動力学モデルによる
コンピュータアニメーション生成手法

寺沢 幹雄

1

平成5年度 博士論文

動力学モデルによる
コンピュータアニメーション生成手法

指導教官 木村文彦 教授

東京大学大学院 工学系研究科
精密機械工学専攻

工 17066 寺沢 幹雄

概要

本論文ではコンピュータアニメーションにおいて運動シミュレーションとアニメーション特有の運動を実現するために，動力学に基づく計算機内部表現モデルを用いることで運動指定の負担を軽減する手法を提案する．運動シミュレーションは運動方程式，運動量保存則などの力学法則実現の問題であり，誇張，予備動作などのアニメーション特有の運動は動的な変形制御の問題である．動的な変形を制御するための直観的なパラメータとして力学的物理特性が利用できる点に注目すると，両要素共に制御の基本量として力学的な情報が本質的である．そこで，本研究では力学的な情報を持つコンピュータアニメーションモデルを提案する．モデルは個々の物体の運動を生成するモデルと個々の運動を組み合わせて運動全体を制御するモデルからなる．個々の物体の運動を生成するモデルは，質点，剛体，柔軟物体を統一的に表現する質点 - ばね系のモデルであり，一般の運動はエネルギの関係式から動力学方程式を導出することで求め，幾何学的制約の加わる運動は仮想制御力を用いることで求める．運動全体を制御するモデルは，幾何学的情報と力学的情報を独立に管理するモデルであり，運動パターンに応じて必要な情報だけを用いて処理を行なう．また，運動の開始，終了，変更は幾何学的条件，力学的条件，時間条件によるイベントで記述する．従来のコンピュータアニメーションモデルでは幾何学的情報しか持たないため，並進，回転，変形のそれぞれの自由度の値を各時間ごとに指定しなければならなかったが，力学的情報を持つモデルでは少数の直観的パラメータで物理的運動や強調表現を実現できるため，運動指定の負担を軽減できる．以上の手法に基づくコンピュータアニメーションシステムを実現し，対話的なアニメーション生成に本手法が適していることを確認した．

目次

図一覧

表一覧

第1章

序文

1.1 コンピュータアニメーション

コンピュータグラフィクスは計算機内部に仮想的な物体を構築し表示する技術である．対象となるのは現実に存在するものばかりでなく，分子のようにミクロなものから宇宙のようにマクロなもの，破壊のように瞬間的なものから進化のように長期的なもの，恐竜のように過去に失われたものから建築前のビルのようにまだ存在しないもの，また多次元空間の数学的物体や気象情報のように膨大なデータなどがあり，これらを人間が理解可能なように表示する応用範囲の広い技術である．このため今日では，映画，コマーシャルフィルム，番組タイトルなどの商業的利用を始めとし，解析結果の可視化，プレゼンテーション，CAIなどに不可欠な基盤技術となっている．

コンピュータグラフィクスの要素技術としては，表示技術(レンダリング技術)，形状生成技術(モデリング技術)，および動画技術(アニメーション技術)の3つがある．かつては高品質なコンピュータグラフィクス映像の制作には多大なコストがかかっていたため作品は静止画が中心であった．このため，静止画を生成するのに必要な表示技術，および形状生成技術に関しては長足の進歩が見られた．例えば，表示技術では影，透過，屈折，反射，相互反射，マッピングなどに関して革新的な手法が提案されており，形状生成技術では自由曲面生成手法や岩，山，木，草花などの自然物生成手法に関する多くの研究がなされている．

表示技術や形状生成技術に比べるとアニメーション技術に対する要求は従来はあまり高くなかった．しかし，近年の計算機の低廉化，描画ハードウェアの発達，高品質で使い易いソフトウェアの普及などにより映像制作のコストは相対的に低減してきた．これに伴い今日では多数の画像 (映画では 1 秒に 24 枚，NTSC のビデオでは 1 秒に 30 枚) を連続的に表示する動画，すなわちアニメーションが中心となっている．このためアニメーション技術に対する要求も厳しくなってきている．動画映像は目に触れる機会が多いため，少しでも不自然な動きは見る人に違和感を与えてしまう．このためアニメーションではいかに自然に見える動きを作り出すかが重要になる．

アニメーションにおける自然な動きには 2 つの要素があると考えられる．一つは現実に起こる動きの忠実な再現であり，もう一つは古典的なキャラクタアニメーションで用いられているような動きの強調表現である．

現実に起こる動きの忠実な再現とは，物体が重力によって落下する，物体同士が衝突して跳ね返るなどの物理現象のシミュレーションである．通常目にする動きは何らかの物理法則にしたがっているので，シミュレーションの要素は欠かせない

これに加えて，アニメーションでは現実とは異なる特有の運動表現の要素も欠かせない．例えば，柔らかい材質でできた車のアニメーションを図1.1の (1) から (6) の順に示すが，この例では (1) のように静止してた車が発進しようとするときには (2)(3) のように予備動作を入れ，柔らかさを強調するための (4) (5) (6) のように誇張，伸縮を行なう．古典的なキャラクタアニメーションではアニメーション生成原理 (*Animation Principle*)[Frank 81] と呼ばれる経験的な表現手法があるが，これによると予備動作，誇張，伸縮などの動作を入れたほうが自然に見えると言われている．動きの自然なアニメーションを実現するためには現実に起こる運動の忠実な再現であるシミュレーション的側面と予備動作，誇張，伸縮などの古典アニメーション的側面の要素を効果的に組み合わせる必要がある．

しかし，現状のコンピュータアニメーション技術ではシミュレーション的要素と古典アニメーション的要素を表現するためには多大な試行錯誤の労力

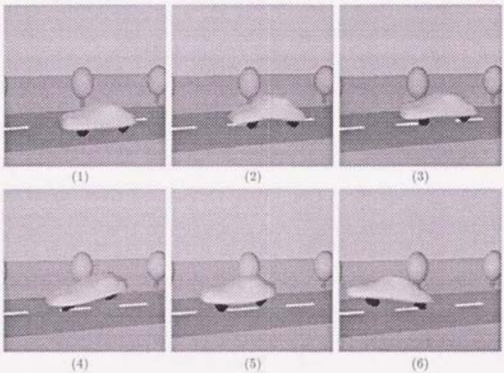


図 1.1: 古典的アニメーション手法による運動表現

が必要となる．これはコンピュータアニメーションシステムがいまだ黎明期にあるためユーザインタフェースの完成度が低いという問題もあるが，より本質的な問題としては，物体や運動をいかに計算機にモデル化するかという内部表現の問題が存在する．

1.2 本研究の目的

本研究では以上で述べたような観点から，現実に起こる運動の忠実な再現であるシミュレーション的側面と，伸縮，予備動作，誇張などの古典アニメーション的側面を考慮したコンピュータアニメーションを生成する上での運動指定の負担を軽減するモデルの実現を目的とする．運動シミュレーションの実現は運動方程式，運動量保存則などの力学法則実現の問題であり，アニメーション特有の強調表現の実現は硬さや重さなどの物理量の制御の問題に帰着できる．本研究では両要素共に制御の基本量として力学的物理特性が本質的であることに注目し，幾何学的情報だけでなく力学的な情報を持つコンピュータアニメーションモデルを提案する．

まず，本章では従来のコンピュータアニメーションにおける動きの制御法について概観し，幾何学的情報だけを持つモデルの欠点を示す．この欠点を補うための物理法則に基づくモデルに関する研究の現状を述べ，これに対する本論文での立場を明らかかする．さらに本研究での目的を達成するために克服しなければならない問題を明確にする．最後に本論文の構成について触れる．

1.3 コンピュータアニメーションにおける動きの制御法

一般にコンピュータアニメーションでは位置，姿勢などの幾何学的情報を持った表示モデルで物体を表現しており，各時間ごとに表示モデルを少しずつ動かすことでアニメーションを生成する．表示モデルを動かす運動制御法として代表的なものに対話法 (*Interactive Method*) [Wilhelms 87] と呼ばれるものがある．これはキーボード，マウス，ダイヤル，ジョイスティック，データグローブなどの入力装置を使って動きを設定し，試行錯誤で動きを決定する指定方法である．決め (キー) となるコマ (フレーム) での位置や姿勢を指定し線形関数，スプライン関数などで間を補うキーフレーム補間，ロボットのティーチングのように対話的に物体の軌道を生成する軌道指定法，関節などの各自由度に対して制御関数を指定する制御関数法などの実用的な多くの方法が対話法に含まれる．対話法は直観に馴染み易く，またシステムへの実装が容易なことからコンピュータアニメーションシステムでは広く使われている．

対話法による運動指定は基本的に位置，姿勢などの幾何量の時間的変化に基づくものであり，指定した量に対する幾何学的な連続性は保証される．しかし，幾何学的な連続性が必ずしも力学的に滑らかな動きを保証するわけではない．また，各自由度に対してキーフレーム設定を行なわなければならないため自由度の大きい変形を伴う物体に対しては指定が難しい．例えば，図 1.2は (1) から (6) の順で旗の一連の動きを示すが，旗は図 1.3に示すように 11 個の節点から成るため節点変位だけでも 33 の自由度を持つ．各時間についてそれぞれの変位を指定して自然な動きを得るためには多くの試行錯誤が必要になる．このため伸縮，予備動作，誇張などにおいて物体を変形させて滑らかな運動を実現するのは困難である．

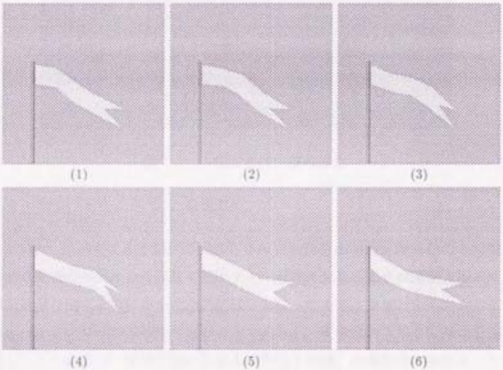


図 1.2: 旗の動き

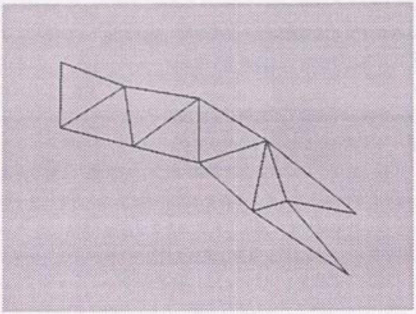


図 1.3: 11 節点を持つ旗の構造

1.4 物理法則に基づくモデル化

1.3 節で述べたような制御の困難さは本来物理的な運動を幾何量のみで記述する従来のモデル化の問題に起因する．現実に起こる動きは運動方程式，運動量保存則などの何らかの力学的法則に従っている．また，キャラクタアニメーションでは物体の変形は不可欠であるが，変形は力学的な振舞いを強調したものが多い．現実に起こる動きの再現と伸縮，予備動作，誇張などの強調表現の 2 つの要素ともに力学的な情報が重要な意味を持つ点に注目すると，従来のように幾何学的情報だけでなく力学的情報を持つモデルが必要であると考えられる．

こうした考えから，近年，自然界の物理法則によって自動的に運動を生成することが提唱されており，この考えのもとに提案された手法は総称して「物理法則に基づくモデル化」 (*Physically-Based Modeling*) と呼ばれている [Barzel 92]．物理法則に基づくモデル化は一般的には

- コンピュータアニメーションで自然な動きを実現するために，自然界の

物理法則を用いて物体や現象を実用的な時間で計算する汎用な手法 [寺沢 89]

と考えることができ，電気現象，磁気現象，熱伝動現象などを含めることも可能であるが，アニメーションでは動きを重視し，動力学に基づいた現象を考えるのが普通である．

コンピュータアニメーションでの対象は幅広く，動力学に基づいた現象でも，火花のような粒子，石のような硬い物体，布のような柔らかい物体など様々な物体を扱う．動力学的には，物体の性質によって質点，剛体，柔軟物体に分類でき，またそれぞれが単体か多体かによっても分けることができる．ここで質点とは時間が経過しても変形せず回転しない物体のことを指し，剛体とは変形せずある時間での状態を位置と姿勢だけで記述できる物体を指し，布やゴムボールのように時間経過につれて変形する物体を柔軟物体と呼んでいる．これらの対象を扱うときに一般的に用いられる物理法則の例を表1.1に示す．

従来，コンピュータアニメーションにおける物理法則に基づくモデル化は主に現実に起こる動きの忠実な再現であるシミュレーション的立場に立って研究されてきた．シミュレーション的立場では動きの正確さが要求されるため各対象について個別に扱われてきた．

質点としてのモデル化では本来流体である対象を多数の質点の集合と考えることで火や水の動きを表現したパーティクルシステム (*Particle Systems*) に関する研究がある [Reeves 83]．

剛体としてのモデル化は最も一般的であり剛体の個々の動きや，系としての相互作用について直進力の他に，遠心力，Coriolis の力，回転の加速による力を考慮した汎用性のある定式化として Hahn の研究が挙げられる [Hahn 88]．剛体多体の中でも人や動物やロボットなどのモデルとして使われる関節物体はコンピュータグラフィクスでは重要な対象であるため多くの研究がなされている ([Badler 80] [Calvert 80] [Calvert 82] [Korein 82] [Girard 85] など)．解法としては運動エネルギと保存エネルギをもとにした Lagrange 方程式に基づくか，各リンクに対して直進運動は Newton の方程式，回転運動は Euler の方程式を適用した Newton-Euler 方程式に基づくかによって分かれる

表 1.1: 対象の分類と代表的な物理法則

	単体	多体
質点	Newton の運動法則 力学的エネルギ保存則	運動量保存則 Newton 反発の法則 Newton の運動法則 力学的エネルギ保存則
剛体	Newton-Euler 方程式 Newton の運動法則 力学的エネルギ保存則	角運動量保存則 Newton-Euler 方程式 運動量保存則 Newton 反発の法則 Newton の運動法則 力学的エネルギ保存則
柔軟物体	釣合方程式 歪の適合方程式 Hooke の法則 連続方程式 Newton-Euler 方程式 Newton の運動法則 力学的エネルギ保存則	釣合方程式 歪の適合方程式 Hooke の法則 連続方程式 Newton-Euler 方程式 角運動量保存則 運動量保存則 Newton 反発の法則 Newton の運動法則 力学的エネルギ保存則

[ブラディ 85]．前者の例としては Hollerbach の研究 [Hollerbach 80] や Wilhelms の研究 [Wilhelms 85] などがあり，後者の例としては Luh の研究 [Luh 80]，Armstrong の研究 [Armstrong 79] [Armstrong 85]，Featherstone の研究 [Featherstone 83] などがある．

柔軟物体の中で布は重要な表示対象で，初期の研究では布を縦糸，横糸の集まりとし，基準となる糸に懸垂線をあてはめるという幾何的な手法をとっていたが [Weil 86]，Terzopoulos らは，内力，減衰，弾性，外力の時間関数についての Lagrange 形式の微分方程式を解くことで布，紙，柔らかい金属などの一般的な弾性変形体を動力学的に扱い [Terzopoulos 87]，さらにこれを発展させ粘弾性，塑性，破壊についてもモデル化している [Terzopoulos 88]．

このように従来は質点，剛体，柔軟物体は個々に定式化して運動を求めることが多かった．すなわち，対象に応じて特化したプログラムによって個々の物体の運動を実現することが多かった．しかしながら，アニメーションでは一つのシーンの中で様々な対象が干渉するなどして互いに関係した運動をする．このときに対象ごとにプログラムが異なるのでは物体間の関係や処理を正しく管理することは困難である．このため質点，剛体，柔軟物体すべてを同一の枠組で記述し，同一の処理で扱えることが必要である．統一的な処理を目指したものとして Terzopoulos らは Lagrange の運動方程式から並進，回転，局所変形，大域的変形の運動方程式を導くことで剛体，柔軟物体を同時に扱う手法を提案した [Terzopoulos 91]．この手法はエネルギに関する関係式を元にしているため関節物体にも適用できる可能性がある．しかし，Terzopoulos のモデル化では物体表面を連続関数で表現しているためシミュレーションには適しているが，一般に変形が全体にわたるため古典的アニメーション手法実現のために変形を局所的に制御するのが容易ではない．また，連続関数の積分には計算時間がかかるため動力学方程式を実用的な時間で解くのは困難であり，対話的な環境で運動生成するのに十分な応答速度を得ることはできない．古典的アニメーション手法を容易に実現し，高速に動力学計算を行なうためにはより汎用で制御性のよい定式化が必要となる．

以上で述べたように個々の物体の運動に対するモデルを定義する上で力学

的情報を考慮することが重要であり，また，質点，剛体，柔軟物体を同一の枠組で扱うことができ，変形を直観的な少数のパラメータで制御できることも同様に重要である．本論文ではこうした要因を考慮した動力学に基づくモデルを提案する．

1.5 幾何学的制約を受ける運動

力学的情報を持つモデルの運動を求めるためには，先ず並進，回転，変形についての運動方程式を導くことが必要である．さらに，空間上の自由な運動だけでなく，何らかの制約が加わる場合も扱うためには制約を考慮したモデル化も必要になる．例えば，物理世界と異なり，通常のコンピュータグラフィクスのモデルでは物体同士が衝突しても互いに貫通してしまうので，干渉を避けるためには何らかの手段を講じなければならない．このような問題は物体と物体が干渉しないという幾何学的な制約が加わった運動と考えることができる．幾何学的制約を扱うためには衝突位置，衝突速度などの幾何学的な情報を動力学に反映させると同時に，動力学的解析によって得られた変形を幾何学的情報に反映させるという互いの関係付けが必要になる．

アニメーションでは同一形状に対して異なる運動を定義することもあるので，幾何学的情報と力学的情報は必ずしも一対一に対応するわけではない．そこで，幾何学的情報を持つモデルと力学的情報を持つモデルを別のモデルとして分離する．2つのモデルの間は図1.4に示すように，物理的なモデルの並進，回転，変形が幾何学的なモデルに写像され，幾何学的なモデルの外力や制御力が力学的なモデルに写像されるという関係にある．

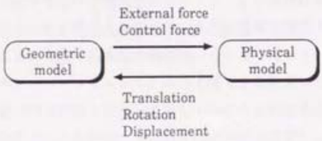


図 1.4: 幾何学的なモデルと力学的なモデルの関係

変形の写像法としては自由形状変形 (*Free-Form Deformation*) [Sederberg 86] が一般に広く用いられている．自由形状変形は物体を囲む空間に格子状の制御点を定義し，制御点を移動することで空間内に定義された物体を変形させ

る手法であり，幾何連続な変形を得るのに適している．しかし，自由形状変形ではすべての制御点からの影響を受けるため変形の局所性がなく，希望する変形を得るための制御が難しい．物理的なモデルの変形を忠実に反映するためには局所性を保つ写像法が必要になる．

幾何学的制約によって受ける力の算出法としては，有限要素法のように物体を小要素に分け，各要素の微視的な解析によって幾何と力学の関係付けをする方法がよく用いられる．しかし，この方法では大域的な幾何と力学の関係を陽に把握することができない．アニメーションの場合には単に制約を満たすだけでなく，制約によって受ける力を積極的に利用することもある．例えば衝突した時に変形を誇張して見せるためには解析結果よりも大きい衝突力を加える．このためアニメーションではアニメータが直観的に把握できる大域的な幾何と力の関係付けが必要である．一般的な関係付けを行なうことは難しいが視覚的効果を損なわないようにモデル化することで個別の問題に対して近似手法を定式化することはできる．本論文では，幾何学的制約から力を求める問題としてコンピュータアニメーションでよく用いられる代表的な3つの問題について論じる．

幾何学的制約の加わる問題として重要なものの第一に軌道に沿った運動が挙げられる．アニメーションシステムの多くは直線，円弧，スプラインなどの曲線に沿って物体を動かす機能を持っている．この機能は物体がどの時間にどの場所にあるかを直観的に指定でき，また座標系を移動するだけなので実現も容易なことから最も基本的な機能の一つとなっている．しかし，従来のコンピュータアニメーションシステムで実現できる軌道に沿った運動では慣性力などの物理的な影響を考慮していないため人工的な動きになることが多かった．この不自然さを解消するために物理法則を考慮しつつ軌道に沿った動きを実現する研究としてペナルティ法に基づく方法 [Platt 88] や仮想的制御力による方法 [Barzel 88] などが提案された．しかし，これらは質点，剛体についての議論であり，柔軟物体を扱う場合には，節点を軌道上に拘束すると同時に，拘束されていない部分は動力学的に運動を求めなければならない．したがって，拘束節点が軌道を満たすような適当な制御力を求めて柔軟

物体に適用する必要がある．

幾何学的制約の加わる問題として重要なものの第二に体積保存変形が挙げられる．アニメーションでは衝突の際，衝突方向のつぶれを補い，横に膨らんで体積を保つほうが自然に見える．すべての物体が非圧縮性であるわけではないが，自然に見える動きを実現する上でこのような運動中の物体の変形による体積減少もしくは増加を補正する技術は重要である．また，伸縮，誇張などの古典的アニメーション独自の表現を実現するために積極的に体積を変化させる場合にも体積を制御する技術が望まれる．動力学に従う柔軟物体の体積保存変形については，基準体積との差をペナルティ法の評価関数として定義する方法が提案されている [Platt 88] が，動力学方程式自体に補正項を加えるため数値計算の安定性に問題があり，また，動力学方程式の導出時点で評価関数を組み込まなければならないため，対話的に変形を強調するのには向いていない．したがって，対話的に変形を強調できるような体積保存変形方法を考えなければならない．

幾何学的制約の加わる問題として重要なものの第三に衝突反応が挙げられる．一般のコンピュータグラフィクスにおける表示モデルでは物体同士が衝突すると互いに貫通してしまう．物理法則に基づいた自然なアニメーションを生成するという意味では，貫通による不自然さを排除することは重要である．このため干渉を回避を幾何学的制約として加えなければならない．現状では干渉が生じた時にその干渉量の指数に比例する衝突力を加えることで干渉を回避したり [Terzopoulos 87]，非貫通のためのポテンシャルエネルギを定義し，最適化技法によってエネルギを最小にすることで物体の干渉を回避したり [Platt 88]，力積を用いて干渉を回避する方法 [Witkin 90] などが用いられているが，これらの手法は硬い物体でも柔らかい物体でも同じ反応しか得られず，物体の物理的性質を反映したものとは言えない．したがって，硬さや重さなどの物体の物理的性質に合った変形を実現する手法が必要である．

本論文ではコンピュータアニメーションでよく使われる幾何学的制約の加わる運動として軌道に沿った運動，体積保存変形，衝突反応の 3 つを扱い各々

について定式化を行ない解法を提案する.

