\theta} - 2\alpha \left(\max \left[\frac{\partial\sqrt{k_{\theta}}}{\partial y}, 0 \right] \right)^2 \quad (2.80)$$

である。

2.7.2 十分発達した平行平板間乱流温度場への適用

本節でも、一様乱流中と同様に速度場データとして DNS データを用い、平均温度 Θ 、乱流熱流束 $\overline{u_1\theta}$ 、 $\overline{u_2\theta}$ [†]、温度乱れの分散 k_{θ} ^{††} 及びその散逸率 ε_{θ} ^{††} の 5 つの方程式のみを解く。離散化には有限体積法を用い、格子点数はチャネル全域で壁面垂直方向に 60 点、速度場データは DNS データをスプライン補間して与えた。

Kasagi, Tomita & Kuroda (1992) と Kasagi & Ohtsubo (1993) は、両壁面で等熱流束加

[†](2.46)、(2.73)、(2.74)、(2.75) 各式参照。

^{††}(2.55) 式参照。

[‡](2.77) 式参照。

熱されたチャネル流温度場 (それぞれ, $Pr = 0.71$ 及び 0.025), また Kim & Moin (1987) は, 一様発熱するチャネル流に対する DNS を行っており ($Pr = 0.1, 0.71, 2.0$), これらを本研究ではモデル検証の対象とする. Θ を壁面との平均温度差と定義すると, その輸送方程式は等熱流束加熱の場合,

$$0 = \frac{U_b^+}{U_b^+} \frac{1}{Re_\tau} + \frac{\partial}{\partial x_2^+} \left[\frac{1}{Pr} \frac{\partial \Theta^+}{\partial x_2^+} - \overline{u_2^+ \theta^+} \right] \quad (2.81)$$

となり, 一様発熱の場合は,

$$0 = \frac{1}{Re_\tau} + \frac{\partial}{\partial x_2^+} \left[\frac{1}{Pr} \frac{\partial \Theta^+}{\partial x_2^+} - \overline{u_2^+ \theta^+} \right] \quad (2.82)$$

となる. ここで, $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$, $U_b = \int_0^{2\delta} U_1 dx_2 / 2\delta$ であり, 無次元化は全て u_τ , ν , $\theta_\tau = q_w / \rho c_p u_\tau$ によった.

図 2.27 に等熱流束加熱条件における平均温度の予測結果を示す. 両プラントル数に対し, 良好な予測結果が得られている. また, 図 2.28 には一様発熱条件における平均温度分布の予測結果を示す. ここでも 3 種のプラントル数流体に対し良い予測結果が得られているが, これは図 2.29 及び図 2.30 に示すように, 乱流熱流束が極めて良好に予測されているためである. プラントル数が増加するに従い, 乱流熱流束成分の比 $(-\overline{u_1 \theta} / \overline{u_2 \theta})$ が大きくなる傾向が定量的にもよく捉えられている. 図 2.31, 図 2.32 に $Pr = 0.025$ と $Pr = 0.71$ の場合の $\overline{u_2 \theta}$ 方程式の収支を示す. 本モデルは, どちらのプラントル数流体に対しても, 乱流熱流束の各成分の収支が非常に良好に予測されていることが判る. 具体的には, 低プラントル数の場合に散逸が支配的であり, プラントル数の増加とともに温度圧力勾配相関項が増加してゆく傾向が良好に再現されている. Π_{10} モデル中でいわゆる wall reflection 項を導入していないにもかかわらず, このように良好な結果が得られたのは, 本モデル (Model 1) の基本的な骨格が自由乱流に対してだけでなく, 壁面乱流のような非等方性の極めて大きな乱流場に対しても良い近似となっているためである¹.

図 2.33 及び図 2.34 に温度乱れ強さの予測結果を示す. θ_{rms} の分布は ε_θ 方程式の良否

¹ここに示したプラントル数範囲であれば, 壁面補正は $y^+ < 30$ の狭い範囲に限られている.

によって結果が大きく左右される。 $Pr = 0.025$ 及び $Pr = 2.0$ の場合に予測精度が悪く、 ε_θ 方程式に関してさらに改良・検討を要すると考えられる。

図 2.35 には、 $Re_\tau = 150$ の等熱流束加熱条件におけるヌセלט数の予測結果を、広い範囲のプラントル数範囲に対して示す。また、Sleicher & Rouse (1975) の円管流における経験式も併記した。数多くのプラントル数流体の円管流に対する実験が過去に行われており、それらの Nu の分布は非常に大きなばらつきを示しているもの、 Nu は Pr のおよそ $1/3$ 乗に比例することが知られている。乱流プラントル数モデルや温度場 2 方程式モデルによってこのプラントル数依存性を表現した報告はいくつかなされているが (例えば、Myong & Kasagi (1989), Nagano & Kim (1988), 佐藤・長野 (1992)), 乱流熱流束輸送方程式モデルではそのような報告は筆者の知る限りでは存在しない。これは、第 2.7.1 節で述べたように、高プラントル数流体の壁面ごく近傍では $\overline{u_i \theta}$ 方程式は局所平衡条件を満足していても、 $\overline{u_i u_j}$ 方程式は分子拡散と散逸が支配するといった特殊な状況になっており、モデル化が非常に困難なためである。このことを適切にモデル化しなければ、良好な結果を得ることは難しい。

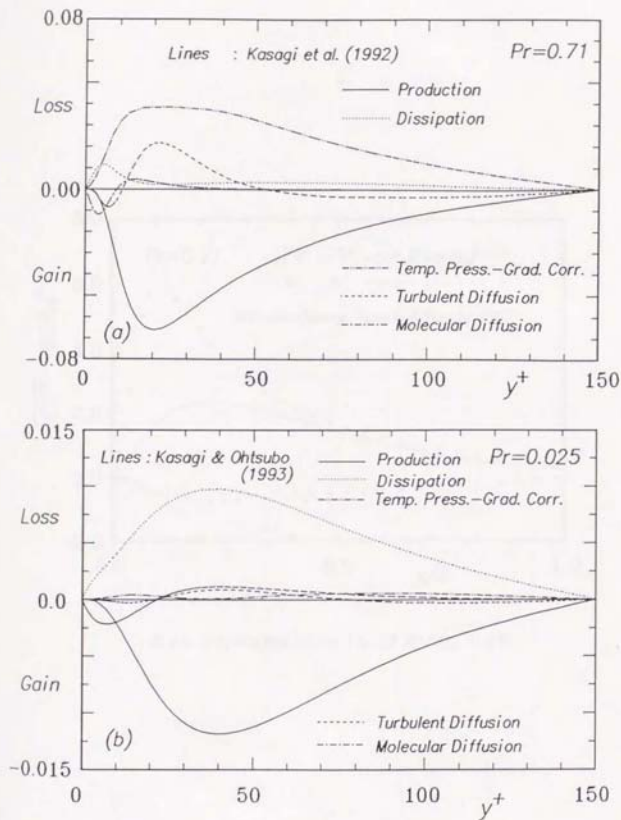
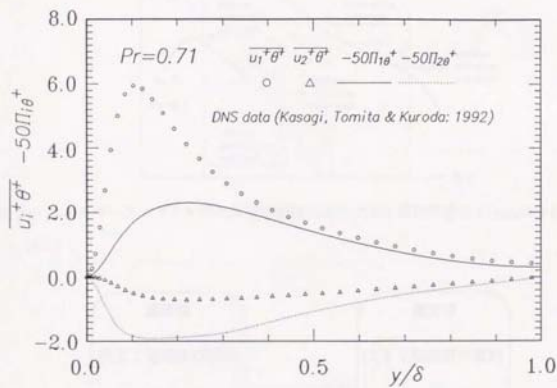


図 2.1: 平行平板間乱流における $\overline{u_2 \theta}$ の収支 (a) $Pr = 0.71$ (Kasagi, Tomita & Kuroda, 1992), (b) $Pr = 0.025$ (Kasagi & Ohtsubo, 1993)

図 2.2: 平行平板間乱流における $\overline{u_i \theta}$ 及び $\Pi_{i\theta}$ の分布

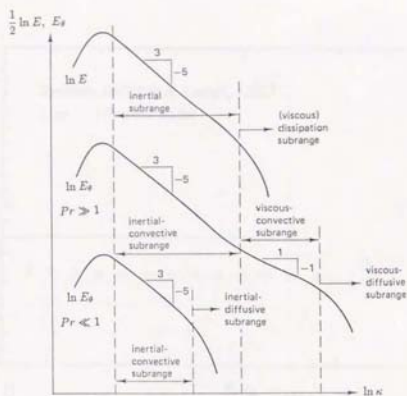


図 2.3: エネルギースペクトル関数及び温度乱れスペクトル関数の分布 (Tennekes & Lumley, 1972)

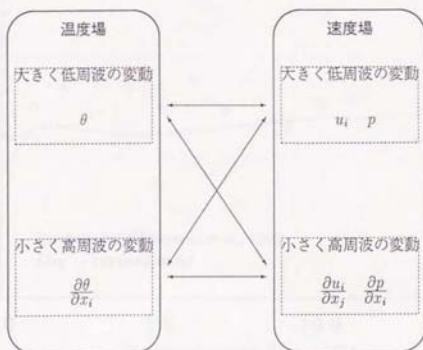
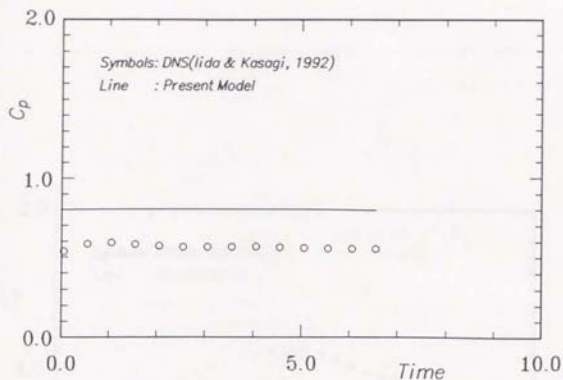
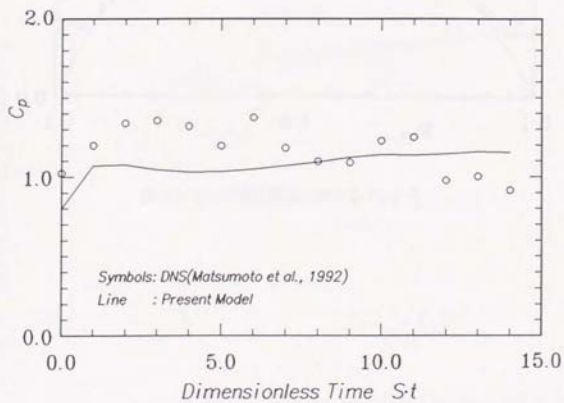
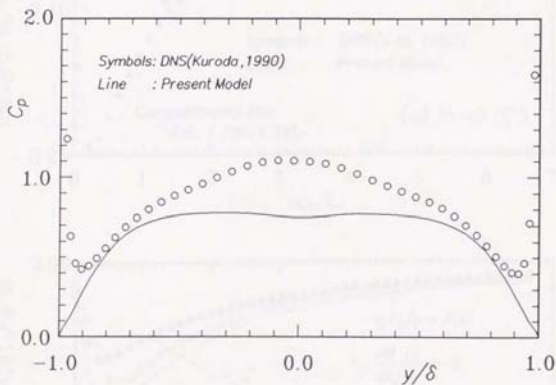


図 2.4: 温度変動及び速度変動の相関

図 2.5: 一様等方性乱流における C_p 分布図 2.6: 一様剪断乱流における C_p 分布

図 2.7: 平行平板間乱流における C_p 分布

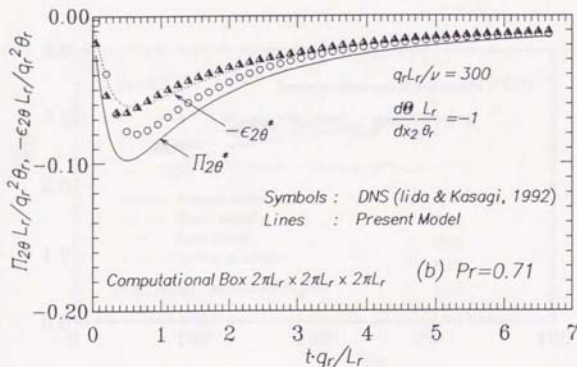
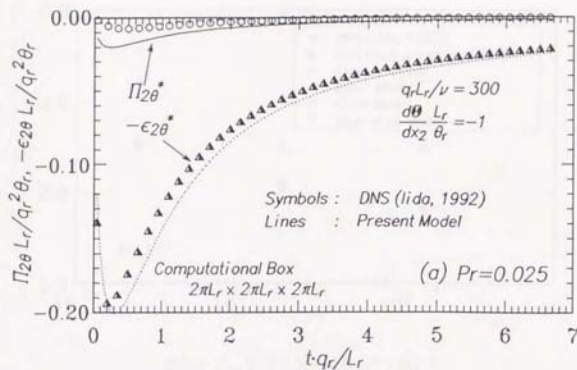
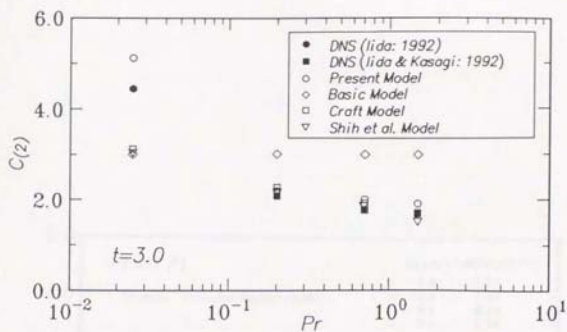
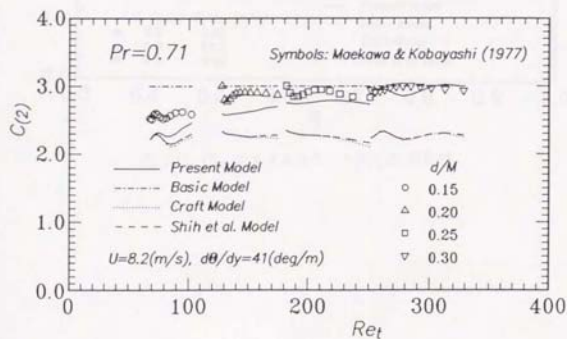
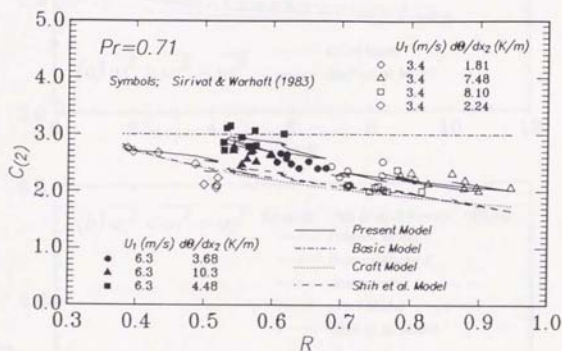
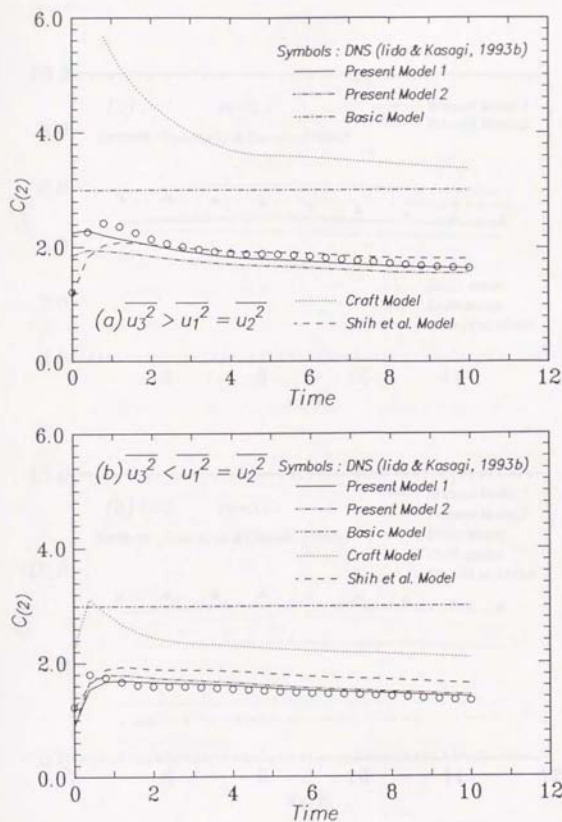
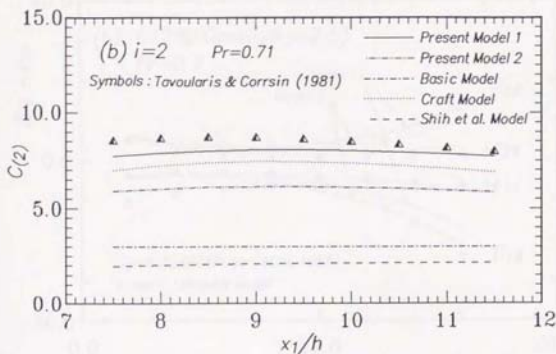
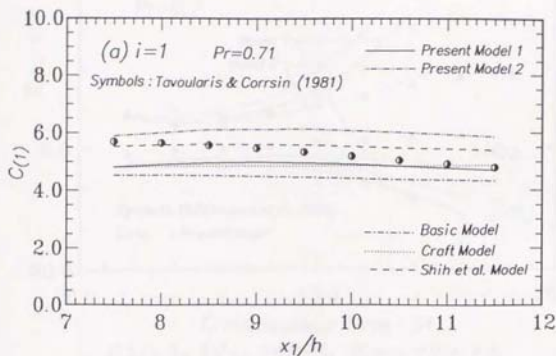


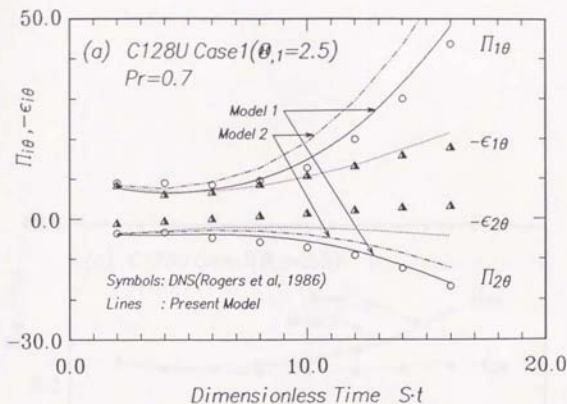
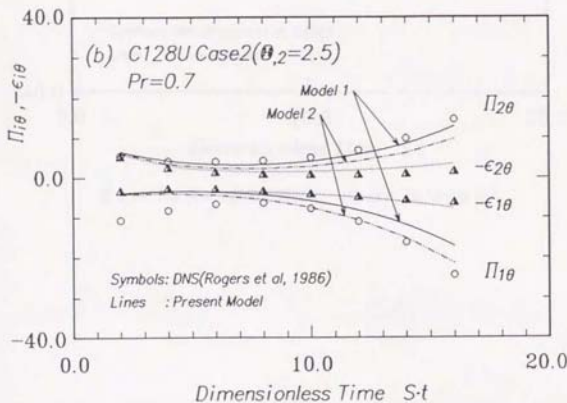
図 2.8: $\Pi_{2\theta}$ 及び $\epsilon_{2\theta}$ の時間変化 (a) $Pr = 0.025$ (Iida, 1992), (b) $Pr = 0.71$ (Iida & Kasagi, 1993a)

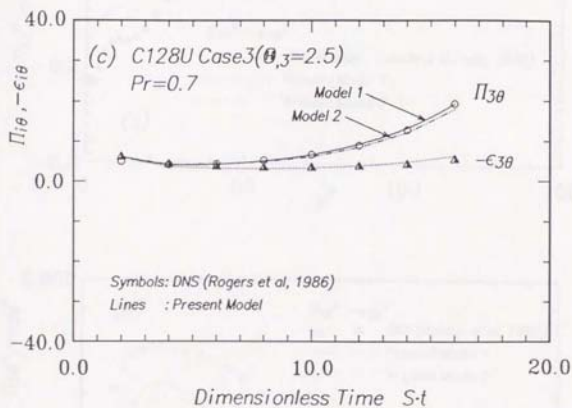
図 2.9: $C_{(2)}$ のプラントル数 (Pr) 依存性図 2.10: $C_{(2)}$ の乱流レイノルズ数 (Re_t) 依存性

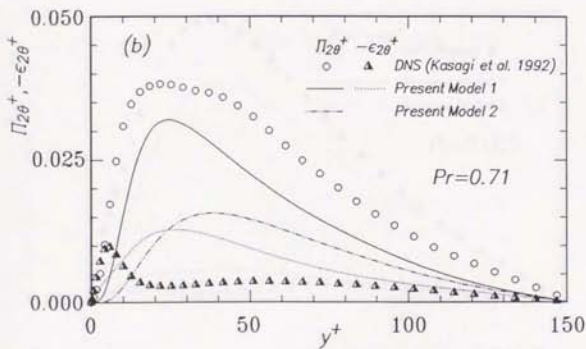
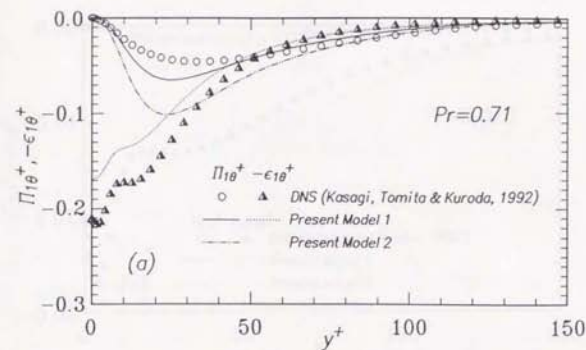
図 2.11: $C(2)$ のタイムスケール比 (R) 依存性

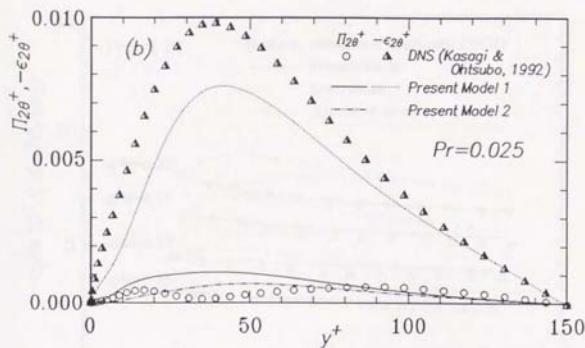
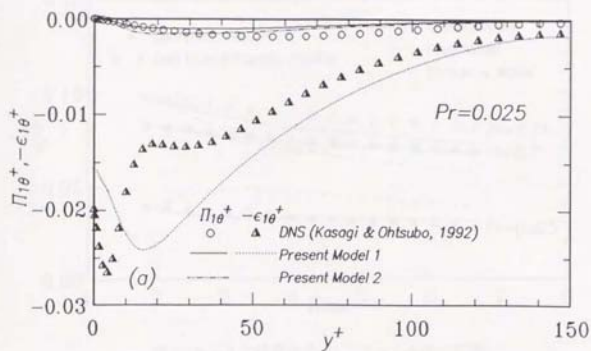
図 2.12: 一様異方性乱流における $C_{(2)}$ の時間変化 (Iida & Kasagi, 1993b)(a) $\overline{u_3^2} > \overline{u_1^2} = \overline{u_2^2}$, (b) $\overline{u_3^2} < \overline{u_1^2} = \overline{u_2^2}$

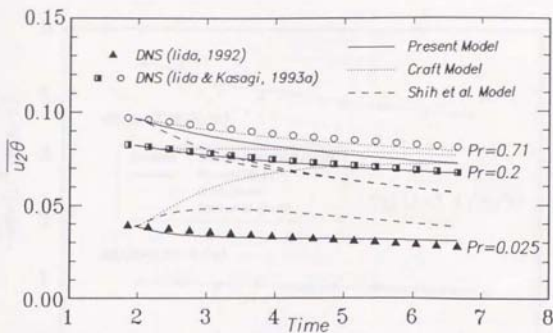
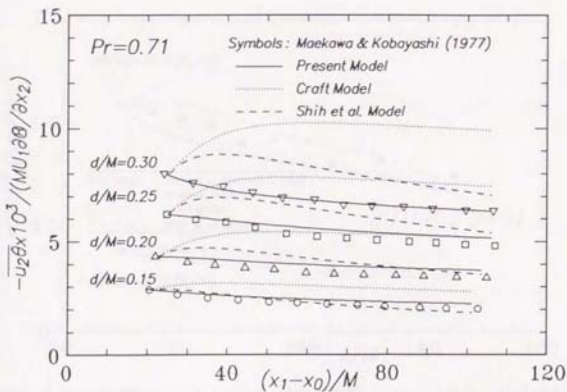
図 2.13: 一様剪断乱流における $C_{(i)}$ の流れ方向変化 (Tavoularis & Corrsin, 1981)(a) $i=1$, (b) $i=2$

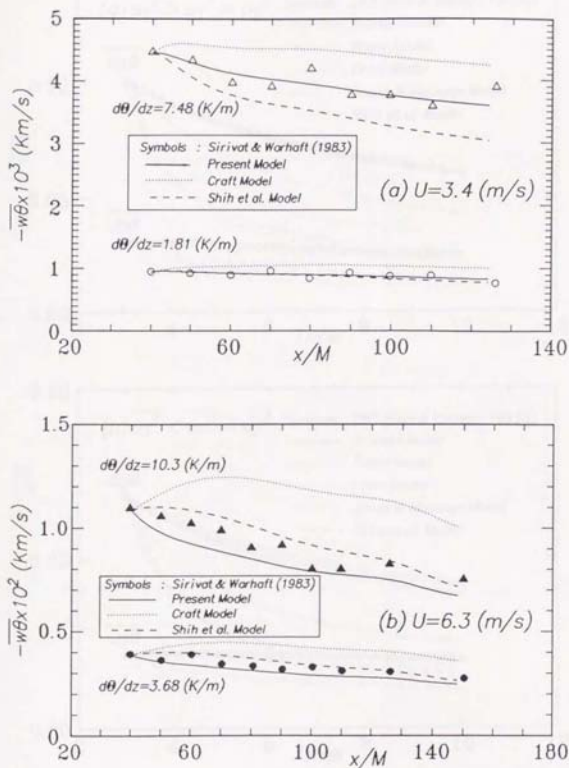
図 2.14: $\Pi_{1\theta}$ 及び $\epsilon_{1\theta}$ の時間変化 (Case 1, $d\Theta/dx_1 \neq 0$)図 2.15: $\Pi_{2\theta}$ 及び $\epsilon_{2\theta}$ の時間変化 (Case 2, $d\Theta/dx_2 \neq 0$)

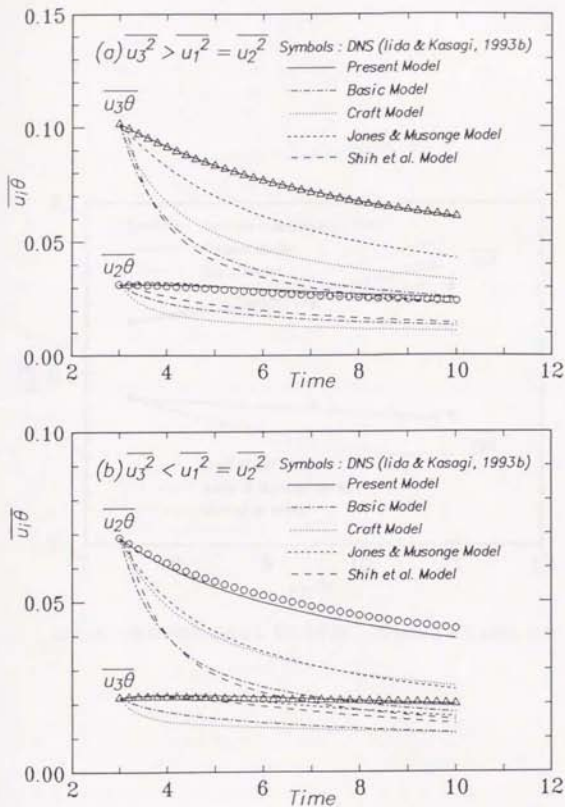
図 2.16: $\Pi_{3\theta}$ 及び $\varepsilon_{3\theta}$ の時間変化 (Case 3, $d\theta/dx_3 \neq 0$)

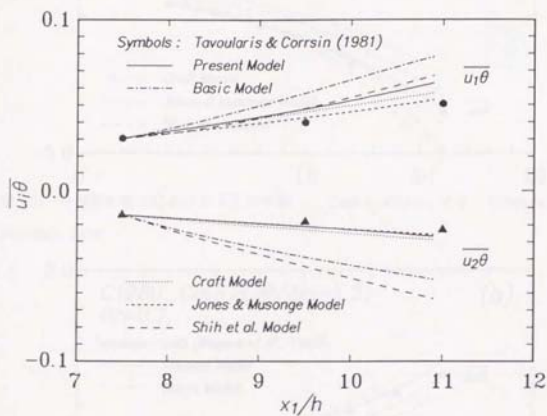
図 2.17: 発達した平行平板間乱流における $\Pi_{i\theta}^+$ 及び $\epsilon_{i\theta}^+$ 分布 ($Pr=0.71$) (a) $i=1$,(b) $i=2$

図 2.18: 発達した平行平板間乱流における $\Pi_{i\theta}^+$ 及び $\epsilon_{i\theta}^+$ 分布 ($Pr = 0.025$) (a) $i = 1$,(b) $i = 2$

図 2.19: $\overline{u_2\theta}$ の時間変化 (プラントル数の影響)図 2.20: $\overline{u_2\theta}$ の時間変化 (乱流レイノルズ数の影響)

図 2.21: $\bar{w}\bar{\theta}$ の時間変化 (タイムスケール比の影響)(a) $U = 3.4$ (m/s),(b) $U = 6.3$ (m/s)

図 2.22: 一様異方性乱流中の $\overline{u_i\theta}$ の時間変化 (Iida & Kasagi, 1993b) (a) $\overline{u_3^2} > \overline{u_1^2} = \overline{u_2^2}$,(b) $\overline{u_3^2} < \overline{u_1^2} = \overline{u_2^2}$

図 2.23: 一様剪断乱流における $\overline{u_i\theta}$ の予測 (Tavoularis & Corrsin, 1981)

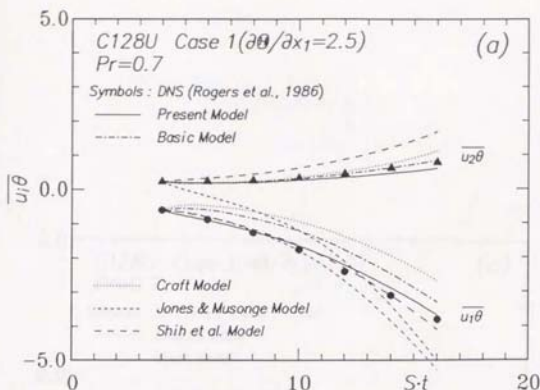


図 2.24: 一様剪断乱流における $\overline{u_i\theta}$ の予測 Case 1, $d\theta/dx_1 \neq 0$ (Rogers, Moin & Reynolds, 1986)

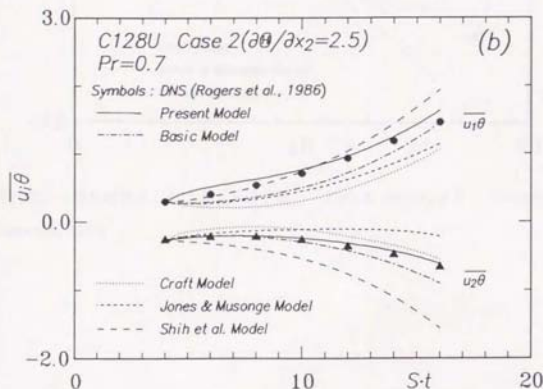


図 2.25: 一様剪断乱流における $\overline{u_i\theta}$ の予測 Case 2, $d\theta/dx_2 \neq 0$ (Rogers, Moin & Reynolds, 1986)

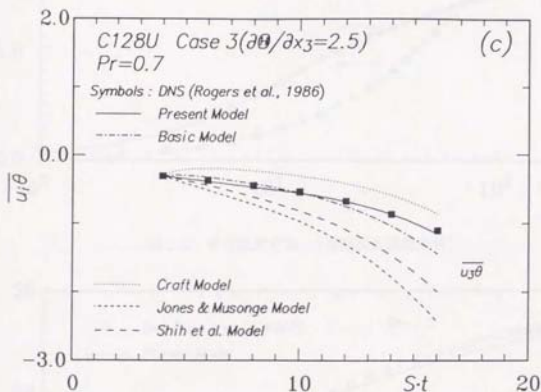


図 2.26: 一様剪断乱流における $\overline{u_i\theta}$ の予測 Case 3, $d\theta/dx_3 \neq 0$ (Rogers, Moin & Reynolds, 1986)

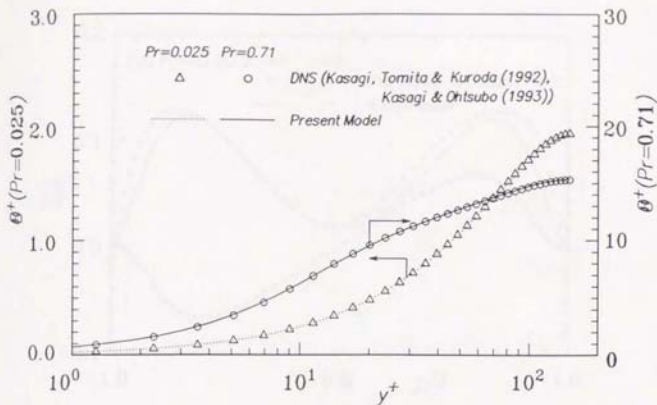


図 2.27: 平均温度分布 (等熱流束加熱条件)

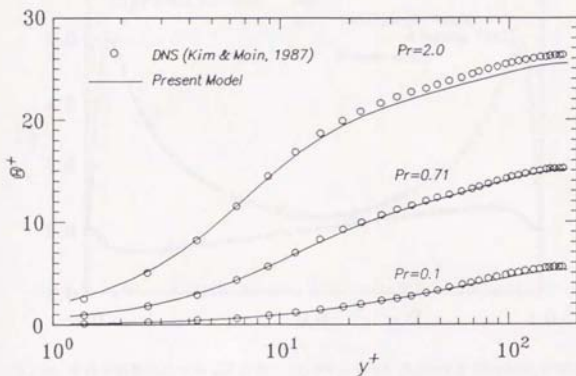


図 2.28: 平均温度分布 (一様発熱条件)