1.6　シーンの記述

1.4 節，1.5 節で述べてきた議論は個々の物体の運動についてのモデル化であるが，アニメーション作品の制作には物体がどのタイミングでどう動くのかをシーン全体について記述する全体の運動のモデル化も必要である．全体の運動をモデル化する手法としては行動シミュレーション (*Behavior Simulation*) が古くから研究されており，Director [Kahn 78]，ASAS [Reynolds 82]，Paradise [内木 86] などのシステムが実現されている．行動シミュレーションはリーダ，敵，他の物体の動きなど外界を認識し，それに応じて個々の物体が自律して運動するようなモデル化である．このため鳥や魚などの群の動きの生成に適している．しかし，個々の動きは予めプログラムされた動きであり物理法則とは直接関係はない．

これに対し物理法則に基づいた個々の動きと全体の動きを組み合わせたものに制約に基づくモデル化 (*Constraint-Based Modeling*) と呼ばれるものがある．これは何らかの制約を加えることで運動全体を制御するもので，制約からはずれると大きくなる評価関数を定義し，評価関数を最小化するような状態変数を求めることで制約を満たす手法などがよく用いられる．例えば，Witkin らは時間と空間についての簡単な運動学的制約を導入して物性に応じた跳躍運動を表示した [Witkin 88]．また，点の固定，面と面の接触，滑り対偶などの制約をエネルギ関数として定義することで運動を制御したり [Witkin 87]，機構の機能を制約条件で定式化して設計する [Barzel 88] などの応用が研究されている．

しかし，物理法則と制約を統一的に扱うためには剛性や減衰などの物理属性や外力，外部トルクなど視覚的に把握するのが困難な物理量を扱わなければならず，このためかえって扱いが煩雑になることもある．例えば図 1.5のようにボーリングのレーンの上を転がるボールを動力学的に扱う場合，ボールがレーンの下に入り込まないようにするためにレーンからボールに常に適切な垂直抗力を加えなければならない．しかし，この計算は数値計算の誤差が蓄積するため不安定になり [Witkin 92]，希望した運動を実現するのは難しい．

このような単純な運動は関数補間，キーフレーム補間などの幾何学的な方法

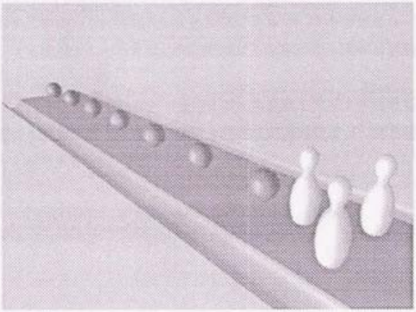


図 1.5: レーンの上を転がるボール

で実現しても得られる視覚的効果は変わらず計算は高速で安定である．安定に効率よくアニメーションを生成するためには運動に適した幾何学的処理，力学的処理を選択する，よりマクロなモデル化が必要である．最適な計算モデルを選択することは一般的には難しいが実現する運動が明確な時には比較的容易である．例えば，腕の運動，車の進行，重力運動，軌道に沿った動きなどの運動のカタログ [Isaacs 87] を用意しておけば，カタログに対応した適当な計算モデルを設定することができる．

また，従来のアニメーションシステムでは，ある運動状態から他の運動状態には与えられた時間に達したときに遷移するという指定が普通である．しかし，より一般的には「衝突した時に次の動作をする」，「何回か跳ね返った後に次の動作に移る」などの時間以外の記述で状態を変更することも必要である．特に動力学に基づくアニメーションでは物体が変形するため，様々な幾何学的条件，力学的条件によって指定できることが望ましい．したがって，運動全体のモデルとしてはより柔軟な運動状態遷移の指定法が必要にな

る．時間以外の条件で運動状態を遷移する指定法としてイベントによる指定法 [Kalra 92] が提案されている．しかし，この指定法でもイベントの発生順序があらかじめ決められた場合にしか対応できない．より自然なユーザインタフェースを構築するためには，発生順序にも制限のない柔軟な状態遷移指定法が望まれる．

本論文では全体の中で効率的で安定に個々の運動を実現するために運動に応じた適切な計算処理を管理し，柔軟な運動状態遷移記述が可能な運動全体のモデルを提案する．

1.7 問題点のまとめと本論文で提案する手法

以上で述べたように，シミュレーション的側面と古典アニメーション的側面を考慮したコンピュータアニメーションを実現する上での運動指定の負担を軽減するためには，計算機内部表現モデルとして力学的情報を持つことが有効であると考えられる．モデルとしては図1.6に示すように個々の物体の動きを定義する解析モデル (*Analytic Model*) と全体の動きを管理する運動特徴モデル (*Motion Feature Model*) とがある．

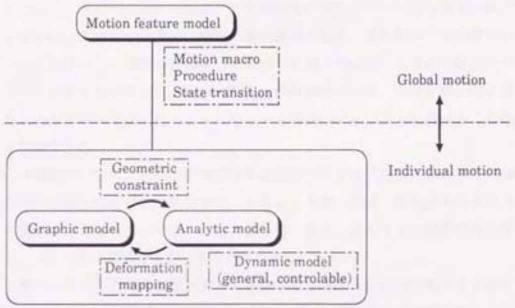


図 1.6: モデル間の関係と問題点

これらのモデルを定義する上での要求される事項，問題点を図1.6の一点鎖線の中に示す．解析モデルについては，質点，剛体，柔軟物体を統一的に扱える汎用性を持ち，特徴的な動きとの関連を明確に付けられる力学的なモデルを定義し，運動方程式を導出しなければならない．運動特徴モデルについては運動のまとまりの定義，具体的な処理の実現法，他の運動状態への状態遷移手法を解決しなければならない．さらに，幾何学的情報を持つ表示モデル (*Graphic Model*) との関係では，解析モデルから表示モデルへの運動の写

像法と幾何学的制約の扱いが問題になる．これの問題に対して本研究では以下に述べるような手法を提案する．

解析モデル

解析モデルとしては質点 - ばね系のモデルを提案する．質点 - ばね系の解析モデルは物体の節点に質点を置き，節点間稜線にばね，ダンパを張ったモデルで，運動は動力学に従う．運動方程式は，Terzopoulos の定式化と同様にエネルギについての関係式を立て，Lagrange の運動方程式に基づいて導出している．Terzopoulos の論文では柔軟物体の単体についてしか言及されていないが，本論文では質点，剛体，柔軟物体の単体，多体についての扱いについても述べる．従来の物理法則に基づくモデルの研究のように対象ごとにモデル化するのではなく，質点，剛体，柔軟物体の単体，多体を統一的に扱うことで互いが干渉し合うようなシーンも個別のプログラムを用いることなく実現できる．

予備動作，誇張，伸縮などの特徴的な運動は従来は各自由度についての幾何学的情報を試行錯誤で決定するしかなかったが，質点 - ばね系モデルは力の関係を把握しやすいので，ばねの張り方，重さ，硬さなどの直観的な少数のパラメータで運動を制御することができる．

解析モデルの変形を表示モデルに写像する方法として線形写像による変形を提案する．線形写像では変形の局所性が保たれるため，自由形状変形などの従来の写像法に比べ解析結果の忠実な再現が可能である．

幾何学的制約

本論文では幾何学的制約の加わる問題である軌道に沿った運動，体積保存変形，衝突反応についての定式化と解法を示す．

軌道に沿った運動では，動力学方程式の解法として用いる Newmark の β 法を利用して拘束節点に加えるべき制御力を求める．この方法は仮想制御力による方法の一種であるが，従来のように質点と剛体だけでなく柔軟物体に

も適用できる．

体積保存変形では，物体の変位を変数とし，体積補正項と動力学誤差項の評価関数を最小化することで体積保存を実現する．この方法はペナルティ法のように動力学の数値計算に補正を加えるのではなく，解析後のモデルに各フレームごとに補正を加えるため数値計算の誤差がたまることなく安定に体積保存のための制御力を求めることができる．

衝突反応では，Hertz の接触理論を用いて衝突力を計算する．この方法はポテンシャルエネルギ法や力積による方法のように物体の物理特性を反映しない方法と異なり，硬さ，重さ，Poisson 比などの材質に応じた変形が得られる．

運動特徴モデル

運動特徴モデルとしては幾何的情報と力学的情報を独立に管理するオブジェクト指向のモデルを提案する．運動特徴モデルは制約に基づくモデル化と異なりマクロな運動の処理を管理するモデルで，幾何学的処理，力学的処理の中から運動に応じた安定で効率のよい処理を利用できる．従来のコンピュータアニメーションシステムでは最初に表示モデルの要素を作り，生成した表示モデルに対して後から動きを決定するという手順しかとれなかった．これに対して本論文の運動特徴モデルでは幾何学的情報と力学的情報を抽象化した実体を扱うので，跳ねる，衝突するなどの定性的な運動の記述でシナリオを作り，後から表示モデルを当てはめるという手順も可能である．このため，表示モデルと運動を切り離して，物体ではなく動きそのものをデータベース化し，再利用することができる．

ある運動特徴から別の運動特徴へと遷移するために幾何学的条件，力学的条件，時間条件をイベントとして定義し，イベントの発生時に運動を開始，終了，変更する．イベント管理による状態遷移では，従来のような時間だけの指定や条件発生順序に制限のある指定法に比べ柔軟な運動指定が可能となる．

1.8 本論文の構成

本論文では以上の議論を踏まえて，提起した問題点についての解決手法を詳細に論じる．

第2章では1.4節で述べた動力学に基づくモデルとして質点 - ばね系の動力学モデルを定義し，一般の柔軟物体の単体についての運動方程式の導出，解法について述べた後，質点，剛体や柔軟物体の多体に適用するときの拡張について説明する．また，表示モデルに変位を写像することで質点 - ばね系の解析モデルの解析結果を反映するための写像方法について述べる．

第3章では1.5節で述べたように幾何学的制約の加わる問題を質点 - ばね系の解析モデルで実現するための手法を述べる．ここではアニメーションで典型的に現れる幾何学的制約が加わる運動として軌道に沿った運動，体積保存変形，衝突反応を扱い，それぞれの定式化と解法を示す．

第4章では1.6節で述べた全体の運動を記述する運動特徴モデルの定義とデータ表現法について述べる．さらに，古典的アニメーション手法を質点 - ばね系の解析モデルで実現するための運動特徴実現法について説明する．また，運動発生を管理するイベント機構による運動記述法ついて説明する．

第5章では本論文で述べた手法を実現した対話的コンピュータアニメーション作成支援システムの構成とアニメーション作成のための入力手法を示す．また，表示モデルの基本立体である超2次曲面状濃度表現モデルについても詳細に論じる．

第6章では本論文で提案した動力学に基づくモデルの実現により得られた結論と今後の展望について述べる．

第2章

動力学に基づく解析モデル

従来のコンピュータアニメーションシステムでは位置，姿勢などの幾何量の時間変化で運動を指定していた．しかし，自然な運動を実現するためには幾何量の指定では不十分で，様々な物理的性質を利用しなければならない．本章では物理的属性を持ち，動力学に従う解析モデルを定義する．特に幾何学的制約のない場合の解析モデルの扱いについて論じる．

始めに 2.1 節において解析モデルの一般的な定義を述べる．表示モデルとの関係を明確にするために，表示モデルと解析モデルの定義をまとめ，両者を関係付ける線形写像について述べる．

2.2 節では解析モデルの基本となる運動方程式を導き，その数値解法を述べる．解析モデルの全エネルギを求め Lagrange の運動方程式に代入することで回転，並進，変形に関する運動方程式を導いているので基本的には質点，剛体や多体に関しても同様に扱うことができるが，実装上の問題などがあるため節を分け，質点，剛体，多体の柔軟物体は別に述べる．

2.3 節では爆発，水，水しぶき，煙などを表現する質点を扱う．質点の扱いは単純であるが，多数の質点を用いるときには表示，データ構造の点で拡張が必要である．この節ではこうした拡張点について論じる．

2.4 節では剛体を扱う．柔軟物体の剛性を高めるだけで剛体を表現するのは運動方程式の数値計算の安定性の点で問題があるので，この点を考慮した剛体運動の実現手法について述べる．

2.5節では柔軟物体の多体を扱う場合の定式化の拡張について説明する．関節でつながる物体の場合には単体と異なり参照形状のような一定の安定状態が存在しないため，この点を考慮した定式化の拡張について述べる．

以上をまとめると各対象を扱う節の構成は表2.1のようになる．

表 2.1: 各対象を扱う節

	単体	多体
質点	2.3節	2.3節
剛体	2.4節	2.5節
柔軟物体	2.2節	2.5節

解析モデルは運動方程式に従うので物理的シミュレーションを表現するのに適するが，古典的アニメーション手法を実現するためには制御性も問題になる．2.6節では解析モデルの持つ性質を明確にし，直観的な制御が可能であることを示す．

2.1 表示モデルと解析モデル

2.1.1 表示モデル

3次元物体の形状を表す表示と衝突検出などの幾何学的処理のための幾何モデルのことを表示モデルと呼ぶ．表示モデルは図2.1に示すような境界表現(*Boundary Representation*) [Mäntylä 88] の位相的なつながりを持ったモデルである．すなわち，立体 (*Solid*) はその構成部品であるパート (*Part*) から

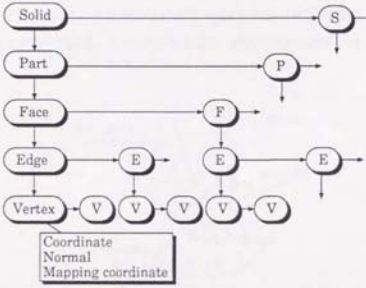


図 2.1: 表示モデルの位相構造

成り，パートは面 (*Face*) の集合として定義される．面はその境界を表す稜線(*Edge*) によって区切られ，稜線は両端の頂点 (*Vertex*) によって規定される．各頂点には座標値，法線，写像のためのパラメータの値などの情報が蓄えられる．このような境界要素の階層的な構成によって3次元物体の立体としての性質を表現できる．

2.1.2 解析モデル

物体を移動，変形するためには表示モデルの位相構造を変える必要はなく，頂点の座標値と法線の情報のみを変更すればよい．平行移動，固定した軸回りの回転，拡大，縮小などの単純な変形は頂点座標に 4×4 のマトリクスを適用することで容易に実現できる．しかしながら，動力学に基づく運動を実現するためには 4×4 のマトリクスによる移動，変形では不十分で，表示モデルとは別に動力学解析のためのモデルを用いなければならない．本論文では動力学解析のための解析モデルとして質点 - ばね系モデルを導入する．

質点 - ばね系モデルとは図2.2のように物体の節点に集中荷重を置き，その間にばねとダンパを張ったモデルである． 初期状態ではすべてのばねが自然

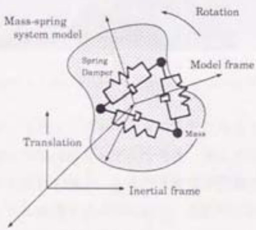


図 2.2: 質点 - ばね系モデル

長にあり，この状態でのモデルの形状を参照形状 (*Reference Shape*) と呼ぶ．質点に対して外力が加わるとばねは伸び縮みし，物体は元の参照形状に戻ろうとして振動する．ばねの伸び縮みは隣接するばねに影響を与え，モデル全体が変形する． この変形を表示モデルの頂点座標変位に写像することで動力学に基づく柔軟物体を表現できる．例えば，図2.3ではワイヤフレームで表される質点 - ばね系の解析モデルに対して動力学解析を行ない，その変位をカ

ンガルーで表される表示モデルに写像することで柔らかいカンガルーを表現している.

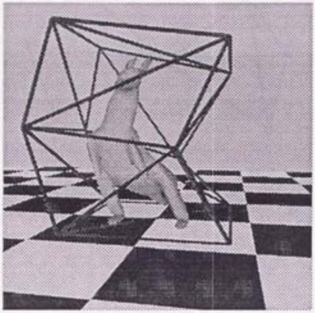


図 2.3: 表示モデル (カンガルー) と解析モデル (ワイヤフレーム)

解析モデルは必ずしも表示モデルそのものの形状を表しているわけではなく表示モデルの運動を特徴付けるモデルである. 例えば局所的な変形が要求される箇所には細かくばねを張り, 全体的な変形が要求される箇所には粗くばねを張るというように希望する運動に応じて選択的に構成を定義できる. また, 質量, ばね係数, 減衰係数を調整することで変形に異方性を持たせることができるので予備動作, 誇張法, 伸縮などの古典的アニメーション手法を容易に実現することができる.

位相的には解析モデルは表示モデルの境界表現位相構造と似た構造を持っている. 対象となる一つの物体をパート (*Part*) と呼び, 関節物体のようなパートの集合を立体 (*Solid*) と呼ぶ. 稜線 (*Edge*) は始点, 終点の 2 つの節点 (*Node*) で区切られている (図2.4). 解析モデルの稜線にはばね係数, 減衰係数の情報が付き, 節点には質量の情報が付く (図 2.5). 表示モデルでは面表示と干渉計算のために面の情報が付くが, 解析モデルは面を持たない. 表示モデルで

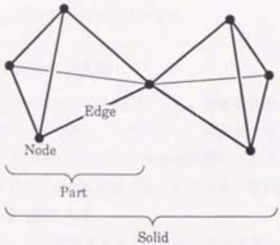


図 2.4: 解析モデルの位相名

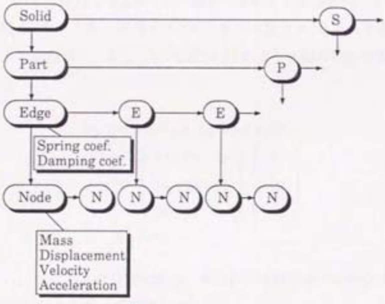


図 2.5: 解析モデルの位相構造

は稜線は各面の境界を追跡できるように向き付けされているが，解析モデルの場合には剛性マトリクス，減衰マトリクスを作るのに必要な接続関係だけが記述されており，向き付けはされていない．

2.1.3 線形写像による変形

運動解析は解析モデルに対して適用するが，実際に表示されるのは幾何学的情報を持つ表示モデルである．したがって，解析モデルから表示モデルへの変形の写像法の善し悪しが表示結果に直接影響してくる．ここでの写像法の評価基準は解析結果を忠実に反映できるかどうか，言い換えると変形の局所性が保たれるかどうかである．

変形の写像法として代表的なものとして自由形状変形 (*Free-Form Deformation*) [Sederberg 86] が挙げられる．この方法は Bernstein 補間の 3 次元への拡張であり，幾何連続な変形に適している．しかし，取り囲む空間を規定する全ての制御点の影響を計算するために局所的な変形を忠実に再現するのが難しく，また空間形状も直方体に限られているなどの欠点を持つ．

そこで，ここでは別な写像法として線形写像による変形を用いる [寺沢 92a]．これは，図 2.6のように，表示モデルの i 番目の頂点 $\boldsymbol{x}_i$ とそれを囲む 3 つの解析モデルの節点 $\boldsymbol{X}_1$， $\boldsymbol{X}_2$， $\boldsymbol{X}_3$ を式 (2.1) のような線形結合で結び付けたものである．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_i &= e_{i1}\boldsymbol{X}_1 + e_{i2}\boldsymbol{X}_2 + e_{i3}\boldsymbol{X}_3 \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{i1} \\ e_{i2} \\ e_{i3} \end{pmatrix} \\
&\equiv \mathrm{X}\boldsymbol{e}_i.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

ここで， e_{i1}， e_{i2}， e_{i3} は定数である．あらかじめ表示モデルの全ての頂点について式(2.2) のように $\boldsymbol{e}_i$ を計算しておく．

$$\boldsymbol{e}_i = \mathrm{X}^{-1}\boldsymbol{x}_i. \tag{2.2}$$

$\mathbf{X}$ が $\mathbf{X}'$ に変形したときの頂点 i の座標 $\boldsymbol{x}_i'$ は次のように求められる．

$$\boldsymbol{x}_i' = \mathbf{X}'\boldsymbol{e}_i. \tag{2.3}$$

表示モデルの 1 頂点にはそれを取り囲む 3 つの頂点の影響だけを受けるので，

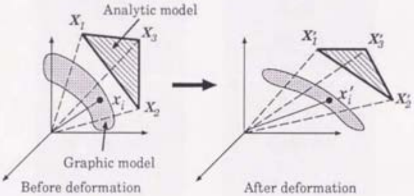
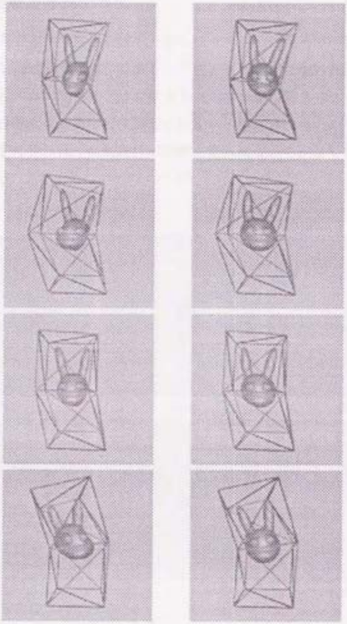


図 2.6: 解析モデルの線形写像による表示モデルの変形

解析モデルの全ての頂点の影響を受ける自由形状変形に比べて計算は速く，解析モデルの影響が忠実に表示モデルに反映されることになる．図2.7に線形写像による変形 (1) と自由形状変形 (2) の比較を示す．自由形状変形に比べ線形写像による変形のほうがまわりのワイヤフレームの変形を忠実に再現しているのが分かる．

線形写像では一般には自由形状変形のような幾何連続な変形にはならないが，動力学解析による変形では解析モデル自体が動力学に従ってほぼ連続的に変形するので表示モデルもそれに追従して変形する．



(1)　　　　　　(2)

図 2.7: 線形写像変形 (1) と自由形状変形 (2)

2.2　一般の質点 - ばね系モデルの運動方程式

2.2.1　運動方程式の導出

一般に有限要素法で変形を扱うときにはモデルには幾何学的境界条件が与えられ姿勢は固定している．しかし，アニメーションで用いられる一般の柔軟物体では図 2.8の (1) から (6) の柔らかい箱の一連の動きのように変形と同時に回転，並進するため姿勢は固定されない．加えられた力のうちどれだけが回転，並進に使われ，どれだけが変形に使われるかを正しく求めるためには姿勢の固定した場合についてのモデル化とは別な方法が必要である．

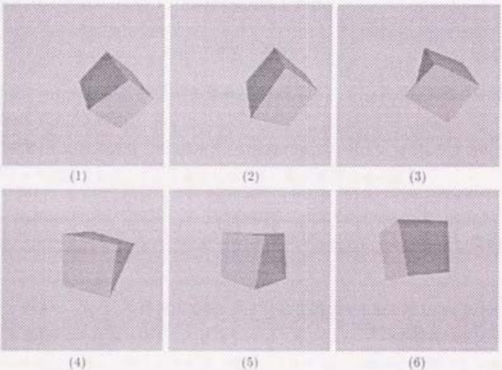


図 2.8: 柔軟物体の回転，並進

回転，並進をする柔軟物体を扱った研究としては Terzopoulos の論文がある [Terzopoulos 91]．この論文では並進，回転，局所変形，形状変形の 4 成分

からなる一般化座標を用いて柔軟物体のモデルを定義し，画像上の物体とのパターンマッチを行なった．コンピュータアニメーションでは画像の場合と異なり参照形状は与えられているので並進，回転，局所変形の 3 成分に関する運動方程式を解けばよい．また，質点 - ばね系のモデルでは Terzopoulos のモデルのような連続形状関数ではなく離散的形状関数を用いるので運動方程式はより簡潔な形になる．

初期状態における節点 i の物体固有の局所座標系における位置を $\boldsymbol{r}_i$ とし，時間 t における局所座標系での節点変位を $\boldsymbol{d}_i(t)$ とすると (図 2.9)，局所座標系での節点位置 $\boldsymbol{p}_i(t)$ は

$$\boldsymbol{p}_i(t) = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{d}_i(t). \tag{2.4}$$

時間 t での節点 i の位置 $\boldsymbol{x}_i(t)$ を慣性座標系で表すと

$$\boldsymbol{x}_i(t) = \boldsymbol{a}(t) + \mathrm{R}(t)\boldsymbol{p}_i(t). \tag{2.5}$$

ここで $\boldsymbol{a}(t)$ は時間 t での局所座標系の原点を表し，$\mathrm{R}(t)$ は局所座標系の回転マトリクスを表す．

時間 t における質点 - ばね系モデルの状態は $\boldsymbol{a}(t)$，$\mathrm{R}(t)$，$\boldsymbol{d}_i(t)$ の 3 つのベクトルで記述できる．この 3 成分からなる一般化座標を $\boldsymbol{q}$ と表す．

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

ここで $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)^T$ は回転マトリクス R を構成する微小な Euler 角 (付録 A 参照) から成るベクトル，$\boldsymbol{d} = (\cdots, d_{ix}, d_{iy}, d_{iz}, \cdots)^T$ は各節点の変位ベクトルをまとめたベクトルである．変位ベクトル $\boldsymbol{d}$ と各節点の変位ベクトル $\boldsymbol{d}_i$ は次のように形状マトリクス S_i で関係付けられる．

$$\boldsymbol{d}_i = \begin{pmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{iz} \end{pmatrix}$$

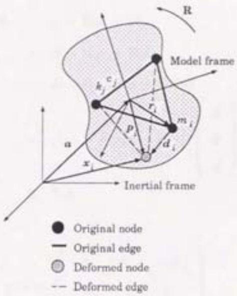


図 2.9: 質点 - ばね系モデルの記法

$$
= \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & s_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s_1 & 0 & 0 & s_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s_1 & 0 & 0 & s_2 & \cdots \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \\ \vdots \end{pmatrix}
$$

$$
\equiv \mathbf{S}_i d. \tag{2.7}
$$

ここで

$$
\begin{cases} s_j = 1 & j = i \text{のとき} \\ s_j = 0 & \text{それ以外} \end{cases}
$$

Terzopoulos のモデル化では形状マトリクス S は隣接する 3 節点もしくは 4 節点の変位から内挿する連続関数であるが，ここでは節点上においてのみ定義される離散的な関数である．

$\boldsymbol{x}_i$ の速度は次のようになる (回転角の微分については付録 A 参照).

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}_i &= \dot{\boldsymbol{a}} + \dot{\mathrm{R}}\boldsymbol{p}_i + \mathrm{R}\dot{\boldsymbol{p}}_i \\
&= \dot{\boldsymbol{a}} + \dot{\mathrm{R}}\boldsymbol{p}_i + \mathrm{R}\dot{\boldsymbol{d}}_i \\
&= \dot{\boldsymbol{a}} - \mathrm{R}\boldsymbol{p}_i \times \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathrm{RS}_i\dot{\boldsymbol{d}} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{R}\mathbf{p}_i\times & \mathbf{RS}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{a}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\boldsymbol{d}} \end{pmatrix} \\
&\equiv \mathbf{L}_i\dot{\boldsymbol{q}}. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

ここで $\mathbf{p}_i\times$ は

$$
\mathbf{p}_i\times = \begin{pmatrix} 0 & p_{iz} & -p_{iy} \\ -p_{iz} & 0 & p_{ix} \\ p_{iy} & -p_{ix} & 0 \end{pmatrix}
$$

で表される非対称行列であり，ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ による外積と同じ効果を与える.

モデルの運動エネルギは

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i^T \dot{\boldsymbol{x}}_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{q}}^T \mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i \dot{\boldsymbol{q}} \\
&\equiv \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{q}}. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

ここで，$\mathbf{J}$ をモデルの慣性テンソルとすると

$$
\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i \mathbf{I} & -\sum_i m_i \mathbf{R}\mathbf{p}_i\times & \sum_i m_i \mathbf{RS}_i \\ \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times \mathbf{R} & \mathbf{J} & \sum_i m_i \mathbf{p}_i \times \mathbf{S}_i \\ \sum_i m_i \mathbf{S}_i^T \mathbf{R}^{-1} & -\sum_i m_i \mathbf{S}_i^T \mathbf{p}_i\times & \sum_i m_i \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i \end{pmatrix}
$$

ひずみエネルギは

$$
\mathcal{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{dd} \end{pmatrix} \boldsymbol{q}
$$

$$\equiv \frac{1}{2}q^T \mathrm{K} q. \tag{2.10}$$

ここで K_{dd} は参照形状から求められる剛性マトリクスである．剛性マトリクスは物体の初期形状の構造を表したマトリクスで次のように定義される．局所座標で表した質点 - ばね系モデル節点 i，j の座標をそれぞれ $\boldsymbol{r}_i$，$\boldsymbol{r}_j$ とし，節点 ij 間の単位方向ベクトルを $\boldsymbol{b}_{ij}$ とする．すなわち，

$$\boldsymbol{b}_{ij} = \frac{\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i}{\|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i\|}. \tag{2.11}$$

また，節点 ij 間の要素剛性マトリクス K_{ij} をばね係数 k_{ij} を用いて次のよう

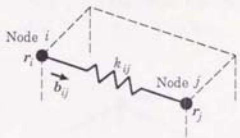


図 2.10: 頂点間の方向ベクトル

に定義する．

$$\mathrm{K}_{ij} \equiv k_{ij} \begin{pmatrix} b_{ijx}^2 & b_{ijx}b_{ijy} & b_{ijz}b_{ijx} \\ b_{ijx}b_{ijy} & b_{ijy}^2 & b_{ijy}b_{ijz} \\ b_{ijz}b_{ijx} & b_{ijy}b_{ijz} & b_{ijz}^2 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

式(2.12) を用いると剛性マトリクス K_{dd} は次のように定義される．

$$\mathrm{K}_{dd} = \begin{pmatrix} \sum_l \kappa_{1l}\mathrm{K}_{1l} & -\kappa_{12}\mathrm{K}_{12} & \cdots & & \\ -\kappa_{21}\mathrm{K}_{21} & \sum_l \kappa_{2l}\mathrm{K}_{2l} & \cdots & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ & & & \sum_l \kappa_{il}\mathrm{K}_{il} & -\kappa_{ij}\mathrm{K}_{ij} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

ただし

$$\kappa_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{節点 } i \text{ が節点 } j \text{ と接続し} \\ & i \neq j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$
$$\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$$

例えば，４つの節点を持つ物体が図 2.11のように接続しているとき剛性マトリクスは次のようになる．

$$\mathrm{K}_{dd} = \begin{pmatrix} \mathrm{K}_{12}+\mathrm{K}_{13}+\mathrm{K}_{14} & -\mathrm{K}_{12} & -\mathrm{K}_{13} & -\mathrm{K}_{14} \\ -\mathrm{K}_{12} & \mathrm{K}_{12}+\mathrm{K}_{23} & -\mathrm{K}_{23} & 0 \\ -\mathrm{K}_{13} & -\mathrm{K}_{23} & \mathrm{K}_{13}+\mathrm{K}_{23}+\mathrm{K}_{34} & -\mathrm{K}_{34} \\ -\mathrm{K}_{14} & 0 & -\mathrm{K}_{34} & \mathrm{K}_{14}+\mathrm{K}_{34} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

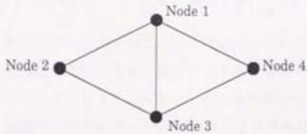


図 2.11: 4 節点の接続

運動エネルギ減衰は次のように定義する．

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{C}_{dd} \end{pmatrix} \dot{q}$$
$$\equiv \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathrm{C}\dot{q}. \quad (2.15)$$

ここで C_{dd} は減衰マトリクスである．質点 - ばね系モデルは離散的なトラスモデルなので減衰マトリクスは剛性マトリクスと同様な形式になり，稜線 j のばね係数 k_j を減衰係数 c_j で置き換えたものと等しい．

モデルが $\delta \boldsymbol{q}$ だけ微小変位する間に外力 $\boldsymbol{f}_{ext,i}$ から受ける仮想仕事は

$$\begin{aligned} \delta W_F &= \sum_i \boldsymbol{f}_{ext,i}^T \mathrm{L}_i \delta \boldsymbol{q} \\ &\equiv \boldsymbol{f}^T \delta \boldsymbol{q}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

式(2.9), (2.10), (2.15), (2.16) によってエネルギに関する式が得られたのでこれを Lagrange の運動方程式に代入することで質点 - ばねモデルの運動方程式を得ることができる.

Lagrange の運動方程式は一般に次の式(2.17) で表される.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)^T + \delta_{\boldsymbol{q}} \mathcal{E} = \left(\frac{\partial W_F}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T. \tag{2.17}$$

ただし, $\delta_{\boldsymbol{q}} \mathcal{E}$ は $\mathcal{E}$ の $\boldsymbol{q}$ についての偏導関数を表す. ここで, 一般には

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T = \mathrm{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{\mathrm{M}}\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\dot{\boldsymbol{q}}^T \mathrm{M} \dot{\boldsymbol{q}}\right)\right]^T \tag{2.18}$$

であり, 右辺の第 2 項は向心力を表し、第 3 項は Coriolis の力を表す. アニメーションでは加速度は誇張法などで効いてくるため無視できないが, 速度項は他の項に比べて大きくなることはない. このため動力学式を簡単化する方法として最も普通に行なわれている [ブラディ 85] ように向心力と Coriolis の力を無視することにする. すなわち,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T = \mathrm{M}\ddot{\boldsymbol{q}} \tag{2.19}$$

とする. また,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \mathrm{C}\dot{\boldsymbol{q}}, \tag{2.20}$$

$$\delta_{\boldsymbol{q}} \mathcal{E} = \mathrm{K}\boldsymbol{q}, \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial W_F}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}. \tag{2.22}$$

したがって, 式(2.17), および式(2.19)-(2.22) より次の式が成り立つ.

$$\mathrm{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathrm{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \mathrm{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f} \tag{2.23}$$

微小角の回転マトリクスについては $R^T = R^{-1}$ が成り立つことを利用し，式 (2.23) の各項を展開すると質点 - ばね系モデルについての次の 3 つの連立運動方程式を得る．

$$\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{a}} = \sum_i \boldsymbol{f}_{ext,i} - \sum_i m_i \mathrm{R}\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{p}_i - \sum_i m_i \mathrm{R}\ddot{\boldsymbol{d}}_i, \tag{2.24}$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \sum_i \boldsymbol{p}_i \times \mathrm{R}^{-1}\boldsymbol{f}_{ext,i} - \sum_i m_i \boldsymbol{p}_i \times \mathrm{R}^{-1}\ddot{\boldsymbol{a}} - \sum_i m_i \boldsymbol{p}_i \times \ddot{\boldsymbol{d}}_i, \tag{2.25}$$

$$m_i\ddot{\boldsymbol{d}}_i + \mathrm{C}_{dd,i}\dot{\boldsymbol{d}} + \mathrm{K}_{dd,i}\boldsymbol{d} = \mathrm{R}^{-1}\boldsymbol{f}_{ext,i} - m_i\mathrm{R}^{-1}\ddot{\boldsymbol{a}} - m_i\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{p}_i. \tag{2.26}$$

ここで ω は $\dot{\theta}$ に等しい．

式 (2.24) が並進の運動方程式，式 (2.25) が回転の運動方程式，式 (2.26) が局所変形の運動方程式を表す．これらの連立微分方程式を解くことによって任意の時間における位置，姿勢，形状が決定できる．

2.2.2 Newmark の β 法による運動方程式の解法

式 (2.24)-(2.26) の連立微分方程式を解いて各時間における一般化座標 $\boldsymbol{q}(t)$ を求めるための数値計算としては Newmark の β 法 [Zienkiewicz 91] を用いる．この方法は固有値，固有ベクトルを求めることなく繰り返しの収束計算で解に近付けるという単純な方法であり，大規模な問題でも逆行列を求める必要がないので有効である．アニメーションは 1 フレームの間隔が短いので，前のフレームとの状態があまり変わらないというフレーム間コヒーレンスの性質があるため収束が速い．

時間 t の一般化座標を $\boldsymbol{q}(t)$，フレーム間の時間間隔を Δt としたときの Newmark の β 法のアルゴリズムを示す．問題は式 (2.24)-(2.26) を満たす一般化座標 $\boldsymbol{q}(t)$ を各時間について求めることである．

1. $\boldsymbol{q}(0)$，$\dot{\boldsymbol{q}}(0)$，$\ddot{\boldsymbol{q}}(0)$ に初期値を設定し，$t = 0$ とする．

2. $\ddot{\boldsymbol{q}}(t + \Delta t)$ に $\ddot{\boldsymbol{q}}(t)$ を代入する．

3.

$$\boldsymbol{q}(t + \Delta t) = \boldsymbol{q}(t) + \Delta t\dot{\boldsymbol{q}}(t)$$

$$+(\Delta t)^2\left(\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{q}(t)+\beta\ddot{q}(t+\Delta t)\right) \tag{2.27}$$

$$\dot{q}(t+\Delta t) = \dot{q}(t)+\frac{\Delta t}{2}(\ddot{q}(t)+\ddot{q}(t+\Delta t)) \tag{2.28}$$

から $q(t+\Delta t)$，$\dot{q}(t+\Delta t)$ を得る．

4. 式(2.24)-(2.26) から新たな $\ddot{q}(t+\Delta t)$ を求める
これを $\ddot{q}'(t+\Delta t)$ とする．

5. $|\ddot{q}(t+\Delta t)-\ddot{q}'(t+\Delta t)|$ が誤差範囲内に収束しなければ $\ddot{q}(t+\Delta t)=\ddot{q}'(t+\Delta t)$ として 3. へ戻る．
収束したならば時間 $t+\Delta t$ についての正しい解 $q(t+\Delta t)$ が求まったとし，$t=t+\Delta t$ として 2 に戻る．

ここで，β は収束特性を調節する定数で通常 1/4，1/6 などの値が使われる．収束の初期条件として節点変位の加速度を仮定する必要があるが，時間間隔が十分小さければどのような初期値でも解に収束することが保証されている [戸川 81]．

2.3 質点の運動

質点は一つだけでは単純なシーンしか記述できないが，多数の質点を用いることで爆発のような動画や植物のような静止画を生成することができる[Reeves 83]．質点は基本的には中心位置に関する情報だけを持てばよいので2.2.2節で導いた運動方程式のうち回転，変形に関する項は考慮に入れない．すなわち，質点については式(2.24)-(2.26)の中で回転に関する項(角速度ωに関する項)と局所変形に関する項(変位dに関する項)を省いた運動方程式を用いる．各質点に関して次のような構造のデータを持つ．

```
struct particle {
  /* 静的データ */
  float tmin, tmax; /* 発生時間, 消滅時間 */
  float mass; /* 質量 */
  float p0[3]; /* 初期位置 */
  float v0[3]; /* 初速 */
  float a0[3]; /* 初期加速度 */
  /* 動的データ */
  float p[3]; /* 現在位置 */
  float v[3]; /* 現在速度 */
  float a[3]; /* 現在加速度 */
}
```

このうち位置，速度，加速度は質点，剛体，柔軟物体に共通する座標原点の運動を表すが，発生時間，消滅時間は質点固有の情報である．以下に述べるように多数の質点を用いて爆発などを表現するときには動きに変化を持たせるために生成時間，消滅時間にばらつきを与える．

2.3.1 質点による爆発の表現

爆発は質点源から外側に向かって質点を飛び散らすことで表現できる．質点の初期位置を図2.12のように球状に分布させ，速度は中心から初期位置に

向かう方向に与える．全体の動きに変化を持たせるために θ を $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

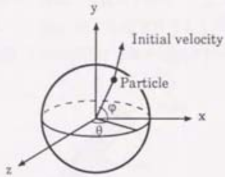


図 2.12: 均等な質点源

φ を $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ の範囲でランダムに生成し，また初速，生成時間，消滅時間も適当な範囲でランダムに与えると図 2.13のような爆発のアニメーションを表現できる．このアニメーションでは多数の質点を高速に表示する

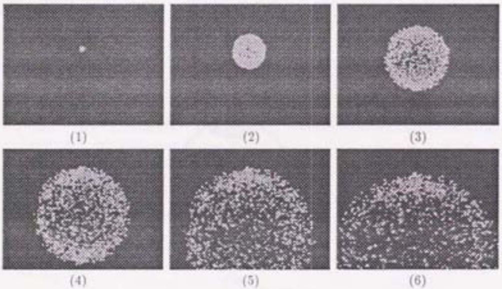


図 2.13: 質点による爆発の表現

ために質点は球ではなく視点方向を向く円板で表示している．

2.3.2　質点による水の表現

水のような流体を表すには個々の質点を球もしくは円板として表示するのではなく，図2.14のように速度に応じて尾をひくように線状の板で表示する．また噴水のように初速に方向性があるときには図2.15のように球の一つの極

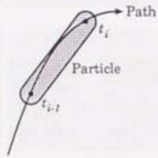


図 2.14: 水のモデル

周辺に集中して質点を発生させる．このようにして噴水の水を表示した例を図2.16に示す．

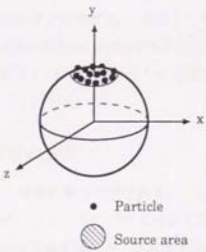


図 2.15: 円板状の質点源

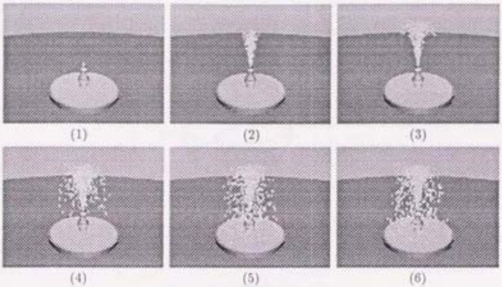


図 2.16: 質点による噴水の表現

2.3.3 質点による水しぶきの表現

モータボートなどが飛ばす水しぶきを表現するときには図2.17のように円環状の質点源を物体に合わせて移動する．直線上に奥から手前に物体を動かすものとし，質点源をこれに合わせて移動すると図2.18のようなアニメーションを得られる．モデルは2.3.2節で述べたように速度に応じて尾をひくようにしている．

2.3.4 質点による煙の表現

煙のような気体は微小粒子の集合で表されるが，全体として見ると煙は大きい球の固まりのように見える．ここではこの考え方で煙をモデル化する．煙の一つの固まりを一つの質点と考えると基本的には2.3.1節の爆発と同様に扱うことができる．ただし，爆発の場合では質点の大きさは時間が経過しても変化しないが，煙の場合は時間が経つにつれて大きさを大きくしている．また，時間が経つにつれて透明度を高くすることで空気中に煙が薄れていく

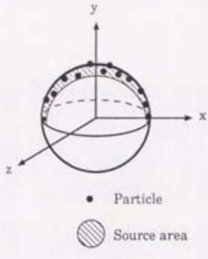


図 2.17: 円環状の質点源

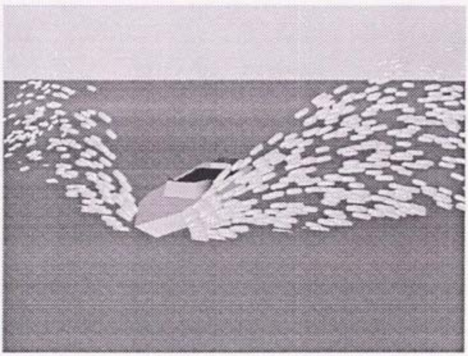


図 2.18: 質点による水しぶきの表現

効果を表現することができる．図2.19はこの方法で煙突から立ち登る煙を表現している．この例では重力と横方向にかかる力を乱数で変化させることで変化を持たせている．

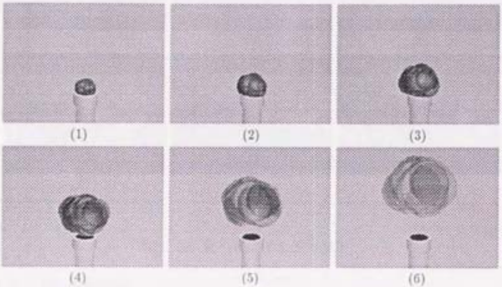


図 2.19: 質点による煙の表現

2.3.3節で述べたのと同様に，物体の動きに合わせて質点源を移動することで図2.20のように車が走った後の土煙を表現することもできる．

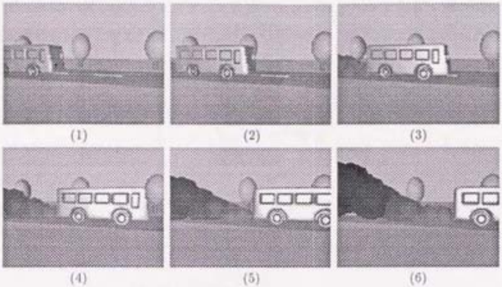


図 2.20: 質点による土煙の表現

2.4 剛体の運動

2.2.1 節で導出した方程式は柔軟物体に対する一般的な運動方程式であり原理的にはばね係数を大きくすれば剛体を表すことができる．しかし，実際にはばね係数と減衰係数を大きくすると振動周期が短くなるため数値計算的に不安定になる．例えば，式(2.26) を単純化した運動方程式を

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

とすると，一般解は

$$x = a \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

となり，振動周期は

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

となる．これをグラフで表すと図2.21の正弦曲線になる．数値積分は1フレーム間の時間間隔で離散化されているため，振動周期が小さくなると原理的に解が求められなくなる．

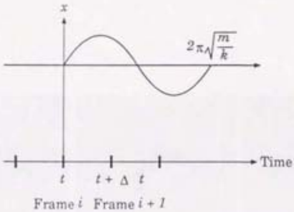


図 2.21: 1 フレーム間隔と振動周期

そこで，剛体については式 (2.24)–(2.26) の中で局所変形に関する項 (変位 $\boldsymbol{d}$ に関する項) を省いた運動方程式を用いる．

このようにして剛体の運動を解析した例を図 2.22の (1)–(6) に示す．この例では (1) の瞬間に立方体の右端に左向きに力を加えた後の運動を計算している．

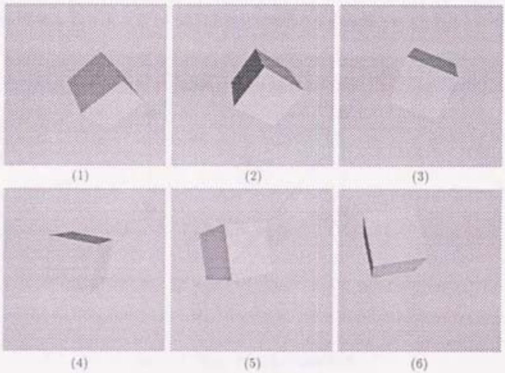


図 2.22: 剛体の回転，並進

2.5 柔軟多体の運動

回転関節で結合した関節物体は回転角に制約がなければリンク同士のなす角がどの角度でも安定するため参照形状のような最終状態は決まらない．このため 2.2.1 節で行なった定式化を拡張する必要がある．ここでは多関節の質点 - ばね系モデル (これを柔軟多体と呼ぶ) の系全体のエネルギを求めて Lagrange の運動方程式を解くという方法をとる．

例として図 2.23 のように 2 つのリンクが 1 つの節点で接続している物体について考える． リンク 1 の局所座標系での節点 3 の座標を $\boldsymbol{p}_{31}$，リンク 2 の

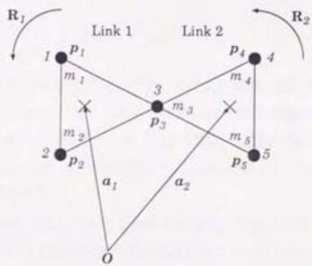


図 2.23: 質点 - ばね系の柔軟多体

局所座標系での節点 3 の座標を $\boldsymbol{p}_{32}$ と表し，他の表記は 2.2.1 節に従うものとする．関節部分では

$$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \mathrm{R}_1\boldsymbol{p}_{31} = \boldsymbol{a}_2 + \mathrm{R}_2\boldsymbol{p}_{32} \tag{2.29}$$

が成り立つので一般化座標は $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T, \boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T, \boldsymbol{d}^T)^T$ ではなく $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T, \boldsymbol{d}^T)^T$ になる．節点 3 において式 (2.29) を一次微分したものは次式のようになる．

$$\dot{\boldsymbol{a}}_2 = \dot{\boldsymbol{a}}_1 - \mathrm{R}_1\mathrm{p}_{31} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \mathrm{R}_2\mathrm{p}_{32} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 + (\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2)\mathbf{S}_3\dot{\boldsymbol{d}}. \tag{2.30}$$

したがって $\mathbf{L}_i$ は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_1 &= (\mathbf{I} \quad -\mathbf{R}_1\mathbf{p}_1\times \quad 0 \quad \mathbf{R}_1\mathbf{S}_1),\\
\mathbf{L}_2 &= (\mathbf{I} \quad -\mathbf{R}_1\mathbf{p}_2\times \quad 0 \quad \mathbf{R}_1\mathbf{S}_1),\\
\mathbf{L}_3 &= (\mathbf{I} \quad -\mathbf{R}_1\mathbf{p}_3\times \quad 0 \quad \mathbf{R}_1\mathbf{S}_1),\\
\mathbf{L}_4 &= (\mathbf{I} \quad -\mathbf{R}_1\mathbf{p}_{31}\times \quad -\mathbf{R}_2\mathbf{p}_4\times+\mathbf{R}_2\mathbf{p}_{32}\times \quad \mathbf{R}_{12}\mathbf{S}_3+\mathbf{R}_2\mathbf{S}_4),\\
\mathbf{L}_5 &= (\mathbf{I} \quad -\mathbf{R}_1\mathbf{p}_{31}\times \quad -\mathbf{R}_2\mathbf{p}_5\times+\mathbf{R}_2\mathbf{p}_{32}\times \quad \mathbf{R}_{12}\mathbf{S}_3+\mathbf{R}_2\mathbf{S}_5).
\end{aligned}
$$

ただし，$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$. これを用いて運動エネルギを定義する質量マトリクスは

$$
\mathbf{M} = \sum_i^5 m_i \mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i
$$

で求められるので，後は式(2.24)–(2.26) に代入し通常の動力学計算を行なう．

中心の 1 節点で結合した 2 つのリンクから成る柔軟多体の解析結果の運動を図2.24の (1) から (6) の順に示す．(1) の瞬間に右端の節点に対し矢印の方向に力を加えると右のリンクが変形しつつ左のリンクを引っ張り (2)–(6) のように右上に移動する．

リンクの数が 3 つ以上のときも同様に節点における自由度を減らした一般化座標を用いることで柔軟多体の運動を求めることができる．

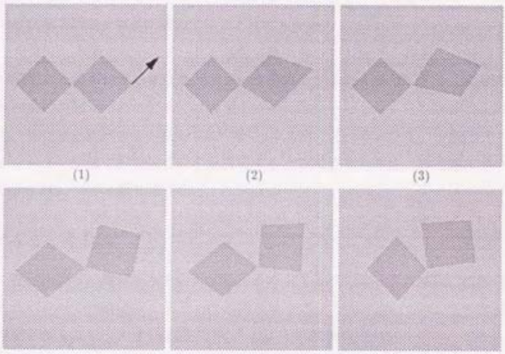


図 2.24: 柔軟多体の運動

2.6　変形を実現するためのパラメータ設定

従来のように幾何学的情報だけを持つモデルでは運動を制御するためのパラメータは節点の座標値に限られるが，本論文における解析モデルのように物理的な情報を持つモデルでは物理的属性値を運動制御のパラメータとして用いることができる．また，解析モデルは表示モデルの形状と独立して定義できるため，解析モデルの定常状態における参照形状も制御パラメータとして用いることができる．しかし，物理的属性のパラメータが理解しにくいのでは自然な運動を容易に指定することはできない．

そこで，本節ではパラメータと変形の関係について述べ，希望する運動を実現するためにはどのようなパラメータ設定をするかを明確にする．従来の幾何学的情報だけのモデルでは表現するのが難しいとされてきた物体の柔軟性，重量感を制御する方法を 2.6.1 節，2.6.2 節で述べる．また，古典的アニメーション手法で特徴的な動きを表現する上で重要な局所性，異方性について 2.6.3 節，2.6.4 節で述べる．

2.6.1　柔軟性

物体の硬さ，柔らかさを表現するための主たるパラメータはばねのばね係数とダンパの減衰係数である．ばね係数は小さいと図 2.25(1) のように振動周期が長くなり，大きいと図 2.25(2) のように振動周期が短くなる．また，減衰係数は小さいと図 2.26(1) のように減衰が遅くなり，大きいと図 2.26(2) のように減衰が速くなる．したがって，柔らかい物体ではばね係数と減衰係

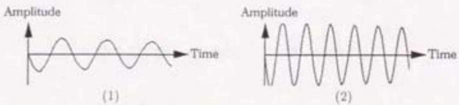


図 2.25: ばね係数が小さい場合 (1) と大きい場合 (2) の振動

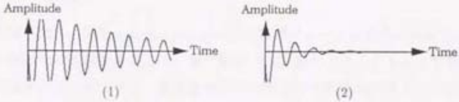


図 2.26: 減衰係数が小さい場合 (1) と大きい場合 (2) の振動

数を共に小さくし，硬い物体ではその逆にすることで柔軟性を表現することができる．例えば，図 2.27では同じ表示モデルに対して同じ力を加えているが，ばね係数と減衰係数を変えることで柔らかい物体 (図2.27(1)) と硬い物体 (図 2.27(2)) の動きを表現している．図 2.27(1) ではばね係数と減衰係数が小さく，図 2.27(2) ではばね係数，減衰係数が大きい．このため，図 2.27(1) の物体は変形しながら押される柔らかい動きになるが，図 2.27(2) の物体はあまり変形せずに押される硬い動きになる．

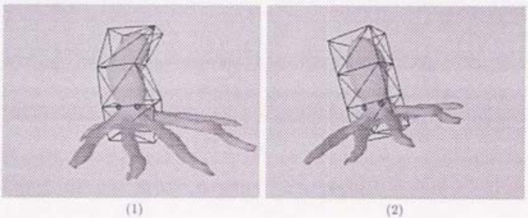
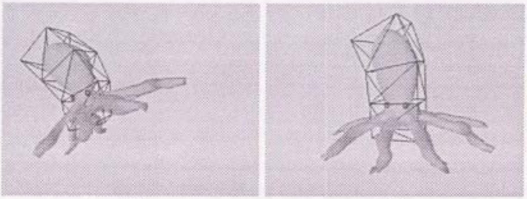


図 2.27: 柔らかい物体 (1) と硬い物体 (2)

2.6.2 重量感

物体の軽さ，重さを表現するための主たるパラメータは質点の質量である．軽い物体では質量を小さくし，重い物体では質量を大きくすることで重量感を表現することができる．重量感は力との相対的な関係で決まるので全質点に同じ質量を与えたのでは効果は分かりにくいが，部分的に重さを変えることで重量感を出すことができる．例えば，図 2.28は同じ表示モデルに対して同じ力を加えているが，質量を変えることで軽い物体の動き (図2.28(1)) と重い物体の動き (図 2.28(2)) を表現している．図 2.28(1) では全体の質量は小さく，図 2.28(2) では下部の節点の質量が大きい．このため，図 2.28(1) の物体は飛ばされるのに対し，図 2.28(2) の物体では下が重いために上部だけが変形する．



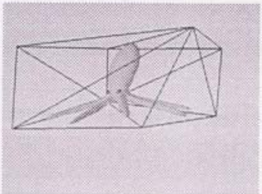
(1) (2)

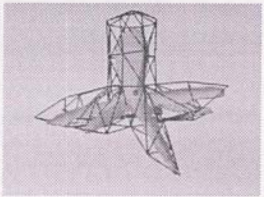
図 2.28: 軽い物体 (1) と重い物体 (2)

2.6.3 局所性

正確なシミュレーションでは物体の形状と材質が与えられると動きは決まる．しかし，アニメーションでは同じ物体でも全体的に変形させることでかたまりとしての効果を出すこともあれば，物体の形状に忠実に変形させることで部分的な変形の効果を出すこともあり，状況に応じて異なる動きを定義

できる必要がある．このような物体の変形の局所性は解析モデルのばねの張り方が制御パラメータとなる．物体全体にわたる変形を希望するときにはばねを全体に張り，局所的に動かすときには細かいばねを張る．例えば，図2.29は同じ表示モデルに対して異なる参照形状を定義し，大域的な変形 (図2.29(1)) と局所的な変形 (図 2.29(2)) を表現している．図 2.29(1) では表示モデルを囲む全体的な解析モデルを定義し，図2.29(2) では表示モデルの形状に対応して細かくばねを張っている．全体に粗いばねを張ったモデルでは全体が一様に伸び縮みし，表示モデルの形状に合わせて細かくばねを張ったモデルでは足の一本一本に対して異なる動きを定義できる．





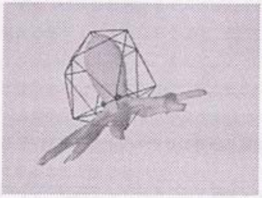
(1) (2)

図 2.29: 大域的変形 (1) と局所的変形 (2)

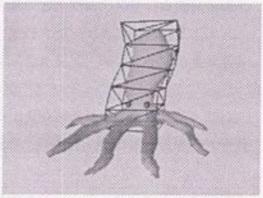
2.6.4 異方性

一般にキャラクタアニメーションでは，物体を紙のように動かしたり，ボールのように動かすなど他の物体の動きになぞらえて動きを表現することが多い．このため変形に異方性を持たせることは重要である．2.6.3 節では表示モデルとの精度を変えることで解析モデルの変形の局所性を制御したが，解析モデルの参照形状は表示モデルの形状とは独立に定義できるので 2 つのモデルをまったく異なる形状にして，より積極的に特徴的な動きを定義するこ

ともできる．例えば，図 2.30(1) では球状の解析モデルを定義し，図 2.30(2) では柱状の解析モデルを定義することで変形の様子を変えている．表示モデルの変形も解析モデルの変形に従うので，球状の解析モデルでは球状の変形が，柱状の解析モデルでは柱状の変形が得られる．



(1)



(2)

図 2.30: 球状の変形 (1) と柱状の変形変形 (2)

2.7 第2章のまとめ

本章では，個々の物体の運動を表現するための解析モデルを定義した.