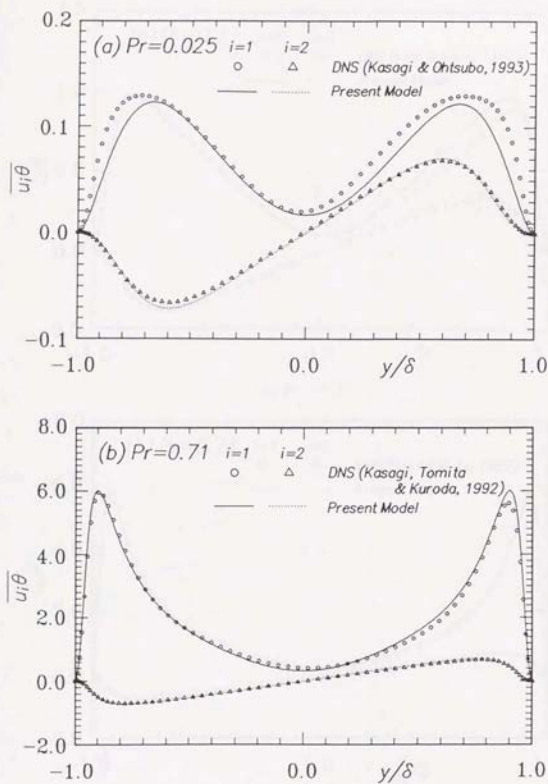
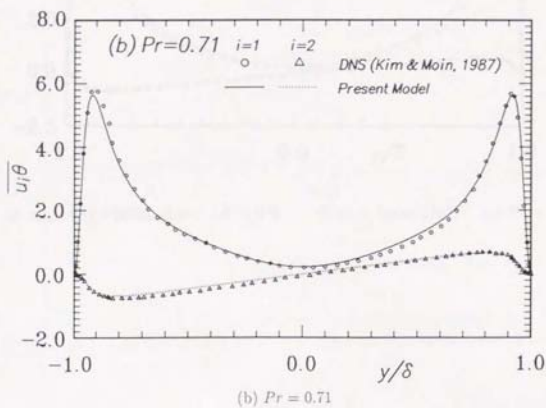
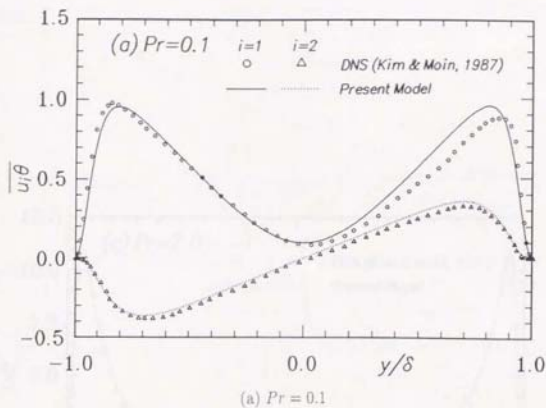


図 2.29: 平行平板間乱流中の $\overline{u_i \theta}$ 分布 (a) $Pr = 0.025$ (Kasagi & Ohtsubo, 1993), (b) $Pr = 0.71$ (Kasagi, Tomita & Kuroda, 1992)



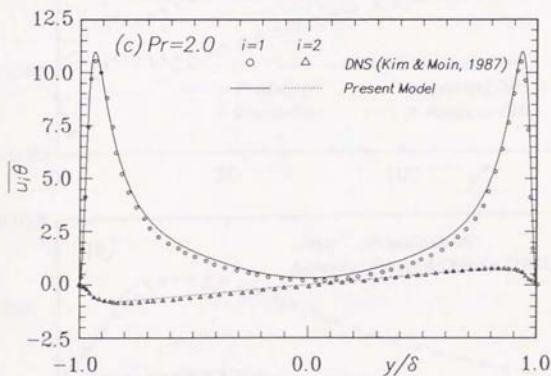


図 2.30: 平行平板間乱流中の $\overline{u_i \theta}$ の分布 (Kim & Moin, 1987) (c) $Pr=2.0$

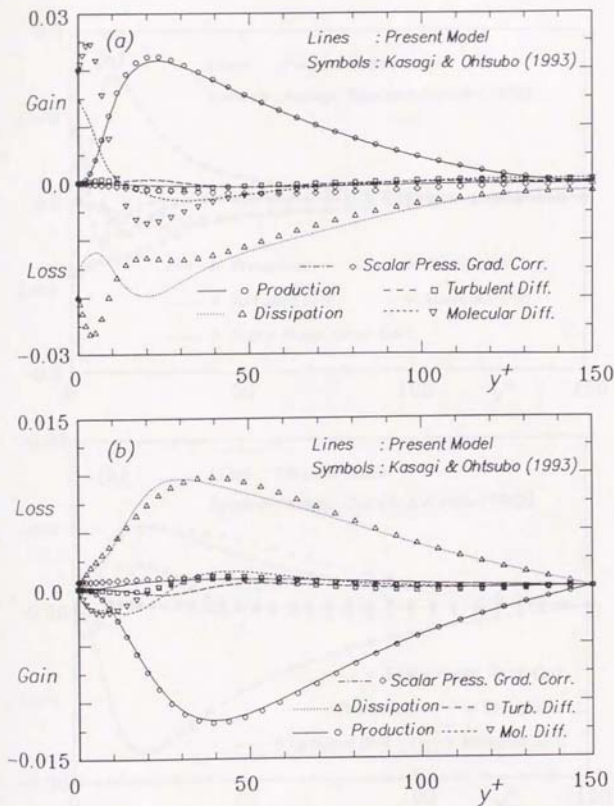


図 2.31: $\overline{u_1\theta}$ 方程式の収支 $Pr = 0.025$ (Kasagi & Ohtsubo, 1993), (a) $\overline{u_1\theta}$ 方程式の収支 (b) $\overline{u_2\theta}$ 方程式の収支

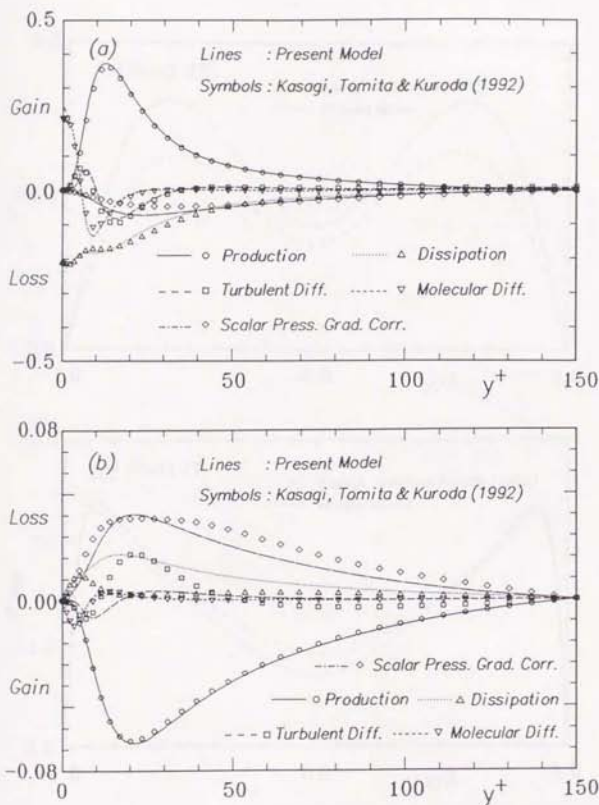


図 2.32: $\overline{u_1\theta}$ 方程式の収支 $Pr = 0.71$ (Kasagi, Tomita & Kuroda, 1992), (a) $\overline{u_1\theta}$ 方程式の収支 (b) $\overline{u_2\theta}$ 方程式の収支

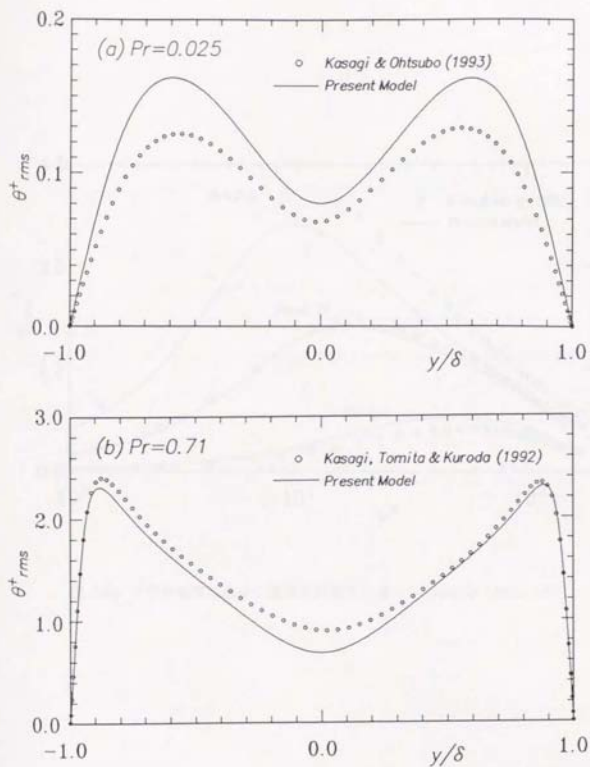


図 2.33: 平行平板間乱流中の温度乱れ強さ分布 (a) $Pr = 0.025$ (Kasagi & Ohtsubo, 1993), (b) $Pr = 0.71$ (Kasagi, Tomita & Kuroda, 1992)

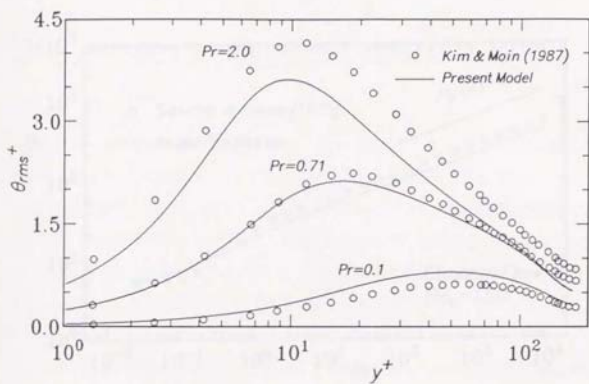


図 2.34: 平行平板間乱流中の温度乱れ強さ分布 (Kim & Moin, 1987)

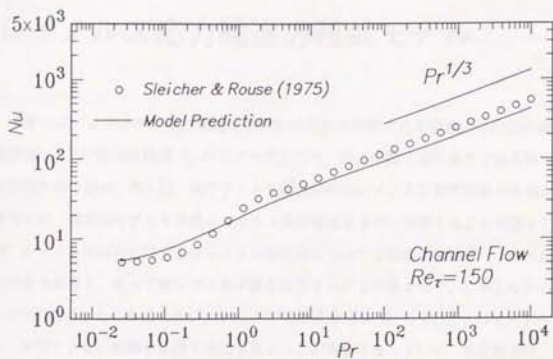


図 2.35: ヌッセルト数のプラントル数依存性

第3章

レイノルズ応力輸送方程式モデル

本章では、レイノルズ応力輸送方程式中の未知相関項である速度圧力勾配相関項 Π_{ij} 、散逸項 ε_{ij} 及び乱流拡散項 T_{ij} のモデル化を行う。浮力の働く流れ場など温度場と連立した問題を扱う場合、例えば、高プラントル数流体の低レイノルズ数乱流等の予測を行う場合等には、速度場モデルも当然レイノルズ数依存性を適切に表現することが望ましい。従来、レイノルズ応力に対するレイノルズ数効果については詳細な実験データの不足により不明点が多く、従って高レイノルズ数を仮定することが多かった。しかしながら、近年の DNS の示すところによれば、レイノルズ数依存性は $Re = O(10^3)$ のオーダーまで残り、無視できない影響を及ぼす状況もあることが明らかになっている。本研究では、前章と同様に Π_{ij} 及び ε_{ij} に対し、変動量間の相関を考慮することでレイノルズ数 Re_i 依存性を表現するモデルを提案することを試みる。

3.1 速度圧力勾配相関項及び散逸項のモデリング

既存の多くのモデルにおいては、速度圧力勾配相関項を

$$\Pi_{ij} = \underbrace{\frac{1}{\rho} \left(u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)}_{\Pi_{ij}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u_i \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j \bar{p}}{\partial x_i} \right)}_{\text{圧力拡散}} \quad (3.1)$$

のように分解する。このうち圧力拡散項は多くの場合無視され、さらに散逸項の非等方性成分とあわせて $\phi_{ij} - (\varepsilon_{ij} - 2/3\varepsilon\delta_{ij})$ がモデル化の対象となる。このように両項を合わせてモデル化する理由の一つとして、実験的に両者を分離して測定することが困難であることが挙げられる。しかしながら、一般に Π_{ij} 項 (又は ϕ_{ij} 項) と散逸項 ε_{ij} とは異なったレイノルズ数依存性を示し、両者をまとめたモデル化ではその影響を正しく表現することは難しい。例えば、Hallback (1993) は低レイノルズ数域での圧力歪相関項のレイノルズ数依存性を示し、さらに、高レイノルズ数乱流 ($Re_t = O(10^3)$) においても散逸項 ε_{ij} は非等方性を依然示すため、 $\varepsilon_{ij} = 2/3\varepsilon\delta_{ij}$ と置くことはできないことを指摘している。

本研究では、速度圧力勾配相関項 Π_{ij} と逸項 ε_{ij} は独立にモデル化し、また、圧力拡散項は壁乱流等の特殊な場合を除いて無視できるものとし、 $\Pi_{ij} = \phi_{ij}$ としてモデル化を行う。

3.1.1 オーダー評価

まず、 Π_{ij} 及び ε_{ij} 両項のオーダーを見積る。変動速度、変動圧力及び変動量に対する微分のオーダーがそれぞれ $u_i = O(\sqrt{k})$, $p/\rho = O(k)$ 及び $\frac{\partial}{\partial x_i} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ (ここで $\lambda \equiv \sqrt{10\nu k/\varepsilon}$ はテラースケール) であると見積られ、また低レイノルズ数の場合に変動量間の相関が十分に高いと仮定すると両項のオーダーは次のようになる。

$$-\frac{1}{\rho} \left(w_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = O \left(k \frac{\sqrt{k}}{\lambda} \right) = O \left(\sqrt{Re_t} \varepsilon \right) \quad (3.2)$$

$$2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial w_j}{\partial x_k} = O \left(\nu \frac{\sqrt{k}}{\lambda} \frac{\sqrt{k}}{\lambda} \right) = O(\varepsilon) \quad (3.3)$$

上式は全ての成分に対して成立するので、両項の非等方性成分に対しても同様のオーダー評価が行える。

$$\Pi_{ij} - \frac{1}{3}\Pi_{kk}\delta_{ij} = O \left(\sqrt{Re_t} \varepsilon \right) \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} = O(\varepsilon) \quad (3.5)$$

(3.4), (3.5) 両式をみると, 低レイノルズ数乱流において Π_{ij} は $(\varepsilon_{ij} - 2/3\varepsilon\delta_{ij})$ より $Re_\tau^{1/2}$ の比率だけオーダー的に小さいことがわかる. この傾向は最近の DNS データからも見ることが出来る. Rogers, Moin & Reynolds (1986) の一様剪断乱流 DNS データを用いて Π_{ij}/ε 及び $\varepsilon_{ij}/\varepsilon - 2/3\delta_{ij}$ を乱流レイノルズ数に対してプロットしたものを図 3.1 及び図 3.2[†] に示す. シミュレーションでは時間とともに乱流レイノルズ数も増加するが, このレイノルズ数範囲において (3.4), (3.5) 両式の示すオーダー評価がおよそ成立していることがわかる.

3.1.2 基本形

本節では, Π_{ij} 中の slow 成分 p_S と rapid 成分 p_R に対応する部分, 及び散逸率 ε_{ij} のモデル化を行う. まず, 各項を以下のように無次元化し, レイノルズ応力非等方テンソルや生成項テンソル等と関係づける.

$$-\frac{1}{\rho} \left(u_i \frac{\partial p_S}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial p_S}{\partial x_i} \right) + \frac{21}{3\rho} u_k \frac{\partial p_S}{\partial x_k} \delta_{ij} = f_{\Pi^r} f(a_{ij}, a_{ik} a_{kj}, \dots) \quad (3.6)$$

$$-\frac{1}{\rho} \left(u_i \frac{\partial p_R}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial p_R}{\partial x_i} \right) + \frac{21}{3\rho} u_k \frac{\partial p_R}{\partial x_k} \delta_{ij} = f_{\Pi^r} f \left(a_{ij}, \frac{P_{ij}}{P}, \frac{D_{ij}}{P}, \frac{k(U_{ij} + U_{ji})}{P}, \dots \right) \quad (3.7)$$

$$\frac{2\nu}{\varepsilon} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} = f_{\varepsilon} f(a_{ij}, a_{ik} a_{kj}, \dots) \quad (3.8)$$

ここで,

$$\sqrt{p_S^2}/\rho = C_{pS} k \quad (3.9)$$

$$\sqrt{p_R^2}/\rho = C_{pR} k \quad (3.10)$$

[†] $\varepsilon_{33}/\varepsilon - 2/3$ は, ほぼゼロとなるので本図では省略した.

と置き、次のように与えた¹⁾。

$$C_{pS} \propto \text{const.} \quad (3.11)$$

$$C_{pR} \propto \frac{P}{\varepsilon} \quad (3.12)$$

ここで (3.6), (3.7) 両式の右辺には、高レイノルズ数における Π_{ij} のモデルとして多くの流れに適用され、検証されている Rotta (1951) 及び Launder, Reece & Rodi (1975) モデル (以後 LRR モデル) で用いられている項のみを採用し¹⁾、 $\Pi_{kk} = 0$ を仮定すると、高レイノルズ数で Rotta+LRR モデルに漸近する次の様なモデルを得ることができる。

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & C_{\Pi v} f_{\Pi v} \sqrt{Re_t} \left[-1.8\varepsilon \left(\frac{\bar{u}_i \bar{u}_j}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) - \frac{(c_2 + 8)}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \right. \\ & \left. - \frac{(30c_2 - 2)}{55} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{(8c_2 - 2)}{11} \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + C_{\varepsilon v} f_{\varepsilon v} \varepsilon \left(\frac{\bar{u}_i \bar{u}_j}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \quad (3.14)$$

ただし、 $c_2 = 0.4$ である。ここで $f_{\Pi v}$ 及び $f_{\varepsilon v}$ は、高レイノルズ数乱流において変動量間の相関が減少することを表現する修正関数である。速度乱れは低波数帯のゆっくりとした大きな運動によって主に支配されるのに対し、変動量の微分値は高波数帯の速く細かい運動に支配される。この様に時空間的スケールの異なる変動量間の相関は一般に低く (Tennekes & Lumley, 1972)、このことを表現する必要が生じることになる。これ以降では、これらの修正関数 $f_{\Pi v}$ 及び $f_{\varepsilon v}$ を決定する。

¹⁾ここでは、温度場モデルで用いた (2.39) 式とは異なり、不変量 A を用いたダンピングは行っていない。これは、 A が速度場モデル中ではダンピングとしての効果を持たないため (Launder & Tselepidakis, 1992)、いたずらにモデルを複雑化することを避けたためである。

²⁾より複雑な表現を採用することもできるが、本研究では表現が簡単であること、並びに現在までに使用経験の蓄積があることを理由にこのモデルを採用した。

3.1.3 修正関数及び定数の決定

(3.13) 式では $Re_t \rightarrow \infty$ の場合 $\Pi_{ij} \rightarrow \infty$ となり、不都合が生じる。局所平衡が成り立つ場合には、生成項 P_{ij} のオーダーは、

$$P_{ij} = O(\varepsilon) \quad (3.15)$$

であるから、 $O(\Pi_{ij}) \leq O(P_{ij})$ の関係を満足するためには、 $\overline{u_i \partial p / \partial x_j}$ の相関係数は、高レイノルズ数の場合 $1/\sqrt{Re_t}$ に比例して減少しなくてはならない。即ち、

$$f_{uv} = \begin{cases} \text{const.} & (Re_t \rightarrow 0) \\ \frac{1}{\sqrt{Re_t}} & (Re_t \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (3.16)$$

である。このことは、第 2.1.1 節で述べた様に、変動量間の相関係数はそれぞれの変動量の特徴付ける時間スケールの比に比例して減少することからも説明される。即ち、この場合は p を特徴付ける時間スケール k/ε と $\partial u_i / \partial x_j$ の時間スケール $\sqrt{\nu/\varepsilon}$ との比 $(\sqrt{\nu/\varepsilon}) / (k/\varepsilon) = 1/\sqrt{Re_t}$ に比例して相関が落ちてゆくことになる。このことを平行平板間乱流 DNS データを用いて検証してみる。黒田 (1990) は境界条件の異なる 4 種のシミュレーションを行っており、それぞれのケースでの乱流レイノルズ数の分布を図 3.3 に示す。壁乱流の内層で全ての乱流統計量が壁からの距離 y^+ とレイノルズ数 Re_t の関数であると仮定すると、ある y^+ での物理量の差異はレイノルズ数のみの関数となる。図 3.3 の $y^+ = 70$ の位置で、4 種のレイノルズ数ケースに対し (3.13) 式より逆算した $C_{uv} f_{uv}$ の値をプロットすると、図 3.4 に示すようになる。レイノルズ応力の 4 成分とも、レイノルズ数の増加とともに減少する傾向を示しており、(3.16) 式が妥当であることを裏付けている。レイノルズ数の両極限での表現をブリッジする関数としては

$$f(Re_t) = \begin{cases} 1 - \exp(-c/\sqrt{Re_t}) \\ \tanh(c/\sqrt{Re_t}) \\ \min[1, c/\sqrt{Re_t}] \end{cases} \quad (3.17)$$

等が考えられる。どの関数も $Re_t \rightarrow 0$ で 1, $Re_t \rightarrow \infty$ の場合 $c/\sqrt{Re_t}$ と同一な値を示すが、本研究では広い Re_t 範囲で良好な結果を与えた次の関数を用いる。

$$C_{uv}f_{uv} = \frac{1}{15} \tanh \left[\frac{15}{\sqrt{Re_t}} \right] \quad (3.18)$$

図 3.16 には上式による結果も合わせて表示したが、妥当な結果を与えている。また、この関数は $Re_t \rightarrow \infty$ の場合に (3.13) 式が LRR モデルと同形になることを保証する。

一方、散逸に関しても高レイノルズ数の場合は局所等方向性が成り立つとすると、(3.14) 式中の f_{ev} は高レイノルズ数でゼロとなる必要がある。ここで、散逸の非等方向性 $\varepsilon_{ij} - 2/3\varepsilon\delta_{ij}$ とレイノルズ応力の非等方向性 a_{ij} の各成分の比、即ち、 $C_{ev}f_{ev}$ のレイノルズ数依存性を先程の場合と同様に黒田の DNS データを用いて観察する。図 3.5 に $y^+ = 70$ の断面での $C_{ev}f_{ev}$ の値を、全てのレイノルズ数ケースに対して示す。非対角成分にはレイノルズ数依存性はほとんど認められないが、対角成分に対してはレイノルズ数の増加とともにおよそ $1/\sqrt{Re_t}$ に比例してその値が減少していく傾向が伺える。従って壁乱流においても $Re_t \rightarrow \infty$ につれて $\varepsilon_{ij} \rightarrow 2/3\varepsilon\delta_{ij}$ となり、局所等方向性が成立していると言える。散逸項の修正関数 f_{ev} に関しても、(3.16) 式と同様に

$$f_{ev} \propto \begin{cases} \text{const.} & (Re_t \rightarrow 0) \\ \frac{1}{\sqrt{Re_t}} & (Re_t \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (3.19)$$

となる関数を選択することにする。このことは、散逸率 ε_{ij} がレイノルズ数が高くなるにつれて平均速度場の歪の影響を受けなくなり、その非等方向度が平均速度場の時間スケールと変動速度歪の時間スケールの比 $\sqrt{\nu\varepsilon/(k/\varepsilon)} = 1/\sqrt{Re_t}$ に比例して減少してゆく事を表現している (Tennekes & Lumley, 1972)。本研究では (3.18) 式を参考に、 f_{ev} として次の関数を与えた。

$$C_{ev}f_{ev} = 0.8 \tanh \left[\frac{15}{\sqrt{Re_t}} \right] \quad (3.20)$$

上式の分布を黒田の DNS の結果と共に図 3.5 に示す。DNS では非対角成分はレイノルズ数依存性をあまり示していないが、対角成分、特に $i=j=1$ 及び $i=j=2$ の場合に対して (3.20) 式がよい近似となっていることがわかる。

3.2 乱流拡散項及び ε 方程式のモデリング

本研究では乱流拡散項 T_{ij} には乱流熱流束輸送方程式モデルと同様に、GGDH モデルを用いる。

$$T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(0.2 \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_j \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_l}{\partial x_j} \right) \quad (3.21)$$

また、 ε 方程式には Myong & Kasagi (1990) を参考に次式を用いる。なお、壁面まで適用できるモデルに関しては後述する¹。

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} + 0.18 \bar{u}_k \bar{u}_l \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) \\ & + 1.4 \frac{\varepsilon P}{k} - 1.8 \left[1 - \frac{2}{9} \exp \left\{ - \left(\frac{Re_t}{6} \right)^2 \right\} \right] \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.3 一様乱流への適用

本節では、前節で提案した新たなモデルを一様乱流場に適用し、その評価を行う。計算は温度場の場合と同様に陽解法を用いて一次元的に積分を行った。また、時間又は流れ方向の格子刻みは、結果に影響がないように十分に細かくとって計算を行った。

¹124ページ (3.34) 式参照。

表 3.1: Rogers ら (1986) の DNS の計算条件

	C128U simulation	C128V simulation	C128W simulation	C128X simulation
$S(\equiv \partial U_1 / \partial x_2)$	28.284	28.284	56.568	14.142
ν	0.01	0.02	0.02	0.005

3.3.1 一様剪断乱流

剪断乱流は壁乱流をはじめ多くの流れ場に存在し、工学上非常に重要な流れである。一様剪断乱流は其中でも最も簡単な流れ条件を有する場合であるが、それ故に剪断乱流の本質的な問題が露呈し、乱流モデルの検証や乱流構造の抽出等の目的に取り上げられる。ここでは、Rogers, Moin & Reynolds (1986) の DNS データ及び Tavoularis & Karnik (1989) の実験データを用いた検証を行う。一様剪断乱流では、平均剪断が乱流場に加われた後の時間発展または流れ方向変化を追っていくことになるが、レイノルズ平均型のモデルは主に乱流場が平均速度場に十分馴染んだ定常的な場を想定してモデル化を行っているので、非定常性の強いこのような場の予測には原理的に向いていないと言える。例えば、Speziale, Gatski & Sarkar (1992) は、等方性乱流にある瞬間から平均剪断が与えられる一様剪断乱流では、モデルを検証する新たな基準として次の2つを挙げている。第一に、rapid distortion theory より乱流モデルはその初期には

$$\phi_{ij} = \frac{2}{5}k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.23)$$

を満足する必要があるということ。第二に、最終的な平衡状態での非等方性 $(a_{ij})_\infty$ の各成分が良好に予測されれば良いということである。本研究でも、レイノルズ応力各成分の絶対値よりも、その非等方性等のレイノルズ依存性に主に注目する。

まず、Rogers, Moin & Reynolds (1986) の DNS データを用いた検証を行う。ここでは、C128U, C128V, C128W 及び C128X の4つのシミュレーションを取り上げる。それぞれ

の計算条件を表 3.1 に示す。\$S\$ 及び \$\nu\$ を変化させることで、平均剪断の強さ及びレイノルズ数に対するパラメトリック・スタディを行っている。図 3.6~3.9 に、それぞれのケースにおける本モデル及び LRR モデル¹の予測結果を示す。本モデルの予測結果は LRR モデルの予測結果と比較して、必ずしも改善されているとは言えないが、次に示すレイノルズ応力の非等方テンソル \$a_{ij}\$ の分布には、両モデルの予測結果に明白な違いが現れる。\$a_{ij}\$ の分布は、\$\varepsilon\$ の予測精度にあまり依存せず、専ら再配分仮定のモデル化によるので、今回のように応力輸送方程式モデルの再配分項のチェックには都合がよい。まず、図 3.10 及び図 3.11 にそれぞれ Rogers らの DNS データにおける乱流レイノルズ数 \$Re_t\$、及びレイノルズ応力非等方テンソル \$a_{ij}\$ の対角成分の分布を示す。両図より明かな様に、レイノルズ数が低いほどレイノルズ応力の非等方性は大きくなる。図 3.12 及び図 3.13 には本モデル及び LRR モデルによる予測結果を示す。本モデルは DNS データと同様なレイノルズ数依存性を示しているが、LRR モデルでは初期条件によらず全てのケースで全く同じ非等方性レベルを示す。本モデルは、DNS データと同様に計算初期に非等方的な状態に向かった後に若干等方化し、ある一定値に漸近する傾向を示しているが、DNS と比べ初期の非等方化傾向の勾配が大きく予測されている。このような応力非等方性の時間変化まで良好に予測するためには、rapid distortion theory 等を用いて圧力相関項中の平均速度勾配を含む項のモデル化を適切に行う必要があると思われる。非定常乱流場への適用を考えた場合にはこのプロセスが非常に重要であると言えるが、定常流のみを扱う場合には特にこのことによって大きな問題は生じないと考えられる。従って、モデルの単純さを考慮し、本研究ではこれ以上の改良は行わない。

続いて、Tavoularis & Karnik (1989) の実験データによる検証を行う。この実験では、乱流レイノルズ数が \$Re_t = 10^3 \sim 10^4\$ と、先の Rogers らの DNS より一桁ほど大きい値を示し、高レイノルズ数におけるテストケースとして取り上げる。なお、当初両モデルをそのまま用いて計算を行った場合には、乱れエネルギーが過大評価され良好な結果が得られなかったが、その後 \$\varepsilon\$ 方程式の source 項の係数を 1.4 から 1.55 と約 10% 大きくしたところ結果は大きく改善された。この主な原因は \$\varepsilon\$ 方程式にあると考えられ、従って本研

¹10 ページ (1.16) 式で \$c_1 = 1.8\$、16 ページ (1.47) 式で \$c_2 = 0.4\$ としたもの、及び 24 ページ (1.79) 式。

究では ε 方程式は解かずに実験値のタイムスケール τ_{exp} をあらかじめ与え、その与えられた τ_{exp} より ε を求めるという手法を用いることにする。

$$\varepsilon = \frac{k}{\tau_{\text{exp}}} \quad (3.24)$$

このような ε 方程式と $\overline{u_i u_j}$ 方程式のモデリングを切り離す手法は、壁乱流においても用いられている (Launder & Tselepidakis, 1992[†])。

平均剪断の異なる4つのケース $S = 84.0$ (1/s), 39.9 (1/s), 29.0 (1/s), 13.6 (1/s) におけるレイノルズ応力各成分の予測を図 3.14~図 3.17 に、レイノルズ応力非等方テンソル a_{ij} の予測結果を図 3.18~図 3.21 に示す。本モデルは、期待どおり高レイノルズ数の場合において LRR モデルとほぼ同じ結果を与える。ただ、両モデルは $S = 39.9$ (1/s) のケースを除いた全てのケースで非等方性を小さめに予測している。

3.3.2 一様純歪乱流

続いて、一様純歪乱流を取り上げる。純歪乱流場の例としては壁面衝突噴流などがあり、この種の流れは剪断乱流場と並びその工学的重要性が高いと言える。Tucker & Reynolds (1968) は、平均歪が $\partial U_1 / \partial x_1 = -\partial U_3 / \partial x_3 = \text{const.}$ となる実験を行っており、レイノルズ応力の対角成分の流れ方向変化を測定している。図 3.22 にレイノルズ応力の流れ方向変化を示す。この場合、乱流レイノルズ数が $Re_t \approx 250$ と比較的小さいので、本モデルと LRR モデルによる予測に差が見られるが、両モデルとも $\overline{u_2^2}$ の予測値が小さい結果を与える。図 3.23 には $\overline{u_i u_j} / q^2$ の分布を示すが、本モデルは低レイノルズ数効果によってレイノルズ応力の非等方性を大きく予測している。

[†]ただし、Launder らは DNS データから長さスケール l_{DNS} を与えている。 ε を直接与えると計算が発散する場合があり不安定なこともこの手法を用いる一つの理由である。

3.4 壁面乱流への適用

本章では、本モデルを壁面近傍まで適用可能なように拡張する。そのためには、まず各モデル項の壁面漸近挙動を満足させる必要がある。また計算の安定性を考慮して、河村・羽田 (1992) と同様に ε 方程式ではなく $\bar{\varepsilon}$ 方程式を解くことにする。さらに、圧力拡散項が無視できない状況が生じるので、 Π_{ij} に対しその影響を考慮する。まず、これらの壁面補正について解説し、その後十分発達した平行平板間乱流場に適用し、検証を行う。

3.4.1 壁面補正

既存の多くの壁乱流に用いられる応力モデルでは、近年の DNS の結果や三次元画像処理流速計実験結果 (西野・笠木, 1990) によって報告されているような壁乱流の低レイノルズ数効果は表現できない。本節では、前節までに紹介したレイノルズ数依存性を示すモデルを壁面乱流に適用し、壁面乱流の低レイノルズ数効果を表現出来るかどうかを検証する。壁面乱流に適用する際には、通常圧力歪相関項にいわゆる wall reflection 項を加え圧力変動に対する壁面の反射効果を表現する場合が多いが、本研究では Lai & So (1990a) と同様に壁面近傍で各項の壁面漸近挙動のみを満足させ、wall reflection 項は導入しない。以下にその概略を示す。

壁面近傍で、乱れ速度の各成分を壁垂直方向 x_2 にテラー展開すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots \\ u_2 &= b_2 x_2^2 + \cdots \\ u_3 &= c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \cdots \end{aligned} \quad (3.25)$$

この場合、壁面でのレイノルズ応力輸送方程式中の各項の x_2 の最低次でのバランスは表 3.2 に示ようになる。壁面においてこのバランスを満足すれば、少なくともレイノルズ応力各成分の壁面へ漸近する x_2 の次数は正しく再現される。具体的には、粘性拡散項 V_{ij}

表 3.2: レイノルズ応力輸送方程式中の各項の壁面漸近挙動

	V_{ij}	$-\varepsilon_{ij}$	Π_{ij}
$i = 1, j = 1$	$2\nu\overline{a_1^2}$	$-2\nu\overline{a_1^2}$	$O(x_2)$
$i = 1, j = 2$	$6\nu\overline{a_1b_2x_2}$	$-4\nu\overline{a_1b_2x_2}$	$-2\nu\overline{a_1b_2x_2}$
$i = 1, j = 3$	$2\nu\overline{a_1c_1}$	$-2\nu\overline{a_1c_1}$	$O(x_2)$
$i = 2, j = 2$	$12\nu\overline{b_2^2x_2^2}$	$-8\nu\overline{b_2^2x_2^2}$	$-4\nu\overline{b_2^2x_2^2}$
$i = 2, j = 3$	$6\nu\overline{c_1b_2x_2}$	$-4\nu\overline{c_1b_2x_2}$	$-2\nu\overline{c_1b_2x_2}$
$i = 3, j = 3$	$2\nu\overline{c_1^2}$	$-2\nu\overline{c_1^2}$	$O(x_2)$

はモデル化の必要がないので、圧力相関項 Π_{ij} と散逸項 ε_{ij} を壁面漸近挙動を満足するように、 $k/\varepsilon = x_2^2/2\nu$ 等の関係を用いてモデル化する。

壁面漸近挙動を満足する Π_{ij} モデルとしては、Lai & So (1990a) によって提案された次の表現を用いる。

$$-\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_i u_k} n_k n_j + \overline{u_j u_k} n_k n_i) \quad (3.26)$$

また、壁面剪断乱流壁ごく近傍 ($y^+ < 10$) では、 $\overline{u_1^2}$ と $\overline{u_3^2}$ 成分が等化する傾向を示すので (黒田, 1990), 本研究でも Launder & Tselepidakis (1992) にならい, その影響を次のモデルで表現する。

$$-0.05 \left[2a_{ij} + \left(a_{ki} n_k n_l \delta_{lj} - \frac{3}{2} a_{ki} n_k n_j - \frac{3}{2} a_{kj} n_k n_i \right) \right] \quad (3.27)$$

壁乱流の全域に適用可能な Π_{ij} モデルは、壁面近傍に対する表現 (3.26) 及び (3.27) 式と壁から離れた場合の Π_{ij} モデル (3.4) を壁面補正関数 f_{wv} を用いて結び付けることで得られる。

$$\Pi_{ij} = f_{wv} \left\{ -\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_i u_k} n_k n_j + \overline{u_j u_k} n_k n_i) \right.$$

$$\begin{aligned}
& -0.05 \left[2a_{ij} + \left(a_{ki}n_kn_l\delta_{ij} - \frac{3}{2}a_{ki}n_kn_j - \frac{3}{2}a_{kj}n_kn_i \right) \right] \Big\} \\
& + (1 - f_{wv}) C_{wv} f_{wv} \sqrt{Re_t} \left[-1.8\varepsilon a_{ij} - \frac{(c_2 + 8)}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3}P\delta_{ij} \right) \right. \\
& \left. - \frac{(30c_2 - 2)}{55} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{(8c_2 - 2)}{11} \left(D_{ij} - \frac{1}{3}D_{kk}\delta_{ij} \right) \right] \quad (3.28)
\end{aligned}$$

ここで, $c_2 = 0.4$ である.