重さ，硬さのような物理特性による運動の違いを直観的なパラメータで容易に表現できるモデルとして質点 - ばね系の解析モデルを提案した.

質点 - ばね系の解析モデルの運動を計算するために，一般的な柔軟物体の単体の解析モデルについて並進，回転，変形についての運動方程式をエネルギの関係式から導いた．さらに，この定式化を質点，剛体，多体の柔軟物体に適用する上での注意点についてまとめた.

古典的アニメーション手法を実現する上で問題になる制御性に関しては，質点 - ばね系のモデルでは柔軟性，重量感，局所性，異方性を直観的に表現できることを示した.

また，解析モデルで得られた変形と運動を表示モデルに反映させる方法として変形の局所性を有する線形写像を提案した.

本章では，互いに干渉し合わない単一の物体についての基本的な運動方程式を導いたが，実際の運動では複数の物体が干渉したり，運動を拘束するために幾何学的な制約の加わる場合が多い．質点 - ばね系の解析モデルで幾何学的な制約の加わる運動を実現する方法については次の章で述べる.

第3章

幾何学的制約を伴う運動の定式化と解法

第2章では一つの物体が外から力を受けたときに空間上を自由に運動する場合のみを扱った．実際のアニメーションでは複数の物体が互いに影響を及ぼし合う場合や幾何量で制御する場合もあるので，このような場合に対応するためには幾何学的制約を伴う運動の定式化が必要になる．本章では，直観的に理解可能な少数のパラメータとの関係付けによる巨視的制御を基本的な指針として幾何学的制約の加わる問題の定式化と解法を提案する．ここでは，アニメーションで典型的に現れる問題として軌道に沿った運動，体積保存変形，衝突に対する反応の3つの問題を扱う．

3.1節では一部の節点が与えられた軌道に拘束され，拘束節点以外は動力学に従うという運動についての定式化と解法を述べる．

3.2節では変形時に常に体積を一定に保つような制約の加わる運動の定式化と解法を述べる．また，解析モデルと表示モデルの体積の関係についても論じる．

3.3節では物体同士が干渉しないという制約の加わる運動の定式化と解法を述べる．このとき，衝突した物体が硬さや重さなどの材質に応じて変形するような適当な力を求める方法について詳しく論じる．

3.1 軌道に沿った運動の定式化と解法

3.1.1 軌道に沿った運動

アニメーションシステムの多くは直線，円弧，スプラインなどの曲線に沿って物体を動かす機能を持っている．この機能は物体がどの時間にどの場所にあるかを直観的に指定でき，また座標系を移動するだけなので実現も容易なことから最も基本的な機能の一つとなっている．しかしながら，動力学に基づく運動では拘束された部分は幾何学的に軌道に沿わせればよいが，拘束されていない部分は動力学方程式を解かなければならない．このため，幾何学的に拘束するのではなく，適当な制御力を加えることで力学的に扱わなければならない．

この問題は位置を与えて力を求めるという逆動力学の問題である．すなわち，図 3.1の斜線で表される解析モデルの節点 i(黒点で示す) が与えられた軌道 $\boldsymbol{P}_i(t)$ に沿って運動するような制御力 $\boldsymbol{f}_{ext,i}(t)$ を求める問題である．軌道が与えられているので節点の位置 $\boldsymbol{x}_i(t)$ は任意の時点で求まる．また，離散的に逐次計算した結果，時間 t_0 の速度 $\dot{\boldsymbol{x}}_i(t_0)$ と加速度 $\ddot{\boldsymbol{x}}_i(t_0)$ も求まっているものとする．このとき，時間 $t_0+\Delta t$ における位置 $\boldsymbol{x}_i(t_0+\Delta t)$ に到達させるための力 $\boldsymbol{f}_{ext,i}(t_0)$ を求める． 与えられた軌道の式が $\boldsymbol{P}_i(t)$ なので $\ddot{\boldsymbol{P}}_i(t_0)/m_i$ と

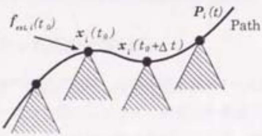


図 3.1: 軌道に沿った運動

して解析的に制御力を求めることはできるが，実際には時間間隔 Δt で離散的に計算しているため本来加えるべき制御力とわずかながら差が生じる．運動方程式を数値計算で解くときにこのわずかの差が蓄積するため非常に不安

定になる [Witkin 92]．ここでは，2.2.2 節で述べたように離散的な数値計算を行なっていることを利用して，時間 $t_0+\Delta t$ における位置が正確に $\boldsymbol{x}_i(t_0+\Delta t)$ になるような制御力 $\boldsymbol{f}_{ext,i}(t_0)$ を求める．

3.1.2　β 法を利用した制御力の計算

2.2.2 節で述べたように運動方程式の数値計算法としては β 法を用いているので式 (2.27)，(2.28) を利用して力を求めることができる．位置 $\boldsymbol{x}_i(t_0)$，$\boldsymbol{x}_i(t_0+\Delta t)$ は与えられており速度 $\dot{\boldsymbol{x}}_i(t_0)$，加速度 $\ddot{\boldsymbol{x}}_i(t_0)$ は β 法によって求まっているものとする．このとき加えるべき制御力 $\boldsymbol{f}_{ext,i}(t_0)$ は次のように求めることができる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{ext,i}(t_0) &= \frac{m_i}{\beta\Delta t^2}\Big(\boldsymbol{x}_i(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{x}_i(t_0) \\ &\quad -\Delta t\dot{\boldsymbol{x}}_i(t_0)-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t^2\ddot{\boldsymbol{x}}_i(t_0)\Big). \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで m_i は解析モデルの節点 i の質量を表す．このような外力を加え 2.2.2節の β 法による数値解法を適用すると，拘束された節点 i については正確に $\boldsymbol{x}_i(t_0+\Delta t)$ を満たし，他の全体の動きは通常通り動力学に従う．

この手法により，力ではなく幾何学的な軌道を指定することで物体の運動を制御できる．また，式(3.1) で求まる力よりも小さい力を加えることで，与えられた軌道に緩やかに拘束した動力学的運動を実現することもできる．

3.1.3　軌道に沿った運動の実行例

本手法を旗の一連の運動に適用した例を図3.2の (1)-(6) の順に示す．この例では 2 つの節点の運動を図のスプライン曲線上に拘束し，他の節点には各瞬間に力を加えることで風になびく旗を表現している．動きは動力学に従っており拘束からはずれることなく安定に解が求まる．

また，曲線に沿って動かすだけではなく一点に固定することも同じ方法で実現できる．

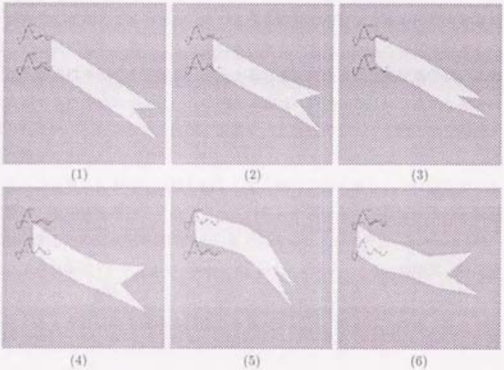


図 3.2: 軌道に沿った運動

3.1.4 二点境界値問題による軌道生成

これまでの議論では，物体が沿うべき軌道は予め与えられたものとしていた．一般には軌道は直線列，円弧，スプライン曲線で定義される．これらの曲線はキーフレームにおける位置を陽に定義できるため，直観的なユーザインタフェースのためには有用である．しかし，これらの曲線からできる幾何連続な軌道は必ずしも滑らかな動きを与えるとは限らない．例えば，与えられた制御点を通過するようなスプライン曲線では幾何連続性を保つために曲率が大きくなることもあるが，このような軌道に沿わせるためには大きな制御力が必要になり，動きとして不自然になる．また，物体には慣性があるので動き始めはゆっくりと動き，停止するときには徐々に速度を落すが，これを表現するためにはパラメータの速度を適当に調節しなければ自然な動きは得られない．したがって，物体を拘束すべき軌道についても動力学を考慮する必要がある．

キーフレームにおける位置を指定して，動力学的に滑らかな軌道を求める問題は，境界値を指定し，微分方程式付帯条件を満たす最適解を求める問題に対応するため二点境界値問題としてとらえることができる [Brotman 88]．二点境界値問題 (*Two Point Boundary Value Problem*) とは初期値，最終値の状態を与え，関数による条件，微分方程式による条件の下で評価関数を最小化するような制御を求める問題である (図 3.3)． 例えば，始点，終点を決

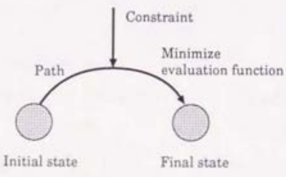


図 3.3: 二点境界値問題

め，その間に障害物を置いたとき重力に従って運動する物体の軌道を求めるような問題は二点境界値問題の定式化で考えることができる．ここでは，2.2.1 節で導いた連立 2 次微分方程式を満たし，一般的な制約を与える関数条件を扱うことのできる勾配復元法を質点 - ばね系モデルの軌道生成に適用する．

3.1.5 二点境界値問題としての定式化

二点境界値問題は一般的に以下のように記述できる．

時間 $t(t_0 \leq t \leq t_f)$ において状態ベクトルを

$$\boldsymbol{q}(t) = (q_1(t)\ q_2(t)\ \cdots\ q_n(t))^T \tag{3.2}$$

制御ベクトルを

$$\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t)\ u_2(t)\ \cdots\ u_m(t))^T \tag{3.3}$$

としたとき，微分方程式付帯条件

$$\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}, t) = \boldsymbol{0} \tag{3.4}$$

関数付帯条件

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}, t) &= (s_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}, t)\ s_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}, t)\ \cdots\ s_k(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}, t))^T \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{3.5}$$

及び境界条件

$$\boldsymbol{q}(t_0) = \boldsymbol{q}_0 \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q}, t)]_{t_f} &= [(\psi_1(\boldsymbol{q}, t)\ \psi_2(\boldsymbol{q}, t)\ \cdots\ \psi_q(\boldsymbol{q}, t))^T]_{t_f} \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{3.7}$$

を満たし評価関数

$$J(\boldsymbol{u}) = \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}, t)dt \tag{3.8}$$

を最小にする制御ベクトル $\boldsymbol{u}(t)$ を求める．

例えば，位置，速度の初期値，終端値を指定したときに，地面(上下をy方向とし地面を$y = 0$で表す)に入り込まないようにするためにy座標は負にならないという不等式制約を課したとき，運動方程式を満たしつつ速さと制御力を最小にするような質点の運動を考える．(x, y, z)を物体の座標，(v_x, v_y, v_z)を速度としたとき状態ベクトルを

$$q = (x\ y\ z\ w\ v_x\ v_y\ v_z\ v_w)^T.$$

と定義する．ここで，w，v_wは不等式制約を扱うために導入したスラック変数である．xyz各方向について

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= u_x \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky &= u_y \\ m\ddot{z} + c\dot{z} + kz &= u_z \end{aligned} \tag{3.9}$$

が成り立つとすると微分方程式付帯条件のマトリクス表現は

$$\dot{q} - f = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_w \end{pmatrix}$$

$$
- \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ \frac{1}{m} & & & \\ & \frac{1}{m} & & \\ & & \frac{1}{m} & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ u_w \end{pmatrix}
$$

$$
= \mathbf{0}.
$$

w が実数であることから y が負にならないという条件は次のように書くことができる.

$$
\boldsymbol{s}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}, t) = y - w^2 = \mathbf{0}.
$$

初期点，終端点における境界条件は次のように与えられているものとする.

$$
\boldsymbol{q}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \sqrt{y_0} \\ v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \\ \frac{v_{y0}}{2\sqrt{y_0}} \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
[\psi(\boldsymbol{q},t)]_{t_f} &= \left[\begin{pmatrix} x - x_f \\ y - y_f \\ z - z_f \\ w - \sqrt{y_f} \\ v_x - v_{xf} \\ v_y - v_{yf} \\ v_z - v_{zf} \\ v_w - \frac{v_{y0}}{2\sqrt{y_0}} \end{pmatrix}\right]_{t_f} \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

このとき速度と制御力が小さくなるようにする評価関数は

$$
J(\boldsymbol{u}) \;=\; \int_{t_0}^{t_f} \left\{ c_1(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + c_2(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right\} dt.
$$

c_1, c_2 は最小にする状態量と制御量の比を表す定数で，速度を最小にしたいのなら c_1 を大きくとり，加える力を最小にしたいのなら c_2 を大きくとる．

この評価関数を最小にする制御力の関数 $\mathbf{u}(t)$ を求めることで問題を満たす最適な軌道を得ることができる．

3.1.6 勾配復元法による二点境界値問題の解法

二点境界値問題は一種の条件付き変分問題であるが， $\boldsymbol{u}$ の存在域が限られ，不等式の制約条件が課せられることと $\boldsymbol{u}$ が必ずしも連続でなくてもよい点で古典的変分法とは異なる．扱える付帯条件は代数方程式か微分方程式か積分方程式か，終端状態量は固定か自由か，不等式制約を考慮するかどうかなどによって解法が分かれるが，ここではこれらの問題を一般的に扱える Miele の勾配復元法 (*Gradient Restoration Method*)[Miele 80] を使って解を求める．

評価関数を最小にする解を求めるのは停留条件式を与えられた境界条件で解けば良い (停留条件式については付録 C 参照)．初期値の境界条件だけで微分方程式が解ける場合には単純な連立微分方程式であるが，制約が不足しているときには何らかの制約を仮定して非線形な方程式を解かなければならな

い．この場合には，付帯条件，停留条件は必ずしも満たされるとは限らない．したがって，できるだけ付帯条件式，停留条件式を 0 に近付ける手段が必要である．

最適解に近付けるための付帯条件に関する基準を次のように定義する．

$$P = \int_{t_0}^{t_f} N(\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{f})dt + \int_{t_0}^{t_f} N(\boldsymbol{s})dt + [N(\boldsymbol{\psi})]_{t_f}. \tag{3.10}$$

また，停留条件に関する基準を次のように定義する．

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_0}^{t_f} N(\dot{\boldsymbol{\lambda}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\rho}^T \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{q}})dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} N(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\rho}^T \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{u}})dt \\ &\quad + [N(\boldsymbol{\nu} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{q}})]_{t_f}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

ただし，

$$N(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y}. \tag{3.12}$$

また，$\boldsymbol{\lambda}$ は Lagrange の未定乗数である (Lagrange の未定乗数法に関しては付録 D 参照)． P， Q を共に打ち切り誤差以下にする方法として Miele は勾配法を基本とした繰り返し計算を用いている．

勾配法では状態ベクトルと制御ベクトルを変化させ繰り返し計算によって徐々に最適解へと収束させる．繰り返しの前の段階の状態ベクトル，制御ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{q}(t)$， $\boldsymbol{u}(t)$ とし，勾配方向を $\boldsymbol{A}(t)$， $\boldsymbol{B}(t)$，ステップ幅を α とすると 1 ステップ後の状態ベクトル $\tilde{\boldsymbol{q}}(t)$，及び制御ベクトル $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ は次のようになる．

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{q}(t) + \alpha \boldsymbol{A}(t), \tag{3.13}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{u}(t) + \alpha \boldsymbol{B}(t). \tag{3.14}$$

付帯条件を満たすためには P の第一変分が 0 という条件から

$$\dot{A} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{q}}^T A - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}^T B + k_r(\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{0}. \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{A} + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{B} + k_r \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}, \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{A}(t_0) = \boldsymbol{0}, \tag{3.17}$$

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{A} + k_r \boldsymbol{\psi}\right]_{t_f} = \boldsymbol{0}. \tag{3.18}$$

評価関数の停留条件から

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} - k_g \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\rho}^T \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}, \tag{3.19}$$

$$\left[\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{q}}\right]_{t_f} = \boldsymbol{0}, \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{B} + k_g \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\rho}^T \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}. \tag{3.21}$$

という式が成り立つ．ただし k_g，k_r は勾配段階と復元段階の 2 つの段階を統一して扱うために導入した定数で，勾配段階では $k_g = 1$，$k_r = 0$，復元段階では $k_g = 0$，$k_r = 1$ である．

勾配復元法は大きく 2 つの段階に分けられる．最初の段階 (勾配段階) では，付帯条件を満たしたとき ($P = 0$) 評価関数の値を小さくする．第 2 の段階 (復元段階) では前段階の結果，付帯条件が満たされなくなったときに評価関数を最小にしつつ付帯条件を満たすように繰り返し計算を行なう．アルゴリズムは以下のように要約される．

1. 勾配段階

   (a) 初期関数 $\boldsymbol{q}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$ を仮定する．

   (b) 初期関数について $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}$，$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}}$，$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{q}}$，$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}$，$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{q}}$，$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{u}}$，$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{q}}$ を計算する．

   (c) 式(3.15)–(3.21) から $\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$，$\boldsymbol{\lambda}(t)$，$\boldsymbol{\rho}(t)$ を求める．

   (d) これらの関数で評価関数 L の変化がある誤差よりも小さくなるようにステップ幅 α の値を定める．ここでは，有限界の手続きで評価関数を前の状態よりも小さくできることが保証される Goldstein の規則 [今野 78] を用いてステップ幅を決めている．

(e) $\hat{q}(t)$, $\hat{u}(t)$ を求める.

2. 復元段階

(a) $\hat{q}(t)$, $\hat{u}(t)$ を初期関数 $q(t)$, $u(t)$ とする.

(b) 初期関数について $\dot{q} - f$, s, $\frac{\partial f}{\partial q}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial s}{\partial q}$, $\frac{\partial s}{\partial u}$, $\frac{\partial \psi}{\partial q}$ を計算する.

(c) 式(3.15)–(3.21) から $A(t)$, $B(t)$, $\lambda(t)$, $\rho(t)$ を求める.

(d) $P(\alpha) < P(0)$ を満たすようにステップ幅 α の値を定める.

(e) $\hat{q}(t)$, $\hat{u}(t)$ を求める.

(f) P がある誤差の範囲に収まったら終了し, さもなくば復元段階の(b) に戻る.

勾配復元法では初期関数を適当に仮定しなければならず, この仮定によって収束回数が大幅に異なってくる. 原論文では初期関数の選択に関して述べられていないが, ここではキーフレームの状態量, 制御量を線形補間したものを初期関数としている. 3.1.5 節の例に適用したところ, 勾配段階でのステップ幅の決定でほとんど繰り返し計算の必要なく (d) を満たしている. 実行指標 P の誤差は 0.01 に設定しているが, 2, 3 回の繰り返しで誤差範囲内に収まっている. このことから, この例では初期関数の選択は線形補間で妥当であると言える.

一般にはキーフレームアニメーションでは細かな制御をするために, 初期値, 最終値だけではなく途中段階における何箇所かのキーフレームを指定する. 二点境界値問題でも二点だけでなく複数の点で境界値を与えるのが妥当である. しかし, 各指定フレーム間の評価関数を最小にする運動を単純に接続しても全体の評価関数が最小になるとは限らないためこのような問題は多点境界値問題 (*Multiple Boundary Value Problem*) として別に定式化されている. 多点境界値問題は二点境界値問題よりも複雑になるが, 時間軸折り返し法などで二点境界値問題に帰着することができる [加藤 88].

3.2 体積保存変形の定式化と解法

3.2.1 体積保存変形

質点 - ばね系のモデルは制御が容易で直観的ではあるが，骨組みだけのモデルのため，中実体としての特性を持たないという欠点がある．例えば図3.4は魚が落下して地面に衝突する一連のアニメーションであるが節点の少ない質点 - ばね系モデルで動力学解析を行なっているためねじれの力が働かずつぶれてしまう． アニメーションとしては衝突の際，横に膨らんで体積を保つほ

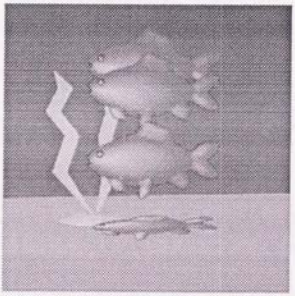


図 3.4: 衝突による体積の減少

うが自然に見える．すべての物体が非圧縮性であるわけではないが，自然に見える動きを実現する上でこのような運動中の物体の変形による体積減少もしくは増加を補正する技術は重要である．また，逆に伸縮，誇張などの古典的アニメーション独自の表現を実現するために積極的に体積を変化させる場合にも体積を制御する技術が望まれる．ここでは，一旦動力学的に求めた解析結果を基準として体積の補正項を追加し，最適化の手法を用いて体積保存運動を実現している [寺沢 92a].

3.2.2 最適化技法による体積保存変形

解析モデルは面の情報を持たないが，節点の凸包によって閉じた立体を生成し体積を計算することができる．ここではこの体積の補正項を最小化することで数値計算的に安定に体積保存を実現する．すなわち，動力学方程式の解析結果によって生じる体積誤差が小さくなるように節点を動かすという方法をとる．

最小化すべき評価関数 $U_1(\boldsymbol{d})$ は，節点変位ベクトル $\boldsymbol{d}$ を状態変数とした体積を $V(\boldsymbol{d})$，基準となる元の体積を V_0 として式(3.22) のように定義する．

$$U_1(\boldsymbol{d}) = |V(\boldsymbol{d}) - V_0| . \tag{3.22}$$

最適化技法を用いて評価関数の最小値を与える $\boldsymbol{d}$ を求める．最小値が 0 になれば体積は完全に保存される．

最小化の手法としては共役方向法の中で評価関数の勾配を使わない Powell の方法を用いる [Press 88]．この方法は $U_1(\boldsymbol{d}') < U_1(\boldsymbol{d})$ を満たすような $\boldsymbol{d}'$ を求めるために

$$\boldsymbol{d}' = \boldsymbol{d} + \alpha\Delta\boldsymbol{d} \tag{3.23}$$

として降下方向 $\Delta\boldsymbol{d}$ とステップ幅 α を決める方法である．降下方向は独立な共役方向に選択するので有限回で収束できる．ステップ幅を決める線形探索には Brent の方法を用いている．

しかし，一般に降下方向は前の状態変数との相違は考慮されないので，図3.5に示すように一つの節点の x 座標値を変化させるだけでも体積が保存されてしまう．このため，評価関数 U_1 だけでは動力学解析の結果が反映されない．

そこで評価関数 U_1 を最小にするという制約なしで求めた節点 i の変位 $\boldsymbol{d}_{r,i}$ との差を考慮して次の二つの評価関数 U_2，U_3 を定義する．

評価関数 $U_2(\boldsymbol{d})$ は制約なしで求めた節点変位 $\boldsymbol{d}_{r,i}$ との大きさの誤差を表す関数で次のように定義する．

$$U_2(\boldsymbol{d}) \;=\; \sum_i \| \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{d}_{r,i} \| . \tag{3.24}$$

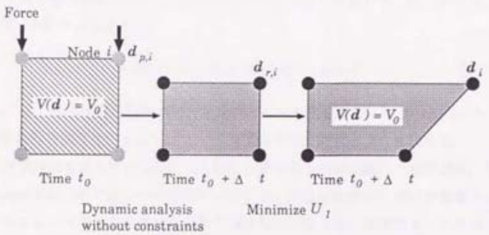


図 3.5: 評価関数 U_1 による体積保存変形

もう一つの評価関数 $U_3(\boldsymbol{d})$ は 1 フレーム前における節点変位 $\boldsymbol{d}_{p,i}$ から制約なしで求めた節点変位 $\boldsymbol{d}_{r,i}$ に向かう方向 (図 3.6) との誤差を表す関数で次のように定義する.

$$U_3(\boldsymbol{d})=\sum_i \left(1-\frac{(\boldsymbol{d}_i-\boldsymbol{d}_{p,i})}{||\boldsymbol{d}_i-\boldsymbol{d}_{p,i}||}\cdot\frac{\dot{\boldsymbol{d}}_{r,i}}{||\dot{\boldsymbol{d}}_{r,i}||}\right). \tag{3.25}$$

$U_2(\boldsymbol{d})$, $U_3(\boldsymbol{d})$ が小さくなれば動力学解析結果との差が小さくなる.