一方, ε_{ij} の壁面漸近挙動を満足するモデルは次のようになる (Launder & Tselepidakis, 1992).

$$\frac{\varepsilon}{k} \frac{(\overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_k} n_k n_j + \overline{u_j u_k} n_k n_i + \overline{u_k u_l} n_k n_l n_i n_j)}{1 + \frac{3}{2} \frac{\overline{u_k u_l}}{k} n_k n_l} \quad (3.29)$$

散逸に関しても同様に f_{wv} を用いて自由乱流における表現 (3.5) 式と結びつけると

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} = & f_{wv} \frac{\varepsilon}{k} \frac{(\overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_k} n_k n_j + \overline{u_j u_k} n_k n_i + \overline{u_k u_l} n_k n_l n_i n_j)}{1 + \frac{3}{2} \frac{\overline{u_k u_l}}{k} n_k n_l} \\
& + (1 - f_{wv}) \left[\frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + C_{\varepsilon v} f_{\varepsilon v} \varepsilon \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \right] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

となる.

関数 f_{wv} は壁面で1, 壁から離れると0となる関数であり, 本研究では次の2つの候補を挙げる.

$$f_{wv} = \exp \left[- \left(\frac{R_t}{14} \right)^4 \right] \quad (3.31)$$

$$f_{wv} = \exp \left[- \left(\frac{Re_t/S^*}{14} \right)^2 \right] \quad (3.32)$$

ここで, $R_t \equiv y/(\nu^2/\varepsilon)^{1/4}$, $S^* = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ である. 変数 Re_t/S^* は壁面からの距離を陽的に含まず, 壁面補正のための新たな変数と期待される (Yang &

Shih, 1993). この変数は複雑形状境界にも簡単に適用できるという大きな長所があるが, その一方で $S^+ = 0$ となる流れに対しては適用できないという欠点がある. また, Re_τ/S^+ は低レイノルズ数において小さな値を示し, (3.32) 式も好ましくない結果を与えたため, 本研究では, (3.31) 式を用いた計算結果のみを示す.

また, 壁乱流を計算する場合には, 河村・羽田 (1992) と同様に数値安定性上の理由から $\tilde{\varepsilon}$ の輸送方程式を解く. ここで $\tilde{\varepsilon}$ は次式で定義され,

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left(\max \left[\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y}, 0 \right] \right)^2 \quad (3.33)$$

その輸送方程式は次のようになる.

$$\frac{D\tilde{\varepsilon}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_k} + 0.18 \bar{u}_k \bar{u}_i \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_i} \right) + 1.4 \frac{\tilde{\varepsilon} P}{k} - 1.8 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + E - \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}}{k} \quad (3.34)$$

ここで, $\varepsilon = 2\nu(\max[\partial\sqrt{k}/\partial y, 0])^2$ であり, E は

$$E = 2c_{\varepsilon 3} \nu \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_k \bar{u}_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.35)$$

で定義される壁面付加項である. 本研究では, $c_{\varepsilon 3} = 0.07$ とした. また, (3.34) 式右辺最終項は壁面で粘性拡散項とバランスし, $y \rightarrow 0$ のとき $\tilde{\varepsilon} \propto y^2$ を保証する項である.

3.4.2 十分発達した平行平板間乱流

本節では, 前節で解説した壁面まで適用可能なモデルを十分発達した平行平板間乱流へ適用する. 離散化には有限体積法を用いた. なお, 無次元化は全て壁面摩擦速度 u_τ 及び動粘性係数 ν による. また, レイノルズ数 Re_τ は u_τ とチャネル半幅 δ で定義される.

図 3.24 に DNS (黒田, 1990; Kim, Moin & Moser, 1987; Kim, 1990 (unpublished data)) 及び本モデルによる平均速度分布を示す. DNS の結果からは, レイノルズ数が増加するにつれ対数速度分布の縦軸切片が減少する傾向がみられる. 本モデルによってもその

傾向は表現されており、若干対数域での勾配が小さいが良好な予測結果が得られている。 $Re_\tau = 1500$ の場合の予測結果も併せて表示したが、対数速度分布がさらに下方へ下がる結果となった。

図 3.25 には、乱流レイノルズ数 Re_τ の分布を示す。 Re_τ の増加とともに Re_t も増加し、その傾向は本モデルによっても予測されている。壁近傍での予測結果が小さいが、(3.35) 式中の c_{13} をより小さく与える必要があるかもしれない。レイノルズ数 Re_τ が非常に大きい場合、壁近くでは乱れエネルギー k が一定となり、散逸率 ε も乱れの生成項 P とともにある値に漸近するため、 Re_t も Re_τ に依存しない分布形に漸近する。 $Re_\tau = 1500$ の場合における Re_t 分布はおおよそそのような分布形となっていると考えられる。この Re_t の大小が、これ以降に示すレイノルズ応力各成分の非等方性に影響を及ぼすことになる。

図 3.26 及び図 3.27 には、レイノルズ剪断応力 $-\overline{u^+v^+}$ をそれぞれ y/δ 及び y^+ に対して表示した結果を示す。 Re_τ の増加とともに $-\overline{u^+v^+}$ も増加する様子が観察される。本モデルは壁ごく近傍の領域 ($y^+ < 10$) で小さい値を与えピーク値は逆に過大評価するが、その予測結果は全体的には良好である。レイノルズ応力の対角成分に対しては通例にならない、その r.m.s. 値で示すことにし、図 3.28 には y/δ に対する表示を、図 3.29 には y^+ に対する表示を示す。DNS の結果では、レイノルズ数の増加とともに v_{rms}^+ 及び w_{rms}^+ が増大するが、その一方で u_{rms}^+ のピーク値はあまり変化していない。特に、 w_{rms}^+ の増加率が非常に大きいことがわかる。レイノルズ数の増加に伴い、 $\overline{u^+u^+}$ の生成も $\overline{v^+v^+}$ 及び $\overline{w^+w^+}$ への分配も増加するが、それぞれの項の微妙なバランスによってこの様なレイノルズ数依存性を示すと考えられる。本モデルは、 u_{rms}^+ が全体的に小さく予測されているが、 v_{rms}^+ に対しては非常に良好な結果を与えている。この両成分のレイノルズ数依存性は良好に予測されているが、DNS にみられるような w_{rms}^+ の著しい増加は予測できていない。この傾向を適切に表現するためには、 $\overline{u^+u^+}$ から $\overline{v^+v^+}$ よりも $\overline{w^+w^+}$ へのエネルギー再分配を大きく与える必要があるが、これには平均速度勾配を含む項と含まない項のバランス等に関してより複雑な表現が必要となると考えられる。

続いて、図 3.30 にはレイノルズ応力非等方テンソル a_{ij} の分布を示す。本モデルは、壁面における a_{ij} のレイノルズ依存性を示さず、壁面上ではどのレイノルズ数ケースに対し

でも同じ非等方度を与える。このことは壁面近傍の Π_{ij} の非等方性と密接に関連するが、第3.4.1節で解説した壁面補正では、各項の壁面漸近挙動だけが満足され、壁面近傍の Π_{ij} のレイノルズ数依存性が十分にはモデル化されていないことがその原因であると考えられる。また、DNSの結果では a_{11} と a_{33} がレイノルズ数の増加とともに顕著に等方化する傾向が見られるが、本モデルは $\overline{u_1 u_1}$ 成分から $\overline{u_2 u_2}$ 及び $\overline{u_3 u_3}$ へエネルギーが等分配されており、 $\overline{u_3 u_3}$ への選択的な分配は行われていない。なお、壁面近傍で a_{11} と a_{33} が等方化するが、これは(3.27)式の導入による(Launder & Tselepidakis, 1992)。一方、壁から離れた領域ではレイノルズ数の増加に伴う応力の等方化傾向を弱いがらも表現している。

次に、本モデルによる各応力成分の輸送方程式の収支を $Re_\tau = 150$ の場合に対して示す。まず、図3.31には、 $\overline{u^+ u^+}$ 方程式の収支を示す。全体的な予測結果は良好であると言えるが、壁面近傍で ε_{11} が減少する点と速度圧力勾配相関項 Π_{11} と散逸項 ε_{11} のバランスが $y^+ = 20 \sim 50$ の領域で良好ではない。図3.32には $\overline{v^+ v^+}$ 方程式の収支を示す。ここでは $y^+ = 10 \sim 40$ の領域で Π_{22} と ε_{22} が過大評価されているが、互いに打ち消しあいその残差はおおよそ適切な値となっているといえる。続いて、図3.33には $\overline{w^+ w^+}$ 方程式の収支を示すが、 $y^+ < 20$ の領域で Π_{33} が小さくなっているほかはその分布は良好に予測されている。最後に、図3.34には $\overline{u^+ v^+}$ 方程式の収支を示すが、ここでも壁近くでの予測精度が悪い。特に、速度圧力勾配相関項 Π_{12} 及び乱流拡散項 T_{12} が $y^+ < 30$ の領域で過小評価され、これら項の不備を散逸項 ε_{12} を過大評価することで補うという図式になっている。それぞれの項を独立に精度良くモデル化することが、体積力が働く場合など付加的效果が現れる場合には重要になると考えられるが、モデルの簡便性等を考えるとこの程度の予測で満足せざるを得ないであろう。

図3.35及び図3.36には全てのレイノルズ数ケースにおける Π_{11} 及び ε_{11} の分布を示す。両図より Π_{11} はレイノルズ数とともに増加するが、 ε_{11} には大きな変化は見られない。 $\overline{u_1 u_1}$ 成分があまりレイノルズ数依存性を示さない理由は、レイノルズ数の増加に伴い生成項 P_{11} の増加分を主に Π_{11} が他の成分に分配するためである。図3.37及び図3.38には Π_{22} 及び ε_{22} 、図3.39及び図3.40には Π_{33} 及び ε_{33} の分布を示す。両ケースとも gain

として働く Π_{ij} がレイノルズ数とともに増加し、散逸項もそれと釣り合うように増加する。その結果 a_{22} と a_{33} が等方化することになる。図 3.41 及び図 3.42 には Π_{12} 及び ε_{12} 成分を示すが、ここでも生成項 P_{12} の増加分を Π_{12} が補うという傾向が伺える。なお、本モデルによる Π_{11} 及び Π_{33} は壁面においてゼロとならないが、これは (3.27) 式を用いたためである。また、本モデルは全ての Π_{ij} 成分の壁面近く ($y^+ < 40$) でレイノルズ数依存性の予測が不十分である。これが図 3.30 に示した壁近くでの a_{ij} の予測不良に関連していると考えられる。これは、図 3.43 に示す壁面補正関数 f_{we} がレイノルズ数依存性をほとんど示さないことが原因と考えられるが、現時点では壁面補正にもレイノルズ数依存性を含ませることは困難であり、今後の研究課題である。 f_{we} は $y^+ = 20$ ではおよそ 0.7, $y^+ = 30$ ではおよそ 0.2 ~ 0.25 と減少し、この領域になるとほぼ自由乱流用モデルに置き代わる。低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデル中の壁面補正関数 f_μ がおよそ $y^+ = 100$ 程度までその影響が残ることを考えると、今回用いた f_{we} の効く領域は非常に狭く、物理的に考えても妥当であると言える。

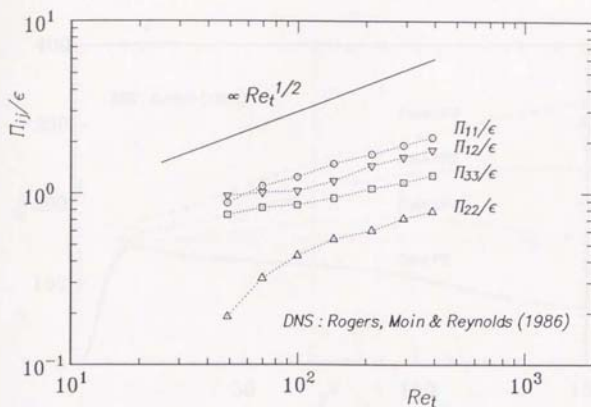


図 3.1: Π_{ij}/ϵ のレイノルズ数依存性 (Rogers, Moin & Reynolds, 1986)

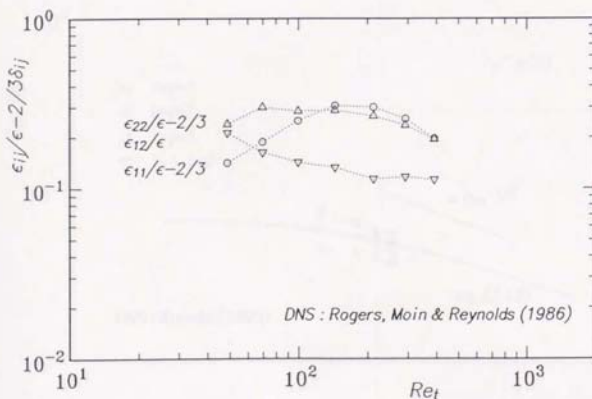


図 3.2: $\epsilon_{ij}/\epsilon - 2/3\delta_{ij}$ のレイノルズ数依存性 (Rogers, Moin & Reynolds, 1986)

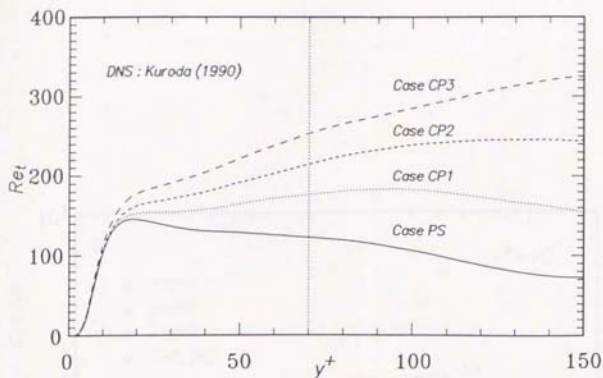
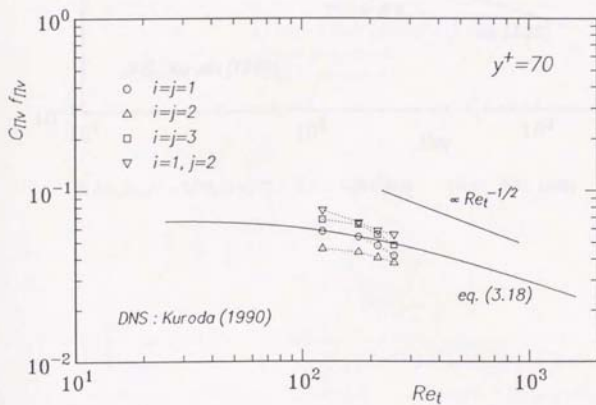


図 3.3: 平行平板間乱流中の乱流レイノルズ数分布 (黒田, 1990)


 図 3.4: $C_{\Pi v} f_{\Pi v}$ のレイノルズ数依存性 (DNS: 黒田, 1990)

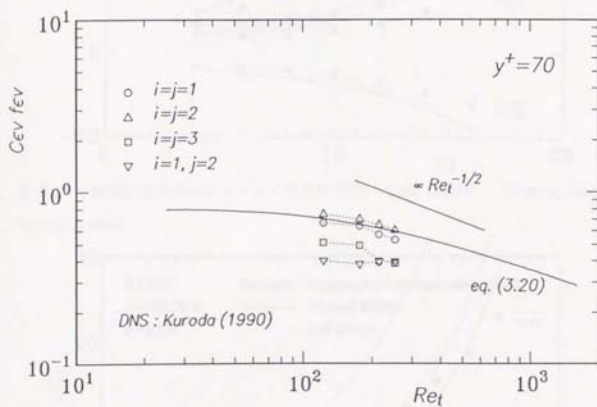


図 3.5: $(\varepsilon_{ij}/\varepsilon - 2/3\delta_{ij})/a_{ij}$ のレイノルズ数依存性 (DNS: 黒田, 1990)

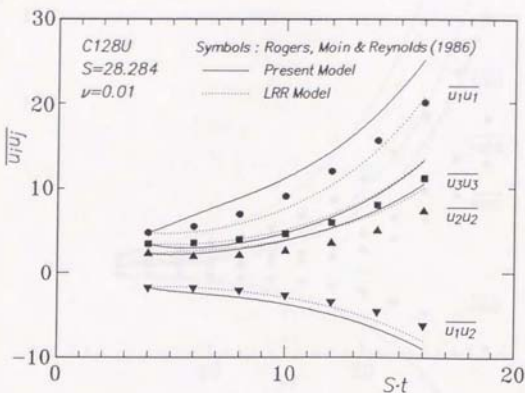


図 3.6: 一樣剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 Case C128U (Rogers, Moin & Reynolds, 1986)

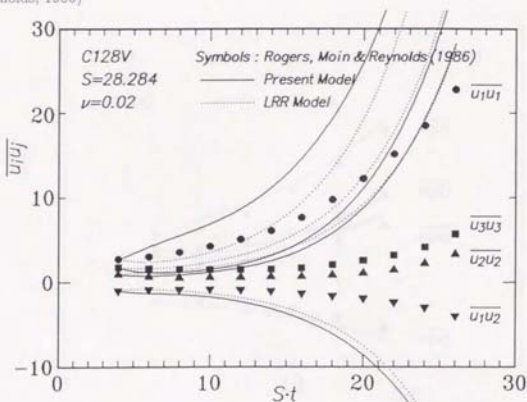


図 3.7: 一樣剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 Case C128V (Rogers, Moin & Reynolds, 1986)

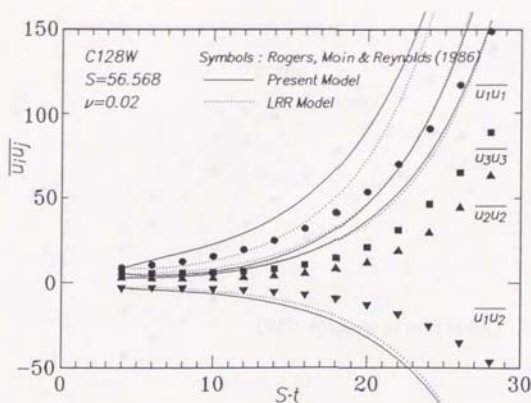


図 3.8: 一様剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 Case C128W (Rogers, Moin & Reynolds, 1986)

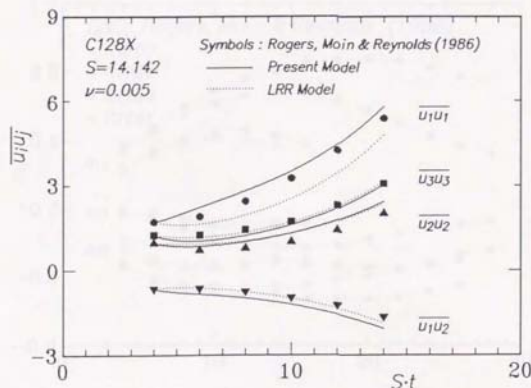


図 3.9: 一様剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 Case C128X (Rogers, Moin & Reynolds, 1986)

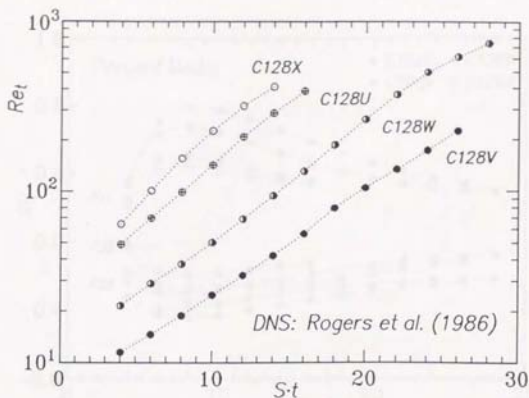


図 3.10: 一様剪断乱流中の乱流レイノルズ数の分布 (Rogers, Moin & Reynolds, 1986)

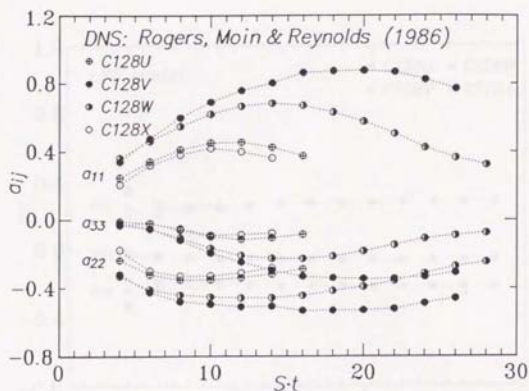


図 3.11: 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 (Rogers, Moin & Reynolds, 1986)

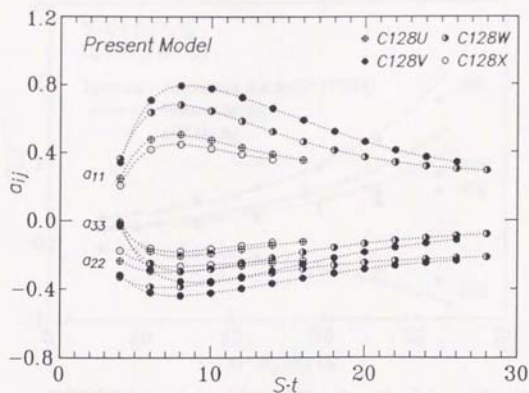


図 3.12: 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 (本モデル)

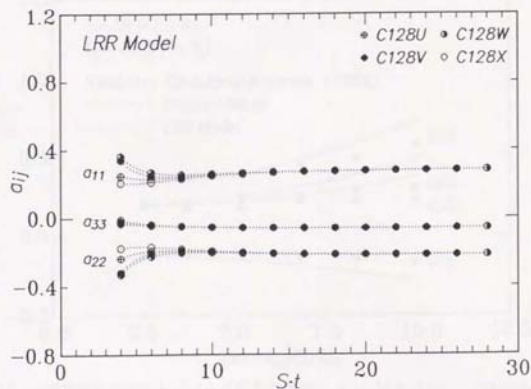


図 3.13: 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 (LRR モデル)

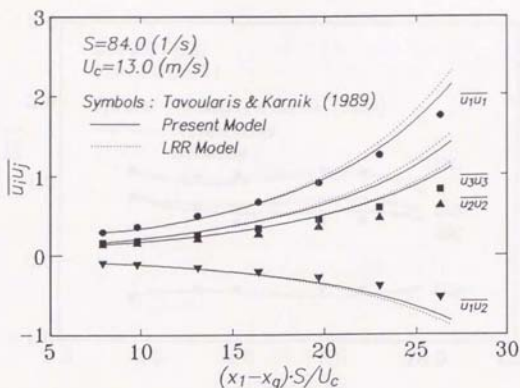


図 3.14: 一樣剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 $S = 84.0$ (1/s) (Tavoularis & Karnik, 1989)

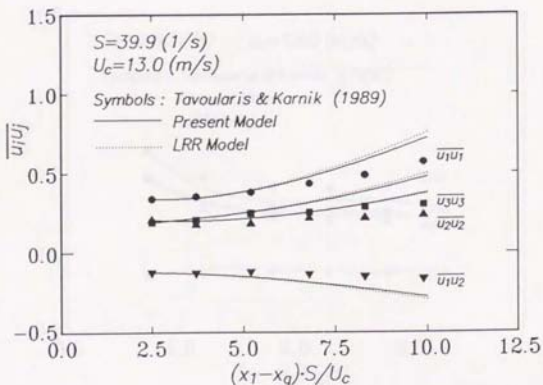


図 3.15: 一樣剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 $S = 39.9$ (1/s) (Tavoularis & Karnik, 1989)

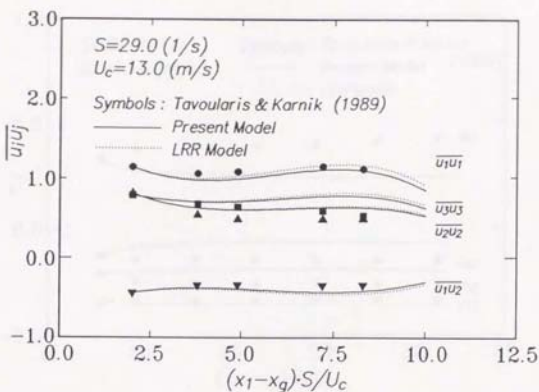


図 3.16: 一様剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 $S = 29.0 \text{ (1/s)}$ (Tavoularis & Karnik, 1989)

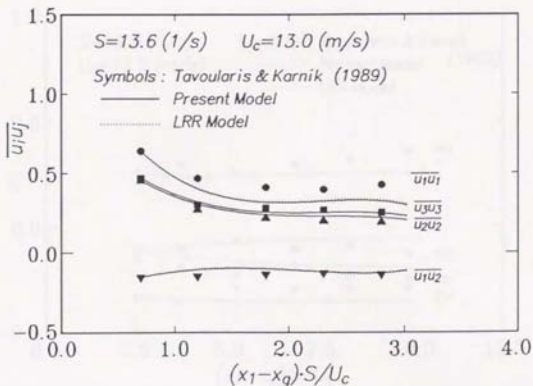


図 3.17: 一様剪断乱流中のレイノルズ応力の予測 $S = 13.6 \text{ (1/s)}$ (Tavoularis & Karnik, 1989)

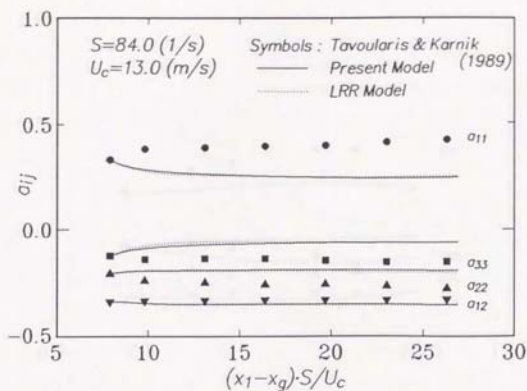


図 3.18: 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 $S = 84.0$ (1/s)
(Tavoularis & Karnik, 1989)

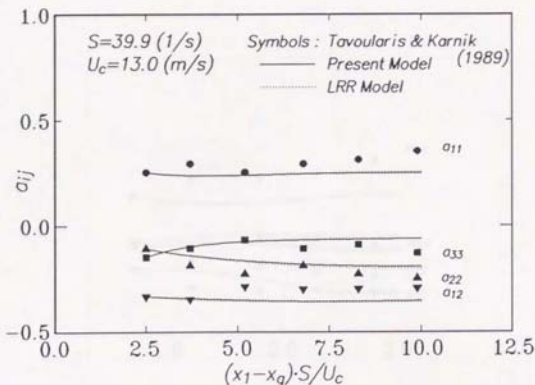


図 3.19: 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 $S = 39.9$ (1/s)
(Tavoularis & Karnik, 1989)

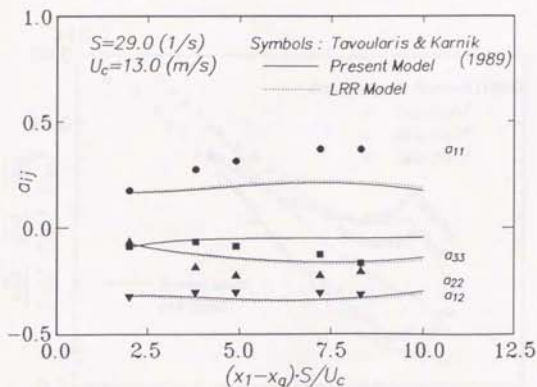


図 3.20: 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 $S = 29.0 \text{ (1/s)}$
(Tavoularis & Karnik, 1989)

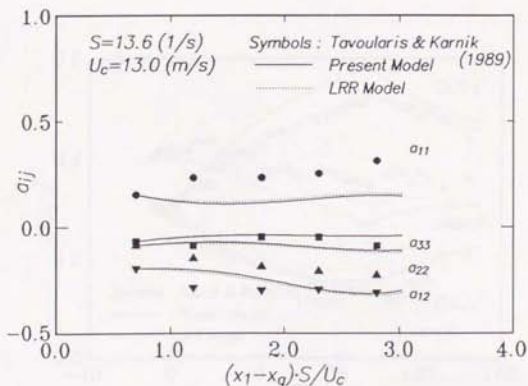


図 3.21: 一様剪断乱流中のレイノルズ応力非等方テンソルの分布 $S = 13.6 \text{ (1/s)}$
(Tavoularis & Karnik, 1989)

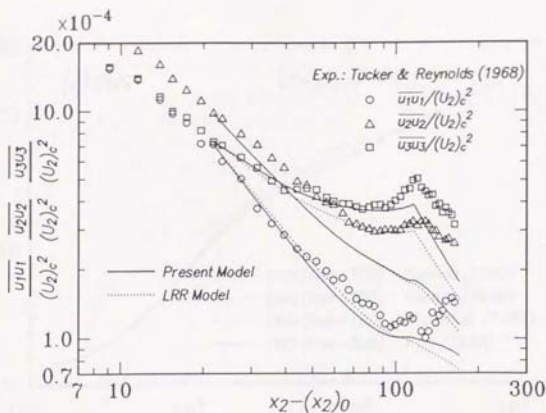


図 3.22: 一様純歪乱流中のレイノルズ応力の予測 (Tucker & Reynolds, 1968)

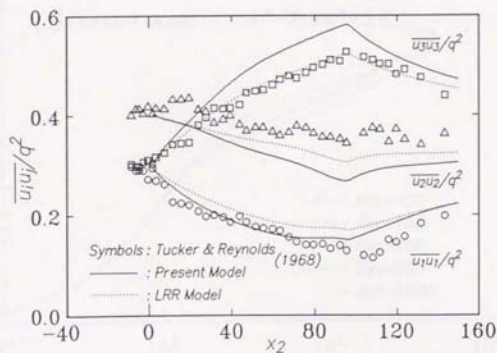


図 3.23: 一様純歪乱流中のレイノルズ応力非等性の予測 (Tucker & Reynolds, 1968)

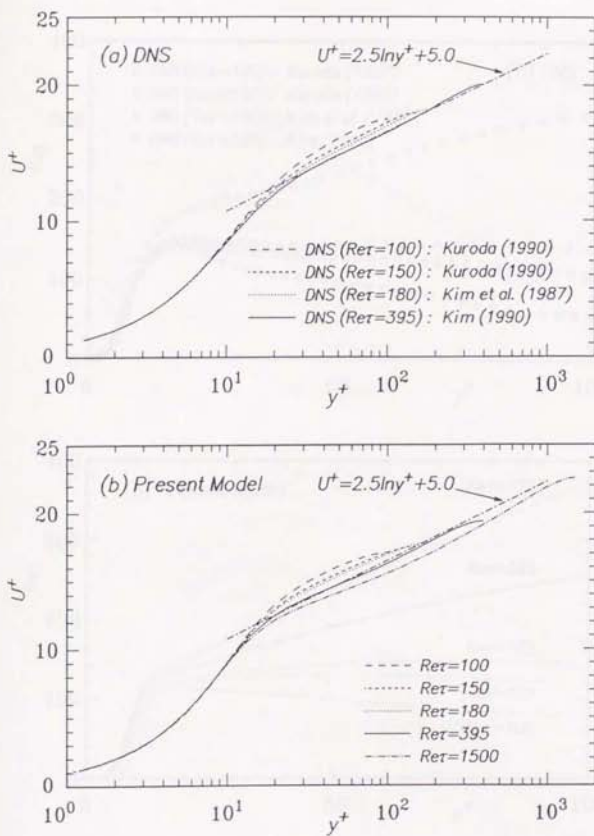


図 3.24: 平行平板間乱流における平均速度分布 (a) DNS (b) モデル

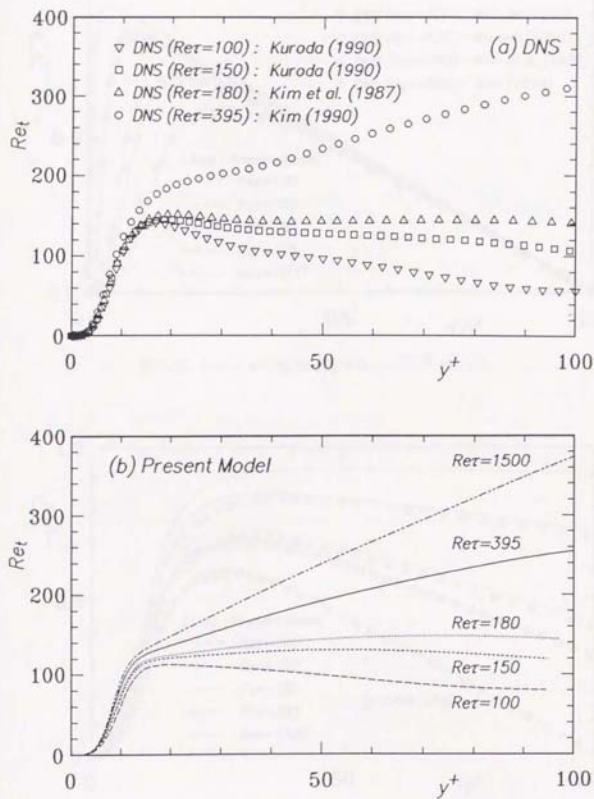
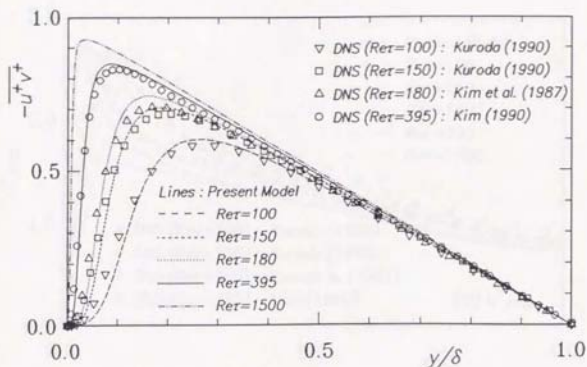
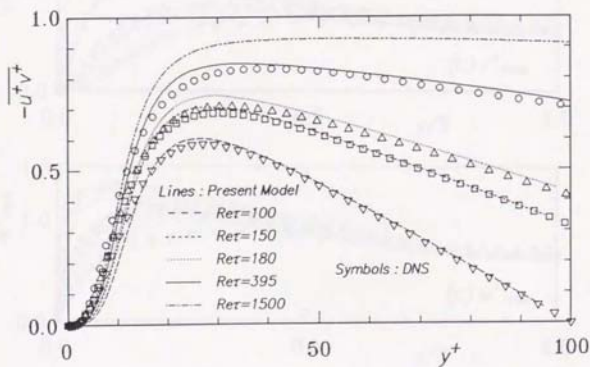
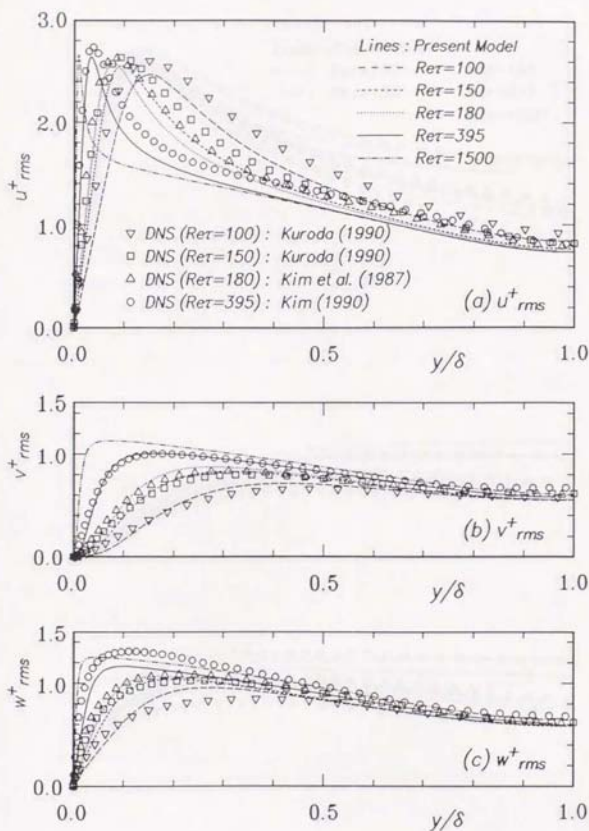
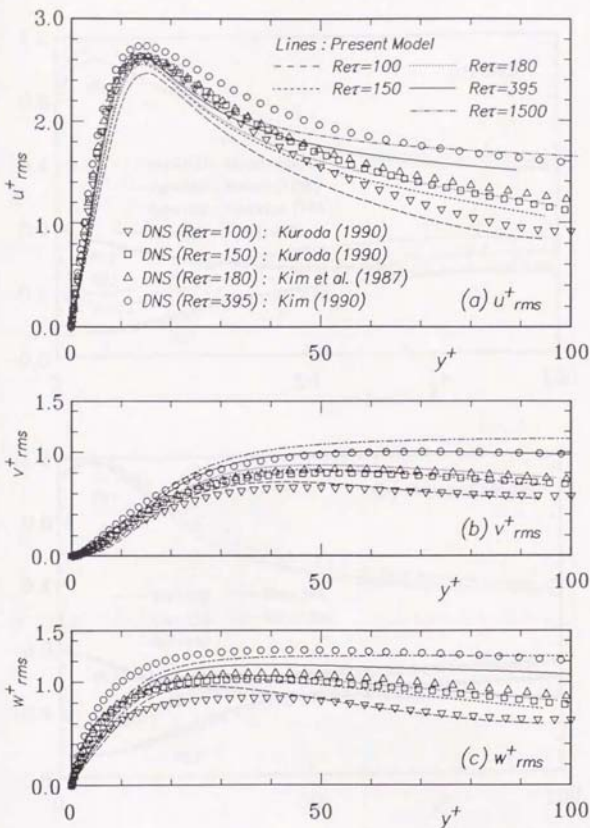


図 3.25: 平行平板間乱流における乱流レイノルズ数分布 (a) DNS (b) 本モデル

図 3.26: レイノルズ剪断応力分布 $-\overline{u^+v^+}$ vs. y/δ 図 3.27: レイノルズ剪断応力分布 $-\overline{u^+v^+}$ vs. y^+

図 3.28: 速度乱れ分布 (a) u^+_{rms} vs. y/δ , (b) v^+_{rms} vs. y/δ , (c) w^+_{rms} vs. y/δ

図 3.29: 速度乱れ分布 (a) u^+_{rms} vs. y^+ , (b) v^+_{rms} vs. y^+ , (c) w^+_{rms} vs. y^+

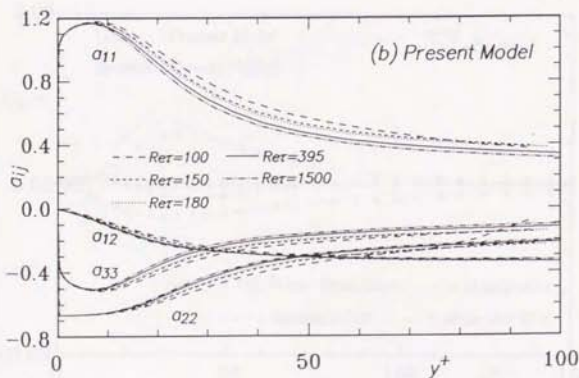
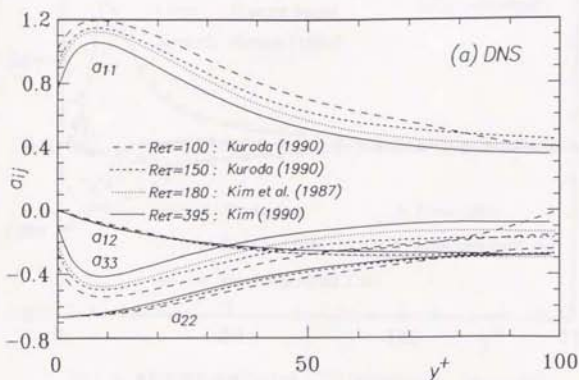
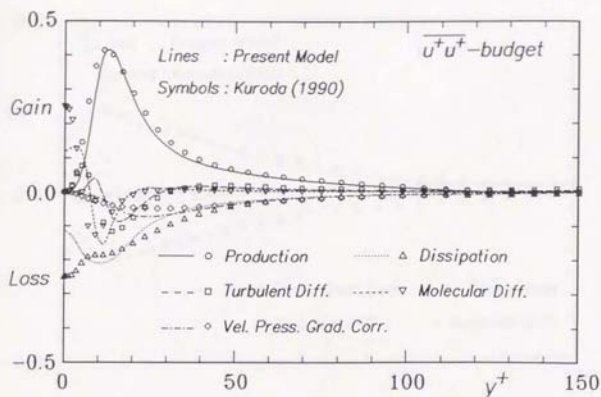
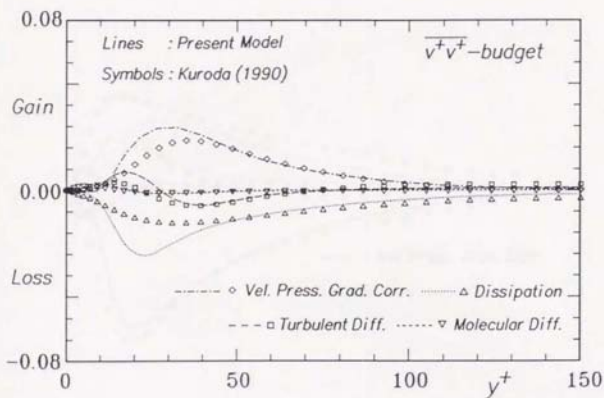
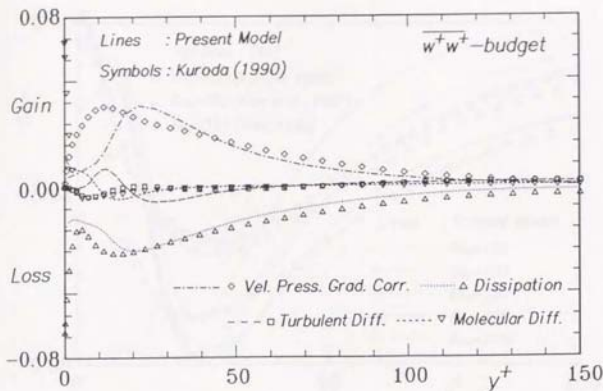
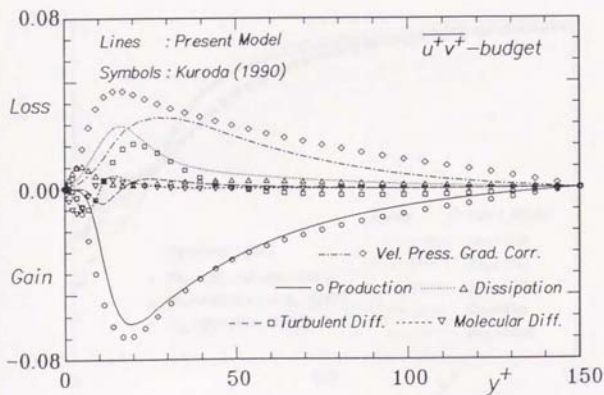
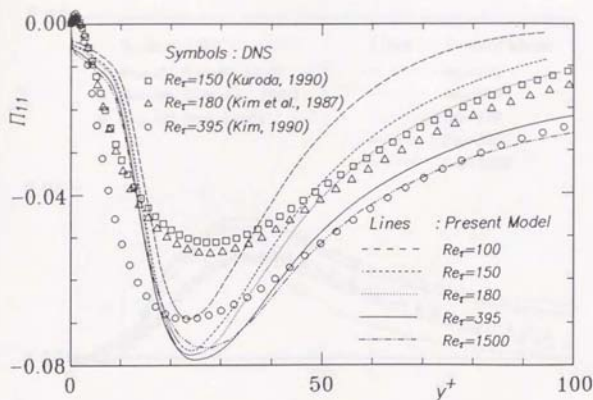
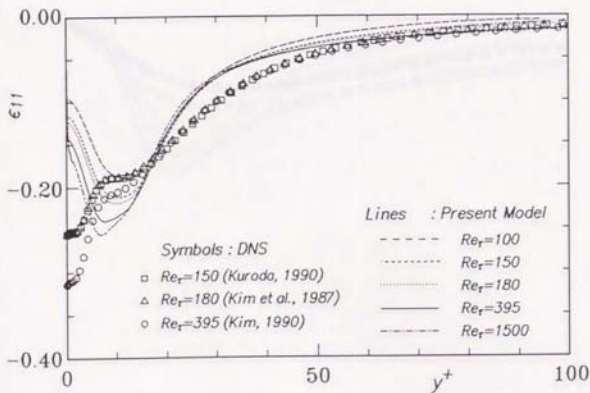
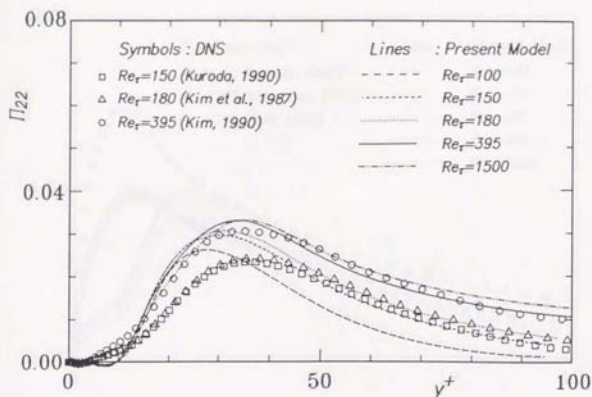
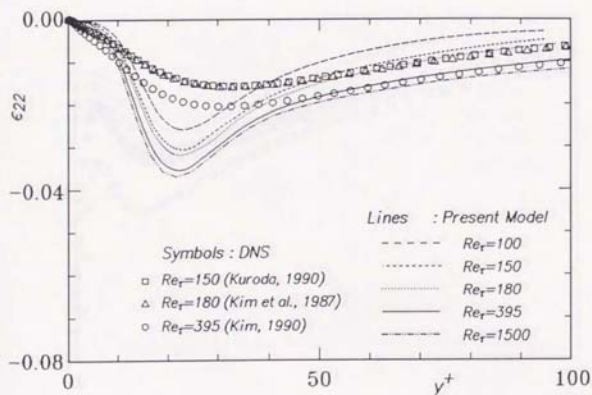


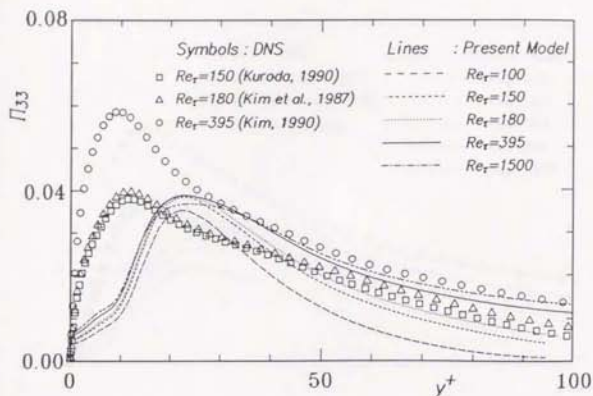
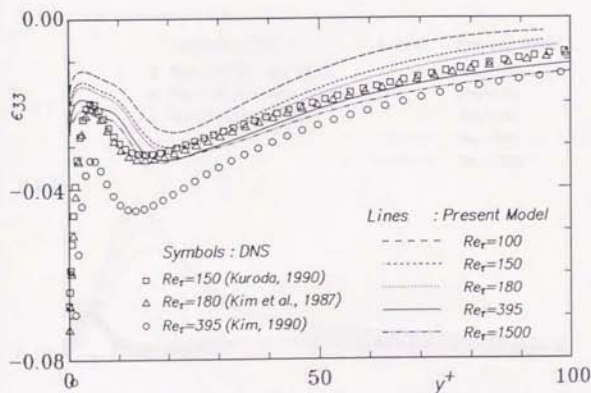
図 3.30: レイノルズ応力非等方テンソル分布 (a) DNS (b) 本モデル

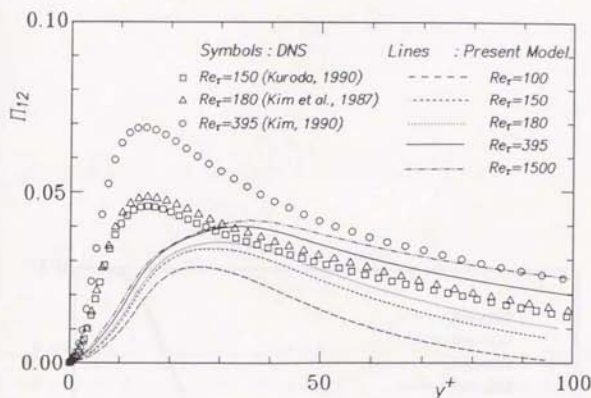
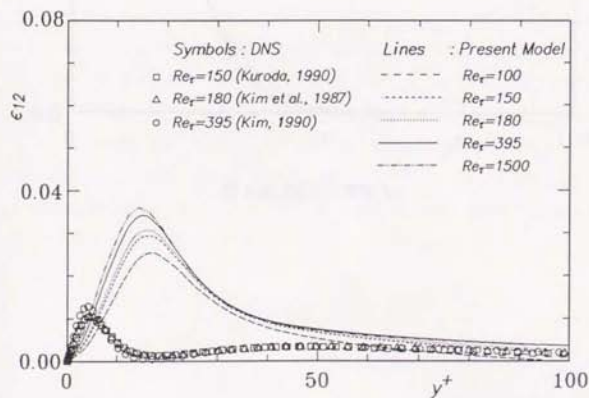
図 3.31: 平行平板間乱流における $\overline{u^+u^+}$ 方程式の収支 ($Re_\tau = 150$)図 3.32: 平行平板間乱流における $\overline{v^+v^+}$ 方程式の収支 ($Re_\tau = 150$)

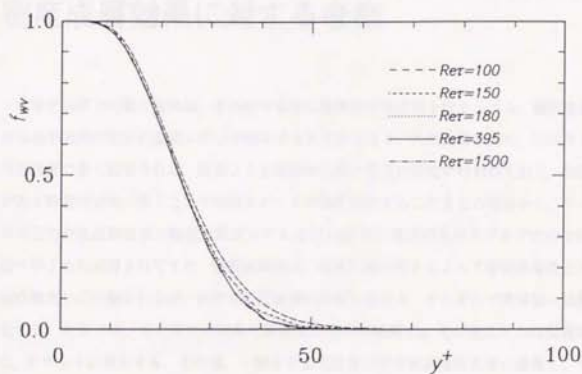
図 3.33: 平行平板間乱流における $\overline{w^+ w^+}$ 方程式の収支 ($Re_\tau = 150$)図 3.34: 平行平板間乱流における $\overline{u^+ v^+}$ 方程式の収支 ($Re_\tau = 150$)

図 3.35: 平行平板間乱流における Π_{11} の分布図 3.36: 平行平板間乱流における ε_{11} の分布

図 3.37: 平行平板間乱流における Π_{22} の分布図 3.38: 平行平板間乱流における ε_{22} の分布

図 3.39: 平行平板間乱流における Π_{33} の分布図 3.40: 平行平板間乱流における ε_{33} の分布

図 3.41: 平行平板間乱流における Π_{12} の分布図 3.42: 平行平板間乱流における ϵ_{12} の分布

図 3.43: 壁面補正関数 f_{wv}

第4章

密度成層効果に対する考察

本章では浮力の働く乱流場、その中でも特に密度成層乱流場を取り上げる。密度成層乱流は水平方向の流れに垂直に浮力が作用する乱流場であり、大気乱流や河川、海洋などの自然現象で多く観察される。従来より気象学の分野で活発に研究が行われており、体積力がある特定の方向に働くことや時間スケールが複数存在することなどの理由から、レイノルズ応力や乱流熱流束の輸送方程式モデル及びLES等の高次の乱流モデルが他の分野に比べ早くから適用されてきた。密度成層流は、温度勾配の向きによって安定成層流と不安定成層流とに分類されるが、両者では乱流場の性質が異なり、それぞれで興味深い現象が生じる。本章では、まず浮力の効果を温度圧力勾配相関項 Π_{θ} 及び速度圧力勾配相関項 Π_{ij} モデル中に導入する。その後、一様な安定成層及び不安定成層乱流場に適用し、モデルの検証を行う。その際、リチャードソン数の影響のみならず、レイノルズ数及びブランドル数の成層効果に及ぼす効果についても詳細に検討する。なお、本研究ではブジネ近似が成立するものとして議論を進める。

4.1 温度圧力勾配相関項及び速度圧力勾配相関項に対する浮力効果のモデリング

圧力のボアソン方程式¹より明かなように、圧力変動場は浮力の影響を受けるので、温度圧力勾配相関項 $\Pi_{i\theta}$ 及び速度圧力勾配相関項 Π_{ij} もその影響を表現することが必要となる。以下にそのモデル化の手順を示す。

まず温度圧力勾配相関項 $\Pi_{i\theta}$ のモデル化について解説する。温度圧力勾配相関項のうち浮力に関係する部分を次の様に無次元化し、浮力生成項と関係づける。

$$\frac{-\frac{1}{\rho}\theta\frac{\partial p_G}{\partial x_i}}{\frac{1}{\rho}\sqrt{k_\theta}\frac{\sqrt{p_G^2}}{\sqrt{\nu k/\varepsilon}}} = C_{\Pi G} f_{\Pi 3} f_{\Pi 2} \frac{-\beta\bar{\theta}^2 g_i}{-\beta u_k \bar{\theta} g_k \frac{\sqrt{k_\theta}}{\sqrt{k}}} \quad (4.1)$$

ここで、 p_G は浮力に由来する圧力変動分であり、次のように乱れエネルギー k と関係づける。

$$\sqrt{p_G^2} = C_{pG} \rho k \quad (4.2)$$

本研究では C_{pG} として次の表現を与えた。

$$C_{pG} \propto \sqrt{A} \frac{G_{kk}}{\varepsilon} \quad (4.3)$$

この関係を用いて (4.1) 式を変形すると、

$$-\frac{1}{\rho}\theta\frac{\partial p_G}{\partial x_i} = C_{\Pi G} f_{\Pi 3} f_{\Pi 2} \sqrt{A} \sqrt{Re_i} G_{i\theta} \quad (4.4)$$

となる。ただし、(4.3) 式の比例定数は $C_{\Pi G}$ の中に含めた。

次に修正関数を決定するが、 $f_{\Pi 2}$ に関しては温度圧力勾配相関項と圧力温度勾配相関項

¹(1.8) 式

が等しいという条件を課すことで (2.24) 式と同じ不等式が得られる。従って、ここでも (2.34) 式と同形の

$$f_{n2} = \min \left[1, \frac{1}{1.2} \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \right] \quad (4.5)$$

を用いる。また、 f_{n3} の決定の際には局所平衡の条件を課する。即ち、温度圧力勾配相関項の浮力効果を含む部分のオーダーが、

$$O \left(-\frac{1}{\rho} \theta \frac{\partial p_G}{\partial x_i} \right) \leq O \left(-\beta \bar{\theta}^2 g_i \right) \quad (4.6)$$

を常に満足するように f_{n3} を決定する。上式に (4.4) 式を代入すると、

$$f_{n3} f_{n2} \sqrt{Re_t} \leq c \quad (4.7)$$

が得られる。ただし、 c はオーダーが 1 の定数である。本研究では (2.33) 式を参考にし、 f_{n3} を次の様に与える。

$$f_{n3} = 1 - \exp \left(-\frac{15}{\sqrt{Re_t} f_{n2}} \right) \quad (4.8)$$

ここで、(4.8) 式の物理的意味を考察してみる。(4.8) 式に現れるパラメータ $1/\sqrt{Re_t} f_{n2}$ は、

$$\frac{1}{\sqrt{Re_t} f_{n2}} = \frac{\max \left[\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}, 1.2 \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{R}{Pr}} \right]}{\frac{k}{\varepsilon}} \quad (4.9)$$

と変形されるが、上式の分子は第 2.1.2 節で解説したように小さいスケールでの速度場と温度場の時間スケールのうち大きい方を選択する表現となっている。また、浮力項 $G_{i\theta}$ のオーダーが

$$-\beta \bar{\theta}^2 g_i = O\left(-\beta \bar{u}_i \bar{\theta} g_i \frac{\sqrt{k_\theta}}{\sqrt{k}}\right) = O\left(\frac{G_{kk}}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \sqrt{k k_\theta}\right) = O\left(\frac{\varepsilon}{k} \sqrt{k k_\theta}\right) \quad (4.10)$$

と見積られる場合には、 $G_{i\theta}$ は乱流熱流束 $\bar{u}_i \bar{\theta}$ ($\sim \sqrt{k k_\theta}$) を k/ε で除したオーダーとなるので、(4.9) 式分母の k/ε は浮力項 $G_{i\theta}$ を特徴づける時間スケールと解釈できる。即ち、(4.9) 式は高波数域での時間スケールと浮力項を特徴づける時間スケールの比と解釈することが出来、このパラメータによって相関が低下する影響が表現されていることになる。

最終的に、(4.4) 式を浮力が働かない場合のモデル¹⁾に加えることで $\Pi_{i\theta}$ に対するモデルを得る。具体的には以下ようになる。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = & C_{\Pi} f_{\Pi 1} f_{\Pi 2} \sqrt{A} \left(0.8 + 0.3 \frac{P}{\varepsilon}\right) \sqrt{Re_i} \sqrt{\frac{k}{2u_{(i)}^3} \frac{\varepsilon}{k} u_{(i)} \bar{\theta}} \\ & + C_{\Pi G} f_{\Pi 3} f_{\Pi 2} \sqrt{A} \sqrt{Re_i} G_{i\theta} \end{aligned} \quad (4.11)$$

ここで $C_{\Pi G}$ の値は、高レイノルズ数の場合に IP モデルで用いられる値-0.5に近い値となるように $C_{\Pi G} = -0.033$ とした。

続いて、速度圧力勾配相関項 Π_{ij} の浮力による貢献分を次のように無次元化し、第一次近似として無次元化した浮力生成項と関係づける (より複雑な表現を用いることも可能である)。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \left(u_i \frac{\partial p_G}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial p_G}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} u_k \frac{\partial p_G}{\partial x_k} = & C_{\Pi v G} f_{\Pi v G} \frac{G_{ij} - \frac{1}{3} G_{kk} \delta_{ij}}{G_{kk}} \\ & \sqrt{k} \frac{\sqrt{p_G/\rho}}{\lambda} \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.2), (4.3) 両式の関係を用い¹¹⁾、 $\Pi_{kk} = 0$ を仮定すると、高レイノルズ数においていわゆる IP モデル¹⁾に漸近するモデルを得ることが出来る。その場合、 $C_{\Pi v G} f_{\Pi v G} = C_{\Pi v} f_{\Pi v}$ と

¹⁾ここでは、(2.14) 式で示される Model 1 を用いることにする。

¹¹⁾ただし (4.3) 式中の \sqrt{A} は、そのままでは速度場モデルにおいてダンピングとして働かないことが知られており (Launder & Tselepidakis, 1992)、従って速度場モデルに対してはこの効果は省くことにする。

¹²⁾(1.65) 式で $\varepsilon_3 = 0.5$ としたものの。

置くことで、以下のモデル式が得られる。

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & C_{nv} f_{nv} \sqrt{Re_t} \left[-1.8 \varepsilon a_{ij} - \frac{(c_2 + 8)}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \right. \\ & - \frac{(30c_2 - 2)}{55} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{(8c_2 - 2)}{11} \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right) \\ & \left. - 0.5 \left(G_{ij} - \frac{1}{3} G_{kk} \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

右辺最終項が浮力による補正項である。

4.2 ε 方程式及び ε_θ 方程式に対する浮力効果のモデリング

浮力による乱れの生成が存在する場合、乱れエネルギーの増減に伴い散逸率 ε も変化すると思われるのが自然である。その場合、 ε 方程式に浮力による新たな生成項が現れることになる。本研究では、Myong & Kasagi (1990) の ε 方程式モデルを基本形とし、次の様な浮力生成項を含むモデルを用いる。

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k^2} + T_\varepsilon \\ & + 1.4 \frac{\varepsilon P}{k} + c_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon G_{kk}}{2k} - 1.8 \left[1 - \frac{2}{9} \exp \left\{ - \left(\frac{Re_t}{6} \right)^2 \right\} \right] \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (4.14)$$

ここで、浮力生成項の係数 $c_{\varepsilon 3}$ は Viollet (1987) を参考にし、

$$c_{\varepsilon 3} = \begin{cases} 0.0 & (\text{安定}) \\ 1.4 & (\text{不安定}) \end{cases} \quad (4.15)$$

と与える。

また、温度乱れの散逸率 ε_θ 方程式にも浮力の影響は考慮されるべきであるとの考察が

ら、浮力効果の時間スケール k/G_{kk} の逆数に比例する項を導入する。

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = & \alpha \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x_1^2} + T_{\varepsilon\theta} \\ & + 0.8 \frac{P_\theta}{k_\theta} \varepsilon_\theta + 0.3 \frac{P}{k} \varepsilon_\theta + c_{P3} \frac{G_{kk}}{2k} \varepsilon_\theta - 1.0 \frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} \varepsilon_\theta - 0.3 \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon_\theta \end{aligned} \quad (4.16)$$

浮力項の係数 c_{P3} は、 ε 方程式と同様に Viollet (1987) 型モデルを採用する。

$$c_{P3} = \begin{cases} 0.0 & (\text{安定}) \\ 0.3 & (\text{不安定}) \end{cases} \quad (4.17)$$

4.3 一様成層剪断乱流場への適用

本節では、前節までに提案したモデルを一様な密度成層剪断乱流に適用し、検証する。 x_1 を流れ方向にとり、重力ベクトルを $(0, -g, 0)$ とすると、一定の平均速度勾配 $S \equiv \partial U_1 / \partial x_2$ 及び平均温度勾配 $S_\theta \equiv \partial \Theta / \partial x_2$ が存在する一様成層剪断流の方程式系は以下のように与えられる。

$$\frac{\partial \overline{u_1 u_1}}{\partial t} = -2 \overline{u_1 u_2} S - \frac{2}{\rho} \overline{u_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} - 2\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \overline{u_2 u_2}}{\partial t} = 2\beta g \overline{u_2 \theta} - \frac{2}{\rho} \overline{u_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} - 2\nu \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \overline{u_3 u_3}}{\partial t} = -\frac{2}{\rho} \overline{u_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} - 2\nu \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \overline{u_1 u_2}}{\partial t} = -\overline{u_2 u_2} S + \beta g \overline{u_1 \theta} - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_1} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \overline{u_2} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) - 2\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \overline{u_1 \theta}}{\partial t} = -\overline{u_1 u_2} S_\theta - \overline{u_2 \theta} S - \frac{1}{\rho} \overline{\theta} \frac{\partial p}{\partial x_1} - (\nu + \alpha) \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \overline{u_2 \theta}}{\partial t} = -\overline{u_2 u_2} S_\theta + \beta g \overline{\theta^2} - \frac{1}{\rho} \overline{\theta} \frac{\partial p}{\partial x_2} - (\nu + \alpha) \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} = -2 \overline{u_2 \theta} S_\theta - 2\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \quad (4.24)$$

なお、ここでは ε 及び ε_θ 方程式は省略した。これらの方程式を眺めると、密度成層が乱流場に及ぼす影響のおおよそが理解できる。即ち、 $\overline{u_2^2}$ 方程式中の浮力生成項を通じ、運動エネルギーとポテンシャルエネルギー間のエネルギーの授受があり、また、 $\overline{u_1 u_2}$ 及び $\overline{u_2 \theta}$ 式中にも浮力生成項が現れ、このことが結果として乱れエネルギーの剪断による生成項 $-\overline{u_1 u_2} S$ や浮力による生成項 $\beta g \overline{u_2 \theta}$ に影響を及ぼしている。レイノルズ応力及び乱流熱流束の輸送方程式モデルを扱うことの最大の利点は、この様な特定の方向に働く体積力に基づく生成項がモデル化せずに陽的に扱える点にあり、従って方程式間の強い連立性を表現できることにある。

ここで、密度成層効果を表現するパラメータとして勾配リチャードソン数を定義する。

$$Ri_g = \beta g \frac{S_\theta}{\overline{S^2}} \quad (4.25)$$

このパラメータは、安定成層流の場合は $S_\theta > 0$ であるから正となり、不安定な場合は逆に負となる。

4.3.1 一様安定成層剪断乱流

まず、安定成層剪断乱流における検証を行う。本研究では、勾配リチャードソン数 $Ri_g = \beta g S_\theta / \overline{S^2}$ の影響のみならずプラントル数やレイノルズ数の変化にも注目しているので、比較する実験データの選定には注意を要する。安定成層剪断乱流は、気象及び土木の分野において古くから研究が行われてきたが、リチャードソン数や安定度パラメータ $\zeta = z/L$ (L は Monin-Obukhov 長さ) によって整理された実験データはばらつきが大きく、これらのデータを用いた乱流モデルの検証も確信性が薄い。このような状況の中で、Gerz, Schumann & Elghobashi (1989) は水 ($Pr = 5.0$) 及び空気 ($Pr = 0.7$) を対象とした一様安定成層剪断乱流の DNS を実行し、各種乱流統計量の高精度なデータを得た。また、Holt, Koseff & Ferziger (1992) も同様に一様安定成層剪断流の DNS を行い、プラントル数及び初期レイノルズ数の影響について詳細に検討している。本研究では、これらの DNS デー

タベースを用い、詳細なモデル検証を行う。

本研究で用いた初期条件を以下に示す。速度場の初期条件には Rogers, Moin & Reynolds (1986) の一様剪断乱流 DNS, C128U ケースの $S \cdot t = 4.0$ の値 $(\bar{u}_i \bar{u}_j)_{\text{Rogers}}, \varepsilon_{\text{Rogers}}$ を基本的に用いた。また、温度場の初期条件はリチャードソン数とプラントル数の関数として与えた。これらの関数は人為的なものであるが、Holt らの DNS の結果と整合性の高いものとした。

$$\bar{u}_i \bar{u}_j = \bar{u}_i \bar{u}_j_{\text{Rogers}} \quad (4.26)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{Rogers}} + \beta g u_2^2 \bar{\theta} \quad (4.27)$$

$$k_\theta = \eta \bar{u}_2^2 \frac{S_\theta}{\beta g} \quad (4.28)$$

$$\varepsilon_\theta = k_\theta \frac{\varepsilon}{k \sqrt{Pr}} \quad (4.29)$$

$$\frac{\bar{u}_1 \bar{\theta}}{u_1^2 \bar{\theta}} = 0.5 \sqrt{\frac{u_1^2}{u_1^2}} \sqrt{\frac{\bar{\theta}}{\theta^2}} \quad (4.30)$$

$$\frac{\bar{u}_2 \bar{\theta}}{u_2^2 \bar{\theta}} = -0.8(1 - Ri_g) \sqrt{\frac{u_1^2}{u_2^2}} \sqrt{\frac{\bar{\theta}}{\theta^2}} \quad (4.31)$$

ここで、 η はポテンシャルエネルギーと鉛直方向乱れエネルギーの比であるが、本研究ではリチャードソン数の関数として、 $\eta = \min[Ri_g, 0.75]$ と与えた。また、初期タイムスケール比はプラントル数の関数 ($Ri_{\text{init}} = \sqrt{Pr}$) として与えた。モデル予測においては Holt らの DNS と同一の初期条件を用いていないため、比較は定性的なものにとどまるもの、モデルの各パラメータに対する依存性を評価することができ、乱流モデル改良のための有益な知見が得られると考えられる。

計算条件を表 4.1 に示す。リチャードソン数、プラントル数及びレイノルズ数 ($\propto 1/\nu$) を変化させ、その影響に注目する。また、比較のため Fu + Craft モデル¹⁾及び LRR + Basic モデル¹¹⁾の結果も併せて示す。

¹⁾11ページ (1.28) 式, 19ページ (1.58) 式, 22ページ (1.67) 式, 14ページ (1.33) 式, 20ページ (1.59) 式, 22ページ (1.68) 式, また、 ε 方程式には 33ページ (1.122) 式, ε_θ 方程式には 36ページ (1.135) 式を使用。

¹¹⁾10ページ (1.16) 式, 16ページ (1.47) 式, 21ページ (1.65) 式の IP モデル, 12ページ (1.29) 式で $c_{1\theta} = 3.0$ としたもの, 17ページ (1.50) 式, 21ページ (1.66) 式の IP モデル, ε 方程式には 32ページ (1.120) 式で $\alpha = 0$ としたもの, ε_θ 方程式には 35ページ (1.132) 式の Jones + Musonge モデルを使用。

表 4.1: 一様安定成層剪断流の計算条件

Ri_g	Pr	ν (cm^2/s)
0.01~1.0	0.01~1000	0.001~0.05
g (cm/s^2)	β ($1/\text{K}$)	S ($1/\text{s}$)
980.665	0.00018	$20\sqrt{2}$

最初にリチャードソン数を変化させることで、安定成層効果に注目する。図 4.1~図 4.4 に Holt ら (1992) の DNS 及び各モデルによる $\overline{u_2\theta}$ の相関係数の時間変化を示す。ここで上付き添え字 ' は r.m.s. 値を意味する。リチャードソン数の増加とともに相関係数が減少し、さらに安定成層効果が強くなると符号が逆転し振動する様子が伺える。この $\overline{u_2\theta}$ の符号の逆転は、即ち、温度の低い方から高い方へ熱が移動することを意味しており、Counter Gradient Heat Flux (CGHF) と呼ばれる (Gerz, Schumann & Elghobashi, 1989; Holt, Koseff & Ferziger, 1992)。図 4.2 に示される本モデルによる予測結果もリチャードソン数の増加とともに相関係数が減少する様子を再現しているが、安定成層効果が強い場合に $\overline{u_2\theta}$ の振動が減衰せず、いつまでも持続している。図 4.3, 図 4.3 に示される LRR + Basic モデル及び Fu + Craft モデルの結果では振動は時間とともに減衰しているが、振動の振れる中心 (時間平均値) が正の有意な値を保持している。各国で観察されるこの振動は、内部重力波ではなく、初期のエネルギーバランスに依存する振動であると考えられ (Gerz et al., 1989), 初期に与えたポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの比、即ち (4.28) 式に強く依存する。一方で、その振動の中心値 (時間平均値) は初期値ではなく乱流モデルに依存した結果を示すと考えられるので、この値についての検討を加えてみる。図 4.1 に示した Holt らの DNS の結果では、 $Ri_g = 1.0$ の場合、計算初期を除いて $-\overline{u_2\theta}/u_2'\theta'$ の時間平均値は負の値をとり CGHF の存在が確認できるが、本モデルのそれは約 0.05, LRR + Basic モデルでは約 0.1, Fu + Craft モデルは約 0.2 という正の値を与え、CGHF は時間平均的には存在していない。これは、(4.23) 式中の温度勾配生成項と浮力生成項のバランス、即ち $\overline{u_2^2}$ と $\overline{\theta^2}$ の相対関係に依存するため、従って ε_θ が十分小さ