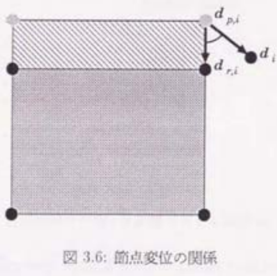


図 3.6: 節点変位の関係

全体の評価関数 $U(\boldsymbol{d})$ はこれらの線形和とする．すなわち，式 (3.26) のように $U(\boldsymbol{d})$ を定義する．

$$U(\boldsymbol{d}) = c_1U_1(\boldsymbol{d}) + c_2U_2(\boldsymbol{d}) + c_3U_3(\boldsymbol{d}). \tag{3.26}$$

c_1，c_2，c_3 は各評価関数の重みを決める正の定数で通常は $c_1 \gg c_2$，c_3 として体積保存項を優先させる．c_2，c_3 は長さを正規化するように決める．

評価関数を最小にする各節点の変位を求めると同時に節点の変位速度，変位加速度を求めて動力学の計算に反映する．変位加速度に各節点の質量をかけることで体積保存変形を与える仮想的な力が得られ，仮想力をスカラ倍することで体積の増減を調整でき誇張表現などを実現できる．

3.2.3 線形写像変形での体積保存特性

3.2.2 節では解析モデルの体積保存変形について述べたが，実際に目に見えるのは表示モデルである．本節では表示モデルの体積との関係について考察する．

節点 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_3$ と原点で囲まれる四面体内部に存在する表示モデルの面番号を l とする (図3.7)．また，各面は三角形でそれぞれの頂点を $\boldsymbol{x}_{l1}$，$\boldsymbol{x}_{l2}$，

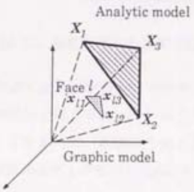


図 3.7: 表示モデルの面 l に影響を与える解析モデル節点

$\boldsymbol{x}_{l3}$ とすると四面体中に含まれる表示モデルの体積 V_x は次の式 (3.27) で求め

られる [Mäntylä 88].

$$V_x = \frac{1}{6}\sum_l \boldsymbol{x}_{l1} \times \boldsymbol{x}_{l2} \cdot \boldsymbol{x}_{l3}. \tag{3.27}$$

これは式(2.1) より

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{1}{6}\boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{X}_3 \sum_l \boldsymbol{e}_{l1} \times \boldsymbol{e}_{l2} \cdot \boldsymbol{e}_{l3} \\ &= V_X \times const. \end{aligned} \tag{3.28}$$

と変形でき表示モデルの体積はそれを囲む解析モデルの体積に比例することを示す．もっともこれは原点と解析モデルの凸法立体の面で構成される一つの四面体領域内部についての議論であり，図3.8のように表示モデルの面が複数領域にまたがる部分については成立しない．しかし，一般に解析モデルの

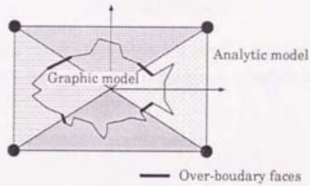


図 3.8: 複数領域にまたがる面

一つの面は表示モデルの面に比べて十分大きいので，複数の四面体にまたがる面は全体から見ると少ないと考えられ，モデル全体についても近似的に体積の比例関係が言える．したがって，前節の方法によって解析モデルの体積が一定に保たれるならば表示モデルの体積も近似的に一定になる．

3.2.4 最適化技法による体積保存手法の実行例

図3.9に図3.4の例について本手法を用いて体積保存変形を実現した例を示す．表示モデルを囲む正八面体の解析モデルについて 3.2.2 節で述べた体積

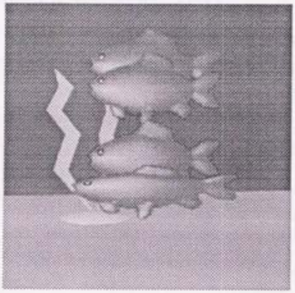


図 3.9: 体積保存変形

保存手法を適用している．解析モデルと表示モデルは線形結合で結ばれているので解析モデルでの体積が一定ならば表示モデルの体積も一定に保たれる．

3.3 衝突に対する反応の定式化と解法

一般のコンピュータグラフィクスにおける表示モデルでは物体同士が衝突すると互いに貫通してしまうが，物理法則に基づいた自然なアニメーションを生成するという意味では，貫通による不自然さを排除することは重要である．干渉回避に関しては多くの研究がなされているが，ここでは従来のように単純に干渉を回避することが目的ではなく，硬さや重さなどの物体の物理的性質に合った干渉回避を実現することを目的とする．

衝突のシミュレーションは次の 5 段階に分けて処理する．

1. 衝突検出
2. 衝突力の計算
3. 衝突力の分配
4. 動力学計算
5. 変位の写像

衝突検出と衝突力の計算は幾何学的情報を持つ表示モデルに対して行ない，この結果求まった力を解析モデルの節点への力に分配する．節点に加えられた力を解析モデルに対する外力として式 (2.24)-(2.26) から通常の動力学計算をし物体の変形を求め，2.1.3 節で述べた線形写像により表示モデルへ変位を写像することで表示モデルの変形を得る．

動力学計算と変位の写像の 2 段階については既に述べているので本節では衝突検出，衝突力の計算，衝突力の分配の 3 段階についての計算方法を説明する．

3.3.1 衝突検出

衝突検出処理では幾何学的情報を持った表示モデルについて物体同士が衝突する位置と衝突方向を求める．

アニメーションでは時間は1フレームの単位で離散化されているため一般には各フレームで面と面との衝突が検出されたときには既に相手の物体の中に入り込んでいる．このため衝突検出は1フレーム先の状態に対して行ない，衝突が検出された時点で前のフレームに対する衝突反応の計算をする．

衝突検出は計算を減らすために粗干渉チェック，構造化などの手法はあるが [Moore 88]，基本的には衝突する物体の各面同士の干渉をすべて調べる．衝突は大きく分けると頂点と面の衝突と稜線と稜線の衝突の2つの場合がある．頂点と面の衝突の場合は図3.10のように相手の物体に入り込んだ頂点と1フレーム前 (時間 $t-\Delta t$) でのその頂点とを結ぶ直線と相手の面との交点を衝突位置とする．モデルは必ずしも空間上で閉じた立体ではなく，板のように閉じていないモデルもあるが各面には向き付けがされているので局所的な内外判定ができる． 稜線と稜線の衝突の場合は図3.11のように相手の物体に

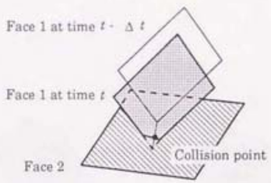


図 3.10: 頂点と面の衝突の場合の衝突位置

入り込んだ稜線と1フレーム前での稜線を含む双一次曲面と相手の稜線との交点を衝突位置とする．

頂点と面の衝突 (稜線と面の衝突，面と面の衝突を含む) のときには面の法線方向を衝突方向とする (図3.12)．稜線と稜線の衝突のときには2つの稜線を含む面の法線を衝突方向とする．ただし，頂点同士もしくは頂点と稜線の衝突では隣接する面の法線の平均を衝突方向とする．

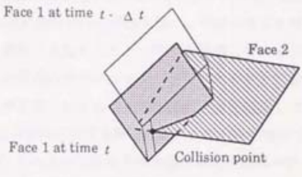


図 3.11: 稜線と稜線の衝突の場合の衝突位置

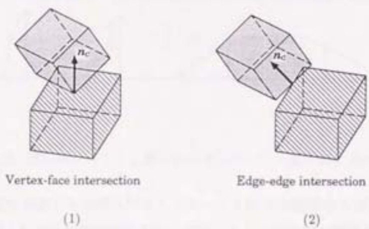


図 3.12: 衝突方向

3.3.2 Hertz 接触理論を用いた衝突力の計算

従来の衝突力の計算では干渉して入り込んだ量から幾何的にの衝突力を求めていたため物理的特性を反映できないことが多かった．例えば，Terzopoulos らはフレーム毎に物体同士の干渉を調べ，干渉が生じた時にその干渉量の指数に比例する衝突力を加えることで干渉を回避している [Terzopoulos 87]. Platt と Barr は非貫通のためのポテンシャルエネルギを定義し，最適化技法によってエネルギを最小にすることで物体の干渉を回避している [Platt 88]. Witkin と Welch は物体の速度を瞬時に変更する力積を用いて干渉を回避している [Witkin 90]. これらの手法は干渉を避けるためには十分であるが，質量や剛性などの物体の物理属性による違いを表すことはできない．例えば，図 3.13に示すように硬いボールは一瞬にして跳ね返るのに対し柔らかいボールは変形するため接触時間は長く，各時間にかかる力は小さくなる． 質量な

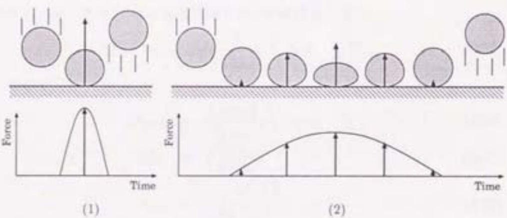


図 3.13: 硬いボール (1) と柔らかいボール (2) の衝突時に受ける力

どの物理量を考慮した物理法則としてもっとも単純な関係は力積運動量則である．時間 t における衝突力を $F(t)$，干渉する 2 つの物体の質量を M_1，M_2，時間 t における速度を $v_1(t)$，$v_2(t)$ とすると力積運動量則は次のように書き表すことができる．

$$\int_0^{T_{max}} F(t)dt \quad = \quad M_1(v_1(0) - v_1(T_{max}))$$

$$= -M_2(v_2(0) - v_2(T_{max})).$$

ここで T_{max} は接触時間である．剛体のように接触時間 T_{max} がアニメーションの１フレームの時間に比べて小さい場合には接触時間を１フレームの時間とすれば力は計算できる [Moore 88][Carignan 92]．しかしながら，柔軟物体のように接触時間が１フレームの時間よりも長いときには適当な接触時間を求めなければならない．Baraff は物体の材質に応じた衝突力 $F(t)$ を経験的に仮定しているが定量的な関係については言及されていない [Baraff 92]．

ここでは Hertz の接触理論を用いて衝突力と接触時間を求める [Terasawa 93]．Hertz の接触理論は弾性論に基づいているため，質量や剛性などの物理属性から定量的に衝突力を求めることができる．

Hertz の接触理論によると衝突からの時間 t 後における衝突力 $F(t)$ は物体 i の総質量 M_i，Poisson 比 σ_i，縦弾性係数 E_i，相対初速度 v_0，接触面の２次曲面近似の標準２次形式係数 A，B，A/B の関数 q_k を用いて式 (3.29) で求めることができる (Hertz 接触理論については付録 B 参照)．

$$F(t) = F_{max} \sin \frac{\pi}{T_{max}} t \qquad 0 \leq t \leq T_{max}. \tag{3.29}$$

ここで

$$F_{max} = \frac{1.140 v_0^2}{n_1 \alpha_{zm}}, \tag{3.30}$$

$$T_{max} = \frac{\pi \alpha_{zm}}{1.068 v_0}, \tag{3.31}$$

$$\alpha_{zm} = \left(\frac{5}{4} \frac{v_0^2}{n_1 n_z} \right)^{\frac{2}{5}}, \tag{3.32}$$

$$n_1 = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}, \tag{3.33}$$

$$n_z = \frac{4}{3} \frac{q_k \left(\frac{A}{B} \right)}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A + B}}, \tag{3.34}$$

$$\delta_1 = \frac{1 - \sigma_1^2}{\pi E_1}, \quad \delta_2 = \frac{1 - \sigma_2^2}{\pi E_2}. \tag{3.35}$$

式 (3.30)，(3.31) の F_{max}，T_{max} を得るためには n_1，v_0，n_z，α_{zm} を決定しなければならない．ここでは質点・ばね系のモデル定義からこれらの変数を得る方法について述べる．

総質量 M は

$$M = \sum_{i}^{N_v} m_i. \tag{3.36}$$

ここで m_i は頂点 i の集中荷重質量を表し，N_v は物体の頂点数を表す．両物体の総質量から式(3.33) の n_1 が求まる．

$\boldsymbol{a}_i(t)$ を時間 t における物体 i の重心とすると衝突の瞬間 ($t = 0$) における相対初速度は

$$v_0 = \boldsymbol{n}_c(\dot{\boldsymbol{a}}_2(0) - \dot{\boldsymbol{a}}_1(0)). \tag{3.37}$$

ここで $\boldsymbol{n}_c$ は衝突方向である (図3.12)．

すべてのばねの断面積が A_{sp} で一定であると仮定すると稜線 i での縦弾性係数 E_i とばね係数 k_i の関係は

$$E_i = \frac{l_i}{A_{sp}} k_i. \tag{3.38}$$

ここで l_i は稜線 i の長さである．したがって，物体の縦弾性係数は

$$E = \frac{1}{N_e} \sum_{i}^{N_e} E_i = \frac{1}{N_e} \sum_{i}^{N_e} \frac{l_i}{A_{sp}} k_i. \tag{3.39}$$

たいていの物質の Poisson 比は 0.2 から 0.5 の範囲に収まっているが縦弾性係数は鋼では $2.0 \times 10^{11} Pa$，ゴムでは $5.0 \times 10^6 Pa$ と開きが大きい (表3.1)．このことは式 (3.35) では Poisson 比に比べて縦弾性係数のほうが支配的であることを示す．簡単のためにここでは δ の計算には Poisson 比は 0.3 に固定している．

表3.2に示すように式 (3.34) の定数 A と B は接触する 2 物体の接触面の形状により異なる． 接触点周辺の物体の形状が球面であると仮定すると A，B は

$$A = B = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2}. \tag{3.40}$$

ここで R_i は物体 i の面の半径である． $\boldsymbol{n}_{v,i1}$，$\boldsymbol{n}_{v,i2}$ を図3.14に示すような衝突面の稜線 i の端点における法線ベクトルとすると，球の半径は次のように近似できる．

$$R = \frac{1}{N_{fe}} \sum_{i}^{N_{fe}} \frac{l_i}{||\boldsymbol{n}_{v,i1} - \boldsymbol{n}_{v,i2}||}. \tag{3.41}$$

表 3.1: 主な物質の縦弾性係数と Poisson 比 [理科年表 83]

物質	縦弾性係数 ($\times 10^{10} Pa$)	Poisson 比
亜鉛	10.84	0.249
アルミニウム	7.03	0.345
ガラス (クラウン)	7.13	0.22
金	7.8	0.44
銀	8.27	0.367
ゴム (弾性ゴム)	$(1.5-5.0) \times 10^{-4}$	$0.46-0.49$
鉄 (軟)	21.14	0.293
鉄 (鋳)	15.23	0.27
鉄 (鋼)	20.1	$0.28-0.3$
銅	12.98	0.343

表 3.2: 接触面の形状による A, B の値 [Goldsmith 60]

接触の型	A	B	A/B
半径 R_1 の球と半径 R_2 の球	$\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2R_2}$	$\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2R_2}$	1
半径 R_1 の球と平面	$\frac{1}{2R_1}$	$\frac{1}{2R_1}$	1
半径 R_1 の円柱と直交する半径 R_2 の円柱	$\frac{1}{2R_1}$	$\frac{1}{2R_2}$	$\frac{R_2}{R_1}$
半径 R_1 の球と半径 R_2 の円柱	$\frac{1}{2R_1}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$	$\frac{R_2}{R_1+R_2}$

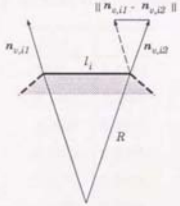


図 3.14: 半径の近似

ここで N_{fe} は衝突面の稜線の数である．表3.3から $q_k(A/B)$ は次のように与えられる．

$$q_k\left(\frac{A}{B}\right) = q_k(1) = 0.318. \tag{3.42}$$

式 (3.34) から n_z を式 (3.32) から α_{zm} を得ることができる．このようにして時間 t における衝突力 $F(t)$ と接触時間 T_{max} が求まる．

3.3.3 衝突力の配分

衝突力は表示モデルの頂点に対して計算されるが，動力学計算のためには解析モデルの節点に力を与えなければならないので計算された力を節点に分配する必要がある．ここでは表示モデルと解析モデルの変位が線形関数で結合されていることを利用し，力も線形に分配することにする．

衝突位置を $\boldsymbol{x}_{collision}$ とし，この点を囲む 3 つの解析モデルの節点を $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_3$ とすると，この間には次のような線形関係がある．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{collision} &= e_1\boldsymbol{X}_1 + e_2\boldsymbol{X}_2 + e_3\boldsymbol{X}_3 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

表 3.3: $q_k(A/B)$ の値 [Goldsmith 60]

A/B	q_k
1.00	0.3180
0.7041	0.3215
0.4903	0.3322
0.3333	0.3505
0.2174	0.3819
0.1325	0.4300
0.0718	0.5132
0.0311	0.6662
0.00765	1.1450

$$\equiv \mathrm{X}e. \tag{3.43}$$

$\boldsymbol{x}_{collision}$, X_1, X_2, X_3 は既知なので式(3.44)のように e を求めることができる.

$$e = \mathrm{X}^{-1}\boldsymbol{x}_{collision}. \tag{3.44}$$

解析モデルの節点 X_1, X_2, X_3 への外力 f_1, f_2, f_3 はこの e_1, e_2, e_3 と式(3.29)で求められる表示モデルの衝突力 F から次のように求められる.

$$f_1 = \frac{e_1}{e_1+e_2+e_3}F, \tag{3.45}$$

$$f_2 = \frac{e_2}{e_1+e_2+e_3}F, \tag{3.46}$$

$$f_3 = \frac{e_3}{e_1+e_2+e_3}F. \tag{3.47}$$

外力 f_1, f_2, f_3 が得られれば後は通常の動力学計算を行なうことによって衝突に対する反応を計算することができる.

3.3.4　衝突反応手法の実行例

図 3.16に硬さの異なる 2 つのボールが床に衝突して跳ね返るアニメーションの例を示す．解析モデルの形状は正二十面体であり左のボールのほうが右のボールよりも柔らかい．正確に言うと 2 つのボールは質量，半径，衝突時の速度共に等しいが右のボールの縦弾性係数は左のよりも 100 倍大きい．床の縦弾性係数は硬いボールの値と等しいとすると式 (3.30)，(3.31)，(3.32) から 2 つのボールの F_{max} と T_{max} は次のような関係を持つ．

$$
\begin{aligned}
F_{max,hard} &= 4.8F_{max,soft}, \\
T_{max,hard} &= 0.208T_{max,soft}.
\end{aligned}
$$

これは図 3.15に示すように硬いボールの方が大きな衝突力を受け，接触時間は短くなることを表し，直観と一致する．

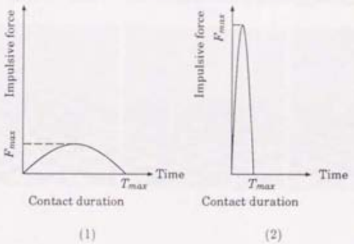


図 3.15: 柔らかいボール (1) と硬いボール (2) に対する衝突力

図 3.17は曲率半径の影響を示す．2 つのボールは同じ密度で縦弾性係数も衝突時の速度も等しいが右のボールの半径は左のボールの 2 倍である．床の曲率半径は無限大とみなすことができるので，式 (3.34) の定数 A，B は

$$A = B = \frac{1}{2R}.$$

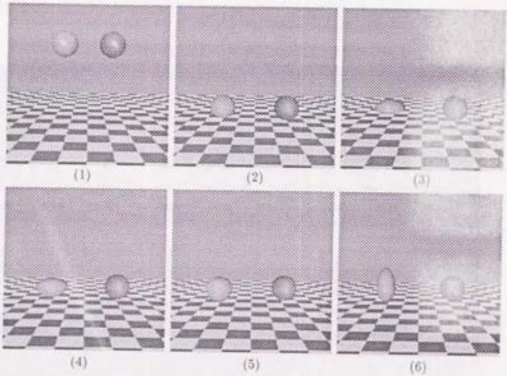


図 3.16: 柔らかいボール (左) と硬いボール (右) の運動の違い

ここで R はボールの半径である．密度が等しいので大きいボールの質量は小さいボールの 8 倍になり，床の質量はボールに比べて非常に大きいので式(3.30)，(3.31)，(3.32) から 2 つのボールの F_{max}，T_{max} の関係は

$$
\begin{aligned}
F_{max,large} &= 4F_{max,small}, \\
T_{max,large} &= 2T_{max,small}.
\end{aligned}
$$

これは大きいボールが長い接触時間にわたって大きい衝突力を受けることを意味する．

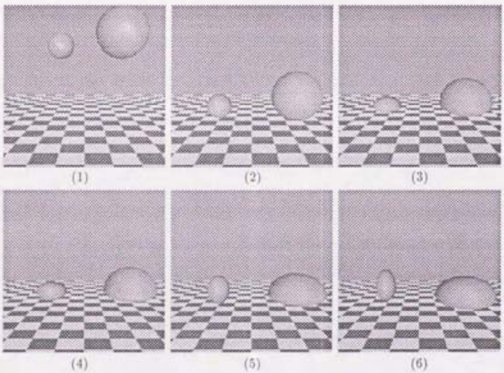


図 3.17: 半径の小さいボール (左) と半径の大きいボール (右) の運動の違い

図 3.18は重さの影響を示す．図 3.18(2) の物体は図 3.18(1) の物体よりも 10 倍重く，板に衝突する前の運動を同じにするためにばね係数は質量に比例するものとする．外力は着地の際に等しい速度になるようにする．M を軽い

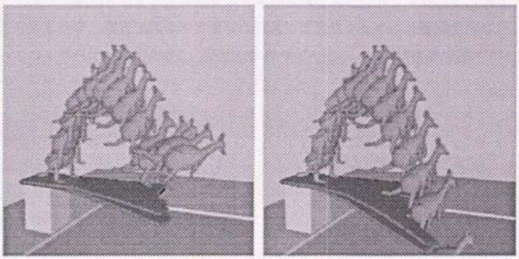
物体の質量とすると重い物体の質量は $10M$ になる．板の質量も M とすると式(3.30)，(3.31)，(3.32) から F_{max}，T_{max} の関係は

$$
\begin{aligned}
F_{max,heavy} &= 1.818 F_{max,light}, \\
T_{max,heavy} &= T_{max,light}.
\end{aligned}
$$

これは 2 つの物体は接触時間は等しいが重い物体のほうが大きい衝突力を受けることを示している．加速度は

$$
\begin{aligned}
\ddot{w}_{heavy} &= -\frac{F_{max,heavy}}{M} \\
&= -\frac{1.818}{10}\frac{F_{max,light}}{M} \\
&= 0.182\ddot{w}_{light}.
\end{aligned}
$$

したがって，軽い物体のほうが加速度が大きいため高く飛び上がることが分かる．



(1) (2)

図 3.18: 軽い物体 (1) と重い物体 (2) の運動の違い

3.4　第 3 章のまとめ

本章では質点 - ばね系の解析モデルで幾何学的制約を受ける運動を実現する方法を述べた.

拘束された節点が与えられた軌道に従い，他の部分は動力学に従うような運動に対しては，力から位置を求めるための数値計算を逆に利用し，与えられた位置から力を計算することで安定な制御力を求めた．また，キーフレーム補間を二点境界値問題としてとらえることで，動力学を考慮した滑らかな動きが得られる軌道を生成する手法を示した.

変形時に物体の体積を一定に保つために，物体の変位を変数とし，体積補正項と動力学誤差項の評価関数の最適化により体積保存を実現した．また，解析モデルと表示モデルには体積の比例関係が成り立つため，解析モデルの体積保存により表示モデルの体積も保存されることを示した.

衝突した物体が変形し，干渉を回避する運動に対しては，硬さや重さなどの材質に応じて変形するような手法を提案した.

本章では運動に対する計算処理が選ばれた段階でどのような処理を行なうかを示したが，運動全体の中で適切な計算処理を選ぶためには運動全体についてのモデル化が必要である．運動全体のモデル化については次章で述べる.