いこと (Schumann, 1987), 並びに $\overline{u_2^2}$ が強く減衰することの2点が適切に予測されていることが重要となる。 $\varepsilon, \varepsilon_\theta$ 方程式に対する安定成層効果のモデリングに関してより詳細な検討が必要であろう。

続いて, 図 4.5~図 4.8 には DNS 及び各モデルによって予測されるレイノルズ剪断応力 $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数の時間変化を示す。各モデルとも, レイノルズ剪断応力の相関係数がリチャードソン数の増加とともに減少してゆく傾向は再現しているが, DNS で観察される逆勾配拡散は予測できていない。

次に, プラントル数の効果について検討する。図 4.9~図 4.12 に, $Ri_\theta = 0.5$ のもとでプラントル数が異なる場合の $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数の時間変化を示す。図 4.9 に示される DNS の結果から, プラントル数の増加に伴って $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数は減少することがわかるが, 本モデル (図 4.10) のみがこの傾向を再現している。図 4.11, 図 4.12 に示される LRR+Basic モデル及び Fu+Craft モデルは, タイムスケール比の初期値がプラントル数の関数で与えられているため, 初期において各ケースに対し異なった分布形を示すが, 時間を経るとプラントル数依存性は消失する。

一方, 図 4.13~図 4.16 には, 同じく $Ri_\theta = 0.5$ のもとでプラントル数を変化させた場合のレイノルズ剪断応力 $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数の時間変化を示す。乱流熱流束の場合とは異なり, $Pr = 1.0$ で最も安定成層効果が強まることが DNS の結果 (図 4.13) から判る。図 4.14 に示した本モデルは, $Pr = 0.1$ の場合に最も相関が低下するが, $Pr = 0.01$ 及び $Pr = 4.0$ の場合には増加しており, DNS と定性的に一致した予測結果を与えている。他の2つのモデルの予測結果は振動を示しているが, 明らかなプラントル数依存性は認められない¹。ここで, $\overline{u_2 \theta}$ と $\overline{u_1 u_2}$ の異なるプラントル数依存性は次のような理由によって生じると考えられる。即ち, $\overline{u_2 \theta}$ 方程式の生成項である $-\overline{u_2^2 S_\theta}$ と $\beta g \overline{\theta^2}$ は異符号であり, プラントル数の増加とともに後者が卓越することで $\overline{u_2 \theta}$ は減少するが, $\overline{u_1 u_2}$ 方程式の浮力生成項 $\beta g \overline{u_1 \theta}$ は $\overline{u_2 \theta}$ の浮力生成項 $\beta g \overline{\theta^2}$ 程は増加せず, 従って $\overline{u_1 u_2}$ の減少は抑制されるのである。

¹この原因は, 主に用いている ε_θ 方程式のモデルによると考えられる。実際に, Jones-Musonge の ε_θ 方程式ではなく, 本モデルと同一の ε_θ 方程式を用いて LRR+Basic モデルの計算を行ったところ, プラントル数依存性が予測された。

レイノルズ数の異なる場合の乱流熱流束 $\overline{u_2\theta}$ 及びレイノルズ応力 $\overline{u_1u_2}$ の相関係数の時間変化を、それぞれ図 4.17 及び図 4.18 に示す。LRR + Basic モデル及び Fu + Craft モデルはレイノルズ数依存性を示さないで、本モデルのみ3種のレイノルズ数で計算した結果を示す。両図から、本モデルはレイノルズ数が低いほど安定成層効果が強くなる結果を与えることがわかる。このことは次に示すステーションナリ・リチャードソン数のレイノルズ数依存性からも明かとなる。浮力が働かず、剪断が十分に大きい ($S^* \gg 1$) 剪断乱流では、平均剪断による乱れの生成が散逸を上回り、乱流エネルギーは単調に増加してゆくことが知られている。ところが安定成層流の場合は、浮力生成項が存在するため、あるリチャードソン数で乱れエネルギーのレベルが一定に保たれる状態に移行する。即ち、定常状態における乱流エネルギー方程式

$$\frac{\partial k}{\partial t} = P + \frac{G_{22}}{2} - \varepsilon = 0 \quad (4.32)$$

が成立する勾配リチャードソン数 Ri_g を特にステーションナリ・リチャードソン数 Ri_s と定義する。 Ri_s は Rohr (1985) の実験では 0.21, Gerz, Schumann & Elghobashi (1989) の DNS では 0.1 と様々な値が報告されているが、このパラメータは主にレイノルズ数の関数になっていることが Holt ら (1992) の DNS データによって示されている。図 4.19 に DNS 及び各モデルによって与えられる Ri_s のレイノルズ数依存性を示す。DNS の場合、横軸の $Re_{A11,1}$ は次式で定義される流れ方向積分スケール

$$A_{11,1} = \frac{1}{\overline{u_1^2}} \int \overline{u_1(x_m)u_1(x_m+r_1)} dr_1 \quad (4.33)$$

と $\sqrt{2\varepsilon}$ で定義されており (ただし、 r_1 は x_1 方向距離)、定量的な比較はできないが[†]、本モデルは DNS の結果と同様にレイノルズ数とともに Ri_s が増加する様子を良好に再現している。その漸近値は DNS では約 0.25 であるが、本モデルでは約 0.3 となった。低レイノルズ数では $\overline{u_1^2}$ から $\overline{u_2^2}$ への再分配が減少し、 $\overline{u_2^2}$ 方程式で浮力生成項によってわずかに

[†]モデル予測では、代表速度 \times 代表長さが 1 としたレイノルズ数 $1/\nu$ を用いているが、これは乱れの速度 k 及び長さスケール $k^{3/2}/\varepsilon$ で定義されるレイノルズ数 $k^2/\nu\varepsilon$ とこの場合は同オーダーとなる。

エネルギーを奪えば、 $\overline{w_2^2}$ の増加を抑えることが可能である。このような速度圧力勾配相関項 Π_{ij} のレイノルズ数を適切にモデル化することが特に重要であると言える。本モデル以外の2つのモデルはレイノルズ数依存性を全く示さない。特に Fu + Craft モデルは $Ri_g = 0.1$ という結果を与え、そのモデルの複雑さにもかかわらず最も精度の低い結果となった。

ステーションナリ・リチャードソン数はレイノルズ数のみならずプラントル数の関数にもなっており、その依存性を図 4.20 に示す。本モデルは、 $0.1 < Pr < 1.0$ で Ri_g が最小となり、それ以下及びそれ以上のプラントル数域では増加してゆく結果を与える。高プラントル数の場合に Ri_g が増加するのは、先にも述べたように $\overline{u_2\theta}$ 方程式中の浮力生成項 $\beta g \overline{\theta^2} > 0$ が $\overline{\theta^2}$ の増加とともに増大することで $\overline{u_2\theta} < 0$ がゼロに近づき、その結果 $\overline{u_2\theta}$ 方程式中の浮力生成項 $2\beta g \overline{u_2\theta}$ が小さくなるためである。逆に低プラントル数の場合は、 $\overline{u_2\theta}$ 方程式中の散逸項 $\varepsilon_{2\theta}$ が増大することで $\overline{u_2\theta}$ がゼロに近づき、 $\overline{u_2\theta}$ 方程式の浮力項 $2\beta g \overline{u_2\theta}$ が減少するためである。比較するデータが存在しないため検証することはできないが、物理的に妥当な結果であると考えられる。

図 4.21 及び図 4.22 には、 $\overline{u_2\theta}$ の相関係数の Ri_g 依存性を示す。それぞれプラントル数及びレイノルズ数を変化させ計算を行った。また、図示したモデル予測値は $S-t = 8.0 \sim 16.0$ の平均値である。比較のため、Komori ら (1983) の開水路の実験データ及び Gerz ら (1989) の2種類のプラントル数 ($Pr = 0.7, 0.5$) における DNS データもあわせて表示する。両図から、本モデルはプラントル数が高く、またレイノルズ数が低いほど安定成層化効果が強まる様子を再現することがわかる。このプラントル数依存性は、DNS データによっても示されている。また、どのモデルによっても CGHF は予測されておらず、さらに、本モデル以外の2つのモデルは両パラメータに対する依存性は全く示さない。

図 4.23 及び図 4.24 には、 $\overline{w_1 w_2}$ の相関係数の Ri_g 依存性を示す。本モデルによる予測結果は、レイノルズ数の減少とともにその値が低下するが、プラントル数依存性は DNS と同様に顕著でない。

図 4.25 及び図 4.26 にレイノルズ応力対角成分の比 $\overline{u_1^2}/\overline{u_2^2}$ を示す。本モデルの結果は、プラントル数が小さい程、浮力生成項 $2\beta g \overline{u_2\theta}$ が減衰せず、 $\overline{u_2^2}$ は相対的に小さくなる結

果を示している。一方、レイノルズ数が小さくなる場合は、 Ri_g が小さくなると再配分項も小さくなるため $\overline{u^2}/\overline{u_2^2}$ は増大するが、 Ri_g がある程度以上になると高プラントル数の場合と同様に浮力生成項が小さくなるため、相対的に $\overline{u^2}$ が大きくなるという結果を与えている。

続いて、図 4.27 及び図 4.28 には両スカラーフラックスの比 $-\overline{u_2\theta}/\overline{u_1\theta}$ を示す。プラントル数が大きいほど、またレイノルズ数が小さいほど安定成層効果が強く、この比が小さくなる様子が予測されている。

最後に、乱流プラントル数 $Pr_t \equiv \frac{\overline{u_1 u_2} S_\theta}{u_2 \theta S}$ の分布を図 4.29 及び図 4.30 に示す。ここでは、比較のため Webster (1964) の空気流の実験データ及び $Pr = 0.7$ の場合の DNS データ (Gerz ら, 1989) の結果も表示する。本モデルは、高プラントル数及び低レイノルズ数の場合ほど Pr_t が増大する結果を与えた。特に、 $Pr = 0.7$ の場合は Gerz らの DNS データと定性的に一致した結果を与えている。

全体として、本モデル及び LRR + Basic モデルはリチャードソン数の効果を適切に表現しているといえる。さらに、本モデルはプラントル数及びレイノルズ数の影響についても DNS と定性的に一致する結果を与えており、良好な予測結果が得られた。一方、Fu + Craft モデルは精度が最も低く、安定成層効果が適切にモデル中に導入されていない可能性がある。

4.3.2 一様不安定成層剪断乱流

続いて、不安定成層剪断乱流へモデルを適用する。一様不安定成層流の場合も安定な場合と同様に次に示す人工的な初期条件を与え、計算を行った。

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_i u_j}_{\text{Rogers}} \quad (4.34)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{Rogers}} + \beta g \overline{u_2^2} \theta \quad (4.35)$$

$$\overline{\theta^2} = -0.01 \overline{u_2^2} \frac{S_\theta}{\beta g} \quad (4.36)$$

$$\varepsilon_\theta = k_\theta \frac{\varepsilon}{k \sqrt{Pr}} \quad (4.37)$$

$$\overline{u_1 \theta} = -0.5 \sqrt{\overline{u_1^2}} \sqrt{\overline{\theta^2}} \quad (4.38)$$

$$\overline{u_2 \theta} = 0.8 \sqrt{\overline{u_2^2}} \sqrt{\overline{\theta^2}} \quad (4.39)$$

ここで、速度場の初期条件には安定な場合と同様に Rogers, Moin & Reynolds (1986) の一様剪断乱流 DNS, C128U ケースの $S-t = 4.0$ の値 ($\overline{u_i u_j}_{\text{Rogers}}, \varepsilon_{\text{Rogers}}$) を用いた。また、計算条件を表 4.2 に示す。ここでもパラメータとしてリチャードソン数、プラントル数及びレイノルズ数 (動粘性係数) を変化させ計算を行った。

用いたモデルは安定成層流の場合と基本的に同一であるが、 ε 及び ε_θ 方程式には浮力生成項を加えている。本モデルの場合は、第 4.2 節で述べた通りであるが、LRR+Basic モデルの場合は、32 ページ (1.120) 式の ε 方程式で $\alpha = 1$ としたもの、 ε_θ 方程式には 35 ページ (1.132) 式の Jones + Musonge モデルに $1.4 \frac{G_{jk}}{2k} \varepsilon_\theta$ を加えたものを使用した。Fu+Craft モデルの場合には、 ε 方程式として 33 ページ (1.122) 式に $\frac{G_{jk}}{2k} \varepsilon$ を加えたもの、 ε_θ 方程式として 36 ページ (1.135) 式に $1.3 R \frac{G_{jk}}{k} \varepsilon_\theta$ を加えたものを使用した。

比較は Ueda, Mitsumoto & Komori (1981), Pruitt, Morgan & Lourence (1973), Businger, Wyngaard, Izumi & Bradley (1971), Charnock (1967) の実験データを用いる。Ueda らの実験は開水路チャネル乱流, Pruitt ら, Businger ら及び Charnock の実験は大気境界層に対するものであり、いずれも一様な乱流場に対するものではない。しかしながら、リチャードソン数の定性的な効果については比較の対象となると考えられるので、ここで取

表 4.2: 一様不安定成層剪断流の計算条件

Ri_g	Pr	ν (cm ² /s)
-0.01 ~ -3.0	0.1 ~ 5.0	0.001 ~ 0.05
g (cm/s ²)	β (1/K)	S (1/s)
980.665	0.00018	$20\sqrt{2}$

り上げることとする。Ueda らの実験データに関しては、比較に際して次のような注意が必要である。開水路の自由表面近くでは平均速度勾配は小さくなるが、温度勾配は最も大きな値を有し、従ってこの領域での $|Ri_g|$ は増加する。しかしながら、このことは必ずしも浮力効果が增大しているということを意味しない。この領域では、レイノルズ応力は主に乱流拡散と浮力生成項によってまかなわれており、平均温度勾配と浮力による生成が共存する温度場とは質的に異なると解釈すべきである。

モデルによる予測結果を示す。図 4.31 及び図 4.32 には、プラントル数及びレイノルズ数をそれぞれ変化させた場合の $\overline{u_2\theta}$ の相関係数の値を示す。ただし、モデルの予測結果は $S \cdot t = 8.0 \sim 16.0$ の平均値である。Ueda らの実験値は非常に小さい値を示しているが、 $-Ri_g \rightarrow 0$ の漸近値が浮力の働かない一様剪断乱流の場合と比較して小さすぎるため、これは実験の境界条件の影響と考えられる。定性的には、不安定成層効果が強まるにつれ $\overline{u_2\theta}$ の相関係数が増加する傾向が、本モデル及び LRR+Basic モデルによって予測されている。ただし、不安定効果が強い場合に本モデルはプラントル数及びレイノルズ数に対して弱い依存性しか示していない。これは、バクレ数が増大したことが原因であると考えられる。なお、Fu + Craft モデルは他のモデルとは異なる挙動を示し、しかも強不安定な場合には解が得られなかったため、 $-Ri_g < 0.1$ の結果のみを示した。

図 4.33 及び図 4.34 には $\overline{w_1 w_2}$ の相関係数のリチャードソン数依存性を示す。 $\overline{w_1 w_2}$ の相関係数は減少し、熱輸送に比べ運動量の乱流輸送が抑制されていることがわかる。これは、 $\overline{w_1 w_2}$ の浮力による生成項 $\beta g \overline{u_1 \theta}$ が $\overline{u_2 \theta}$ の浮力生成項 $\beta g \overline{\theta^2}$ ほどには増加しないことが主な原因と言える。

図 4.35 及び図 4.36 にはレイノルズ応力対角成分の比 $\overline{u_2 u_2} / \overline{w_1 w_1}$ のリチャードソン数依存性を示す。本モデル及び LRR + Basic モデルの予測結果は、実験値に比べ非常に大きな値を示してはいるが、これも先に述べた様に流れ場の違いによるものと推測される。

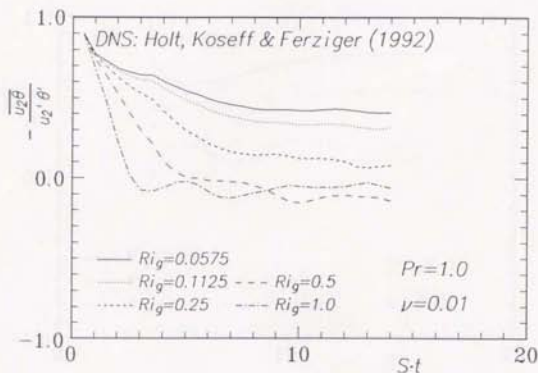
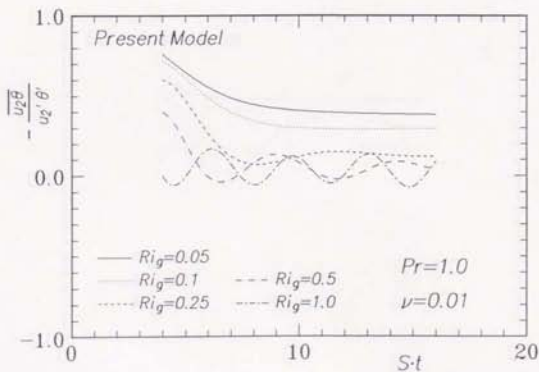
続いて、図 4.37 及び図 4.38 に同スカラーフラックスの比を示すが、本モデルと LRR + Basic モデルは似た結果を示した。両モデルとも、不安定度の増加とともに $-\overline{u_2 \theta} / \overline{u_1 \theta}$ が著しく増加してゆく様子を再現している。モデルによる予測結果は Ueda らの実験値に比べ大きな値を示しているが、Wyngaard, Cote & Izumi (1971) の実験データとはおおよ

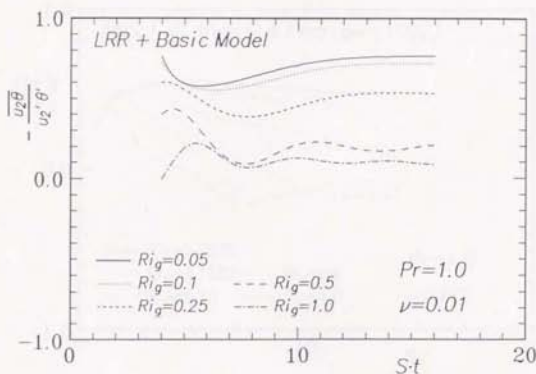
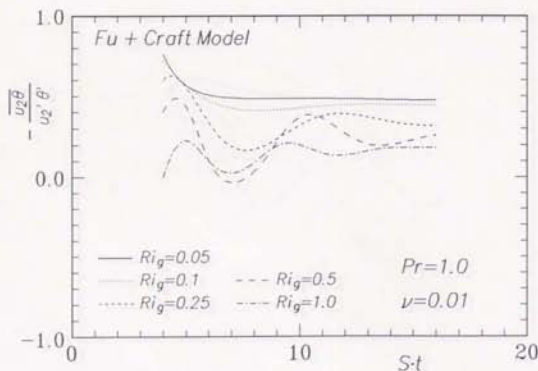
そよい一致を示した¹⁾。

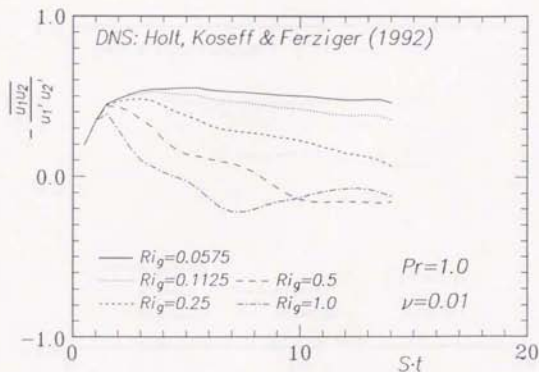
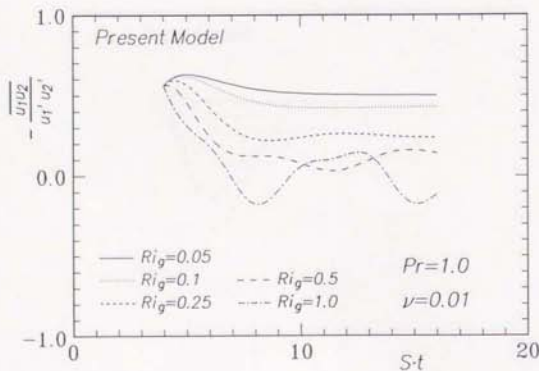
最後に、乱流プラントル数の逆数の分布を図 4.39 及び図 4.40 に示す。本モデルによる予測結果は大気境界層での実験値と同様に単調増加する分布形を示し、特に Charnock のデータとよく一致している。このことは、先にも述べたように熱の輸送が運動量の輸送に比べ活発であることを示している。一方、LRR+Basic モデル及び Fu+Craft モデルは、逆に不安定成層化が強まるにつれ $1/Pr_t$ が減少している。LRR+Basic モデルは、他の ε_0 方程式モデル (Fu+Craft モデルと同一のもの) を用いた場合には良好な結果を与えており、 ε_0 方程式モデルの不備がその原因であると考えられる。

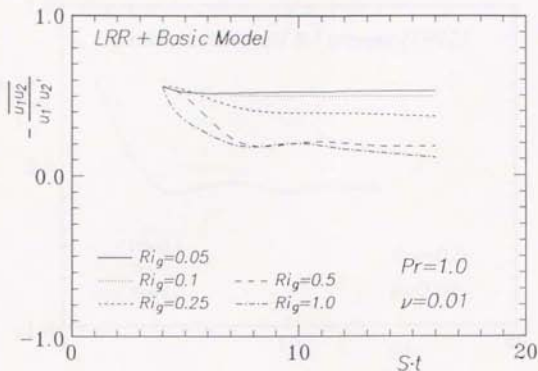
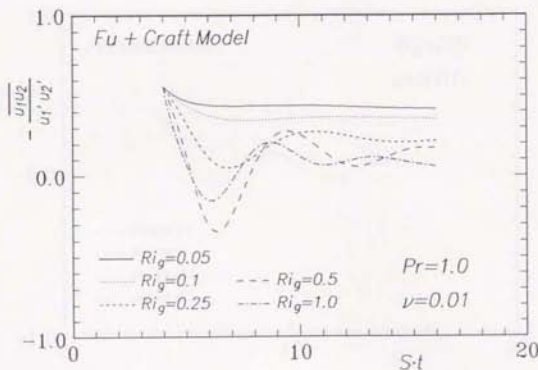
全体として、本モデルは Ri_0 の効果を適切に表現しており、良好な予測結果が得られたと言える。LRR+Basic モデルもおおよそ良好な結果を与えたが、その一方で Fu + Craft モデルの結果は安定成層流の場合と同様に芳しくなく、そのモデル化手法が密度成層効果を扱う場合には不適切なものであると考えられる。

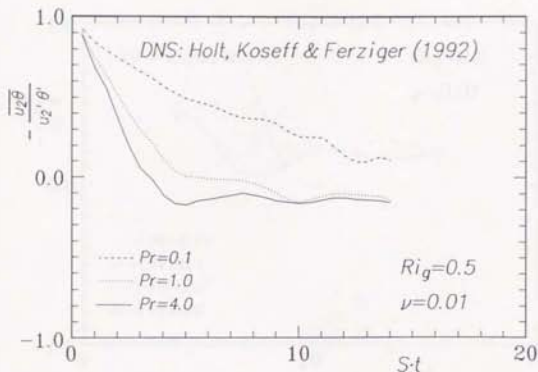
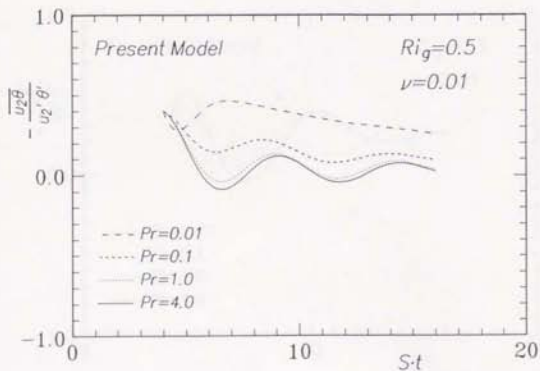
¹⁾Wynngaard らの実験データは、リチャードソン数 Ri_0 ではなく、安定度パラメータ $\zeta = z/L$ を用いて整理されているので本図には記載していない。

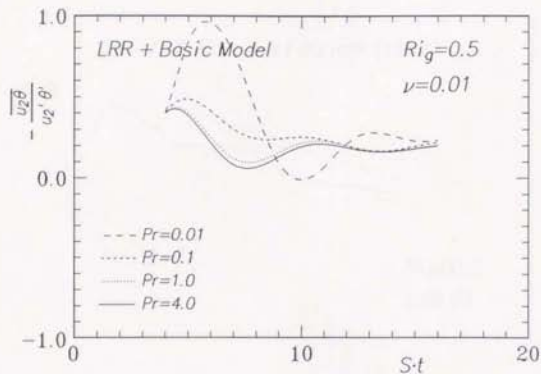
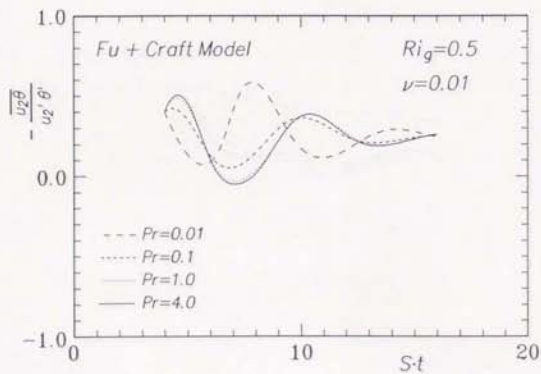
図 4.1: $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (DNS: Holt, Koseff & Ferziger, 1992)図 4.2: $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (本モデル)

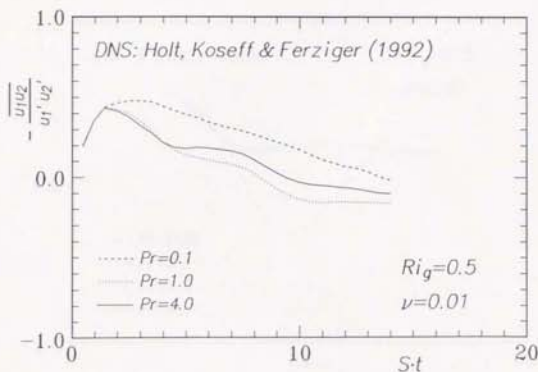
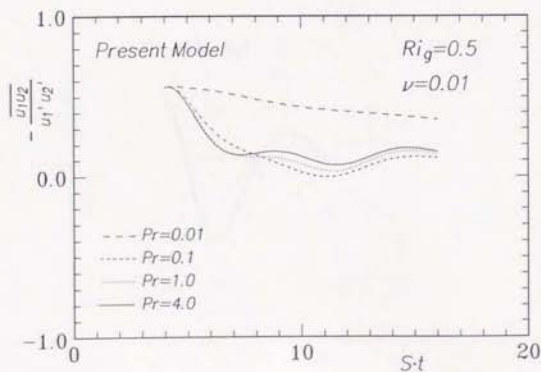
図 4.3: $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (LRR + Basic モデル)図 4.4: $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (Fu + Craft モデル)

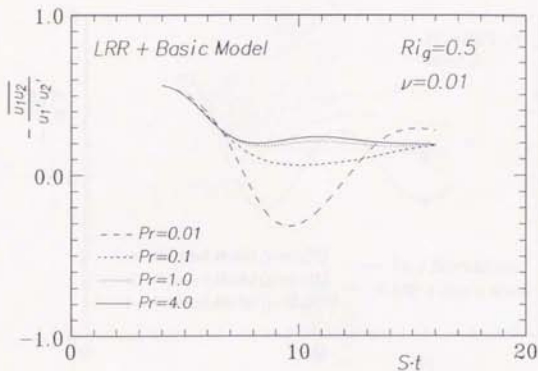
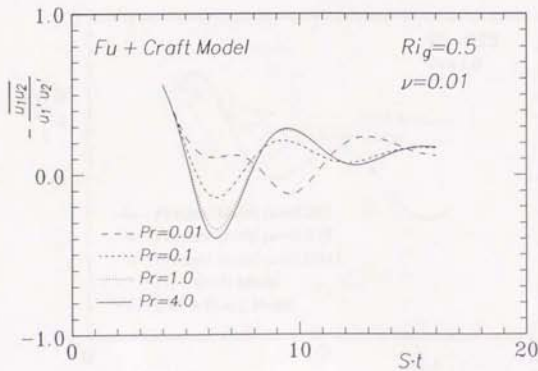
図 4.5: $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (DNS; Holt, Koseff & Ferziger, 1992)図 4.6: $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (本モデル)

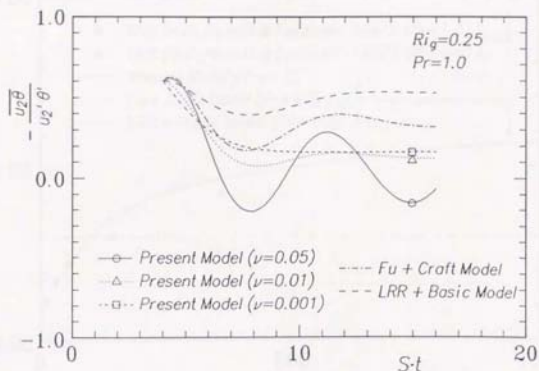
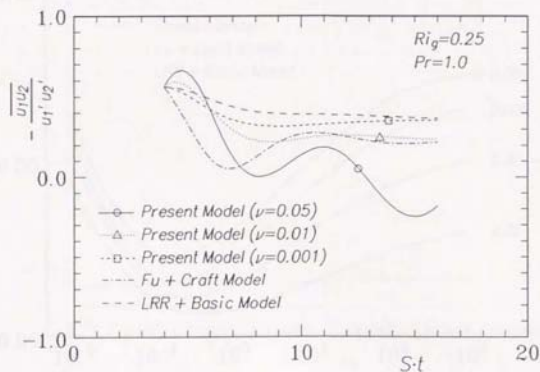
図 4.7: $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (LRR + Basic モデル)図 4.8: $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のリチャードソン数依存性 (Fu + Craft モデル)

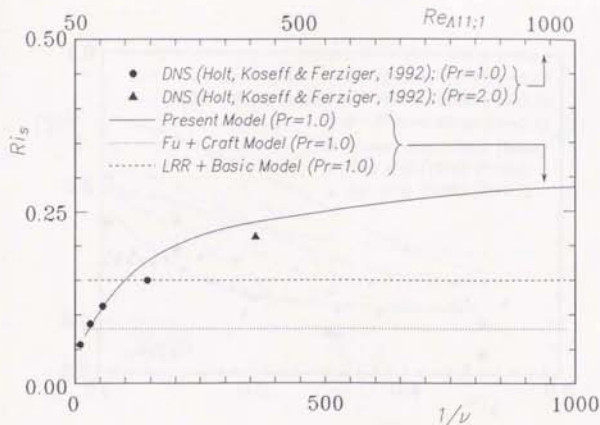
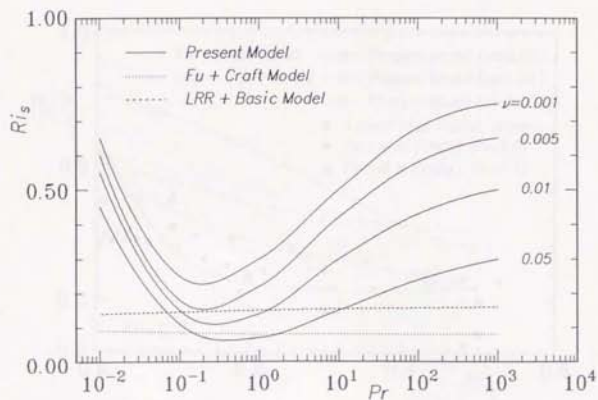
図 4.9: $\overline{u_2\theta}$ の相関係数のプラントル数依存性 (DNS; Holt, Koseff & Ferziger, 1992)図 4.10: $\overline{u_2\theta}$ の相関係数のプラントル数依存性 (本モデル)

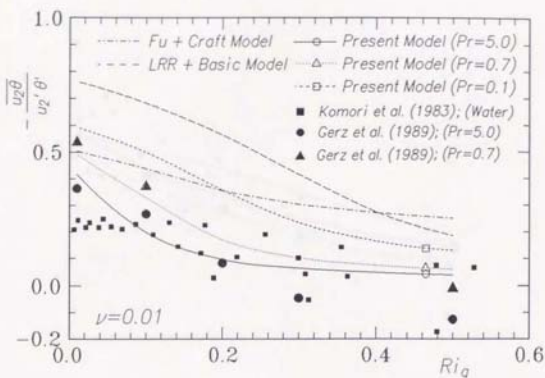
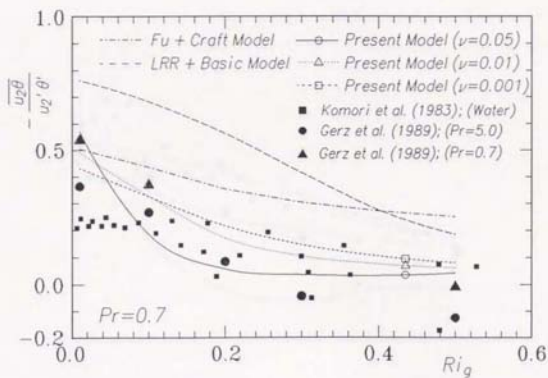
図 4.11: $\overline{u_2 \theta'}$ の相関係数のプラントル数依存性 (LRR + Basic モデル)図 4.12: $\overline{u_2 \theta'}$ の相関係数のプラントル数依存性 (Fu + Craft モデル)

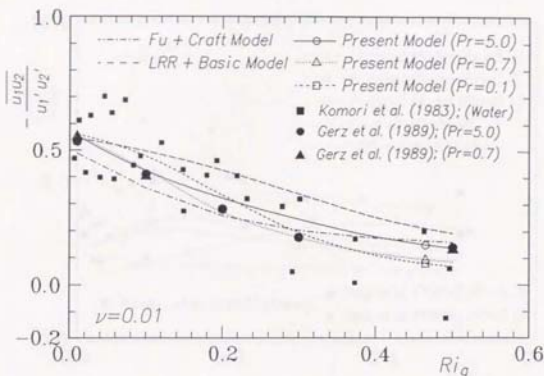
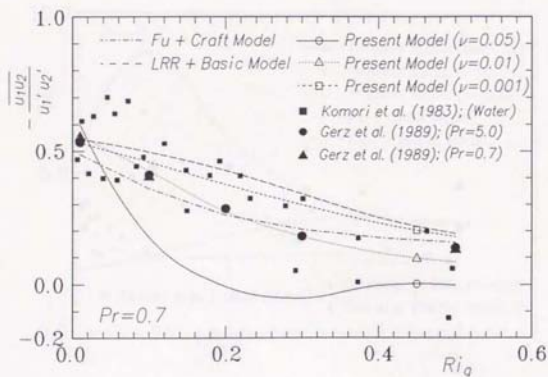
図 4.13: $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のプラントル数依存性 (DNS; Holt, Koseff & Ferziger, 1992)図 4.14: $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のプラントル数依存性 (本モデル)

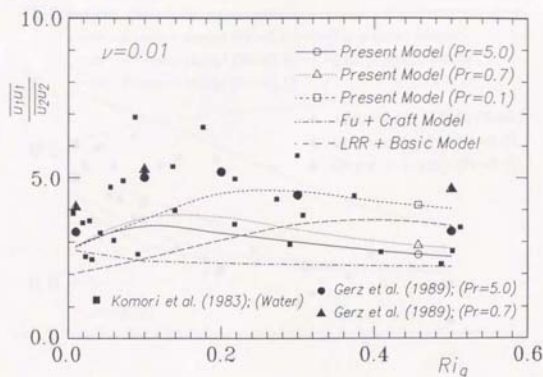
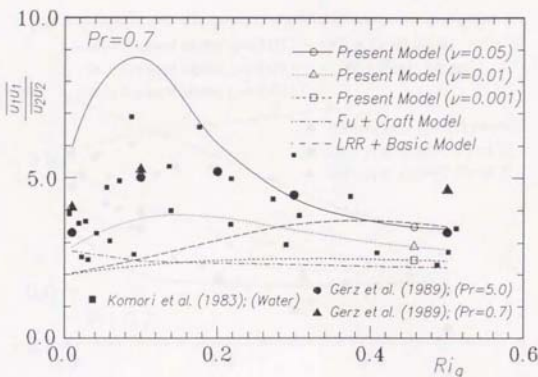
図 4.15: $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のプラントル数依存性 (LRR + Basic モデル)図 4.16: $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数のプラントル数依存性 (Fu + Craft モデル)

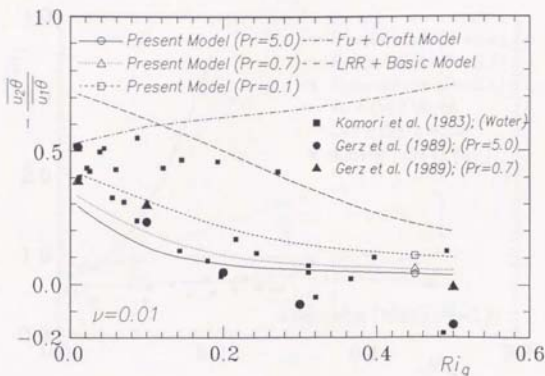
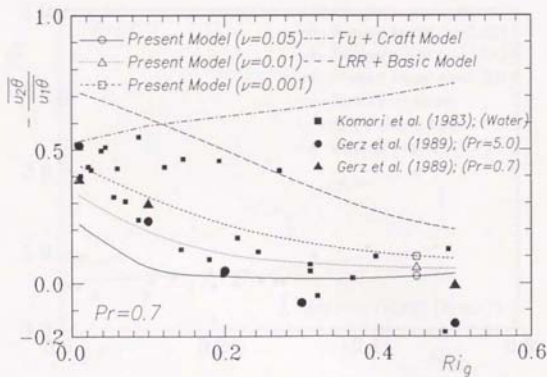
図 4.17: $u_2 \theta$ の相関係数のレイノルズ数依存性図 4.18: $u_1 u_2$ の相関係数のレイノルズ数依存性

図 4.19: Ri_s のレイノルズ数依存性図 4.20: Ri_s のプラントル数依存性

図 4.21: 安定成層乱流における $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数 (プラントル数効果)図 4.22: 安定成層乱流における $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数 (レイノルズ数効果)

図 4.23: 安定成層乱流における $\overline{u_1' u_2'}$ の相関係数 (プラントル数効果)図 4.24: 安定成層乱流における $\overline{u_1' u_2'}$ の相関係数 (レイノルズ数効果)

図 4.25: 安定成層乱流における $\overline{u_1' u_1'} / \overline{u_2' u_2'}$ (プラントル数効果)図 4.26: 安定成層乱流における $\overline{u_1' u_1'} / \overline{u_2' u_2'}$ (レイノルズ数効果)

図 4.27: 安定成層乱流における $-\overline{u_2'\theta}/\overline{u_1'\theta}$ (プラントル数効果)図 4.28: 安定成層乱流における $-\overline{u_2'\theta}/\overline{u_1'\theta}$ (レイノルズ数効果)

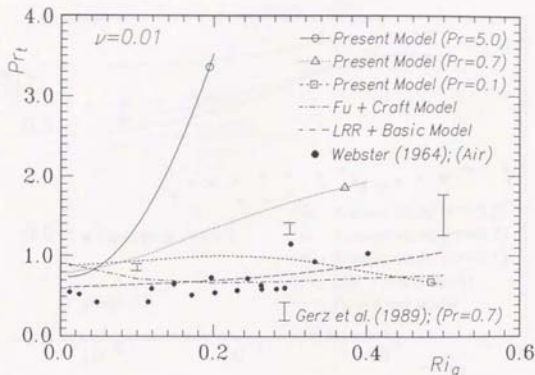


図 4.29: 安定成層乱流における乱流プラントル数 (プラントル数効果)

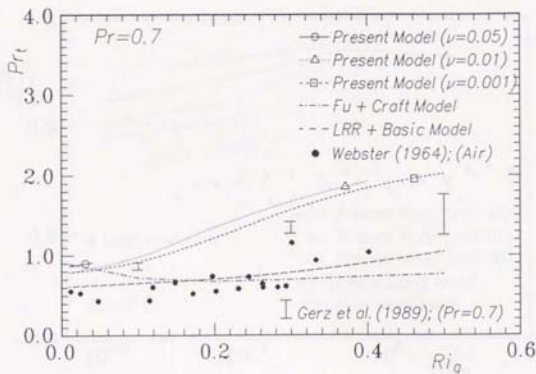
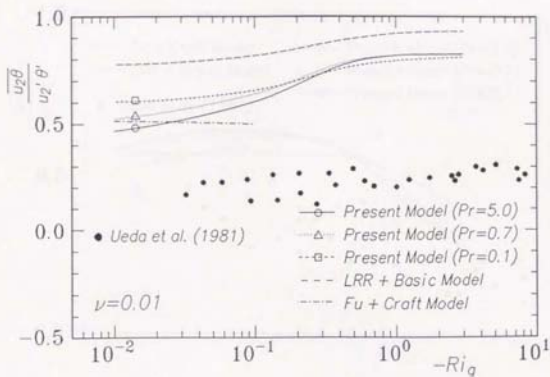
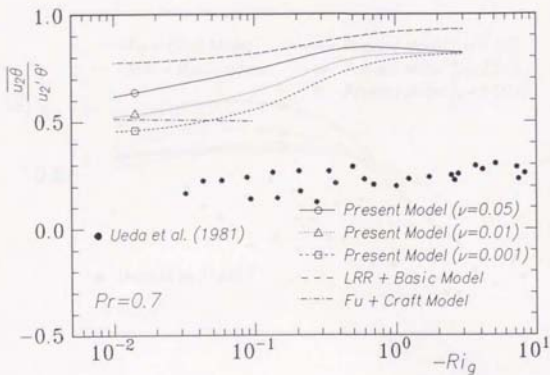
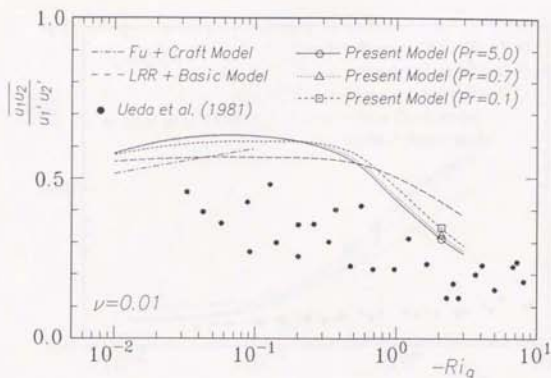
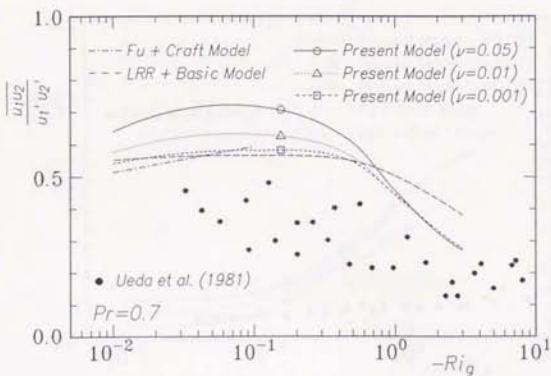
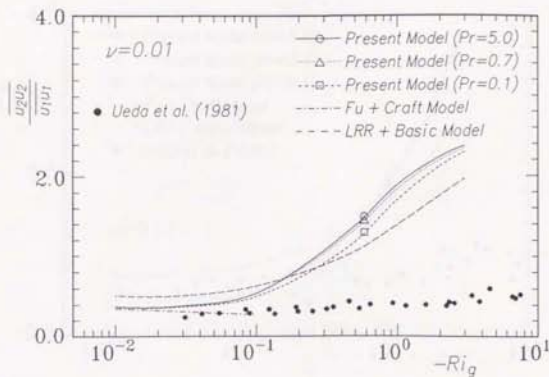
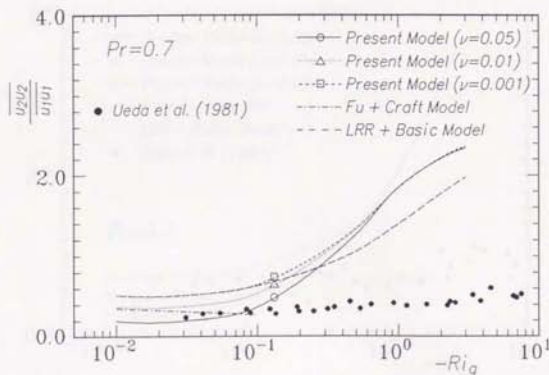
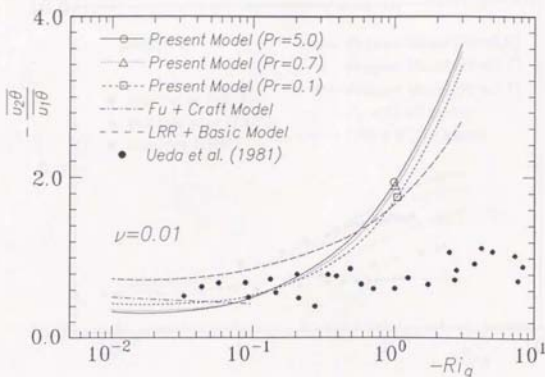
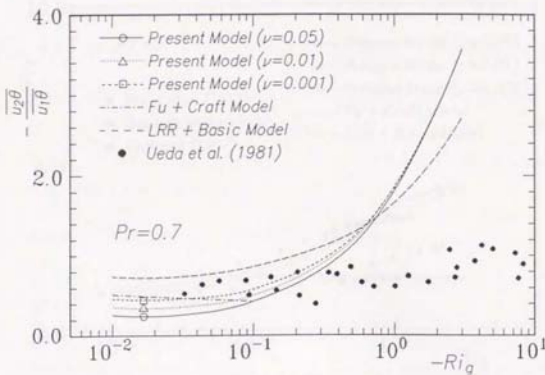


図 4.30: 安定成層乱流における乱流プラントル数 (レイノルズ数効果)

図 4.31: 不安定成層乱流における $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数 (プラントル数効果)図 4.32: 不安定成層乱流における $\overline{u_2 \theta}$ の相関係数 (レイノルズ数効果)

図 4.33: 不安定成層乱流における $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数 (プラントル数効果)図 4.34: 不安定成層乱流における $\overline{u_1 u_2}$ の相関係数 (レイノルズ数効果)

図 4.35: 不安定成層乱流における $\overline{u'v'}/\overline{u'u'}$ (プラントル数効果)図 4.36: 不安定成層乱流における $\overline{u'v'}/\overline{u'u'}$ (レイノルズ数効果)

図 4.37: 不安定成層乱流における $-\overline{u_2'\theta}/\overline{u_1'\theta}$ (プラントル数効果)図 4.38: 不安定成層乱流における $-\overline{u_2'\theta}/\overline{u_1'\theta}$ (レイノルズ数効果)

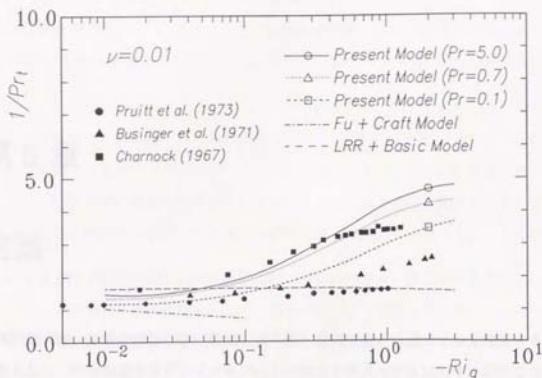


図 4.39: 不安定成層乱流における乱流プラントル数の逆数 (プラントル数効果)

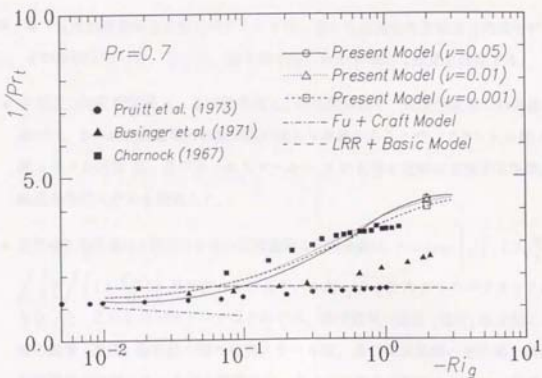


図 4.40: 不安定成層乱流における乱流プラントル数の逆数 (レイノルズ数効果)

第5章

結論

本研究では、任意の流体の広い範囲の流れ場へ適用可能な乱流モデルを構築することを目的として、乱流熱流束及びレイノルズ応力の輸送方程式モデルに対する新たなモデル化手法を導入し、その評価を行った。ここでは、各章ごとに得られた結論を述べる。

第2章「乱流熱流束輸送方程式モデル」では、新たな乱流熱流束輸送方程式モデルを提案し、その評価を行った。以下に、第2章で得られた具体的な知見を列挙する。

- 温度圧力勾配相関項 Π_{θ} 及び散逸項 ε_{θ} の相関係数を、乱流熱流束の相関係数と関係づけ、さらに変動量間の相関係数の減少を考慮することで、プラントル数 Pr 、乱流レイノルズ数 Re_t 及びタイムスケール比 R の影響を適切に表現する乱流熱流束輸送方程式モデルを提案した。

- 速度場と温度場の1階微分を含む変動量間の相関係数は、 $r = \max \left[\sqrt{\frac{Pr}{\varepsilon}}, 1.2\sqrt{\frac{Pr}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{R}{Pr}} \right] / \left\{ \frac{k}{\varepsilon} / \left(1 + \frac{C_R}{R} \right) \right\}$ 及びテラースケール比 $\sqrt{Pr/R}$ の2つのパラメータの関数となった。これらのパラメータはそれぞれ、高波数域の速度(温度)場変動と低波数域の温度(速度)場変動の間の時間スケール比、及び高波数域の速度場と温度場の変動量間の時間スケール比と解釈され、各々の相関を支配するパラメータであると考えられる。

- 提案したモデルは、一定の平均温度勾配を有する一様等方性乱流において、ブランドル数 Pr 、乱流レイノルズ数 Re_t 及びタイムスケール比 R の影響を適切に表現した。
- 温度圧力勾配相関項 Π_{θ} モデルに対しては、変動圧力勾配テンソル $\overline{p_j p_j}$ のモデル化の違いによって2種のモデルを得た。 $\overline{p_j p_j}$ に等方テンソルを仮定した Model 1 は、座標変換に対する依存性を示すものの、Model 2 や既存の多くのモデルが破綻する壁乱流を含む非等方性の強い剪断乱流場を、良好に予測することを確認した。
- 乱流熱流束輸送方程式モデルを拡張し、壁乱流へ適用可能なモデルを提案した。即ち、高ブランドル数に対する補正、各項の壁面漸近挙動を満足させること、及び ε_{θ} 方程式モデルの提案を行い、検証を行った。その結果、広いブランドル数範囲にわたって乱流熱流束ベクトルや熱伝達率等が良好に予測された。

第3章「レイノルズ応力輸送方程式モデル」では、オーダー評価を用いることで、乱流レイノルズ数依存性を表現するレイノルズ応力輸送方程式モデルを提案し、その評価を行った。以下に、第3章で得られた具体的な知見を列挙する。

- 速度圧力勾配相関項 Π_{ij} 及び散逸項 ε_{ij} に対してオーダー評価を行い、そのレイノルズ数依存性を明らかにした後、高レイノルズ数において LRR モデルに漸近する新たなレイノルズ応力輸送方程式モデルを提案した。
- 提案したモデルは、一様剪断乱流において、レイノルズ応力非等方性に対するレイノルズ数依存性を適切に表現した。
- 壁面漸近挙動を満足させることで、壁乱流に対して適用可能なモデルに拡張を行った。提案したモデルは、乱れ強さの各成分のレイノルズ数依存性を良好に表現した。

第4章「密度成層効果に対する考察」では、速度圧力勾配相関項 Π_{ij} 及び温度圧力勾

配相関項 Π_{ij} に対する浮力効果について考察を加えた。以下に、第4章で得られた具体的な知見を列挙する。

- 速度圧力勾配相関項 Π_{ij} 及び温度圧力勾配相関項 Π_{ij} に対し、それぞれレイノルズ応力及び乱流熱流束の浮力生成項に比例するモデルを提案した。ただし、その係数は乱流レイノルズ数、プラントル数及びタイムスケール比の関数として表現される。
- 一様な密度成層剪断乱流に適用し、検証を行った。その結果、安定成層乱流では乱れの減衰に伴うレイノルズ数の低下の影響、さらにはプラントル数及びタイムスケール比の効果を、定性的な比較ではあるが良好に予測することを確認した。特に、ステーションナリーリチャードソン数のレイノルズ数及びプラントル数に対する興味深い依存性が予測された。
- 不安定成層剪断乱流においても、本モデル予測結果は実験値と定性的な一致を示し、良好な結果が得られた。ただし、不安定効果が強い場合には、本モデルはレイノルズ数及びプラントル数に依存しない結果を与えた。これは、高ペクレ数において本モデルが既存の基本的なモデルに漸近するためであると言える。

謝辞

本論文は、筆者が東京大学大学院工学系研究科博士課程在学中に行った研究をまとめたものである。その間、東京大学笠木伸英教授には研究面、生活面において常に暖かい御指導を賜ると共に、最高の研究環境を与えて頂き、深く感謝致します。

本研究をまとめるにあたり、東京大学生産技術研究所小林敏雄教授、吉澤徹教授、東京大学工学部助教授荒川忠一助教授、東京大学生産技術研究所加藤信介助教授、東京大学工学部河原敏久助教授には、貴重な御助言、御教示を頂きました。謹んで感謝致します。始終暖かいご指導ご鞭撻を賜った芝浦工業大学平田賢教授に心より感謝致します。

名古屋工業大学長野靖尚教授、東京理科大学河村洋教授、豊田中央研究所安倍賢一氏には、学会及び研究会等で有益な御討論を頂き、多くのことを学ばせて頂きました。心より感謝致します。

乱流モデルに関して一から御指導頂いた KAIST 明賢國博士、茨城大学工学部稲垣照美博士に深く感謝致します。明・笠木モデルを理解することが筆者の乱流モデル研究のまさにスタートでありました。

研究室では、東京大学工学部宮下秀三助手、亀井秀也助手、帝京大学小幡輝夫助教授に大変お世話になりました。深く感謝致します。

北海道大学工学部黒田明彦先生、(株)三菱重工業富田康意氏、(株)トヨタ自動車大坪康彦氏、東京大学大学院飯田雄章氏には、貴重な DNS データを提供して頂き、心より感謝致します。DNS の結果をいかに簡単に表現するかが本研究の最大のテーマであったことは疑いのないところで、各氏の作成されたデータベース並びに各氏から頂いた御討論は非常に貴重なものでした。有難うございました。

横浜国立大学工学部西野耕一先生、一色誠太博士、宇都宮大学工学部二宮尚博士、(株)

東芝佐田豊博士には大学院での先輩として、研究に対する姿勢、厳しさを身をもって教えて頂き、深く感謝致します。

東京大学工学部助手鈴木雄二博士、ホストク研究員朴成龍博士、M. Benhalilou 博士、(株)カルソニック佐藤一穂氏、大学院学生佐竹信一氏、三戸陽一氏、亀井泰造氏、野口浩徳氏、矢野岳氏、大箸勝巳氏、学部学生遠藤誉英氏、塚原渉氏、伊地知雅典氏をはじめとする多くの方々には、貴重な御助言、御討論並びに多くのご協力を頂き、深く感謝致します。

また、本研究は日本学術振興会の特別研究員奨励金の援助を受け、行ったものであります。ここに、記して謝意を表します。

最後に、10年間にわたる大学・大学院生活を支え、励ましてくれた両親に深く感謝します。

参考文献

安倍, 長野, 近藤, 1992, はく離・再付着を伴う乱流場への適用を考慮した $k-\varepsilon$ モデル, 日本機械学会論文集, 58-554 B, 3003-3010.

安倍, 長野, 近藤, 1993, はく離・再付着を伴う乱流熱伝達を解析するための温度場 2 方程式モデル, 日本機械学会熱工学講演会講演論文集, 134-136.

ANDRE, J. C., DE MOOR, G., LACARRERE, P. & DU VACHAT, R. 1976a Turbulence approximation for inhomogeneous flows: Part I. The clipping approximation. *J. Atmos. Sci.* **33**, 476-481.

ANDRE, J. C., DE MOOR, G., LACARRERE, P. & DU VACHAT, R. 1976b Turbulence approximation for inhomogeneous flows: Part II. The numerical simulation of a penetrative convection experiment. *J. Atmos. Sci.* **33**, 482-491.

ANDRE, J. C., DE MOOR, G., LACARRERE, P., THERRY, G. & DU VACHAT, R. 1978 Modeling the 24-hour evolution of the mean and turbulent structures of the planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.* **35**, 1861-1883.

BONDARCHUK, V. U., KOLOVANDIN, B. A. & Martynenko, O. G. 1991 Modelling of developing nearly homogeneous turbulence of velocity and scalar fields. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **34**, 11-30.

- BUSINGER, J. A., WYNGAARD, J. C., IZUMI, Y. & BRADLEY, E. F. 1971 Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer. *J. Atmos. Sci.* **28**, 181-189.
- CHARNOCK, H. 1967 Flux gradient relations near the ground in unstable conditions. *Quart. J. R. Met. Soc.* **93**, 97-100.
- CHEN, C. J. & RODI, W. 1980 Turbulent buoyant jets - a review of experimental data. *HMT* **4**, Pergamon Press.
- CRAFT, T. J., FU, S., LAUNDER, B. E. & TSELEPIDAKIS, D. P., 1989 Developments in modelling the turbulent second-moment pressure correlations. Report TFD/89/1, Mech. Eng. Dept., UMIST.
- CRAFT, T. J. 1991 Second-moment modelling of turbulent scalar transport. Report TFD/91/3, Mech. Eng. Dept., UMIST.
- DAKOS, T. & GIBSON, M. M. 1987 On modelling the pressure terms of the scalar flux equations. *Turbulent Shear Flows 5*, Springer-Verlag, 7-18.
- DEKEYSER, I. & LAUNDER, B. E. 1985 A comparison of triple-moment temperature-velocity correlation in the asymmetric heated jet with alternative closure models. *Turbulent Shear Flows 4*, Springer-Verlag, 102-117.
- DOMARADZKI, J. A. & METCALFE, R. W. 1988 Direct numerical simulations of the effect of shear on turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **193**, 499-531.

ELGHOBASHI, S. E. & LAUNDER, B. E. 1983 Turbulent time scales and the dissipation rate of temperature variance in the thermal mixing layer. *Phys. Fluids* **26**, 2415-2419.

遠藤, 1994, 乱流モデルを用いた自由噴流の数値予測に関する研究, 東京大学卒業論文.

FINGER, J. E. & SCHMIDT, H. 1986 On the efficiency of different higher order turbulence models simulating the convective boundary layer. *Beitr. Phys. Atmosph.* **59**, 505-517.

GIBSON, M. M. & LAUNDER, B. E. 1976 On the calculation of horizontal, turbulent, free shear flows under gravitational influence. *ASME J. Heat Transfer* **81**, 81-87.

GIBSON, M. M. & LAUNDER, B. E. 1978 Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *J. Fluid Mech.* **86**, 491-511.

GIBSON, M. M., JONES, W. P. & KANELLOPOULOS, V. E. 1988 Turbulent temperature mixing layer: measurement and modelling. *Turbulent Shear Flows 6*, Springer-Verlag, 119-128.

GERZ, T., SCHUMANN, U. & ELGHOBASHI, S. E. 1989 Direct numerical simulation of stratified homogeneous turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.* **200**, 563-594.

HALLBÄCK, M., GROTH, J. & JOHANSSON, A. V. 1990 An algebraic model for non-isotropic turbulent dissipation rate in Reynolds stress closures. *Phys. Fluids A* **2**, 1859-1866.

HALLBÄCK, M. 1993 Development of Reynolds stress closures of homogeneous turbulence

through physical and numerical experiments. Doctoral Thesis, Dept. Mech., Royal Institute of Technology, Stockholm.

HANJALIĆ, K. & LAUNDER, B. E. 1972 A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.* **52**, 609-638.

HANJALIĆ, K. & LAUNDER, B. E. 1976 Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence. *J. Fluid Mech.* **74**, 593-610.

HAUGEN, D. A., KAIMAL, J. C. & BRADLEY, E. F. 1971 An experimental study of Reynolds stress and heat flux in the atmospheric surface layer. *Quart. J. R. Met. Soc.* **97**, 168-180.

HOLT, S. E., KOSEFF, J. R. & FERZIGER, J. H. 1992 A numerical study of the evolution and structure of homogeneous stably stratified sheared turbulence. *J. Fluid Mech.* **237**, 499-539.

飯田, 1992, 私信.

飯田, 笠木, 1993a, 一様等方性乱流中の熱輸送の直接数値シミュレーション: プラントル数の効果, 日本機械学会論文集投稿中.

IDA, O & KASAGI, N. 1993b Redistribution of the Reynolds stresses and destruction of the turbulent heat flux in homogeneous decaying turbulence. to be presented at *9th Symp. Turbulent Shear Flows*, Kyoto.

石井, 河村, 1993, 一様乱流に対する応力方程式モデルの提案と比較, 日本機械学会論文

集, 59-566 B, 3040-3047.

JISCHA, M. & RIEKE, H. B. 1979 About the prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers from modeled transport equations. *Int. J. Heat Mass Transfer* **22**, 1547-1555.

JONES, W. P. & LAUNDER, B. E. 1972 The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**, 301-314.

JONES, W. P. & MUSONGE, P. 1983 Modelling of scalar transport in homogeneous flows. *Proc. 4th Symp. Turbulent Shear Flows*, Karlsruhe.

JONES, W. P. & MUSONGE, P. 1988 Closure of the Reynolds stress and scalar flux equations. *Phys. Fluids* **31**, 3589-3604.

笠木, 1992, 乱流解析法 (III) スカラー乱流のモデル, 数値流体力学 基礎と応用, 保原・大宮司編, 263-286, 東京大学出版会.

KASAGI, N., TOMITA, Y. & KURODA, A. 1992 Direct numerical simulation of the passive scalar field in a turbulent channel flow. *ASME J. Heat Transfer* **114**, 598-606.

KASAGI, N. & OHTSUBO, Y. 1993 Direct numerical simulation of low Prandtl number thermal field in a turbulent channel flow. *Turbulent Shear Flows 8*, Springer-Verlag, 97-119.

河村, 羽田, 1992, 壁乱流型 $k-\varepsilon$ モデルの検証, 第 29 回日本伝熱シンポジウム講演論文集, 380-382.

- KIM, J. & MOIN, P. 1987 Transport of passive scalars in a turbulent channel flow. *Proc. 6th Symp. Turbulent Shear Flows*, Toulouse, 5-2-1.
- KIM, J., MOIN, P. & MOSER, R. 1987 Turbulent statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **177**, 133-166.
- KIM, J. & MOIN, P. 1989 Transport of passive scalars in a turbulent channel flow. *Turbulent Shear Flows 6*, ed. André et al., 85-96, Springer-Verlag, Berlin.
- KOLOVANDIN, B. A. 1991 Modeling the dynamics of turbulent transport processes. *Advances in Heat Transfer*, **21**, 185-237.
- KOLOVANDIN, B. A., BONDARCHUK, V. U., MELOA, C. & De Felice, G. 1993 Modelling of the homogeneous turbulence dynamics of stably stratified media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **36**, 1953-1968.
- KOMORI, S., UEDA, H., OGINO, F. & MIZUSHINA, T. 1983 Turbulence structure in stably-stratified open-channel flow. *J. Fluid Mech.* **130**, 13-26.
- 黒田, 1990, ケット・ボアズイユ乱流の直接数値シミュレーション, 東京大学博士論文.
- LAI, Y. G. & SO, R. M. C. 1990a On near-wall turbulent flow modeling. *J. Fluid Mech.* **221**, 641-673.
- LAI, Y. G. & SO, R. M. C. 1990b Near-wall modeling of turbulent heat fluxes. *Int. J. Heat Mass Transfer* **33**, 1429-1440.

LAUNDER, B. E. 1975 On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum. *J. Fluid Mech.* **67**, 569-581.

LAUNDER, B. E., REECE, G. J. & RODI, W. 1975 Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.* **68**, 537-566.

LAUNDER, B. E. 1976 Heat and mass transport. *Topics in Applied Physics*, ed. Bradshaw, P., **12**, 231-287, Springer-Verlag, Berlin.

LAUNDER, B. E. & SAMARAWEEERA, D. S. A. 1979 Application of a second-moment turbulence closure to heat and mass transport in thin shear flows - I. Two dimensional transport. *Int. J. Heat Mass Transfer* **22**, 1631-1643.

LAUNDER, B. E. 1984a Second-moment closure : methodology and practice. *Turbulence Models and Their Applications* **2**, Eyrolles, Paris.

LAUNDER, B. E. 1984b Numerical computation of convective heat transfer in complex turbulent flows: Time to abandon wall functions? *Int. J. Heat Mass Transfer* **27**, 1485-1491.

LAUNDER, B. E. 1989 Second-moment closure: Present...and future? *Int. J. Heat Fluid Flow* **10**, 282-300.

LAUNDER, B. E. & SHIMA, N. 1989 Second-moment closure for the near-wall sublayer: Development and application. *AIAA Journal* **27**, 1319-1325.

LAUNDER, B. E. 1991 An introduction to single-point closure methodology. *Lecture Se-*

ries 1991-02, Von Karman Inst., Rhode Saint Genèse, Belgium.

LAUNDER, B. E. & TSELEPIDAKIS, D. P. 1992 Contribution to the modelling of near-wall turbulence. *Turbulent Shear Flows 8*, ed. Durst et al., 81-96, Springer-Verlag.

LAUNDER, B. E. 1993 Modelling convective heat transfer in complex turbulent flows. *Proc. Kyoto Seminar on Turbulence 1993*, Kyoto, Japan, 2-1-1.

LIEN, F. S. & LESCHZNER, M. A. 1993 Modelling 2D and 3D separation from curved surfaces with variants of second-moment closure combined with low-*Re* near-wall formulations. *Proc. 9th Symp. Turbulent Shear Flows*, Kyoto, 13-1-1.

LUMLEY, J. L. & KHAJEH-NOURI, B. 1974 Computational modeling of turbulent transport. *Adv. Geophys.*, **18A**, 169-192.

LUMLEY, J. L. & NEWMAN, G. R. 1977 The return to isotropy of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, **82**, 161-178.

LUMLEY, J. L. 1978 Computational modeling of turbulent flows. *Adv. Appl. Mech.*, **18**, 123-176.

LUMLEY, J. L., ZEMAN, O. & SIESS, J. 1978 The influence of buoyancy on turbulent transport. *J. Fluid Mech.*, **84**, 581-597.

LYONS, S. L., HANRATTY, T. J. & McLAUGHLIN, J. B. 1991 Direct numerical simulation of passive heat transfer in a turbulent channel flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* **34**, 1149-1161.

前川, 小林, 1977, 乱流熱伝達の模型に関する基礎的研究 (等方乱流の減衰初期における熱伝達), 日本機械学会論文集, 43-370 B, 2250-2260.

前川, 小林, 沢井, 佐藤, 1979, 変形を伴わない異方性乱流における熱伝達, 日本機械学会論文集, 45-393 B, 694-704.

MANSOUR, N. N., KIM, J. & MOIN, P. 1988 Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **194**, 15-44.

松本, 長野, 辻, 1992, 平成3年度科学研究費補助金 (総合研究 (A)(No. 02302043)), 研究成果報告書.

MELLOR, G. L. & YAMADA, T. 1974 A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers. *J. Atmos. Sci.* **31**, 1791-1806.

MONIN, A. S. 1965 On the symmetry properties of turbulence in the surface layer of air. *IZV Atmos. Oceanic Phys.* **1**, 45-54.

MURAKAMI, S., MOCHIDA, A. & OOKA, R. 1993 Numerical simulation of flowfield over surface-mounted cube with various second-moment closure models. *Proc. 9th Symp. Turbulent Shear Flows*, Kyoto, 13-5-1.

MYONG, H. K. & KASAGI, N. 1989 Numerical prediction of turbulent pipe flow heat transfer for various Prandtl number fluids with the improved $k - \epsilon$ turbulence model. *JSME Int. J., Ser. II* **32**, 613-622.

MYONG, H. K. & KASAGI, N. 1990 A New approach to the improvement of the $k-\varepsilon$ turbulence model for wall-bounded shear flows. *JSME Int. J., Ser. II* **33**, 63-72.

長野, 金, 1987, 温度場 2 方程式モデルによる乱流伝熱の解析, 日本機械学会論文集, **53**-490 B, 1773-1780.

NAGANO, Y. & KIM, C. 1988 A two equation model for heat transport in wall turbulent shear flows. *ASME J. Heat Transfer* **110**, 583-589.

長野, 田川, 辻, 1990, 壁乱流の漸近挙動を考慮した温度場 2 方程式乱流モデル, 日本機械学会論文集, **56**-530 B, 3087-3093.

NAOT, D., SHAVIT, A. & WOLFSTEIN, M. 1970 Interactions between components of the turbulent velocity correlation tensor. *Israel J. Tech.* **8**, 259.

NEWMAN, G. R., LAUNDER, B. E. & LUMLEY, J. L. 1981 Modeling the behavior of homogeneous scalar turbulence. *J. Fluid Mech.* **111**, 217-232.

西野, 笠木, 1990, 三次元画像処理流速計による二次元チャネル乱流の乱流統計量の測定, 日本機械学会論文集, **56**-525 B, 1338-1347.

大坪, 1992, 液体金属乱流中のスカラー輸送に関する直接数値シミュレーション, 東京大学修士論文.

大路, 1980, 乱流の計算, 流体力学の進歩 乱流 (谷 一郎 編), 丸善, 129-176.

荻野, 1985, 密度成層乱流, 乱流現象の科学 その解明と制御, 文部省科学研究費補助金特定研究「乱流現象の解明と制御」成果報告書, 475-505.

OWEN, R. G. 1973 An analytical turbulent transport model applied to non-isothermal fully-developed duct flows., Ph.D. Thesis, Mech. Eng. Dept., Pennsylvania State University.

PATEL, V. C., RODI, W. & SCHEUERER, G. 1985 Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: A review. *AIAA Journal* **23**, 1308-1319.

POPE, S. B. 1978 An explanation of the turbulent round-jet/plane-jet anomaly. *AIAA J.* **16**, 279.

POPE, S. B. 1983 Consistent modelling of scalars in turbulent flows. *Phys. Fluids* **26**, 404-408.