第4章

運動特徴モデル

シミュレーションでは力を与えた時にどのような振舞いを示すかという原因と結果の関係付けに関心がある．これに対してアニメーションでは，最終的に得られる動きに関心があり，与える力については結果を生じさせるための副次的な役割しか持たない．例えば，アニメータが「跳ねる」「転がる」などの運動を実現するときには入力すべき力については関心はない．換言すると希望する運動を実現できるのであれば必ずしも動力学計算ではなく，幾何学的計算でもよい．本章では，全体のシーン記述の中で希望する運動を実現するために，適切な幾何学的処理，力学的処理を選択することで安定で効率の良い処理を行なえる運動特徴モデルを提案する．

4.1節では，投げる，跳ねる，転がる，衝突するなどの運動のマクロである運動特徴を定義する．

4.2節では，質点・ばね系の解析モデルを用いて古典的アニメーション手法を実現するための運動特徴についてまとめる．特に，伸縮，予備動作，誇張，副次動作などの実現方法について述べる．

4.3節では，運動特徴の計算機内部表現である運動特徴モデルのデータ表現について述べる．

時間以外の条件で運動状態を遷移させるイベントによる運動管理機構について4.4節で説明する．また，運動を記述するための図形シンボルによる表記法を定義する．

4.5節では，運動特徴モデルの枠組を用いることで運動手順を決めてから具体的な幾何情報や力学情報を当てはめるトップダウン的な運動指定方法について述べる．

4.1 運動特徴

製品設計においてネジ穴，キー溝などの機能要素をシンボリックに組み合わせることで設計を行なうことを形状特徴による設計という [Luby 86]. 形状特徴による設計では，例えば「穴」という表現から穴の形状情報だけでなくピン挿入，軸穴などの機能が考えられることから加工情報，工程設計情報なども得られるため設計者にとって自然なユーザインタフェースを構築でき，また技術情報を含んだデータベースとして蓄えることができる.

アニメーションにおいても衝突する，跳ね返るなどのまとまりがあり，これらを組み合わせて運動を指定することができる．このような運動のまとまりをここでは運動特徴と呼ぶことにする．例えば，図4.1のボーリングのアニメーションは「投げる」「跳ね返る」「転がる」「衝突する」の4つの運動特徴によって表現される.

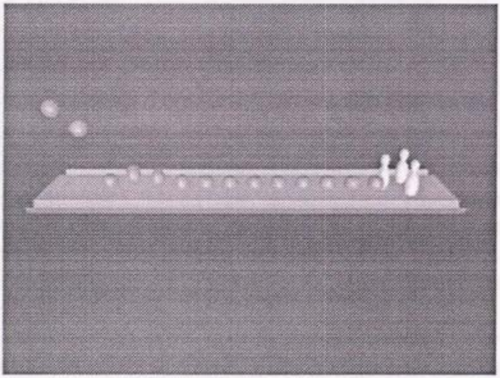


図 4.1: 4つの運動特徴からなるボーリングのアニメーション

図4.2の投げる運動は運動方程式だけで求まるため内部的には力学情報のみを使用する．この例では重力に従うという制約が加わっているがこれも純粋に力学的な制約として実現される．したがって，アニメータは初期位置，方向，初速などの力学情報を与えることで運動を指定する．

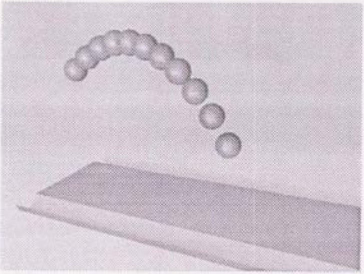


図 4.2: 運動特徴: 投げる

図4.3の跳ねる運動では衝突検出は幾何的問題，跳ね返り後の変形は力学的問題として扱われる．物理的には跳ねる運動は跳ね返り係数に応じて高さは低くなり，やがて床に接した状態で安定する．しかし，シミュレーションでは衝突検出の誤差などがあるため摩擦，粘性抵抗などによるエネルギ減衰を考慮しても床に接触した状態で安定させることは難しい．そこで，この運動特徴では設定した誤差内に収まる跳ね返りは無視し，後は幾何学的処理で床に接触する運動を実現する．したがって，アニメータは衝突する物体と打ち切り誤差を指定する．

図4.4の転がる運動は本来ボールに対する重力と垂直効力が釣り合うことで実現されるものであるが，この例のように溝の側面全体から垂直効力が加わる場合，誤差により解析計算が不安定になるため意図した動きを得るのが困難である．このため転がる運動は軌道を幾何的に指定することで実現する．

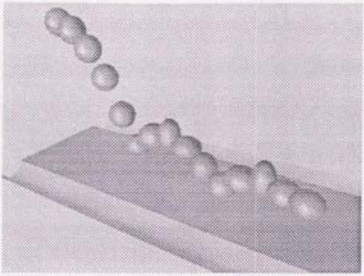


図 4.3: 運動特徴: 跳ねる

ただし，初速は前段階の終端速度を用いるものとする．

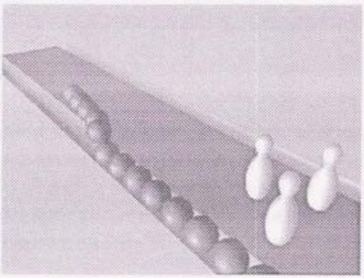


図 4.4: 運動特徴: 転がる

図4.5の衝突する運動は跳ねる運動と同様に幾何学的処理である衝突検出と力学的処理である衝突反応から成る．この例では衝突後ピンは柔軟物体とし

て変形するが，この際にピンの体積を一定に保つように幾何的制約を加えることもできる．

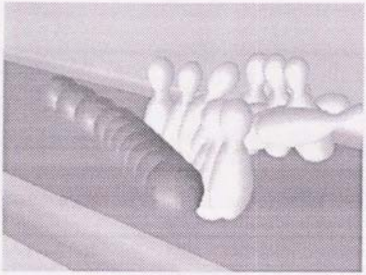


図 4.5: 運動特徴: 衝突する

以上をまとめると 4 つの運動特徴は図4.6のような幾何学的処理と力学的処理を用いている．この図では各運動特徴で使われる幾何学的処理を上段に，力学的処理を下段に示している．

上記の例からも分かる通り，運動には幾何学的処理のみで求まる場合，力学的処理のみで求まる場合，幾何学的処理と力学的処理の両方が必要な場合がある．幾何学的処理を行なうか力学的処理を行なうかの選択は計算の効率性，安定性の上で重要であるが，運動特徴というシンボリックな表現から実現したい動きを推測することで目的にかなった適当な幾何的計算処理，力学的計算処理を選択することができる．

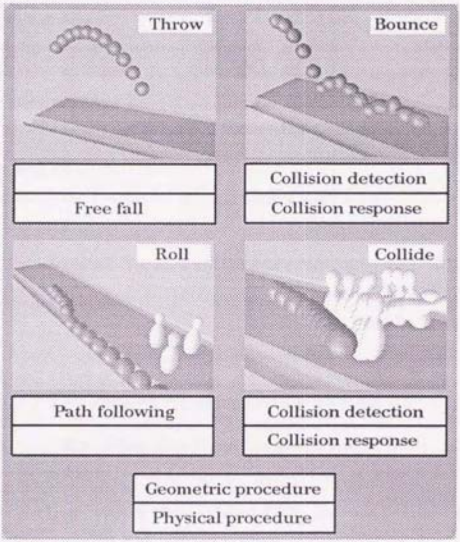


図 4.6: 運動特徴で用いる幾何学的処理と力学的処理

4.2 古典的アニメーション手法のための運動特徴

キャラクタアニメーションのように感情に訴えるアニメーションを作るためには固有の表現方法が必要である．このような表現手法はセルアニメーションなどの古典的なアニメーションにおいて培われてきており，アニメーション生成原理 [Frank 81] としてまとめられている． Lasseter は "Luxo Jr.", "The Adventures of Andre and Wally B." というアニメーション制作の経験からコンピュータアニメーションにおいてもこれらの手法を考慮に入れることがいかに重要であるかを示した [Lasseter 87].

アニメーション生成原理は次の 11 種類に分類されている．

1. 伸縮 (*Squash and Stretch*)
   形を歪めることで硬さ，重さ，速さなどを表現すること
2. タイミング (*Timing*)
   重さや大きさを表現するために時間間隔を調整すること
3. 予備動作 (*Anticipation*)
   動作を予期させる前段階の動きを付けること
4. 明確 (*Staging*)
   キャラクタの個性や場の情景を誤解されないように表現すること
5. つなぎ動作 (*Follow Through and Overlapping Action*)
   動作が突然変わるのでなく前の動作と次の動作のつなぎを付けること
6. 逐次設定，中割設定 (*Straight Ahead Action and Pose-To-Pose Action*)
   逐次的に設定するか，または決めを設定してから中割すること
7. 緩急 (*Slow In and Out*)
   運動の開始時，終了時に中割の間隔を調整すること
8. 軌道 (*Arcs*)
   自然な動きになるように円弧などで軌道を設定すること

9. 誇張 (*Exaggeration*)
   本質的な動きを強調して見せること

10. 副次動作 (*Secondary Action*)
   他の動作に付随する動作を付けること

11. 訴求 (*Appeal*)
   見る人を魅き付けるような動作にすること

この中で2. タイミング，6. 逐次設定，中割設定，7. 緩急，8. 軌道などは従来用いられてきた幾何量の指定に基づくコンピュータアニメーションシステムでも容易に実現できる．これに対し，4. 明確，11. 訴求などは計算機で支援するのは難しいが，これはアニメータのセンスを発揮できる点なので必ずしも自動化する必要はない．この節では運動特徴として1. 伸縮，3. 予備動作，9. 誇張，10. 副次動作のような古典的アニメーション手法を実現するための運動特徴モデルを質点・ばね系モデルで実現する方法について述べる．

4.2.1　伸縮

伸縮とは物体の形を歪曲変形させることで硬さ，重さ，速さなどを表現するものである．例えば，速い運動では運動方向に広がり，他の物体と衝突したときにはつぶれるといったアニメーションは伸縮で表現できる．アニメータの初歩の例題としては図4.7のような跳ね返り運動がよく用いられるが，跳ね返りは伸縮の連続である．

運動特徴モデルの持つ幾何学的情報，力学的情報のうち伸縮は力学情報を使うことでモデル化できる．伸縮は物体全体にわたる変形なのでばねモデルの構造は物体を囲み，ばねの数が少ないものを用いる．例えば，図4.8は静止している球を急激に右側に動かすアニメーションの一コマであるが，物体を急に動かすときには物体の周りに正八面体の解析モデルを定義し，一つの節点を大きな力で引っ張る．このとき，ばね係数は小さく質点の質量は大きくすることで先端部分が先に進み全体が後に残る効果を表現できる． 逆に急停止するときには進行方向の最先端の節点に対して運動と反対方向に力を加え

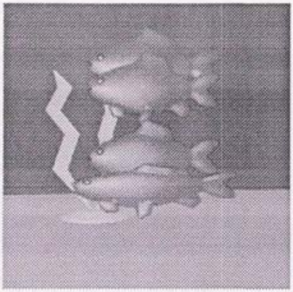


図 4.7: 伸縮

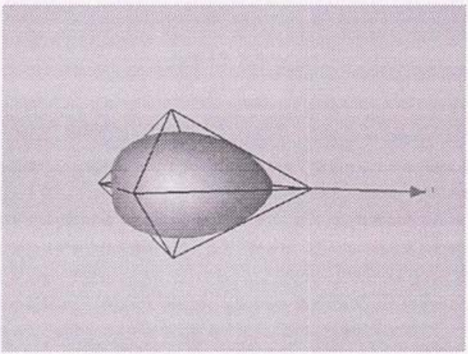


図 4.8: 急発進

る．図4.9は右側に進んでいた物体が急に停止する運動を表現するために左側に力を加えた瞬間の一コマを示す．

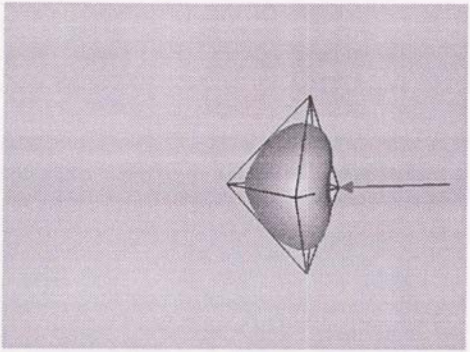


図 4.9: 急停止

4.2.2 予備動作

予備動作とは本動作を行なう前にその動作を予期させるような事前の運動のことを言う．この表現も運動特徴モデルの持つ幾何学的情報，力学的情報のうち力学情報を使うことでモデル化できる．動きは全体的になるため，ばねも表示モデル全体を囲むように張る．例えば，図4.10の例は車が左側に発車するときの予備動作を示しているが，この例では一旦車をやや後方に戻し，また中間部分を引き上げて前に進むエネルギを蓄えているように見せることで勢いよく発車することを予期させている．このとき解析モデルとしては車全体を囲む直方体に中間部分にばねを追加することで中間部分の折れ曲がりを可能にしている．

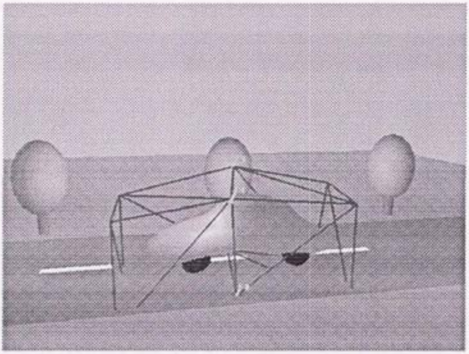


図 4.10: 車の発車の予備動作

4.2.3 誇張

誇張とは特徴的な運動を強調することで印象付けることであるが，誇張表現に含まれる動きは多様で実現方法も様々である．単純な例は解析モデルと力だけで表現できる．例えば，バスの急発進，急停止においては図 4.11，図4.12のように全体を囲む柔らかいばねを定義し地面に接する部分に進む力，止める力を加え，それ以外の部分には力を与えないことで加速感を強調できる．

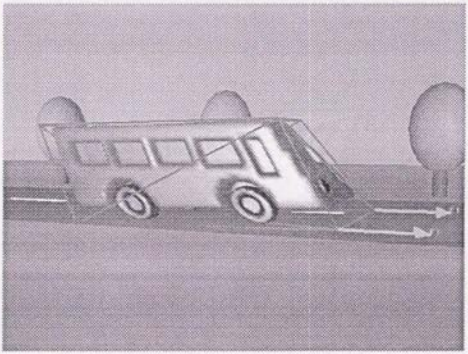


図 4.11: バスの急発進

誇張を表現するためにはこのように単純な解析モデルと力だけで表現できる場合もあるが，より一般的な誇張表現には現象に応じたモデル化も必要になる．例えば，布状の動きを表現するためには布状の解析モデルを用いた方がよく，棒状の動きを表現するためには棒状の解析モデルを用いた方がよい．

このように代表的な形状のモデル化として有用なのが骨格形状での解析を行ない，解析結果を表示モデルに反映させる骨格モデルである．骨格モデル

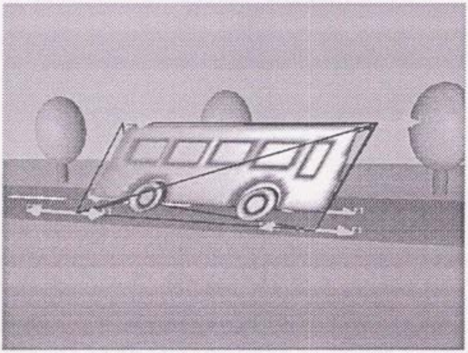


図 4.12: バスの急停止

とは図4.13の太線で示すような骨格の動きを最初に決めて，後から表示のための詳細な要素を肉付けしていくという方法である． 古典的なアニメーション

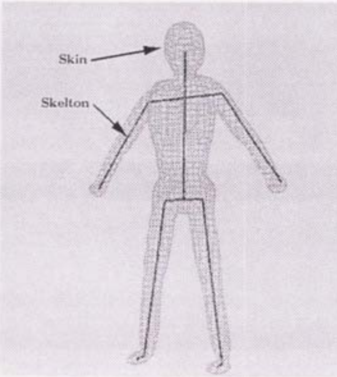


図 4.13: 骨格モデル

ンでも骨格モデルは人体や動物を始めとした多くのキャラクタアニメーションで普通に用いられている有用なモデル化である． Chadwick らは骨格の周囲に自由形状変形空間を定義し，この空間の変形によって皮の動きを定義しているが [Chadwick 89]，自由形状変形空間の変わりに質点 - ばね系の解析モデルを用いても同様に骨格モデルからの写像を表現できる．

4.2.4 副次動作

副次動作とは主たる動作に付随する運動でアニメーションに複雑さを持たせるためには大切な動作である．副次動作は動力学的には必ずしも主動作と一体になっているわけではなく，主動作と独立した動作にすることで効果を

出すこともある．例えば図4.14では，時計の動きを主動作として定義し，腕の動きを独立に定義することで全体の運動を表現している．

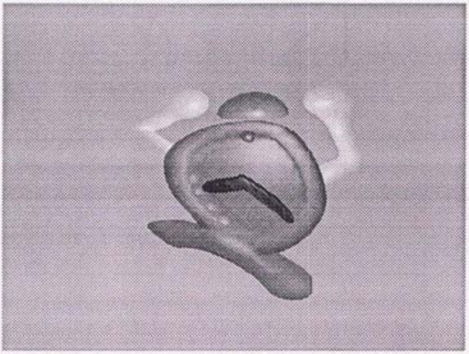


図 4.14: 副次動作を伴う運動

このような副次的な動きを表現するためにツリー状階層構造モデルを用いる．すなわち，ツリー状に構成した部品を個別に解析し，それらを組み合わせて一つのシーンを構成する．例えば，図4.14は時計と2本の腕の3つの部品から成るが，それぞれを囲む解析モデルについて独立に運動を解析し，それらを組み合わせて全体の動きを表現している．各部品は独立に運動を解析するが腕の解析モデルの3節点は，図4.15のように時計の解析モデルに固定する．

腕の解析モデルの3節点の解析変形後の節点を $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ とし，時計のモデルでの3節点に対応する点の解析変形後の位置をそれぞれ $\boldsymbol{x}'_1$，$\boldsymbol{x}'_2$，$\boldsymbol{x}'_3$ とする．このとき

$$[\boldsymbol{x}'_1 \quad \boldsymbol{x}'_2 \quad \boldsymbol{x}'_3] = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3] \tag{4.1}$$

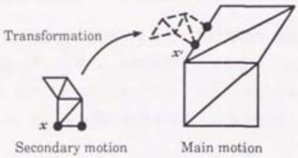


図 4.15: ツリー状階層構造モデル

となるような 3 × 3 の変換マトリクス E を求め，これを腕の解析モデルの各節点に適用することで時計本体と腕とを接続する．

4.3 運動特徴モデルのデータ表現

投げる，跳ねる，転がる，衝突するなどの運動特徴を表現する計算機内部モデルを運動特徴モデルと呼ぶ．運動特徴モデルは図 4.16に示すように物体を実体変数とし，各クラスに応じたメソッドを持つオブジェクト指向のモデルである． 例えば，投げる運動は初速が与えられ重力に従う運動であるが，

Class: throw
Superclass: free-fall
Methods: procedure to throw
Instance variables: ball

Class: bounce
Superclass: collide
Methods: procedure to bounce
Instance variables: ball

Class: roll
Superclass:
Methods: procedure to roll
Instance variables: ball

Class: collide
Superclass:
Methods: procedure to collide
Instance variables: ball

図 4.16: 運動特徴モデルの例

運動を生成するための処理はメソッドとして定義され，実体変数である物体モデルに対して処理が適用される．初速なども実体変数の一つとして扱われる．また，投げる運動のクラスは重力運動クラスの下位クラスであり，重力加速度などの変数を継承する．跳ねる運動は一方の物体モデルの変形を扱わない衝突の特殊な場合として，衝突運動クラスの下位クラスとして位置付け

られる．転がる運動のメソッドは幾何学的情報のみを使い互いに接触する運動を実現する．衝突運動は与えられた2つの物体モデルの衝突検出，衝突反応を計算するメソッドを持つ．

物体モデル (*Entity*) は一般的には図 4.17の物体1のように表示モデルと解析モデルを持つモデルであるが，物体2のように表示モデルしか持たない場合，物体3のように解析モデルしか持たない場合もある．転がる運動のように幾何学的情報のみが必要なときには表示モデルだけでよいし，投げる運動のように力学的情報のみでよいときには解析モデルだけでよい．最終的には表示の段階で表示モデルは必要であるが運動確認の時点では必ずしも表示モデルを持つ必要はない．

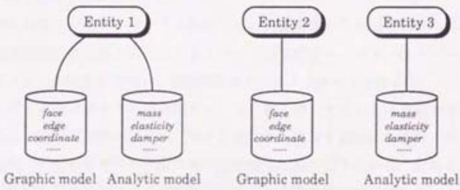


図 4.17: 物体モデル

4.4　イベント管理機構による運動記述

4.4.1　イベントによる状態遷移

従来のアニメーションシステムでは，ある運動状態から他の運動状態には与えられた時間に達したときに遷移するという指定が普通である．しかし，より一般的に「衝突した時に次の動作をする」とか「何回か跳ね返った後に次の動作に移る」といった時間以外の記述で状態を変更するほうが自然な場合が多い．特に動力学に基づくアニメーションでは物体が変形するため，様々な幾何学的条件，力学的条件によって指定できることが望ましい．そこで，幾何学的条件，力学的条件をイベントとして定義し，イベント発生により運動状態を遷移することにする．

例えば図4.18のボーリングの例は4つの運動特徴から構成されているが，各運動特徴間の遷移は次のようなイベントが登録されており，各フレーム毎にイベントの発生を監視し，運動特徴モデルにメッセージを送る．

投げる運動が始まるのは時間イベントの発生時，すなわち予め定めた時間になると投げる運動が始まる．投げる運動から跳ねる運動には衝突イベント発生時，すなわちボールと床が初めて接触した時に切り替わる．跳ねる運動から転がる運動には跳ねる運動の収束イベント発生時に切り替わる．これは跳ね返り後の垂直方向の速さが一定範囲内に収まった場合である．最後に，衝突運動に移るのはボールとピンが衝突する衝突イベント発生時である．このように幾何的条件，力学的条件などもイベントとして用意すると従来のようにスケジューラが時間だけで運動を管理するのに比べより柔軟に運動条件を記述することができる．

4.4.2　運動記述の表記法

運動特徴モデルでは，幾何学的条件，力学的条件，時間条件によるイベントを用いることで運動を記述する．ここでは，運動記述が直観的に理解できるように図形シンボルで表現する．運動記述を図形シンボルで表現したもの

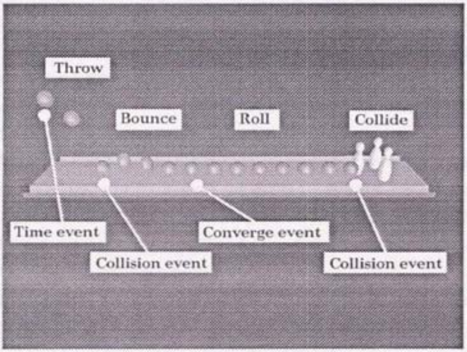


図 4.18: ボーリングのアニメーションにおけるイベント

としてKalraの表記法[Kalra 92]がある．これは，イベント発生前の行動規則とイベント検出の組をイベントユニットとして定義し，イベントユニットのネットワークで運動を表現するものである．この表記法は複雑な系の運動を視覚的に理解するのに有効であるが，生じるイベントの順序関係が予め分かっている場合にしか対応できない．一般にはイベントの発生する順序は不定なので，より汎用な表記法が必要となる．本論文では，イベント発生の順序が分かっていない場合でも対応できる表記法を新たに提案する．

運動特徴モデルにおける運動記述の基本的な要素としてはイベント(*Event*)と手続き(*Procedure*)がある．ここで，イベントとは幾何学的条件，力学的条件，時間条件を抽象化したものであり，手続きとはイベントが生じたときに物体がなすべき振舞いを記述したものである．したがって，イベントと手続きは一つの組になり，イベントが登録された後には必ず1つ以上の手続きが必要になる．

図形シンボルによる表記としてはイベントは図4.19 (1) に示すような枠で表し，手続きは図4.19 (2) に示すような枠で表す．枠の中にイベントまたは手続きのクラス名を記述する．デフォルト以外の実体を生成するための引数を明記するときにはイベントでは図4.19 (3)，手続きでは図4.19 (4) に示すように，それぞれの枠を重ねる．

通常，イベントが生じた時点で，そのイベントはイベントキューから外される．しかし，図4.19 (5) のような表記法を用いるときにはイベントが生じてもイベントから外されない．このような表記を繰り返しイベント(*Loop Event*)と呼び，何度でも同じ条件を用いる繰り返しの記述に有用である．

イベント発生時の条件に応じていくつかの手続きに分岐する場合には図4.19 (6) のような表記法を用いる．このような表記を分岐イベント(*Branch Event*)と呼ぶ．

4.4.3 運動記述の構造

4.4.2節で述べた要素を用いた運動記述の最も単純な構造は逐次的な処理の流れである．逐次的な処理の流れは図4.20に示すように左から右への要素の

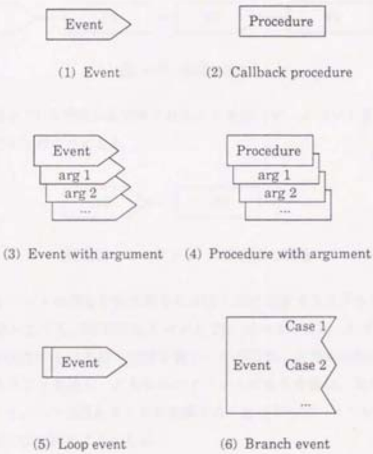


図 4.19: イベントと手続きの表記法

連結として表現される．図4.20は，イベントE1が生じた時に手続きP1が実行され，その後イベントE2の発生を待って手続きP2が実行されることを表す．内部的にはイベントE1の発生時点でE1がイベントキューから外され，