PRUITT, W. O., MORGAN, D. L. & LOURENCE, F. J. 1973 Momentum and mass transfers in the surface boundary layer. *Quart. J. R. Met. Soc.* **99**, 370-386.

REYNOLDS, A. J. 1975 The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers. *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 1055-1069.

RODI, W. 1976 A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *ZAMM* **56**, T219-T221.

RODI, W. 1980 Turbulence models and their application in hydraulics - a state of the art

review., IAHR, DELFT.

ROGERS, M. M., MOIN, P. & REYNOLDS, W. C. 1986 The structure and modeling of the hydrodynamic and passive scalar fields in homogeneous turbulent shear flow. Report TF-25, Dept. Mech. Eng., Stanford University, Stanford, California.

ROGERS, M. M. 1991 The structure of a passive scalar field with a uniform mean gradient in rapidly sheared homogeneous turbulent flow. *Phys. Fluids A* **3**, 144-154.

ROHR, J. J. 1985 An experimental study of evolving turbulence in uniform mean shear flows with and without stable stratification. PhD dissertation, University of California, San Diego.

ROTTA, J. 1951 Statistische theorie nichthomogener turbulenz. *Zeitschrift für Physik* **129**, 547-572.

SARKAR, S. & SPEZIALE, C. G. 1990 A simple nonlinear model for the return to isotropy in turbulence. *Phys. Fluids A* **2**, 84-93.

佐藤, 長野, 1992, 種々のプラントル数流体における乱流伝熱の数値解析, 第6回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 217-220.

SAVILL, A. M. 1993 Some recent progress in the turbulence modelling of by-pass transition. *Proc. Int. Conf. Near-Wall Turbulent Flows*, Tempe, U.S.A., 829-848.

SCHUMANN, U. 1977 Realizability of Reynolds stress turbulence models. *Phys. Fluids* **20**, 721-725.

SCHUMANN, U. 1987 The countergradient heat flux in turbulent stratified flows. *Nucl. Eng. Des.* **100**, 255-262.

SHIH, T.-H. & LUMLEY, J. L. 1985 Modeling of pressure correlation terms in Reynolds stress and scalar flux equations., Rep. FDA-85-3, Sibley School of Mech. and Aerospace Eng., Cornell University.

SHIH, T.-H., LUMLEY, J. L. & CHEN, J. Y. 1985 Second order modeling of boundary-free turbulent shear flows with a new model form of pressure correlations., Rep. FDA-85-7, Sibley School of Mech. and Aerospace Eng., Cornell University.

SHIH, T.-H. & LUMLEY, J. L. 1986a Influence of time scale ratio on scalar flux relaxation: modeling Sirivat & Warhaft's homogeneous passive scalar fluctuations. *J. Fluid Mech.* **162**, 211-222.

SHIH, T.-H. & LUMLEY, J. L. 1986b Second-order modeling of near-wall turbulence. *Phys. Fluids* **29**, 971-975.

SHIH, T.-H., LUMLEY, J. L. & CHEN, J.-Y. 1990 Second-order modeling of a passive scalar in a turbulent shear flow. *AIAA Journal* **28**, 610-617.

SHIH, T.-H. & SHABBAR, A. 1992 Advances in modeling the pressure correlation terms in the second moment equations. *Studies in Turbulence*, ed. Gatski et al., 91-128, Springer-Verlag.

SHIKAZONO, N. & KASAGI, N. 1991a Modeling Prandtl number influence on turbulent

scalar flux. *Proc. 8th Symp. Turbulent Shear Flows*, Munich, 27-2-1.

鹿園, 笠木, 1991b, 乱流熱流束モデルにおけるプラントル数, タイムスケール比及びレイノルズ数の影響, 第5回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 303-306.

鹿園, 笠木, 1992, 乱流スカラー輸送における強い平均剪断の影響, 第6回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 221-224.

鹿園, 笠木, 1993a, 乱流スカラーフラックス輸送方程式モデルに関する基礎的研究, 第30回日本伝熱シンポジウム講演論文集, 55-57.

SHIKAZONO, N. & KASAGI, N. 1993b Modeling Prandtl number influence on scalar transport in isotropic and sheared turbulence. *Proc. 9th Symp. Turbulent Shear Flows*, Kyoto, 18-3-1.

鹿園, 笠木, 1993c, 乱流スカラー輸送方程式モデルに関する基礎的研究, 日本機械学会論文集, 59-563 B, 2279-2286.

島, 1988a, 強い応力非等方性を考慮したレイノルズ応力モデル (第1報, モデルの設定と平板境界層への適用), 日本機械学会論文集, 54-505 B, 2317-2324.

島, 1988b, 強い応力非等方性を考慮したレイノルズ応力モデル (第2報, 圧力こう配を伴う境界層への適用), 日本機械学会論文集, 54-505 B, 2325-2332.

島, 1992, 応力方程式モデル, 日本機械学会「乱流モデルの評価とその確立に関する調査研究分科会成果報告書」, 97-112.

- SHIR, C. C. 1973 A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.* **30**, 1327-1339.
- SIRIVAT, A. & WARHAFT, Z. 1983 The effect of a passive cross-stream temperature gradient on the evolution of temperature variance and heat flux in grid turbulence. *J. Fluid Mech.* **128**, 323-346.
- SLEICHER, C. A. & ROUSE, M. W. 1975 A convenient correlation for heat transfer to constant and variable property fluids in turbulent pipe flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 677-683.
- SOMMER, T. P., SO, R. M. C. & LAI, Y. G. 1992 A near-wall two-equation model for turbulent heat fluxes. *Int. J. Heat Mass Transfer* **35**, 3375-3387.
- SPEZIALE, C. G. 1979 Invariance of turbulent closure models. *Phys. Fluids* **22**, 1033-1037.
- SPEZIALE, C. G. 1989 Turbulence modeling in noninertial frames of reference. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **1**, 3-19.
- SPEZIALE, C. G., SARKER, S. & GATSKI, T. B. 1991 Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *J. Fluid Mech.* **227**, 245-272.
- SPEZIALE, C. G., GATSKI, T. B. & SARKAR, S. 1992 On testing models for the pressure-strain correlation of turbulence using direct simulations. *Phys. Fluids A* **4**, 2887-2899.

SUZUKI, K. 1982a An approach to liquid metal turbulent heat transfer in a circular tube solving $\overline{v\theta}$ equation with local equilibrium assumption. *Letters in Heat Mass Transfer* **9**, 245-254.

鈴木, 1982b, 液体金属乱流熱伝達の一考察 (局所平衡仮定を用いる $\overline{v\theta}$ の解とその応用), 第 19 回日本伝熱シンポジウム講演論文集, 55-57.

鈴木, 東角, 1983, 液体金属の乱流熱伝達 (円管内乱流の場合), 第 20 回日本伝熱シンポジウム講演論文集, 25-27.

鈴木, 東角, 1985, 液体金属における環状流乱流熱伝達の予測, 第 22 回日本伝熱シンポジウム講演論文集, 142-144.

TAGAWA, M, NAGANO, Y. & TSUJI, T. 1991 Turbulence model for the dissipation components of Reynolds stresses. *Proc. 8th Symp. Turbulent Shear Flows*, Munich, 29-3-1.

TAVOULARIS, S. & CORRSIN, S. 1981 Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient. Part 1. *J. Fluid Mech.* **104**, 311-347.

TAVOULARIS, S. & CORRSIN, S. 1985 Effects of shear on the turbulent diffusivity tensor. *Int. J. Heat Mass Transfer* **28**, 265-276.

TAVOULARIS, S. & KARNIK, U. 1989 Further experiments on the evolution of turbulent stresses and scales in uniformly sheared turbulence. *J. Fluid Mech.* **204**, 457-478.

TENNEKES, H. & LUMLEY, J. L. 1972 *A First Course in Turbulence*, MIT Press, Cam-

bridge, Massachusetts.

富田, 1991, 直接数値シミュレーションによる二次元チャネル乱流中の熱輸送に関する研究, 東京大学修士論文.

TUCKER, H. J. & REYNOLDS, A. J. 1968 The distortion of turbulence by irrotational plane strain. *J. Fluid Mech.* **32**, 657-673.

UEDA, H., MITSUMOTO, S. & KOMORI, S. 1981 Buoyancy effects on the turbulent transport processes in the lower atmosphere. *Quart. J. R. Met. Soc.* **107**, 561-578.

VIOLET, P. L. 1987 The modelling of turbulent recirculating flows for the purpose of reactor thermal hydraulic analysis. *Nucl. Eng. Des.* **99**, 365-377.

WARHAFT, Z. & LUMLEY, J. L. 1978 An experimental study of the decay of temperature fluctuations in grid-generated turbulence. *J. Fluid Mech.* **88**, 659-684.

WEBSTER, C. A. G. 1964 An experimental study of turbulence in a density-stratified shear flow. *J. Fluid Mech.* **19**, 221-245.

WYNGAARD, J. C., COTE, O. R. & IZUMI, Y. 1971 Local free convection, similarity, and the budgets of shear stress and heat flux. *J. Atmos. Sci.* **28**, 1171-1182.

山本, 1992, 応力方程式モデルにおける Slow Term の研究, 日本機械学会論文集, **58-548** B, 128-133.

YANG, Z. & SHIH, T. H. 1993 A Galilean and tensorial invariant $k-\varepsilon$ model for near

wall turbulence. *AIAA Paper* 93-3105.

YAP, C. 1987 Turbulent heat and momentum transfer in recirculating and impinging flows. PhD Thesis, Faculty of Technology, University of Manchester.

股, 長野, 田川, 1992, 高プラントル数流体の乱流伝熱の数値予測, 日本機械学会論文集, 58-551 B, 2254-2260.

YOSHIZAWA, A. 1988 Statistical modelling of passive-scalar diffusion in turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **195**, 541-555.

ZEMAN, O. & LUMLEY, J. L. 1976 Modeling buoyancy driven mixed layers. *J. Atmos. Sci.* **33**, 1974-1988.

ZEMAN, O. & LUMLEY, J. L. 1977 Buoyancy effects in entraining turbulent boundary layers: A second-order closure study. *Turbulent Shear Flows 1*, ed. Durst et al., 295-306, Springer-Verlag, Berlin.

付録 A

乱流モデルの基本原則及び拘束条件

乱流のモデル化とは、即ち、未知相関項を既知の情報で記述することであるから、得られたモデルがモデル化を要する本来の未知相関項と同じ数学的及び物理的性質を有することが当然望ましい。しかしながら、このことはモデルの煩雑さを招き、乱流モデルは単純であればあるほど有用であるという工学的な見地とは相反する一面をもつ。また、全ての拘束条件を満たすことが、必ずしもモデルの精度向上に結び付かないことも指摘されている。従って、乱流モデルを構築する場合には、そのモデルの適用される目的や対象を考慮し、モデルとしての普遍性、精度、経済性のバランスを常に意識しておく必要がある。

ここでは、乱流モデルの構築の際に用いられる基本的な原則や、モデルが一般的に満足すべき数学的及び物理的拘束条件について述べる。

A.1 乱流のモデリングにおける基本原則

最初に、乱流のモデル化のプロセスで採用されている基本原則について述べる。これらの原則は乱流モデルの基本的な立場を示しており、既存のモデルの骨格とも呼べるものである。

A.1.1 Principle of receding influence

平均化操作を施した運動量及びスカラーの輸送方程式には $\overline{u_i u_j}$ や $\overline{u_i \theta}$ 等の未知相関項が現れ、さらに $\overline{u_i u_j}$ や $\overline{u_i \theta}$ の輸送方程式には $\overline{u_i u_j u_k}$ や $\overline{u_i u_j \theta}$ 等の高次の未知相関項が現れる。この様に、 n 次の相関項方程式には $n+1$ 次の未知相関項が現れ、方程式系を閉じるためには何れかの次数で乱流モデルを用いてこのループを打ち切る必要が生じる。The principle of receding influence とは、最も重要であると考えられる最低次の平均速度や平均温度に対して、高次の相関項ほどその影響が薄れていくという原則である。即ち、高次の未知項に対して精度の低いモデル化を採用した場合でも、 U_i や θ の予測に対する影響は小さいとする立場を言う。しかしながら、モデル化は次数が高ければ高いほど複雑になり、工学的な実用計算には向かなくなると言うジレンマに陥る。現在の所、2次の相関量で打ち切る second moment closure が精度、経済性及び普遍性のバランスがとれたものとして期待されており、研究も活発に行われている。2次で閉じることの最大の利点は、 $\overline{u_i u_j}$ 及び $\overline{u_i \theta}$ の生成項が厳密に扱えることであり、従って、現実の流れで多く見られる非等方的な乱流場が予測できることにある。このことは、もちろん扱う問題や目的によって異なり、例えば、乱流拡散が支配的になる大気境界層などでは、3次の相関量の輸送方程式を扱う試みがなされている (Zeman & Lumley, 1976, 1977; Finger & Schmidt, 1986)。

A.1.2 高レイノルズ数の仮定

続いて、高レイノルズ数の仮定を取り上げる。高レイノルズ数を仮定することで、乱流のモデリングは極めて容易になる。具体的には、

- 散逸を担うような高波数領域での局所等方性
- 単一の時間及び長さスケール

の2つの関係が柱となる。例えば、局所等方性を仮定することで散逸率 ε_{ij} や $\varepsilon_{i\theta}$ は、

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (\text{A.1})$$

$$\varepsilon_{10} = 0 \quad (\text{A.2})$$

と表現される。また、分子粘性 ν が無視できるので、2つの異なる次元をもつ変数(例えば k と ε)を用いれば、次元解析より時間スケール k/ε 及び長さスケール $k^{3/2}/\varepsilon$ が得られる。高レイノルズ数の仮定と次節で述べる次元解析は、乱流のモデリングにおける大きな武器の一つである。

高レイノルズ数の仮定は、乱流のモデル化を非常に単純化なものにするが、このようにして得られたモデルを低レイノルズ数乱流や温度場へ適用可能なモデルへ拡張する際には注意が必要である。即ち、モデル化がレイノルズ数、プラントル数及びタイムスケール比等をパラメータとした実験値との単なる外挿、あるいはフィッティングとなつてはならない。この点に関しては、第2章及び第3章を参照されたい。

A.2 乱流モデルが満足すべき数学的・物理的拘束条件

続いて、乱流モデルが満足すべきいくつかの拘束条件を列挙する。これらの条件の全てを満足させるためには数多くの未定係数が必要であり、モデルが非常に複雑にならざるを得ない。従って、乱流モデルを扱う場合には、その目的に応じてこれらの条件を取捨選択し、モデルとしての精度、経済性、普遍性のバランスをとることを常に意識しておくことが重要である。

A.2.1 次元

まず、乱流モデルは置きかわる未知相関項と同じ次元を持っている必要がある。例えば、動粘性係数であれば D (長さ²/時間)の次元を持ち、レイノルズ応力輸送方程式モデルであればその各項は D (長さ²/時間³)、乱流熱流束輸送方程式モデルであれば各項は D (温度・長さ/時間²)の次元を持たねばならない。次元の一致が見られない場合、乱流理

論の重要な基本概念の一つである相似性が満足されなくなり、従って、モデルの普遍性は完全に破棄されることになる。次元の一致は、乱流モデルが最低限満足すべき条件である。

A.2.2 テンソル量としての条件

モデル化の必要な項が1階のテンソル(ベクトル)量であれば特に問題は生じないが、2階以上のテンソル量に対しては対称性やトレースに関する制限がある。例えば、2階のテンソル A_{ij} が対称であるとする、

$$A_{ij} = A_{ji} \quad (\text{A.3})$$

であり、交代テンソルであれば、

$$A_{ij} = -A_{ji} \quad (\text{A.4})$$

となるが、モデル化の必要な項がこれらの性質を持っているならばモデルも追従すべきである。また、トレースが例えば a と決定されている場合、

$$A_{ii} = a \quad (\text{A.5})$$

モデルもこの条件を満たす必要がある。

これらの要請は2次の未知相関量のモデリングの場合は通常満足されているが、例えば3重相関項モデルにおいてはしばしば無視される¹⁾。

¹⁾The principle of receding influence の適用されている例である。

A.2.3 フレーム不変性

連続体力学において、物質のフレーム不変性 (Material Frame Indifference) は物質の構成方程式が満足すべき必要条件である。レイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ のモデリングは、乱流応力に対してある種の構成方程式を与えることであると解釈することも出来るので、乱流モデルにおいてもフレーム不変性は重要な問題であると言える。

フレーム不変性とは、非慣性系 x_i^* が慣性系 x_j に対して

$$x_i^* = Q_{ij} x_j + b_i \quad (\text{A.6})$$

の様に定義されるとき、ベクトル及びテンソル量が次の関係を満足することである (例えば, Speziale, 1979)。

$$B_i^* = Q_{ij} B_j \quad (\text{A.7})$$

$$A_{ij}^* = Q_{ik} Q_{jl} A_{kl} \quad (\text{A.8})$$

ここで、 Q_{ij} 及び b_i は共に時間の関数で、それぞれ座標の回転及び並進を表す。乱流熱流束ベクトル $\overline{u_i \theta}$ 、レイノルズ応力テンソル $\overline{u_i u_j}$ はフレーム不変性を満たすので、当然そのモデルもフレーム不変でなければならない。ところが、実質微分や渦度テンソル $W_{ij} \equiv 1/2(U_{ij} - U_{ji})$ はフレーム不変ではないので、レイノルズ応力及び乱流熱流束の輸送方程式はフレーム不変ではなくなる。ただし、フレーム不変性を満足しないとはいても、各方程式は以下に述べる様な制約を受ける。第一に、あるベクトル量 B_i 及びテンソル量 A_{ij} の実質微分はそのままではフレーム不変性を満足しないが、次のような付加項を加えた形にすることでフレーム不変な微分に置き換えることが出来る。

$$\frac{DB_i}{Dt} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k} B_k \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{DA_{ij}}{Dt} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k} A_{kj} - \frac{\partial U_j}{\partial x_k} A_{ki} \quad (\text{A.10})$$

例えば, 上の関係を乱流熱流束及びレイノルズの輸送方程式モデルに適用してみると,

$$\frac{D\overline{u_i\theta}}{Dt} - \overline{u_k\theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = P_{i\theta} - \overline{u_k\theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \Pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} + T_{i\theta} + V_{i\theta} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} - \overline{u_k u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \overline{u_k u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} = 2P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + T_{ij} + V_{ij} \quad (\text{A.12})$$

となる。ここで, 両式の左辺に関してはフレーム不変性が保証される。しかし, 両式の右辺については次の変換を施さなくてはならない。非慣性系の慣性系に対する回転角速度を Ω_i とすると, 非慣性系における平均速度勾配テンソル $\partial U_i / \partial x_j$ を

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + e_{kji} \Omega_k \quad (\text{A.13})$$

で置き代える必要がある。従って, 慣性系に対して角速度 Ω_i で回転している座標系での $\overline{u_i\theta}$ 及び $\overline{u_i u_j}$ の輸送方程式は次のように与えられる。

$$\frac{D\overline{u_i\theta}}{Dt} = P_{i\theta} + \Pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} + T_{i\theta} + V_{i\theta} - 2\Omega_l e_{ilk} \overline{u_k\theta} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + T_{ij} + V_{ij} - 2\Omega_l (e_{ilk} \overline{u_k u_j} + e_{jlk} \overline{u_k u_i}) \quad (\text{A.15})$$

両式の後項がコリオリ力に由来する付加項である。また, 圧力変動相関項 $\Pi_{i\theta}$ 及び Π_{ij} モデル中に含まれる平均速度勾配テンソルに対しても, (A.13) 式を用いた変換を行う必要があることはもちろんである。

まとめると, 非慣性系における乱流モデルは次の 4 つの条件を満足する必要がある (Speziale, 1989)。

- 非慣性系の効果は, 絶対渦度 $W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + e_{kji} \Omega_k$ を通じてのみ乱流モデル中に現れなければならない。従って, リチャードソン数 $Ri = \frac{-2\Omega(\partial U/\partial y - 2\Omega)}{(\partial U/\partial y)^2}$ 等をパラメータとして用いてはならない。
- 回転軸に垂直な平面の 2 次元乱流の極限では, 全ての非慣性系の効果は消滅し, 従って, 乱流モデルもフレーム不変でなければならない。

- 乱流モデルは Taylor-Proudman の定理と矛盾したものであってはならない。従って、大きな角速度で回転する非慣性系の定常乱流は 2 次元的である必要があり、乱流モデルもこのことを予測しなくてはならない。
- Rapid rotation は、大スケールから小スケールへのエネルギーカスケードに必要な渦伸張等の秩序構造を破壊するため回転系では非線形効果が弱まり、従って、Rapid Distortion Theory の強い制約を受ける。具体的には、初期に等方的な乱流は等方性を保ったまま減衰し、その減衰率は著しく減少することを予測しなくてはならない。

A.2.4 Rapid distortion theory

Rapid distortion Theory (以後 RDT) とは、ナビエ・ストークス方程式の非線形項を無視することで方程式を解析的に積分し、解を得る手法である (例えば、Hallböck, 1993)。非線形項を無視するためにはある仮定を置くことになるが、その仮定が成り立つ範囲であれば、乱流モデルもその解と整合性を持つことが望ましい。以下にその概略を示す。

一定の平均速度勾配 $\partial U_i / \partial x_j$ 及び平均温度勾配 $\partial \theta / \partial x_j$ を有する一様な乱流場を考える。その場合の変動速度 u_i 及び変動温度 θ の方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial U_j}{\partial x_m} x_m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial U_j}{\partial x_m} x_m \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -\frac{\partial u_i \theta}{\partial x_j} + \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \quad (\text{A.18})$$

ここで、速度変動 u_i 、温度変動 θ 及び圧力変動 p にフーリエ変換を施し、

$$u_i(\vec{x}, t) = \sum_{\mathbf{n}} \hat{u}_i^{\mathbf{n}}(t) e^{i\mathbf{n} \cdot \vec{x}} \quad (\text{A.19})$$

$$\theta(\vec{x}, t) = \sum_{\mathbf{n}} \hat{\theta}^{\mathbf{n}}(t) e^{i\mathbf{n} \cdot \vec{x}} \quad (\text{A.20})$$

$$p(\vec{x}, t) = \sum_n \hat{p}^n(t) e^{i\vec{\kappa}^n \cdot \vec{x}} \quad (\text{A.21})$$

各式に代入すると (ただし, 時間に関する偏微分 $\partial/\partial t$ を d/dt で置きかえる),

$$\sum_n i\kappa_i^n \hat{u}_i^n e^{i\vec{\kappa}^n \cdot \vec{x}} = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} & \sum_n \left[\frac{d\hat{u}_i^n}{dt} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \hat{u}_j^n + i \frac{d\kappa_m^n}{dt} x_m \hat{u}_i^n + i \frac{\partial U_i}{\partial x_m} x_m \kappa_j^n \hat{u}_i^n \right] e^{i\vec{\kappa}^n \cdot \vec{x}} = \\ & - \sum_n i\kappa_i^n \hat{p}^n e^{i\vec{\kappa}^n \cdot \vec{x}} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{n'} \hat{u}_i^{n'} e^{i\vec{\kappa}^{n'} \cdot \vec{x}} \right] \left[\sum_{n''} \hat{u}_j^{n''} e^{i\vec{\kappa}^{n''} \cdot \vec{x}} \right] - \nu \sum_n \kappa_j^n \kappa_j^n \hat{u}_i^n e^{i\vec{\kappa}^n \cdot \vec{x}} \quad (\text{A.23}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_n \left[\frac{d\hat{\theta}^n}{dt} + \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \hat{u}_j^n + i \frac{d\kappa_m^n}{dt} x_m \hat{\theta}^n + i \frac{\partial U_i}{\partial x_m} x_m \kappa_j^n \hat{\theta}^n \right] e^{i\vec{\kappa}^n \cdot \vec{x}} = \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{n'} \hat{\theta}^{n'} e^{i\vec{\kappa}^{n'} \cdot \vec{x}} \right] \left[\sum_{n''} \hat{u}_j^{n''} e^{i\vec{\kappa}^{n''} \cdot \vec{x}} \right] - \alpha \sum_n \kappa_j^n \kappa_j^n \hat{\theta}^n e^{i\vec{\kappa}^n \cdot \vec{x}} \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

が得られる。ただし, $\kappa^n = \kappa^{n'} + \kappa^{n''}$ である。(A.23) 式右辺第二項及び (A.24) 式右辺第一項は次のようにも書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{n'} \hat{u}_i^{n'} e^{i\vec{\kappa}^{n'} \cdot \vec{x}} \right] \left[\sum_{n''} \hat{u}_j^{n''} e^{i\vec{\kappa}^{n''} \cdot \vec{x}} \right] &= \sum_n i\kappa_j^n \sum_{n', n''} \hat{u}_i^{n'} \hat{u}_j^{n''} e^{i\vec{\kappa}^n \cdot \vec{x}} \\ &= \sum_n i\kappa_j^n \hat{u}_i \hat{u}_j^n e^{i\vec{\kappa}^n \cdot \vec{x}} \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{n'} \hat{\theta}^{n'} e^{i\vec{\kappa}^{n'} \cdot \vec{x}} \right] \left[\sum_{n''} \hat{u}_j^{n''} e^{i\vec{\kappa}^{n''} \cdot \vec{x}} \right] &= \sum_n i\kappa_j^n \sum_{n', n''} \hat{\theta}^{n'} \hat{u}_j^{n''} e^{i\vec{\kappa}^n \cdot \vec{x}} \\ &= \sum_n i\kappa_j^n \hat{u}_j \hat{\theta}^n e^{i\vec{\kappa}^n \cdot \vec{x}} \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

また, 一様乱流の場合 (A.23), (A.24) 両式は \vec{x} によらないので,

$$\frac{d\kappa_m^n}{dt} + \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \kappa_j^n = 0 \quad (\text{A.27})$$

の条件が得られる。従って, (A.22), (A.23) 及び (A.24) 各式から第 n 次のフーリエ係数に対する方程式が得られる。

$$\kappa_i^n \hat{u}_i^n = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{d\hat{u}_i^n}{dt} = -\frac{\partial U_i}{\partial x_m} \hat{u}_m^n - i\kappa_j^n \widehat{u_j u_i}^n - i\kappa_i^n \hat{p}^n - \nu(\kappa^2)^n \hat{u}_i^n \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{d\hat{\theta}^n}{dt} = -\frac{\partial \Theta}{\partial x_m} \hat{u}_m^n - i\kappa_j^n \widehat{u_j \theta}^n - \alpha(\kappa^2)^n \hat{\theta}^n \quad (\text{A.30})$$

ただし, $\kappa^2 = \kappa_i \kappa_i$ である。さらに, (A.29) 式に κ_i^n を乗じ, (A.27), (A.28) 両式の間係関係をを用いると, 圧力変動 \hat{p}^n に対する式を得る。

$$\hat{p}^n = 2 \frac{i\kappa_m^n}{(\kappa^2)^n} \frac{\partial U_m}{\partial x_j} \hat{u}_j^n - \frac{\kappa_m^n \kappa_j^n}{(\kappa^2)^n} \widehat{u_m u_j}^n \quad (\text{A.31})$$

(A.29) 式に代入すると, 最終的に変動速度及び変動温度の第 n 次フーリエ係数に対する方程式が次のように得られる。

$$\frac{d\hat{u}_i^n}{dt} = i \left[\kappa_i^n \frac{\kappa_m^n \kappa_n^n}{(\kappa^2)^n} - \delta_{in} \kappa_m^n \right] \widehat{u_m u_n}^n - \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_m} - 2 \frac{\kappa_i^n \kappa_m^n}{(\kappa^2)^n} \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \right] \hat{u}_m^n - \nu(\kappa^2)^n \hat{u}_i^n \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{d\hat{\theta}^n}{dt} = -i\kappa_j^n \widehat{u_j \theta}^n - \frac{\partial \Theta}{\partial x_m} \hat{u}_m^n - \alpha(\kappa^2)^n \hat{\theta}^n \quad (\text{A.33})$$

(A.32) 及び (A.33) 両式を眺めると, \hat{u}_i^n と $\hat{\theta}^n$ は非線形項 $\widehat{u_m u_n}^n$ 及び $\widehat{u_j \theta}^n$ を通じて, 速度乱れフーリエ係数の全ての波数モードと結びついていることがわかる。もしこれらの非線形項が無視できる場合には, 両式は解析的に積分することができ。以下では, これらの非線形項が無視できるための条件について考察してみる。

まず, (A.32) 式の各項のオーダーを見積る。 \hat{u}_i のオーダーが $|\hat{u}_i| \sim \sqrt{E(\kappa)\Delta\kappa} \sim \sqrt{E(\kappa)/\kappa}$, 平均速度勾配が $S \equiv \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ と見積られる場合, 非線形項に対する線形項及び粘性項の比は

$$\frac{\text{線形項}}{\text{非線形項}} = \frac{S\sqrt{\kappa E(\kappa)}}{\kappa^2 E(\kappa)} = \frac{S}{\kappa^{3/2} E^{1/2}} \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\text{粘性項}}{\text{非線形項}} = \frac{\nu \kappa^2 \sqrt{\kappa E(\kappa)}}{\kappa^2 E(\kappa)} = \frac{\nu \kappa^{1/2}}{E^{1/2}} \quad (\text{A.35})$$

となる。ここで、エネルギースペクトルにコルモゴロフの $-5/3$ 乗則 $E(\kappa) = \alpha' \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$ を与え、波数 κ として乱れエネルギーを有する特徴的な波数 $\varepsilon/k^{3/2}$ を選ぶと、上式は次のようになる。

$$\frac{\text{線形項}}{\text{非線形項}} \sim \frac{k}{\varepsilon} S \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\text{粘性項}}{\text{非線形項}} \sim \frac{\nu \varepsilon}{k^2} \quad (\text{A.37})$$

従って、高レイノルズ数では粘性項は非線形項に対して無視することができ、さらに $kS/\varepsilon \gg 1$ であれば、非線形項も無視できる程小さく、線形項のみが残る。また、特徴的な波数に散逸の支配的になる波数 $(\nu^2/\varepsilon)^{-1/4}$ を選ぶと、

$$\frac{\text{線形項}}{\text{非線形項}} \sim \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} S \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\text{粘性項}}{\text{非線形項}} \sim 1 \quad (\text{A.39})$$

となる。平均場が十分に rapid であれば ($\sqrt{\nu/\varepsilon} S \gg 1$) 線形項のみを考慮すればよいことになるが、十分に rapid でない場合は ($\varepsilon/k \ll S \sim \sqrt{\varepsilon/\nu}$) 3 項とも同じオーダーとなる。しかしながら、この見積りは乱れエネルギーの散逸が支配的な高波数帯でのみ有効であり、従ってエネルギーを有する波数領域での条件 $kS/\varepsilon \gg 1$ が満足されていれば、RDT による解析はおおよそ妥当であると言える。

温度場に対しても同様な解析を行うことができる。温度変動及び平均温度勾配が、それぞれ $|\theta| \sim \sqrt{E_\theta(\kappa)\Delta\kappa} \sim \sqrt{E_\theta(\kappa)\kappa}$ 及び $S_\theta = \sqrt{\Theta_\lambda\Theta_\lambda}$ の様に見積られると、(A.33) 式中の非線形項に対する線形項及び分子項の比は、

$$\frac{\text{線形項}}{\text{非線形項}} = \frac{S_\theta \sqrt{\kappa E(\kappa)}}{\kappa^2 \sqrt{E(\kappa)E_\theta(\kappa)}} = \frac{S_\theta}{\kappa^{3/2} E_\theta^{1/2}} \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\text{分子項}}{\text{非線形項}} = \frac{\alpha \kappa^2 \sqrt{\kappa E_\theta(\kappa)}}{\kappa^2 \sqrt{E(\kappa) E_\theta(\kappa)}} = \frac{\alpha \kappa^{1/2}}{E^{1/2}} \quad (\text{A.41})$$

となる。ここでも慣性小領域に対するスペクトル分布 $E(\kappa) = \alpha' \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$, $E_\theta(\kappa) = \beta' \varepsilon_\theta \varepsilon^{-1/3} \kappa^{-5/3}$ を仮定し、特徴的な波数スケールとして $\varepsilon/k^{3/2}$ を選ぶと、上式は

$$\frac{\text{線形項}}{\text{非線形項}} \sim \frac{k}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_\theta}} S_\theta \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\text{分子項}}{\text{非線形項}} \sim \frac{\alpha \varepsilon}{k^2} \quad (\text{A.43})$$

となる。従って、高波数領域であれば分子項は無視することができ、RDT が適用可能な条件は $k S_\theta / \sqrt{\varepsilon \varepsilon_\theta} \gg 1$ となる。この条件が満足されていれば、高波数領域で非線形項が無視出来なくなる場合が生じてもおおよそ RDT は妥当なものとなる。

以上で RDT の適用可能となる条件が示されたが、続いて、具体的に乱流モデル構築の際にどの様に RDT が用いられるかを紹介する。(A.32), (A.33) 両式で非線形項が無視できる場合には、適当な初期条件のもとで、両式は解析的に時間に関して積分することが出来る。通常、初期乱流場として一様等方性乱流から出発し、ある瞬間に平均速度勾配及び平均温度勾配を与え、その後の乱流場の挙動を追跡するという手法がとられる。さらに波数空間での積分を行えば、レイノルズ応力や乱流熱流束の値が得られる。例えば、一様等方性乱流場(ただし、初期乱れエネルギー及び温度乱れ強さをそれぞれ k_0 及び $k_{\theta 0}$ とする)のある瞬間に、平均速度勾配 $S = \partial U_1 / \partial x_2$ 及び平均温度勾配 $S_\theta = \partial \Theta / \partial x_2$ が付加された場合、乱流場は次のように時間的に発展する (Rogers, 1991),

$$\frac{\overline{u_1^2}}{k_0} = \frac{2}{3} + \frac{4}{21}(St)^2 - \frac{2}{1485}(St)^4 + \dots \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\overline{u_2^2}}{k_0} = \frac{2}{3} - \frac{8}{105}(St)^2 + \frac{6}{385}(St)^4 + \dots \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\overline{u_3^2}}{k_0} = \frac{2}{3} + \frac{16}{105}(St)^2 - \frac{148}{10395}(St)^4 + \dots \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\overline{u_1 u_2}}{k_0} = -\frac{4}{15}(St) + \frac{376}{135135}(St)^3 + \dots \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{S^2 k_\theta - k_{\theta 0}}{k_0 \overline{S_\theta^2}} = \frac{1}{3}(St)^2 - \frac{2}{105}(St)^4 + \dots \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{S \overline{u_1 \theta}}{k_0 \overline{S_\theta}} = \frac{1}{5}(St)^2 + \frac{1}{63}(St)^4 + \dots \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{S \overline{u_2 \theta}}{k_0 \overline{S_\theta}} = -\frac{2}{3}(St) + \frac{8}{105}(St)^3 + \dots \quad (\text{A.50})$$

これらの関係を, モデル化したレイノルズ応力や乱流熱流束の輸送方程式に代入すると, モデル項, 例えば圧力変動相関項の rapid 項に対する拘束条件となる. 乱流モデル構築の立場からは, RDT は非定常流を扱う場合に有効な手段となる可能性があると考えられる. また rapid rotation のもとでは RDT の仮定が長い時間にわたって有効であることが知られており (Speziale, 1989), 従って回転系を扱う場合に RDT の要請は重要な意味を持つと言える.

A.2.5 Realizability

Realizability とは, 広い意味では非現実的な解を生じさせないための条件のことを指すが, ここでは特に次の条件を満足させることを言う. 即ち, 任意の変動量の 2 乗平均値は正でなければならないこと, また, 変動量間の相関は Schwarz の不等式を満足しなければならないことの二つである. これをレイノルズ応力及び乱流熱流束に適用すると (例えば, Shih & Shabbir, 1992),

$$\overline{u_\alpha^2} \geq 0, \quad E_{\alpha\alpha} = \overline{u_\alpha^2} \overline{\theta^2} - \overline{u_\alpha \theta^2} \geq 0 \quad (\text{A.51})$$

となる. ただし, 添え字 α に関しては縮約をとらない. このことを乱流モデルが達成するためには, $\overline{u_\alpha^2}$ 及び $D_{\alpha\alpha}$ 方程式が次の条件を満足すればよい.

$$\frac{D\overline{u_\alpha^2}}{Dt} \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad \overline{u_\alpha^2} \rightarrow 0, \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{D}{Dt} E_{\alpha\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad E_{\alpha\alpha} \rightarrow 0. \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{D^2 \bar{u}_\alpha}{Dt^2} \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad \bar{u}_\alpha^2 \rightarrow 0, \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{D^2}{Dt^2} E_{\alpha\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad E_{\alpha\alpha} \rightarrow 0. \quad (\text{A.55})$$

ただし、通常の場合は2階微分に対する条件は省略され、必要条件である (A.52), (A.53) 両式のみを満足させることが多い。また、(A.53) 式は特に joint realizability と呼ばれ、その適用には若干の注意が必要である。それは、乱流熱流束モデルに対する制約として (A.53) 式を用いた場合、これがレイノルズ応力輸送方程式モデルに対する制約にもなり得るためである。温度乱れが passive なスカラー量である場合、温度場に対する条件が速度場にも影響を及ぼすことは物理的に適切でないと見え、この様な理由から Craft (1991) は、(A.53) 式は用いずに

$$\frac{D \bar{u}_\alpha \bar{\theta}}{Dt} \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad \bar{u}_\alpha^2 \rightarrow 0 \quad (\text{A.56})$$

という条件を与えている。

この他にも realizability を考慮したモデルとしては、3 重相関項に対する clipping モデルがある。Andréら (1976a) は任意の3 重相関項に対し、次の様な条件を課している。

$$|abc| \leq \min \begin{bmatrix} \{a^2(b^2c^2 + bc^2)\}^{1/2} \\ \{b^2(c^2a^2 + ca^2)\}^{1/2} \\ \{c^2(a^2b^2 + ab^2)\}^{1/2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.57})$$

以上見てきたように、いわゆる realizability の条件とは変動量の相関に関して上限または下限を与える数学的条件のことを指している。従って、この様な条件が当てはまるような極めて非等方性の強い状況では、有効な手法であると考えられる。この条件の他にも、変動量の相関に関して何等かの物理的な制約があれば (例えば、局所等方性の条件や輸送方程式の局所平衡条件など)、それも一種の realizability の条件と考えることも出来る。

A.2.6 スカラー方程式の線形性

熱や濃度等のスカラー量に関する輸送方程式は、スカラー量が passive と見なせる場合、

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - u_i \Theta \right] \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i \theta}}{Dt} = & -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i \theta u_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \theta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \alpha \overline{u_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \\ & - \frac{1}{\rho} \theta \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\nu + \alpha) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

と表されるが、両方程式とも θ に関して線形であり、従ってプラントル数が等しければ、 $\theta = \theta_A + \theta_B$ の様に多種の異なったスカラー量の足し合わせが可能である。スカラー場乱流モデルも、この様なスカラー方程式の線形性の条件を満足させることが必要である (Pope, 1983)。

この条件は、具体的には温度乱れの分散値 k_θ やその散逸率 ε_θ 、従ってタイムスケール比 R がモデル中に現れてはならないという条件を課すことに等しい。即ち、スカラー場モデルも速度場の時間スケール (k/ε) だけを用いて表現されている必要があり、これはモデルにとって極めて厳しい拘束条件となる。しかしながら、未知項、例えば $\overline{u_i \theta}$ や $\Pi_{i\theta}$ 等をモデル化する際に、限られた自由度の中で適切なモデル化を行うためには、温度乱れ場の状況をあらかじめ記述する必要があり、従って k_θ (無次元化して R) がモデル中に現れるのは自然であると考えられる。また、実験結果 (例えば, Sirivat & Warhaft, 1983) からはスカラー場モデルのタイムスケール比依存性が報告されていることや、速度変動とスカラー変動の相関には速度場とスカラー場の両タイムスケールが影響するであろうという直感的解釈 (Launder, 1984a) などから、この拘束条件は無視されることも多い (例えば, Elghobashi & Launder, 1983; Shih & Lumley, 1986a)。

A.2.7 壁面漸近挙動

壁乱流を扱う場合には、未知項の壁面漸近挙動を正しくモデル化する必要がある。壁面上に座標軸の原点をとり x_2 を壁面垂直方向と定義すると、速度変動及び温度変動は x_2 に関して次のように展開される。

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots \\ u_2 &= b_2 x_2^2 + \cdots \\ u_3 &= c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \cdots \\ \theta &= d_1 x_2 + d_2 x_2^2 + \cdots \quad (\text{等温壁}) \\ \theta &= d_0 + d_1 x_2 + d_2 x_2^2 + \cdots \quad (\text{それ以外}) \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

従って、壁面近傍において次の関係が得られる。

$$\overline{u_1^2} = \overline{a_1^2 x_2^2} \cdots \quad (\text{A.61})$$

$$\overline{u_2^2} = \overline{b_2^2 x_2^4} \cdots \quad (\text{A.62})$$

$$\overline{u_3^2} = \overline{c_1^2 x_2^2} \cdots \quad (\text{A.63})$$

$$\overline{u_1 u_2} = \overline{a_1 b_2 x_2^3} \cdots \quad (\text{A.64})$$

$$\overline{u_1 \theta} = \begin{cases} \overline{a_1 d_1 x_2^2} \cdots & (\text{等温壁}) \\ \overline{a_1 d_0 x_2} \cdots & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (\text{A.65})$$

$$\overline{u_2 \theta} = \begin{cases} \overline{b_2 d_1 x_2^3} \cdots & (\text{等温壁}) \\ \overline{b_2 d_0 x_2^2} \cdots & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (\text{A.66})$$

$$\overline{u_3 \theta} = \begin{cases} \overline{c_1 d_1 x_2^2} \cdots & (\text{等温壁}) \\ \overline{c_1 d_0 x_2} \cdots & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (\text{A.67})$$

$$\frac{k}{\varepsilon} = \frac{x_2^2}{2\nu} \cdots \quad (\text{A.68})$$

少なくともこのような壁面へ漸近する x_2 の次数を、乱流モデルも正しく表現しなくてはならない。具体的には、渦粘性係数及び渦拡散係数モデルであればレイノルズ剪断応力

表 A.1: レイノルズ応力及び乱流熱流束輸送方程式中の各項の壁面漸近挙動

	V_{ij}	$-\varepsilon_{ij}$	Π_{ij}
$i = 1, j = 1$	$2\nu\overline{a_1^2}$	$-2\nu\overline{a_1^2}$	$O(x_2)$
$i = 1, j = 2$	$6\nu\overline{a_1 b_2 x_2}$	$-4\nu\overline{a_1 b_2 x_2}$	$-2\nu\overline{a_1 b_2 x_2}$
$i = 1, j = 3$	$2\nu\overline{a_1 c_1}$	$-2\nu\overline{a_1 c_1}$	$O(x_2)$
$i = 2, j = 2$	$12\nu\overline{b_2^2 x_2^2}$	$-8\nu\overline{b_2^2 x_2^2}$	$-4\nu\overline{b_2^2 x_2^2}$
$i = 2, j = 3$	$6\nu\overline{c_1 b_2 x_2}$	$-4\nu\overline{c_1 b_2 x_2}$	$-2\nu\overline{c_1 b_2 x_2}$
$i = 3, j = 3$	$2\nu\overline{c_1^2}$	$-2\nu\overline{c_1^2}$	$O(x_2)$
	$V_{i\theta}$	$-\varepsilon_{i\theta}$	$\Pi_{i\theta}$
$i = 1$	$(\nu + \alpha)\overline{a_1 d_1}$	$-(\nu + \alpha)\overline{a_1 d_1}$	$O(x_2)$
$i = 2$	$(4\nu + 2\alpha)\overline{b_2 d_1 x_2}$	$-(2\nu + 2\alpha)\overline{b_2 d_1 x_2}$	$-2\nu\overline{b_2 d_1 x_2}$
$i = 3$	$(\nu + \alpha)\overline{c_1 d_1}$	$-(\nu + \alpha)\overline{c_1 d_1}$	$O(x_2)$

$\overline{u_1 u_2}$ 及び壁面垂直方向乱流熱流束 $\overline{u_2 \theta}$ がモデル化の対象となるので、モデルは

$$\nu_t \propto x_2^3 \quad (\text{A.69})$$

$$\alpha_t \propto \begin{cases} x_2^3 & (\text{等温壁}) \\ x_2^2 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (\text{A.70})$$

を満足しなくてはならない。通常の場合

$$1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A}\right) \quad (\text{A.71})$$

等のダンピング関数を用いて次数の調節が行われる。

輸送方程式モデルでは、等温壁の場合に限られるが、次の様な手法が用いられる。壁面上では、表 A.1 に示すレイノルズ応力及び乱流熱流束の輸送方程式の各項が x_2 の最低次

数でバランスするが、これらの項は (A.61)~(A.68) 式の関係及び壁面垂直方向単位ベクトル n_i (今の場合, $n_i = (0, 1, 0)$) を用いて表現することが可能である¹。ここで得られた壁面漸近挙動を満足する表現と、自由乱流における表現を、壁面上で 1、壁から十分離れるとゼロとなる関数を用いてブリッジングすれば、求めるモデルを得る。

壁面ごく近傍の乱流場の予測は、特に高プラントル数流体の乱流熱伝達を扱う場合に重要である。

温度場 2 方程式モデルの導出

本論文の目的は、乱流場の予測に、壁面近傍の挙動を正確に表現することである。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。速度場の予測は、ナビエ-ストークス方程式を用いて行うことができる。一方、温度場の予測は、エネルギー方程式を用いて行う必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。

乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。

乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。

乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。

乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。

乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。

乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。乱流場の予測には、速度場と温度場の両方を考慮する必要がある。

¹例えば、78ページ参照。

付録 B

温度場 2 方程式モデルの導出

序論第 1.3 節でも述べたように、輸送方程式モデルの利点の一つとして、低次のモデルの導出に際して有益な知見を与えることが可能な点が挙げられる。その一つの例として、本章では第 2 章で得られた乱流熱流束輸送方程式モデルに対して近似を施すことで、壁面乱流に適用可能な温度場 2 方程式モデルの導出を試みる。扱う流れ場及び温度場は、 $\partial U_1 / \partial x_2$, $\partial \Theta / \partial x_2$ を有する壁面剪断乱流を想定し、また壁面温度変動は無視する。

局所平衡条件が満足される場合に、乱流熱流束壁面垂直方向成分 $\overline{u_2 \theta}$ のモデル方程式は、(2.15) 式及び (2.18) 式を用いると次のようになる¹。

$$0 = -\overline{u_2^2} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + C'_{\Pi} f_{\Pi 1} f_{\Pi 2} C_p \sqrt{Re_t} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_2 \theta} - C_t f_{t1} f_{t2} \frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_2 \theta} \quad (\text{B.1})$$

ここで、壁から離れた高ペクレ数領域では (B.1) 式は、

$$0 = -\overline{u_2^2} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + 10 C'_{\Pi} \left(1 + \frac{C_K}{R}\right) C_p \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_2 \theta} \quad (\text{B.2})$$

と変形される。簡単のため $C_p = \text{const.}$ を仮定し、 $\overline{u_2 \theta}$ について解くと、

¹ 渦拡散係数モデルで壁面漸近挙動を満足させるのはモデル化の最終段階で行うものとし、従って、ここでは壁面漸近挙動を考慮していないフラックスモデルをまず与えることにする。

$$\overline{u_2 \theta} = - \frac{C_A}{\left(1 + \frac{C_R}{R}\right)} \frac{\overline{u_2^2} k^2}{k \varepsilon} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} \quad (\text{B.3})$$

が得られる。ただし、比例定数は C_A に含めた。

一方、問題となるのが壁面近傍のモデル化である。ここでは (B.1) 式右辺第一項の生成項が散逸項と比べ無視できるほど小さくなり、従って (B.1) 式の単純なバランスからモデルを得ることは出来ない。輸送方程式モデルであれば分子拡散項を適切にモデル化すればなら問題は無いが、温度場 2 方程式モデルの場合は常に平均温度勾配を用いて乱流熱流束の非等方性を記述する必要があるので、このことは原理的な困難を伴うことになる。壁面近傍での平均温度勾配のオーダーが $\partial \Theta / \partial x_2 \sim \partial \theta / \partial x_2 \sim \sqrt{\varepsilon \theta / \alpha}$ と見積られると仮定すると、生成項のオーダーは

$$-\overline{u_2^2} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} = O\left(k \sqrt{\frac{\varepsilon \theta}{\alpha}}\right) = O\left(\frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \sqrt{Re_t \frac{\varepsilon}{k}} \sqrt{k k_\theta}\right) \quad (\text{B.4})$$

となる。一方、散逸率のオーダーは、壁面近傍で $f_{e1} \sim f_{e2} \sim 1$ を仮定すると

$$\varepsilon_{2\theta} = O\left(\frac{1 + Pr}{\sqrt{R} \sqrt{Pr}} \frac{\varepsilon}{k} \sqrt{k k_\theta}\right) \quad (\text{B.5})$$

となるので、生成項と散逸項をバランスさせるためには、少なくとも生成項を $1/\sqrt{Re_t}$ 倍する必要があることがわかる。従って、

$$0 = -\overline{u_2^2} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} \frac{C_A'}{\sqrt{Re_t}} - C_\varepsilon \frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{R} k} \overline{u_2 \theta} \quad (\text{B.6})$$

なる関係が得られ、これを $\overline{u_2 \theta}$ について解くと

$$\overline{u_2 \theta} = - \frac{C_A'}{1 + Pr} \frac{\overline{u_2^2} k^2}{\sqrt{Pr} \sqrt{R}} \frac{\partial \Theta}{k \varepsilon \partial x_2} \quad (\text{B.7})$$

を得る。ただし、ここでも比例定数は C'_λ の中に含めた。

最終的に、(B.3)、(B.7) 両式を結び付けることで全領域に適用可能なモデルが得られるが、両表現のブリッジングには様々な方法が考えられる。ここでは、簡単のため両者の代数和をとることとする。また、渦拡散係数モデルでは原理的に垂直応力の非等方性を満足に再現できないので、 $\overline{u_2^2}/k = \text{const.}$ と置く

$$\overline{u_2 \theta} = - \left(\frac{C_\lambda}{1 + \frac{C_R}{R}} + \frac{C'_\lambda}{\frac{1 + Pr}{\sqrt{Pr}} \sqrt{Re_t}} \right) \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} \quad (\text{B.8})$$

が得られる。ここで、上式右辺は壁面に対して x_2^2 で漸近するので、 $\overline{u_2 \theta} \propto x_2^2$ の壁面漸近挙動を満足させるためには、壁面で $f_d \propto x_2$ となるダンピング関数を導入する必要がある。ダンピング関数として、例えば Myong & Kasagi (1989) を参考にして、

$$f_d = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{70}\right) \quad (\text{B.9})$$

を与えると、最終的に渦拡散係数は

$$\alpha_t = \left(\frac{C_\lambda R}{R + C_R} + \frac{C'_\lambda}{\frac{1 + Pr}{\sqrt{Pr}} \sqrt{Re_t}} \right) (1 - \exp[-y^+/70]) \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{B.10})$$

のように表現される。ここで $C_R = 0.7$ であり、 C_λ 及び C'_λ はそれぞれ約 0.2 及び 0.6 程度の値が適当と考えられる。

(B.10) 式は、Myong & Kasagi (1989) の低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルと極めて首尾一貫した表現となっている。Myong & Kasagi モデルの渦動粘性係数 ν_t は、

$$\nu_t = 0.09 \left(1 + \frac{3.45}{\sqrt{Re_t}} \right) (1 - \exp[-y^+/70]) \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{B.11})$$

で与えられるが、(B.10) 式と比較してみるとその類似性が一目瞭然である。温度場と速度場の相違はあるものの、両表現は同様なレイノルズ数依存性が示す。従来より、温度場

と速度場が相似性を示し、かつ速度場が精度良く予測されている場合には、乱流プラントル数を一定と仮定することで温度場に対する十分な予測が可能であることが知られているが(笠木, 1992), この意味でも (B.10) 式と Myong & Kasagi モデルの整合性の高さは歓迎される。

さらに, (B.10) 式は安倍-長野-近藤 (1993) が剥離・再附着を伴う乱流熱伝達を予測することを目的に提案した温度場 2 方程式モデルとも類似した表現となっている。安倍らのモデルの渦拡散係数 α_t は,

$$\alpha_t = 0.1 \left(\frac{2R}{R+0.5} + \frac{3 \exp[-(Re_t/200)^2]}{\frac{Pr}{\sqrt{2R}} Re_t^{3/4}} \right) \times (1 - \exp[-Re_t/14]) (1 - \exp[-\sqrt{Pr} Re_t/14]) \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{B.12})$$

で与えられる。ただし, $Re_t = y/(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ である。安倍らのモデルと (B.10) 式とは乱流レイノルズ数の指数は異なるものの、タイムスケール比 R が調和平均の形で導入されている点等、非常に似た構造をもつことがわかる。

このように、輸送方程式モデルを扱うことは低次のモデルの一般性を知るためにも重要であると言える。逆に輸送方程式モデルにとっても、使用経験の蓄積が豊富な低次モデルとの整合性が高いことは、一種の検証を行ったことに相当し、その信頼性を高めることになると言える。

付録 C

座標の回転に対する依存性の評価

本来、乱流熱流束 $\overline{u_i \theta}$ はベクトル量であるので、座標変換に対する不変性を満足しなくてはならない。ところが、56ページ (2.14) 式に示した Π_{ij} モデル (Model 1) では、乱流熱流束の相関係数を新たに変数として採用している。相関係数は分母に速度変動の r.m.s. 値を含むので、ガリレイ不変性は満足するが、座標の回転に対する不変性は満足しない。このことは座標軸が相対角を有する二つの座標系で計算を行うと、得られる結果が異なるという問題点を生じる。これは、(2.10) 式でテンソル $\overline{p_i p_j}$ が等方的であると仮定したこと由来し、従って、このテンソルが $\overline{u_i u_j}$ と関係づけられるとした Model 2 ((2.15) 式) では、乱流熱流束ベクトルが変数として現れるので、座標変換に対して不変となる。本章では、実際に一樣剪断乱流に適用し、座標変換に対する依存性を評価した結果を報告する。

まず図 C.1 に示す様に、流れ方向を x_1 、速度勾配及び温度勾配の存在する方向を x_2 と定義し、その座標系と x_3 を軸として相対角 γ をなす新たな座標系を $x'_1 - x'_2 - x_3$ とする。検証は、座標系 $x'_1 - x'_2 - x_3$ において計算し得られた結果を、元の座標系 $x_1 - x_2 - x_3$ へ変換し結果を比較するという方法で行う。図 C.2 には、Tavoularis & Corrsin (1981) の実験を $\gamma = \pi/12$ ずつ変化させ予測した場合の結果を示す。なお、Model 1 は $\gamma = \pi/2$ の座標変換に対しては不変であるので $0 \leq \gamma < \pi/2$ の範囲の結果のみを示す。Model 1 の結果は、 γ によって乱流熱流束の強度が変化するものの、2成分の強度の比に関してはまずまずの値を示す。また、図 C.3 には Rogers ら (1986) の DNS を再現した例を示す。Case

表 C.1: 時刻 $S \cdot t = 12$ における $-\overline{u_1 \theta} / \overline{u_2 \theta}$ 及び Pr_t の値

		Case 1		Case 2	
		$-\overline{u_1 \theta} / \overline{u_2 \theta}$	Pr_t	$-\overline{u_1 \theta} / \overline{u_2 \theta}$	Pr_t
DNS (Rogers et al.)		5.37	0.13	2.57	0.84
Present Model 1	$\gamma = 0$	6.58	0.14	3.07	0.97
	$\gamma = \frac{\pi}{12}$	6.21	0.15	2.71	0.89
	$\gamma = \frac{2\pi}{12}$	4.27	0.14	2.30	0.68
	$\gamma = \frac{3\pi}{12}$	3.27	0.12	2.14	0.53
	$\gamma = \frac{4\pi}{12}$	3.29	0.11	2.32	0.53
	$\gamma = \frac{5\pi}{12}$	4.51	0.12	2.82	0.75
Present Model 2		4.78	0.15	2.37	0.76
Basic Model		4.07	0.17	1.69	0.72
Craft Model		2.74	0.22	2.26	1.44
Jones & Musong Model		-1.27	0.11	5.73	2.82
Shih et al. Model		2.65	0.13	1.36	0.40

1. Case 2 の任意の γ の値に対して, 図 2.24 及び図 2.25 に示した他のモデルの予測結果と遜色ない, あるいはより良好な結果が得られている. Model 2 は, Rogers らの DNS の結果は非常によく再現できているが, Tavoularis らの実験結果に比べると $-\overline{u_1 \theta} / \overline{u_2 \theta}$ が小さく予測されている. 壁乱流ではよりこの傾向が顕著になり, 非等方性の強い剪断流での予測性能の低下という, 他の既存の多くのモデルと同じ問題点を抱えている. 表 C.1 には, 時刻 $S \cdot t = 12$ における乱流熱流束成分の比 $-\overline{u_1 \theta} / \overline{u_2 \theta}$ 及び乱流プラントル数 $Pr_t = \frac{-\overline{u_1 \theta}}{\partial \overline{u_1} / \partial x_2} \frac{\partial \Theta / \partial x_\alpha}{-u_\alpha \theta}$ の値を示す. ただし, α は Case 1 の場合 $\alpha = 1$, Case 2 の場合 $\alpha = 2$ である. Model 1, Model 2 とともに他の複雑なモデルが示すような大きな破綻は示さず, Model 1 で最も精度の低下する $\gamma = 3\pi/12$ のケースにおいても, 容認できる精度で解を与えている.

Model 1 は、流れ方向と平行に座標軸を設定し計算を行う場合には、単純な表現にもかかわらず、壁乱流を含む広い流れで非常に良好な結果を与える。ただし、流れ方向と座標軸が平行でない場合は、図 C.2 及び図 C.3 に示した様な座標依存性を示す。一方、Model 2 は座標不変ではあるが、他の多くのモデルと同様に非等方性の強い乱流場を十分な精度では予測できないという問題点を抱えている。Model 1 及び Model 2 には、この様に一長一短があるが、工学的見地から見て、単純な表現にもかかわらずどのケースでも他のモデルと同程度、しかも流れに沿った座標系では非常に精度の高い予測が可能であるという利点を持つ Model 1 は、やはり大きな魅力であると考えられる。

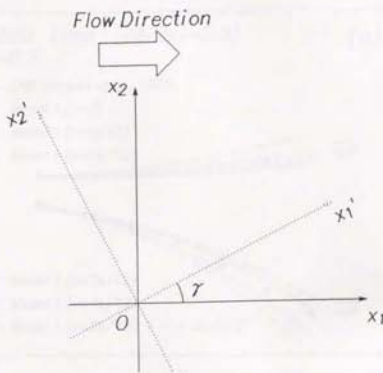


図 C.1: 座標系

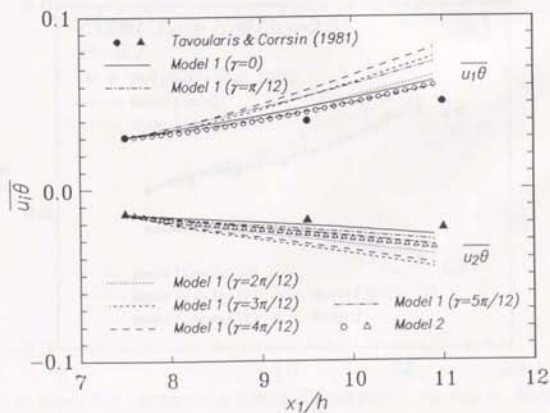


図 C.2: Tavoularis & Corrsin の一様剪断乱流場予測における座標依存性

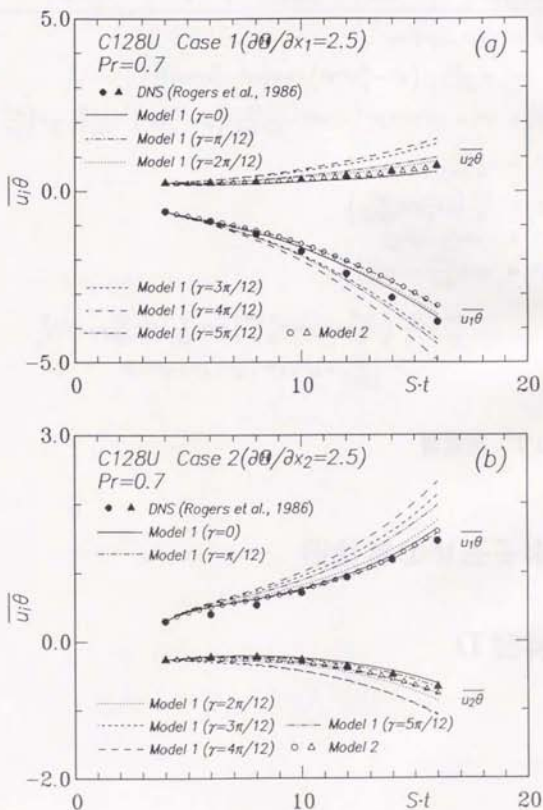


図 C.3: Rogers らの一樣剪断乱流場予測における座標依存性 (a) Case 1 $\partial\Theta/\partial x_1 = \text{const.}$, (b) Case 2 $\partial\Theta/\partial x_2 = \text{const.}$

付録 D

本モデルの具体形

D.1 速度場

$$\frac{D\bar{u}_i\bar{u}_j}{Dt} = P_{ij} + G_{ij} + T_{ij} + V_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} + 0.18 \bar{u}_k \bar{u}_i \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + 1.4 \frac{\varepsilon P}{k} + c_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon G_{kk}}{2k} - 1.8 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{D.2})$$

$$P_{ij} = -\bar{u}_i \bar{u}_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \bar{u}_j \bar{u}_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

$$G_{ij} = -\beta g_i \bar{u}_j \bar{\theta} - \beta g_j \bar{u}_i \bar{\theta}$$

$$T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(0.2 \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_j \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} \right)$$

$$V_{ij} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_k^2}$$

$$\Pi_{ij} = \phi_{ij} = C_{\Pi v} f_{\Pi v} \sqrt{Re_t} \left[-1.8 \varepsilon a_{ij} - \frac{(c_2 + 8)}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - \frac{(30c_2 - 2)}{55} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right. \\ \left. - \frac{(8c_2 - 2)}{11} \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right) - 0.5 \left(G_{ij} - \frac{1}{3} G_{kk} \delta_{ij} \right) \right]$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + C_{\varepsilon v} f_{\varepsilon v} \varepsilon a_{ij}$$

$C_{\Pi v}$	$C_{\varepsilon v}$	c_2	$c_{\varepsilon 3}$ (安定)	$c_{\varepsilon 3}$ (不安定)	$f_{\Pi v}, f_{\varepsilon v}$	f_2	Re_t
1/15	0.8	0.4	0.0	1.4	$\tanh(15/\sqrt{Re_t})$	$1 - \frac{2}{9} \exp \left\{ - \left(\frac{Re_t}{6} \right)^2 \right\}$	$\frac{k^2}{\nu \varepsilon}$

D.2 温度場

$$\frac{D\bar{u}_i\bar{\theta}}{Dt} = P_{i\theta} + G_{i\theta} + T_{i\theta} + V_{i\theta} + \Pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{Dk_\theta}{Dt} = \alpha \frac{\partial^2 k_\theta}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(0.3 f_R \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_i \bar{u}_k \frac{\partial k_\theta}{\partial x_j} \right) + P_\theta - \varepsilon_\theta \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_k} + 0.3 f_R \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_k \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} \right) \\ & + 0.8 \frac{P_\theta}{k_\theta} \varepsilon_\theta + 0.3 \frac{P}{k} \varepsilon_\theta + c_{P3} \frac{G_{ik}}{2k} \varepsilon_\theta - 1.0 \frac{\varepsilon_\theta}{k_\theta} \varepsilon_\theta - 0.3 \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon_\theta \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$P_{i\theta} = -\bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \bar{u}_j \bar{\theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

$$G_{i\theta} = -\beta g_i \bar{\theta}^2$$

$$T_{i\theta} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(0.3 f_R \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_j \bar{u}_k \frac{\partial u_i \bar{\theta}}{\partial x_j} \right)$$

$$V_{i\theta} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{(\alpha + \nu)}{2} \frac{\partial u_i \bar{\theta}}{\partial x_k} \right]$$

$$\Pi_{i\theta} (\text{Model 1}) = C_{\Pi} f_{\Pi 1} f_{\Pi 2} C_p \sqrt{Re_i} \sqrt{\frac{k}{2u_{(i)}^3}} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_i \bar{\theta} + C_{\Pi G} f_{\Pi 3} f_{\Pi 2} \sqrt{A} \sqrt{Re_i} G_{i\theta}$$

$$\Pi_{i\theta} (\text{Model 2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} C_{\Pi} f_{\Pi 1} f_{\Pi 2} C_p \sqrt{Re_i} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_i \bar{\theta} + C_{\Pi G} f_{\Pi 3} f_{\Pi 2} \sqrt{A} \sqrt{Re_i} G_{i\theta}$$

$$\varepsilon_{i\theta} = C_\varepsilon f_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 2} \frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{R}} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_i \bar{\theta}$$

$$P_\theta = -\bar{u}_i \bar{\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}$$

C_{Π}	$C_{\Pi G}$	C_p	C_ε	c_{P3} (安定)	c_{P3} (不安定)	R
-0.264	-0.033	$\sqrt{A} (0.8 + 0.3 \frac{Pr}{\varepsilon})$	0.8	0.0	0.3	$\frac{k_\theta/\varepsilon_\theta}{k/\varepsilon}$

$f_{\Pi 1} \cdot f_{\varepsilon 1}$	$f_{\Pi 2}$	$f_{\Pi 3}$
$1 - \exp(-10r)$	$\min \left[1, \frac{1}{1.2} \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \right]$	$1 - \exp \left(-\frac{15}{\sqrt{Re_i} f_{\Pi 2}} \right)$

$f_{\varepsilon 2}$	f_R	r
$\min \left[0.5 \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}}, 1, \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{Pr}} \right]$	$2 / \left(1 + \frac{0.7}{R} \right)$	$\left(\frac{0.7}{R} + 1 \right) / (\sqrt{Re_i} f_{\Pi 2})$

D.3 壁面補正

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{\varepsilon}}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_k} + 0.18 \bar{u}_k \bar{u}_l \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_l} \right) + 1.4 \frac{\bar{\varepsilon} P}{k} - 1.8 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} \\ & + 2c_{\varepsilon w} \nu \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_k \bar{u}_l \frac{\partial^2 U_l}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\bar{\varepsilon}(\varepsilon - \bar{\varepsilon})}{k} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{\varepsilon}_\theta}{Dt} = & \alpha \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_\theta}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(0.3 f_R \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_j \bar{u}_k \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\theta}{\partial x_j} \right) + 0.8 \frac{P_\theta}{k_\theta} \bar{\varepsilon}_\theta + 0.3 \frac{P}{k} \bar{\varepsilon}_\theta - 1.0 \frac{\bar{\varepsilon}_\theta}{k_\theta} \bar{\varepsilon}_\theta - 0.3 \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \bar{\varepsilon}_\theta \\ & + 2c_{w2} \alpha \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}_k \bar{u}_l \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\bar{\varepsilon}_\theta(\varepsilon_\theta - \bar{\varepsilon}_\theta)}{k_\theta} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & f_{wv} \left\{ -\frac{\varepsilon}{k} (\bar{u}_i \bar{u}_k n_k n_j + \bar{u}_j \bar{u}_k n_k n_i) \right. \\ & \left. - 0.05 \left[2a_{ij} + \left(a_{ki} n_k n_l \delta_{lj} - \frac{3}{2} a_{kl} n_k n_j - \frac{3}{2} a_{kj} n_k n_l \right) \right] \right\} \\ & + (1 - f_{wv}) C_{\phi v} f_{\phi v} \sqrt{Re_t} \left[-1.8 \varepsilon a_{ij} - \frac{(c_2 + 8)}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \right. \\ & \left. - \frac{(30c_2 - 2)}{55} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{(8c_2 - 2)}{11} \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right) - 0.5 \left(G_{ij} - \frac{1}{3} G_{kk} \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & f_{wv} \frac{\frac{\varepsilon}{k} (\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i \bar{u}_k n_k n_j + \bar{u}_j \bar{u}_k n_k n_i + \bar{u}_k \bar{u}_l n_l n_i n_j)}{1 + \frac{3}{2} \frac{\bar{u}_i \bar{u}_j}{k} n_k n_l} \\ & + (1 - f_{wv}) \left[\frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + C_{\varepsilon v} f_{\varepsilon v} \varepsilon \left(\frac{\bar{u}_i \bar{u}_j}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\Pi_{i\theta} = -\frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_k \bar{u}_l n_k n_l f_w + C_{\Pi} f_{\Pi 1} f_{\Pi 2} C_p \sqrt{Re_t} \sqrt{\frac{k}{2u_{(i)}^3}} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_{(i)} \bar{\theta} + C_{\Pi G} f_{\Pi 3} f_{\Pi 2} \sqrt{A} \sqrt{Re_t} G_{i\theta}$$

$$\varepsilon_{i\theta} = \left\{ \frac{1 + Pr}{2Pr} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_i \bar{\theta} + \frac{1 + Pr}{2Pr} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_k \bar{\theta} n_k n_i \right\} f_w + \left\{ C_{\varepsilon f_1} f_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon w} \frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}\sqrt{R}} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_i \bar{\theta} \right\} (1 - f_w)$$

$$V_{i\theta} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left\{ \frac{(\nu + \alpha)}{2} \frac{\partial u_i \bar{\theta}}{\partial x_k} + n_i n_j \frac{(\nu - \alpha)}{6} \frac{\partial u_j \bar{\theta}}{\partial x_k} \right\} f_w + \left\{ \frac{(\nu + \alpha)}{2} f_{Dw} \frac{\partial u_i \bar{\theta}}{\partial x_k} \right\} (1 - f_w) \right]$$

$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon}_\theta$	$c_{\varepsilon w}$	c_{w2}
$\varepsilon - 2\nu \left(\max \left[\frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial y}, 0 \right] \right)^2$	$\varepsilon_\theta - 2\alpha \left(\max \left[\frac{\partial \sqrt{\varepsilon_\theta}}{\partial y}, 0 \right] \right)^2$	0.07	$\min[0.1, 0.35 - 0.21Pr]$

f_{wv}	f_w	$f_{Dw} \cdot f_{\varepsilon w}$	Re_c
$\exp \left[- \left(\frac{Re_c}{14} \right)^4 \right]$	$\exp \left(-\sqrt{A} \cdot \max \left[4, 0.6Pr^{3/4} \right] \right)$	$\min \left[1, \frac{0.7}{R} + 0.1\sqrt{Re_t} \right]$	$\left(\frac{y}{(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}} \right)^{1/4}$



Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3Color

Black

© Kodak, 2007. TM Kodak

Kodak Gray Scale

C Y M

© Kodak, 2007. TM Kodak

A

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50