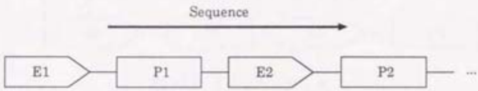


図 4.20: 処理の流れ

同時に手続きP1も登録から消去される．したがって，イベントE1の発生後の構造は図4.21のようになる．

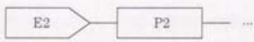


図 4.21: イベント E1 の発生後の構造

複数のイベントの発生を待つ場合には図4.22に示すように下から上へとイベントを積み上げる．図4.22はイベントE1，イベントE2，イベントE4のいずれかが発生するのを待つ状態を表す．この図で，双方向の矢印は関連イベントであることを表し，どちらかのイベントが生じた場合，他のイベントもイベントキューから外れることを意味する．したがって，イベントE2の発生後の構造は図4.23のようになる．

一つのイベントに対して複数の手続きを実行するときには図4.24のようにイベントの後に手続きを並列して書く．図4.24は，イベントE1が発生したときに手続きP1，P2，P3を同時に実行することを意味する．例えば図4.25の例は，物体同士の衝突が生じたときに物体を変形させると同時に物体の色を変え，また音も併せて鳴らすという記述を意味する．

イベントが発生したときの条件に応じて手続きを変えるときには図4.26に示すように分岐イベントを用いる．図4.26はイベントE1が生じたときに条

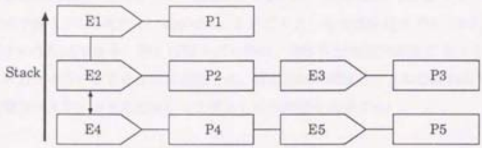


図 4.22: イベントスタック

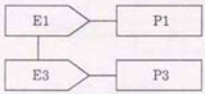


図 4.23: イベント E2 の発生後の構造

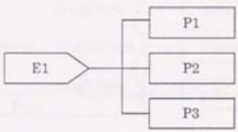


図 4.24: 複数の手続きの同時実行

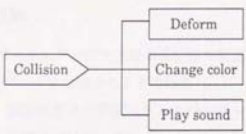


図 4.25: 複数の手続きの例

件 Case 1 が成り立つならば手続き P1 を実行し，条件 Case 2 が成り立つならば手続き P2 を実行し，条件 Case 3 が成り立つならば手続き P3 を実行するという記述である．例えば図 4.27の例は，物体同士の衝突が生じたときの反発力が小さいときには床に着地させ，反発力が中程度のときには跳ね返り，反発力が大きいときには床をつき破るという記述を意味する．

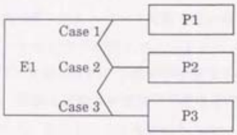


図 4.26: 条件分岐

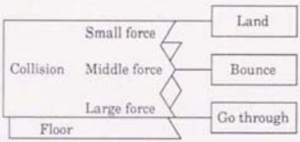


図 4.27: 条件分岐の例

4.4.4 運動記述例

4.4.1 節で示したボーリングの例を上述の表記法で記述する．運動記述は物体モデルに対してイベントを付加することで行なう．

図 4.28において，表示モデルと解析モデルを持つボールという物体には最初に時間イベント，衝突イベント，フレームイベントが積まれる．時間イベントは引数で与えられる時間に達したとき，衝突イベントは引数で与えられ

る物体と衝突したとき，フレームイベントはフレームが切り替わったときに発生するイベントである．いずれかのイベントが生じた時点でそれに続く手続きが呼び出される．すなわち，時間 $t0$ に達したときには投げる運動になり，レーンと衝突したときには収束するまで跳ね返り，ピンにぶつかったときには衝突反応を起こす．また，各フレーム毎に重力が加えられる．時間イベントは最初に用いられるだけだが，それ以外のイベントはイベント発生時に何度でも呼び出されるので繰り返しイベントになっている．

ピンについてはボールに対する衝突イベントとレーンに対する衝突イベントが定義され，それぞれに衝突反応の手続きが呼び出される．

レーンはそれ自体，移動も変形もせず幾何学的な情報が使われるだけなので表示モデルしか持たず，またイベントも定義されない．

イベントによる記述は，発生順序に関しての検討を行なわずに直観的に運動を記述できるため馴染みやすいユーザインタフェースを構築することができる．

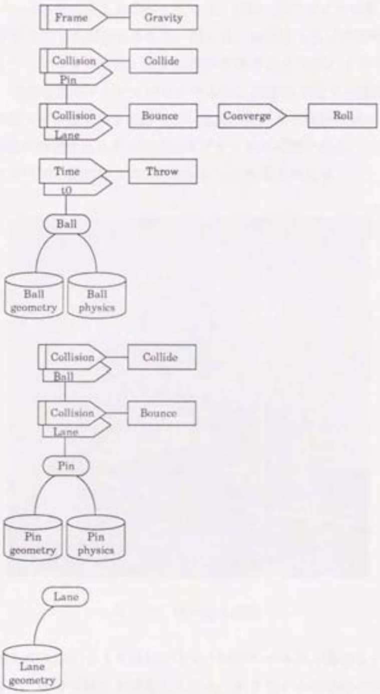


図 4.28: ボーリングの運動記述例

4.5 実体の置き換えによる運動指定

アニメーションを生成する手順としては，最初に表示モデルの要素を作り，後から動きを決定する場合もあれば，跳ねる，衝突するなどの定性的な運動の記述によりシナリオを作り，後から実体である表示モデルを当てはめる場合もある．従来のアニメーションシステムでは前者の手順が一般的であったが，運動特徴モデルで用いる物体モデルは表示モデルと解析モデルからなり，それぞれ独立に管理されるため両方のアプローチが可能である．

例として図4.29の跳ね返りのアニメーション生成を考える．

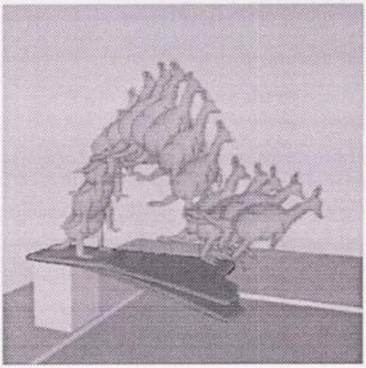


図 4.29: 跳ね返り運動

始めに図4.30に示すような骨組みを表す解析モデルに「跳ねる」という運動特徴を与え，変形の様子を確認して重さ，硬さなどの力学的パラメータを決め動きの概略を設定することができる． 運動記述を図4.31に示す．この段階では表示モデルのない状態なので干渉計算は解析モデルの節点を用いた近

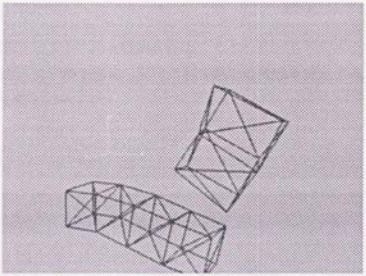


図 4.30: 解析モデルによる運動解析

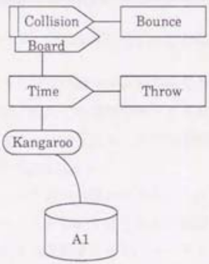


図 4.31: 解析モデルだけの運動記述

似的なものであるが，衝突は衝突イベントとして定義されているため，後で表示モデルに置き換わった時点で表示モデルの面との正しい干渉計算を行なうことができる．

実際の衝突に対する反応を簡単に確認するために図 4.32のように単純な表示モデルを用いて干渉を求め，試行錯誤で運動の概略を決定する．この場合の運動記述を図4.33に示す．

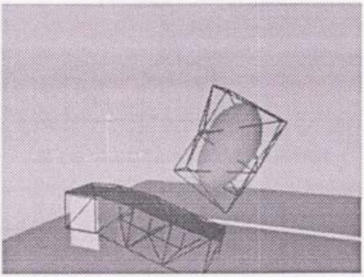


図 4.32: 簡単な表示モデルでの確認

さらに，図 4.34のように運動特徴モデルの実体である表示モデルを置き換えることで形状を変更して最終的な運動を得ることができる．この場合の運動記述は図 4.35に示すように先の記述から幾何学的情報を持つ表示モデルだけが変更され，他の部分に変更はない．

このように，跳ねるという運動特徴が予め与えられていると実体の管理はシステムが行なうためモデルの単純な置き換えで運動を指定できる．このことは段階的な動きを設定を可能にするため，ユーザインタフェースの向上に役立つ．また，図 4.36に示すように，運動を表示モデルの変数とは独立したデータベースとして蓄えておくことができるため，定義しておいたカタログの中から動きを再利用することができる．

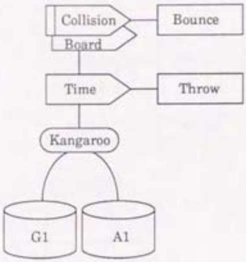


図 4.33: 簡単な表示モデルの場合の運動記述

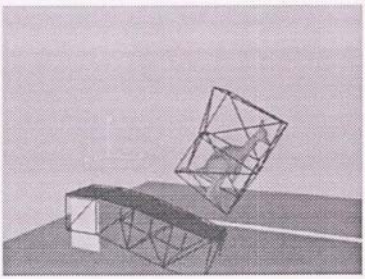


図 4.34: 表示モデルの詳細化

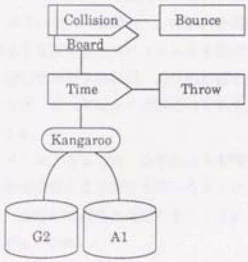


図 4.35: 詳細な表示モデルの運動記述

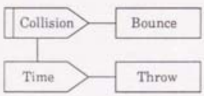


図 4.36: 変数と独立した運動のデータ

4.6 第4章のまとめ

本章では全体の運動を記述し，管理するための運動特徴モデルを提案した．

全体の運動を記述するモデルとして幾何学的情報と力学的情報を独立に管理するオブジェクト指向のモデルを定義し，伸縮，予備動作，誇張，副次動作などの特徴的な動きを表現するためのメソッドを例示した．運動全体のモデルは運動に応じて適切な幾何学的処理，力学的処理を選択するため安定に運動を求めることができ，物体ではなく運動そのものをデータベースとして蓄えておくことができる．

運動状態遷移のタイミングとしては，従来のような時間のみの指定ではなく幾何学的条件，力学的条件による指定を用いることでより柔軟な運動記述を可能とした．また，直観的に運動が指定できるようにするために，図形シンボルによる運動記述法を定義した．

次章では第2章，第3章で述べた個々のモデルと本章で述べた全体のモデルを用いてアニメーションを生成するコンピュータアニメーションシステムについて述べる．

第 5 章

動力学に基づくアニメーション作成支援システム

本章では，これまでに述べた考えの実用性，有用性を確認するために，計算機上に実装した動力学に基づくアニメーション作成支援システムの構成，操作法について述べる．

始めに 5.1 節では，これまでに述べたモデル間の関係を整理し，モデル生成に必要なアニメーション作成支援システムのモジュールについてまとめる．

5.2 節では試作したアニメーションシステムの概要と基本的な操作方法について述べる．

表示モデルを生成する方法としては予め定義された基本立体を用いる方法と自由曲面を持つ立体を生成する方法を用意した． 5.3 節では，このうち自由曲面を持つ立体の基礎となる超 2 次曲面状濃度表現について説明し，生成法を述べる．

5.4 節では，生成した立体を表示するために必要な材質を定義するパラメータをまとめ，これを設定する方法を述べる．

5.5 節では，解析モデルの質点 - ばねの構造定義法について述べる．

5.6 節では，生成した解析モデルに対する質量，ばね係数，減衰係数などの力学的属性の定義法について述べ，制御力，軌道の指定法についても言及する．

5.7 節では，最終的に計算された運動の表示，確認するためのモジュールについて述べる．

5.1 システムの内部構成

第2章，第4章で述べたように物体を表現するモデルとしては，表示，幾何学的処理のための表示モデル，動力学計算のための解析モデル，運動全体を記述，管理するための運動特徴モデルの3つがある．これらは図5.1に示すように表示モデルと解析モデルが幾何学的制約と変位の写像関係で結ばれて個々の物体の動きを定義し，表示モデルと解析モデルをまとめたものを用いて運動特徴モデルが全体の動きを定義するという関係にある．本システムではこれら3つのモデルを定義することでアニメーションを作成する．

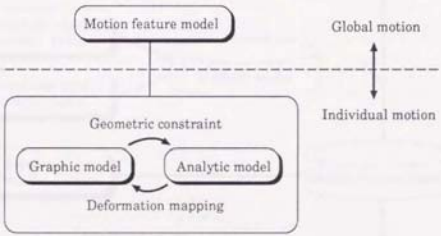


図 5.1: 3つのモデル間の関係

すでに第4章で触れたように，3つのモデルは基本的に独立しており，後から関係付けすればよいので，必ずしも3つのモデルすべてを定義する必要はなく，入力の手順にも制約はない．例えば，最初に表示モデルの要素を作り，後から解析モデルを作って動きを決定して表示モデルに変位を写像する場合もあれば，最初に跳ねる，衝突するなどの定性的な運動の記述により運動特徴モデルを作り，後から実体である表示モデルを当てはめる場合もある．このため，アニメーション作成支援システムでは図5.2に示すように，それぞれのモデルに独立した構造定義と属性定義が必要になる．

システムの主要なモジュールとしては，

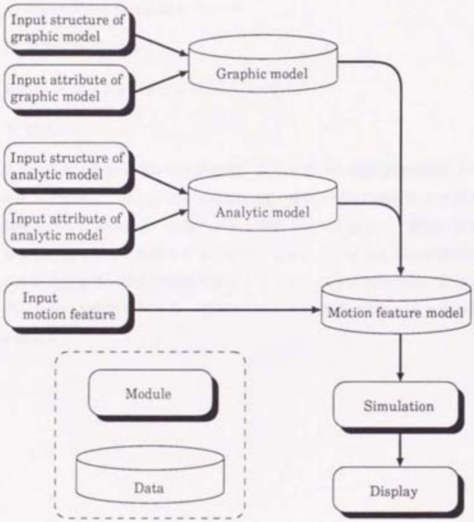


図 5.2: アニメーションシステムの主要モジュール

1. 表示モデルの生成モジュール

2. 表示モデルの属性定義モジュール

3. 解析モデルの生成モジュール

4. 解析モデルの属性定義モジュール

5. 運動特徴の定義モジュール

6. シミュレーションモジュール

7. 表示モジュール

の7つがある．表示モデルの生成処理，表示モデルの属性定義処理により表示モデルを構築し，解析モデルの生成処理，解析モデルの属性定義処理により解析モデルを構築する．表示モデルと解析モデルを結合し，運動の定義をする運動特徴モデルの実体とすることでシミュレーションに用いる運動特徴モデルを生成する．動力学解析をするシミュレーション処理では，運動特徴モデルを用いた解析を行なう．表示モジュールは画面や各種ファイルへの出力を管理する．

5.2 対話処理の概要

動力学に基づくアニメーション作成支援システムを Silicon Graphics 社のグラフィックワークステーション IRIS 4D 30/TG の IRIX OS(Unix System V) 上で試作した．プログラミング言語には C 言語を用い，グラフィクスライブラリとして GL，ウィンドウライブラリとして X Window System (Motif Widget) を使ってプログラムを作成した．

対話処理の初期画面の構成を図5.3に示す．画面の上が主メニューであり，左はモード選択，右下は対話処理を行なう画面である．このシステムはマウスによる操作で対話的に生成，変更，消去を行なえる．

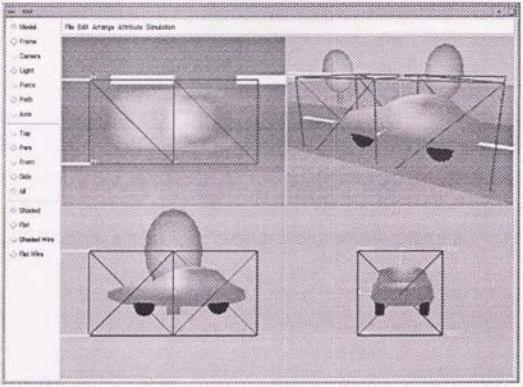


図 5.3: アニメーションシステムの対話処理画面

設定モードには図5.4に示すように表示モデル，解析モデルのモードの他，カメラ，光源，力，軌道，軸のモードがあり，各モードについて生成，消去，

変更，複製を行なえる．カメラ，光源は形状を持たない点以外は表示モデルと同様に扱うことができる．力，軌道の設定モードでは運動特徴モデルの動きを定義する．操作は基本的にオブジェクト指向になっており，同じ操作でも選択した物体のクラスに応じて実現されるメソッドは異なる．

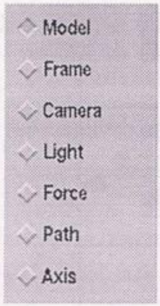


図 5.4: モード選択

以下の節では各モジュールでの基本的な操作方法について説明する．

5.3 超2次曲面状濃度表現モデルによる表示モデル生成

本システムでは，直方体，球，円柱，円錐などの単純な形状については基本立体生成のカタログを用意しているが，複雑な物体については図5.5に示すような超2次曲面状濃度表現モデラで生成する．

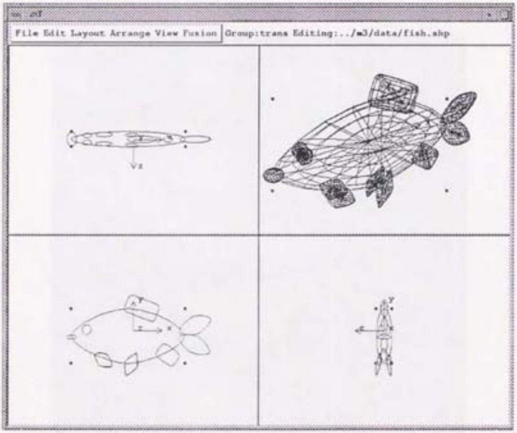


図 5.5: 超2次曲面状濃度表現モデラ

超2次曲面状濃度表現モデルは西村らの提案したメタボールと呼ばれる濃度球モデル [西村 85] を拡張したものである．一般の CSG 表現 (*Constructive Solid Geometry*) の基本立体は立方体，球，円柱，円錐のように形状が決まっており，他の基本立体の影響は受けない．これに対して濃度球モデルは濃度分布関数で定義されているため図5.6のように他の物体と融合する．

分布関数には Blinn のように指数関数を用いるものもあるが [Blinn 82]，こ

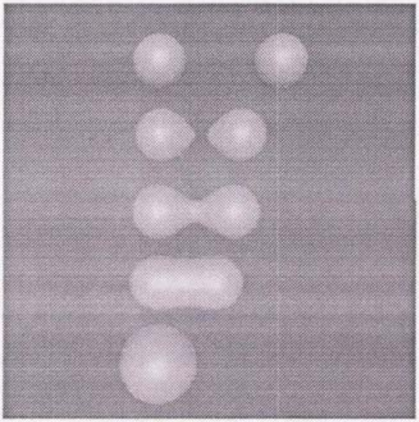


図 5.6: 濃度球の融合

こでは濃度球の中心からの距離 r から次のような区分的な 2 次関数の分布 ρ を用いる．

$$\rho(r) = \begin{cases} w(1-3r^2) & 0 \leq r < \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}w(1-r)^2 & \frac{1}{3} \leq r < 1 \\ 0 & 1 \leq r \end{cases} \tag{5.1}$$

ここで，w は重みを表す．この関数は図 5.7のような単調減少の関数で濃度球の中心からの距離が離れるにつれて濃度は減少し有効半径を越えたところでは濃度は 0 になる． 各濃度球の濃度の和が 1 になる等濃度面が濃度表現モ

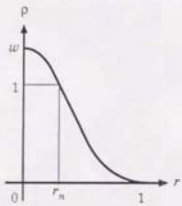


図 5.7: 濃度分布関数

デルの表面になる．有効半径を一定としたとき重みが大きいほど融合の際の他の濃度球の影響を受けにくくなる．

濃度球モデルは空間上に球を並べることにより概略形状を直観的に定義でき，球と球との継ぎ目は滑らかに丸み付けされるという特徴を持っている．このため人物，動物，植物などの自然物や造形物のように全体的に丸みのある曲面形状モデルを手軽に生成できる．しかしながら，基本形状が球であるために線状，平面状の物体や角のある箱型物体を表示するためには多数の濃度球を融合させなければならず，モデリングに手間を要すると同時に表示の計算時間も大きくなる．このため濃度球モデルの基本形状を超 2 次曲面 (*Superquadrics*) に拡張することによって少数の基本立体で線状，平面状，箱状

の物体の表現することが提案されている [Wyvill 89].

超２次曲面とは楕円体，一葉双曲面，二葉双曲面，トーラスを拡張したもので，パラメータを変えることで図 5.8のような多様な形状を一つの式で表現できる [Barr 81]． 楕円体の超２次曲面は次式の $g(x,y,z)=0$ を満たす点

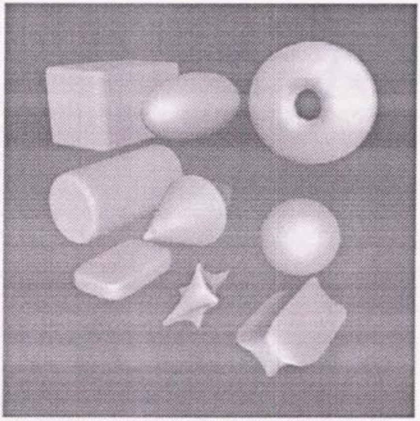


図 5.8: 超２次曲面で表現できる形状

(x,y,z) の集合である．

$$
\begin{aligned}
g(x,y,z) &= \left(\left(\frac{x}{a_x}\right)^{\frac{2}{\epsilon_2}} + \left(\frac{y}{a_y}\right)^{\frac{2}{\epsilon_2}}\right)^{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \\
&\quad + \left(\frac{z}{a_z}\right)^{\frac{2}{\epsilon_1}} - 1 \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

a_x, a_y, a_z は各軸方向の半径を表し， ϵ_1, ϵ_2 は形状を変更するパラメータである．パラメータの変更による超２次曲面断面形状の変化を図5.9に示す．

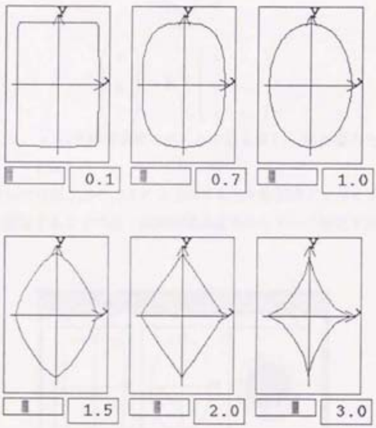


図 5.9: パラメータ変更による断面形状変化

中心から空間上の点 (x,y,z) までの距離を中心から超2次曲面表面までの距離で正規化した距離を $r(x,y,z)$ とすると，超2次曲面の濃度表現モデルでは r を次の式(5.3) で定義することで式(5.1) から濃度が得られる．

$$
\begin{aligned}
r(x,y,z) \;=\; & \left(\left(\left(\frac{x}{a_x}\right)^{\frac{2}{\epsilon_2}} + \left(\frac{y}{a_y}\right)^{\frac{2}{\epsilon_2}} \right)^{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \right. \\
& \left. + \left(\frac{z}{a_z}\right)^{\frac{2}{\epsilon_1}} \right)^{\frac{\epsilon_1}{2}} \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{R}^{-1} \begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \\ z - c_z \end{pmatrix} \qquad (5.4)
$$

であり c_x，c_y，c_z は各濃度表現モデルの中心を表し，R は姿勢を定義する回転マトリクスを表す．

本システムでは図 5.10のように 2 方向から見た断面形状を与えるパラメータと重みを設定することで超2次曲面状濃度表現モデルの設定を行なっている．

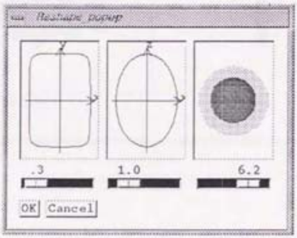


図 5.10: 形状設定

濃度表現モデルは陰関数で定義されているため一般に光線追跡法で表示されているが，実用的な速度での計算が難しく対話的なモデリング環境の妨げ

になっていた．そこで，形状生成の対話性を考え，陰関数で定義された超2次曲面状濃度表現モデルをZバッファ法，スキャンライン法などの高速な表示法が利用可能な多面体表現に変換する [寺沢 92b]．多面体表現への変換には図 5.11に示すように曲率の大きいところほど細かく分割するようにする．このとき，尖った部分でも確実に分割できるように区間法 [Suffern 91] を用いている．

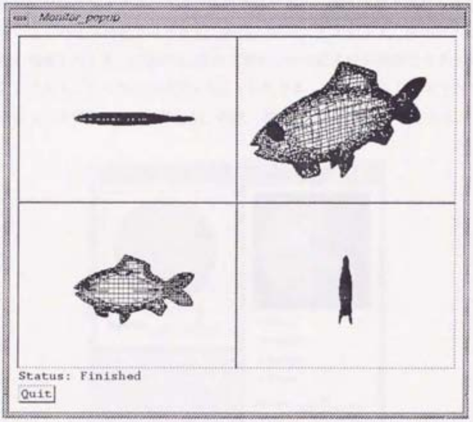


図 5.11: 適応分割による多面体化

5.4　表示モデル属性定義

表示モデルに与える属性で最も重要なものは色の情報である．色を決定する要因には散乱反射成分，環境光成分，鏡面反射成分などがある．散乱反射成分は光の当たるほうが明るく，当たらないところは暗くなる成分であり，光源の位置のみに依存し，視点には依存しない．環境光成分は光の当たる部分も当たらない部分も一様に照らし出す色の成分である．鏡面反射は光源が物体に反射して目に入るハイライトの成分であり，強さと絞り具合を指定する．これらの成分の組合せで金色，銅色，青いプラスチック，赤いゴムなどの色の情報を与える．代表的な 29 の材質については各成分の値のカタログを用意しており，この中から選択することができる．また，図5.12に示すエディタを使って各成分についての色相，明度，彩度を設定することもできる．

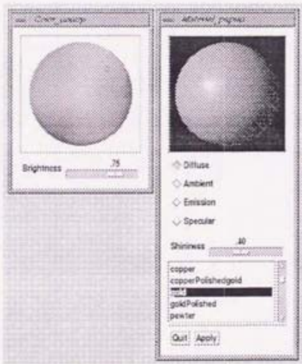


図 5.12: 材質の設定

解析モデルでは選択した材質に合わせて比重，Poisson 比，縦弾性係数な

どの物理属性を付加することもできる.

5.5 解析モデル生成

解析モデルの質点 - ばねの構造は表示モデルの形状から決まる場合と運動特徴から決まる場合がある．表示モデルの形状に従う解析をするときには，表示モデル形状の頂点を間引いて節点を設定し，その間にばねを張る．運動特徴から設定するときには図 5.13に示すような選択メニューの中から平面，直方体，正八面体，正二十面体の基本モデルを選ぶ．このエディタ上で基本モデルのばねの張り方や大きさを変更することで運動に適した解析モデルを設定する．位置や大きさに関しては，対話処理画面で表示モデルと合わせながらマウスで変更することもできる．

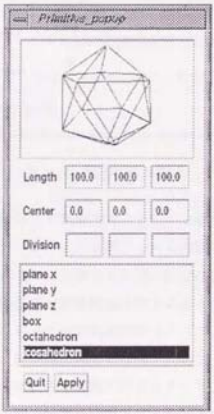


図 5.13: 基本解析モデルの選択

5.6　解析モデル属性定義

解析モデルに質量，ばね係数，減衰係数などの物理特性を与えるためには図5.14に示すエディタを用いる．このエディタではばねの振動の様子を直観的に把握できるようにグラフで表示している．

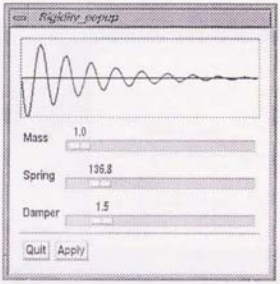


図 5.14: 物理特性の設定

解析モデルの運動の制御には制御力によるものと軌道の指定によるものがある．どちらの場合も何フレームから何フレームの間にどのような値にするかを指定しなければならない．制御力と軌道の指定は図5.15に示すようなエディタで設定する．値の指定は対話処理画面上においてマウスで設定，変更することで行なう．図5.15では対話処理画面のスプライン曲線が3次元空間上での値を示している．時間軸に関しては図5.15の右上に示すようなエディタで設定する．値の設定にはある時間だけにステップ上に値を与える，ある時間の値から別の時間の値を線形補間する，またある時間の値から別の時間の値をスプライン補間するという3つのモードがある．

アニメーションに必要なカメラや光源の設定も，値と時間を指定するという点で制御力，軌道の指定と共通しているので，同じエディタ操作で設定で

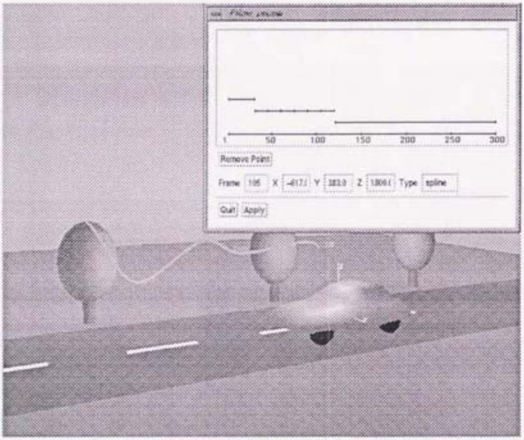

1
50
100
150
200
250
300
Remove Point
Frame
X
Y
Z
Type
spline
Quit
Apply

図 5.15: 軌道の設定

きる.

5.7　運動確認

指定されたモデルは動力学解析され，図 5.16に示す画面上で実時間で結果を確認できる．このモジュールでは実時間で計算して確認するだけでなく，一旦メモリ上に画像を展開することで高速に動きを確認したり，任意のフレームの画像を確認することもできる．また，表示モジュールではファイル出力も管理しており，実行した結果の各フレーム毎の表示モデル，解析モデル，画像をディスク上のファイルに書き出すことができる．

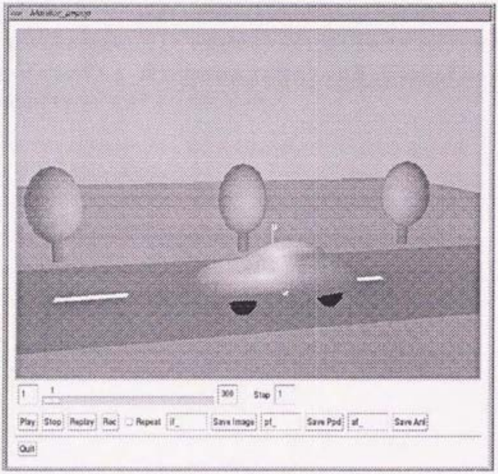


図 5.16: 運動確認画面

5.8　第５章のまとめ

本章では本論文で提案した手法に基づいて試作した動力学に基づくアニメーション作成支援システムについて述べた.

システムは，表示モデル，解析モデル，運動特徴モデルを入力するために，表示モデルの生成モジュール，表示モデルの属性定義モジュール，解析モデルの生成モジュール，解析モデルの属性定義モジュール，運動特徴の定義モジュール，シミュレーションモジュール，表示モジュールの主要な７つのモジュールから成り，マウスによる操作で対話的に生成，変更，消去を行なえる.

表示モデルの基本立体として濃度球モデルを拡張した超２次曲面状濃度表現モデルを提案した．超２次曲面状濃度表現モデルは滑らかな接続を持った曲面立体を容易に生成するのに適している.

第6章

結論と展望

6.1 結論

本論文ではコンピュータアニメーションにおける運動シミュレーションとアニメーション特有の運動を実現するために，動力学に基づく計算機内部表現モデルを用いることで運動指定の負担を軽減する手法を提案し，以下に述べるような結論を得た.

(1) 質点 - ばね系の解析モデル

現実に起こる運動の忠実な再現と古典的アニメーション手法の実現を目的とした物体のモデルとして質点 - ばね系の解析モデルを導入し，その運動方程式を導出し，解法を示した.

質点 - ばね系の解析モデルは従来のコンピュータアニメーションシステムで用いられていた位置，姿勢などの幾何学的情報しか持たないモデルと異なり，質量，硬さなどの力学的情報を持つ．質点 - ばね系モデルの動きは力学的情報を使い，動力学に基づいて決められる．このため，ユーザは直観的な少数の力学的パラメータで，従来のコンピュータアニメーションシステムでは困難だった物理現象に即した動きを容易に生成することができる.

また，質点 - ばね系モデルはばねという直観的な実体で力の関係を把握できるため，モデルを構成や物理パラメータを調節することで古典的アニメー

ションで用いられているような特徴的な動きを表現することができる．

回転，並進，変形を伴う質点 - ばね系モデルの運動方程式は Lagrange の運動方程式をもとに導出している． Lagrange の運動方程式はエネルギの関係式に基づいているので，系すべてのエネルギを求めることで質点，剛体，柔軟物体の単体，多体を統一的に扱うことができる．このため，一つのシーンに多様な対象の現れるアニメーションには有用である．

運動方程式の解法には収束計算で連立微分方程式を解く Newmark の β 法を用いている． Newmark の β 法は逆行列を求めずに計算でき，アニメーションでは前フレームでの状態との差が小さいため収束が速いので微分方程式の計算は高速に行なうことができる．

(2) 線形写像による変形

動力学解析のための質点 - ばね系の解析モデルと表示，幾何学的処理のための表示モデルとを分離した．表示モデルの形状とは独立に解析モデルの構造を決定できるので，部分的な変形が必要な部分には細かくばねを張り，全体的な変形が必要な部分には粗くばねを張るなどして変形に局所性を持たせたり，球状のばねや柱状のばねを定義することで変形の異方性を表現することができる．このため，特徴的な運動に合わせたモデル生成が可能になる．

解析モデルの解析によって計算された物体の変形の表示モデルへの写像法として線形写像を提案した．線形写像による変形は局所性があるので解析モデルの変形が表示モデルに忠実に反映される．線形写像による変形は表示モデルの各頂点に対してそれを囲む 3 節点の影響だけを計算すればよいので自由形状変形のように全ての頂点の影響を計算する写像法と比べて計算が高速になる．また，線形写像では表示モデルと解析モデルの間に体積の比例関係が成り立つため体積保存変形の実現に有効である．

(3) 幾何学的制約の加わる問題

他の物体からの影響を考慮したり，目に見える幾何量で物体の運動を制御するために幾何学的制約の加わる問題を扱った．運動制御の必要性から幾何量と力の巨視的な関係を明確にすることを基本的な方針として，アニメーションで比較的よく使われる幾何学的制約の加わる運動として，軌道に沿った運動，体積保存変形，衝突反応を扱い，それぞれの定式化と解法を示した．

物体の一部を与えられた軌道に沿って動かすためには，固定する節点に制御力を加える．本論文では外力を与えて位置を求めるための数値積分としてNewmark の β 法を使っていることを利用して，与えられた位置から制御力を求めている．この方法では数値積分による誤差を補正することになるので安定に収束させる制御力が得られる．また，最大速度に制約を持たせたり，加えるべき制御力を最小にするような物理的に意味のある軌道を生成するための二点境界値問題としての定式化について述べ，勾配復元法による解法を示した．

体積保存のためには一旦制約なしに計算した結果をもとにして体積保存のための評価関数を最小化する方法を用いた．評価関数としては，体積保存項，制約なしの結果とのずれの方向の項，ずれの大きさ項の3つを用いた．最小化の手法として共役方向法を用いている．解析モデルと表示モデルの変位は線形な関係で結ばれているため解析モデルの凸包の体積と表示モデルの体積は比例する．このため，解析モデルについて体積を一定に保てば表示モデルの体積も一定に保たれる．一般に解析モデルの節点数は表示モデルの頂点数に比べて少ないので，高速に体積を保存した変形の計算ができる．

衝突時に相手の物体に入り込まないようにするための衝突力と接触時間を求めるのに Hertz の接触理論を用いる方法を提案した．Hertz の接触理論は弾性論に基づいており，質量，縦弾性係数，Poisson 比，衝突速度，衝突面の曲率半径などのパラメータから定量的に力を求められる．このため，ユーザは物体の材質を仮定すれば，材質に応じた適当な反応を得ることができる．

(4) 運動特徴モデル

「投げる」「跳ねる」「転がる」「衝突する」などの運動のまとまりをモデル化する運動特徴モデルを導入することで運動全体の管理を行なった．運動特徴の例として，古典的アニメーションで用いられている伸縮，予備動作，誇張，副次動作をとりあげ，質点-ばね系モデルで実現する手法を示した．運動特徴モデルは幾何学的情報と力学的情報を独立に管理するオブジェクト指向のモデルで「衝突する」などの運動特徴はメソッドとして定義される．従来，運動記述は表示モデルと切り離して考えることは出来なかったが，幾何学的情報と力学的情報を独立に管理することで表示モデルに依存せずに運動をデータベースとして残しておくことができる．運動特徴の各クラス間には継承関係があるので，新たな運動を追加定義することも容易に行なえる．

また，従来は表示モデルを決めてからでないと運動を定義することができなかったが，運動特徴モデルでは予め運動を定義しておき，後から表示モデルを設定するという手順をとることも可能である．

ある運動状態から他の運動状態への状態遷移のタイミングを記述する機構としてイベント管理機構を用い，図形シンボルによる表記法を定義した．イベントとしては衝突イベントなどの幾何学的情報，収束イベントなどの力学的情報，時間イベントなどの時間情報を用いるものを考えた．動力学に基づいて運動し，変形する物体はいつ他の物体と衝突するかを予測することが困難なので，従来のように時間による指定だけでは不十分であり，このような幾何学的条件，力学的条件を加えることでより柔軟な運動記述が可能になる．

(5) アニメーションシステムの実現

動力学に基づく対話型コンピュータアニメーションシステムを Silicon Graphics 社のグラフィックワークステーション IRIS 4D 30/TG の IRIX OS (Unix System V) 上で実現した．プログラムは UNIX 上の C 言語で記述し，グラフィクス表示ライブラリには GL を，ウィンドウライブラリには X Window System (Motif Widget) を用いている．このシステムはマウスによる操作で物体

の生成，消去や幾何属性，物理属性の変更ができ，運動を実時間で確認することができる．主要なモジュールとしては，表示モデルの生成モジュール，表示モデルの属性定義モジュール，解析モデルの生成モジュール，解析モデルの属性定義モジュール，運動特徴の定義モジュール，シミュレーションモジュール，表示モジュールの7つがあり，これらのモジュールを用いて表示モデル，解析モデル，運動特徴モデルを生成し，運動を確認できる．

表示モデルの基本立体としては，球，楕円体，立方体，円柱，円錐などの一般形である超2次曲面を基本とし，複数の物体を近付けると滑らかに融合する超2次曲面状の濃度表現モデルを用いた．超2次曲面状濃度表現モデルは陰関数なので表示のためには多面体に変換する必要があるが，多面体化では一般に面の欠落が問題になる．ここでは区間法を応用して面の欠落のない安定な多面体化を実現した．

6.2 展望

本論文では物理法則に基づくモデルとして質点 - ばね系の解析モデルを提案した．質点 - ばね系の解析モデルは基本的に弾性体のモデルであり，自ずとその適用範囲は限られる．コンピュータグラフィクスによる映像制作は極めて応用範囲が広く，森羅万象を対象としているとも言える．このため，塑性変形や破壊を含めてより一般的なモデルと，より広範な物理法則に関する考察が必要となる．この中にはシミュレーションの基礎技術の発展を待たなければならない困難な問題も多数存在するが，コンピュータグラフィクスは視覚的効果だけが重要であるという観点から適当な近似モデル化によって解決できる問題も多数あると考えられる．このような問題をアドホックに解決するのではなく体系的にまとめていくことが今後の大きな課題となる．

近年，計算機内に仮想的な世界を構築することで製造，実験，手術などを計算機内で模擬的に行なうための仮想現実感 (*Virtual Reality*) に関する研究が活発になっている．この技術はシミュレーションだけではなく今後の高度情報通信の基礎となる重要な要素となることが期待されている．しかし，現在では主に入出力装置に関する研究が中心であり，情報や現象のモデル化についてはまだ多くの課題が残されている．特に視聴覚以外の五感に関する扱いはアドホックなものが多く，まとまった定式化が待たれている．本論文で述べた手法は視覚情報のモデルである幾何モデルと触覚情報のモデルである力学モデルとを統合したモデルへの発展性を持つと考えられる．

謝辞

本研究を進める上で以下の多くの方々のご指導，ご協力をいただきました．本研究は以下の方々のご協力なしには完成することはできませんでした．ここに厚く感謝の意を表します．

東京大学工学部木村文彦教授には指導教官として本論文，及び関連する論文に対する適切なご助言をいただきました．通常の研究活動に加え本年度は学年主任として，また新規プロジェクトの中心的役割としてご多忙の中，時間を割いてご相談いただいたことに心から感謝します．

東京大学教養学部，鈴木賢次郎教授，東京大学工学部，新井民夫教授，土肥健純教授，高増潔助教授には本論文の査読をして頂き，多くのご意見とご助言をいただきました．

東京大学教養学部鈴木宏正助教授には柔軟物体に関する勉強会を開いていただいたほか関連する論文や発表に関する適切なご助言をいただきました．氏のご意見には常に暖かい励ましの言葉と今後の方針に対する示唆があり大変励みになりました．

東京大学教養学部山口泰助教授には本論文執筆に際し数々の貴重なご意見をいただいた他，グループ会議のリーダとして幾何モデルに関する様々な話題を教えていただきました．また，よき先輩として公私にわたり貴重なご助言をいただきました．

茨城大学工学部乾正知助教授には同期として常に忌憚なきご意見をいただきとても感謝しています．専門分野は異なりますが研究の方法論に関しては氏から多くを学びました．

東京電機大学田中一郎助教授，（株）オープンシステム研究所安藤英俊博士

には研究方針についての適切なご助言をいただくと同時に研究室の計算機管理に関していろいろとお骨折りいただきました．また，安藤英俊博士には本論文執筆に際し数々の貴重なご意見をいただきました．

日本学術振興会特別研究員吉川浩一博士，東京大学工学部高橋究氏，同学部吉崎浩司氏とは勉強会を開くことで動力学に関する基礎的な理解を深めるとともに，同じ知識を共有している者の立場から様々な助言を得ることができました．また，吉川浩一博士には本論文執筆に際し数々の貴重なご意見をいただきました．

東京大学工学部吉田良正助手，同学部碇山みち子技官には研究設備の購入や維持を始めとして快適な研究室生活を送る上での様々な面で補助してしていただきました．

その他，東京大学工学部精密機械工学科木村研究室の皆さん及びOBの皆さんには公私にわたりお世話になり楽しい研究生活を送ることができました．

(株) ナブラの小高金次社長始め社員の皆さんには実務に携わる立場から様々なご助言，ご示唆をいただきました．また拙システムを使用，評価していただいたばかりでなく最新のコンピュータグラフィクスに関する情報を提供していただきました．木村研究室の中ではやや専門分野の異なる私にとって同社での議論は何よりも刺激になりました．

会社を辞めて博士課程の学生として再出発するときに自分の道を自由に選ばせてくれた両親に感謝します．

最後に精神的にも経済的にも不安をかけながらもいつも笑顔で支援してくれた妻，公仁子に感謝します．

参考文献

[Armstrong 79] W.W. Armstrong, *Recursive Solution to the Equations of Motion of an N-link Manipulator*, Proceedings of Fifth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, 2, ASME, pp.1343–1346, 1979.

[Armstrong 85] W.W. Armstrong, and M. Green, *The Dynamics of Articulated Rigid Bodies For Purposes of Animation*, Proceedings of Graphics Interface 85, pp.407–415, 1985.

[Badler 80] N.I. Badler, O' Rourke and B. Kaufman, *Special Problems in Human Movement Simulation*, Computer Graphics, Vol.14, No.3, pp.189–197, 1980.

[Baraff 92] D.Baraff, *Rigid Body Simulation, Part II. Non-penetration Constraints*, SIGGRAPH'92 Course Notes 19, pp.H30–H49, 1992.

[Barr 81] A.H. Barr, *Superquadrics and Angle-Preserving Transformation*, IEEE CG & A, Vol.1, No.1, pp.11–23, 1981.

[Barzel 88] R. Barzel and A. Barr, *A Modeling System Based on Dynamic Constraints*, Computer Graphics, Vol.22, No.4, pp.179–188, 1988.

[Barzel 92] R. Barzel, Physically-Based Modeling for Computer Graphics: A Structured Approach, Academic Press Inc., 1992.

[Blinn 82] F.F.Blinn, *A Generalization of Algebraic Surface Drawing*, ACM Transaction on Graphics, Vol.1, No.3, pp.235–256, 1982.

[Brotman 88] L.S.Brotman and A.N.Netravali, *Motion Interpolation by Optimal Control*, Computer Graphics, Vol.22, No.4, pp.309–315, 1988.

[Calvert 80] T.W. Calvert, J. Chapman and A. Patla, *The Integration of Subjective and Objective Data in the Animation of Human Movement*, Computer Graphics, Vol.14, No.3, pp.198–203, 1980.

[Calvert 82] T.W. Calvert, J. Chapman and A. Patla, *Aspects of the Kinematic Simulation of Human Movement*, IEEE CG&A, Vol.2, No.9, pp.41–52, 1982.

[Carignan 92] M. Carignan, Y. Yang, N.M. Thalmann and D. Thalmann, *Dressing Animated Synthetic Actors with Complex Deformable Clothes*, Computer Graphics, Vol.26, No.2, pp.99–104, 1992.

[Chadwick 89] J.E. Chadwick, D.R. Haumann and R.E. Parent, *Layered Construction for Deformable Animated Characters*, Computer Graphics, Vol.23, No.3, pp.243–252, 1989.

[Featherstone 83] R.Featherstone, *The Calculation of Robot Dynamics Using Articulated-Body Inertias*, The International Journal of Robotics Research, Vol.2, No.1, pp.13–30, 1983.

[Frank 81] T.Frank and J.Ollie, *The Illusion of Life*, Abbeville Press, 1981.

[Girard 85] M.Girard and A.A.Machiejewski, *Computational Modeling for the Computer Animation of Legged Figures*, Computer Graphics, Vol.19, No.3, pp.263–270, 1985.

[Goldsmith 60] W. Goldsmith, *Impact*, Edward Arnold Ltd., pp.82–144, 1960.

[Hahn 88] J.K. Hahn, *Realistic Animation of Rigid Bodies*, Computer Graphics, Vol.22, No.4, pp.299–308, 1988.

[Hollerbach 80] J.M. Hollerbach, *A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation*, IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, SMC-10, 11, pp.730–736, 1980.

[Isaacs 87] P.M. Isaacs and M.F. Cohen, *Controlling Dynamic Simulation with Kinematic Constraints, Behavior Functions and Inverse Dynamics*, Computer Graphics, Vol.21, No.4, pp.215–224, 1987.

[Kahn 78] K.M. Kahn and C. Hewitt, *Dynamic Graphics Using Quasi Parallelism*, Computer Graphics, Vol.12, No.3, pp.357–362, 1978.

[Kalra 92] D. Kalra and A. Barr, *Modeling with Time and Events in Computer Animation*, Proceedings of EUROGRAPHICS'92, Vol.11, No.3, pp.C-45–C-58, 1992.

[Korein 82] J.U. Korein and N.I. Badler, *Techniques for Generation the Goal-Directed Motion of Articulated Structures*, IEEE CG&A, Vol.2, No.9, pp.71–81, 1982.

[Luby 86] S.C. Luby and J.R. Dixon, *Designing with Features: Creating and Using a Features Data Base for Evaluation of Manufacturability of Castings*, ASME Computers in Engineering, pp.285–292, 1986.

[Luh 80] J.Y.S. Luh, M.W. Walker and R.P.C. Paul, *On-line Computational Scheme for Mechanical Manipulators*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, Control, 102, pp.69–76, 1980.

[Lasseter 87] J. Lasseter, *Principles of Traditional Animation Applied to 3D Computer Animation*, Computer Graphics, Vol.21, No.4, pp.35–44, 1987.

[Mäntylä 88] M. Mäntylä, An Introduction to Solid Modeling, Computer Science Press, pp.116–119, 1988.

[Miele 80] A. Miele, *Gradient Algorithms for the Optimization of Dynamic Systems*, Control and Dynamic Systems, Academic Press, Vol.16, pp.1–52, 1980.

[Moore 88] M. Moore and J. Wilhelms, *Collision Detection and Response for Computer Animation*, Computer Graphics, Vol.22, No.4, pp.289–298, 1988.

[Platt 88] J.C. Platt and A. Barr, *Constraint Methods for Flexible Models*, Computer Graphics, Vol.22, No.4, pp.279–288, 1988.

[Press 88] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, pp.923–302, 1988.

[Reeves 83] W.T. Reeves, *Particle Systems - A Technique for Modeling a Class of Fuzzy Objects*, Computer Graphics, Vol.17, No.3, pp.359–376, 1983.

[Reynolds 82] C.W. Reynolds, *Computer Animation with Scripts and Actors*, Computer Graphics, Vol.16, No.3, pp.289–296.

[Sederberg 86] T.W. Sederberg, *Free-Form Deformation of Solid Geometric Models*, Computer Graphics, Vol.20, No.4, pp.151–160, 1986.

[Suffern 91] K.G. Suffern, *Interval Methods in Computer Graphics*, Computers & Graphics, Vol.15, No.3, pp.341–347, 1991.

[Terasawa 93] M. Terasawa and F. Kimura, *Collision Response for Deformable Models Based on the Hertz's Contact Theory*, Computer Graphics and Applications, World Scientific, pp.45–60, 1993.

[Terzopoulos 87] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr and K. Fleischer, *Elastically Deformable Models*, Computer Graphics, Vol.21, No.4, pp.205–214, 1987.

[Terzopoulos 88] D. Terzopoulos and K. Fleischer, *Modeling Inelastic Deformation: Viscoelasticity, Plasticity, Fracture*, Computer Graphics, Vol.20, No.4, pp.269–278, 1988.

[Terzopoulos 91] D. Terzopoulos and D. Metaxas, *Dynamic 3D Models with Local and Global Deformation: Deformable Superquadrics*, Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.13, No.7, pp.703–714, 1991.

[Weil 86] J. Weil, *The Synthesis of Cloth Objects*, Computer Graphics, Vol.20, No.4, pp.49–54, 1986.

[Wilhelms 85] J. Wilhelms and B.A. Barsky, *Using Dynamic Analysis to Animate Articulated Bodies Such As Humans and Robots*, Proceedings of Graphics Interface 85, pp.97–104, 1985.

[Wilhelms 87] J. Wilhelms, *Toward Automatic Motion Control*, IEEE CG&A, Vol.7, No.4, pp.11–22, 1987.

[Witkin 87] A. Witkin K. Fleischer and A. Barr, *Energy Constraints on Parameterized Models*, Computer Graphics, Vol.21, No.4, pp.225–232, 1987.

[Witkin 88] A. Witkin and M. Kass, *Spacetime Constraints*, Computer Graphics, Vol.22, No.4, pp.159–168, 1988.

[Witkin 90] A. Witkin and W. Welch, *Fast Animation and Control of Nonrigid Structures*, Computer Graphics, Vol.24, No.4, pp.243–252, 1990.

[Witkin 92] A. Witkin, *Differential Equation Basics*, SIGGRAPH'92 Course Notes 19, pp.B1–B5, 1992.

[Wyvill 89] B. Wyvill and G. Wyvill, *Field Functions for Implicit Surfaces*, The Visual Computer, 5, pp.75–82, 1989.

[Zienkiewicz 91] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, The Finite Element Method, Vol.2, Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-linearity, McGraw-Hill, pp.369–371, 1991.

[加藤 88] 加藤寛一郎, 工学的最適制御, 東京大学出版会, pp.193–221, 1988.

[今野 78] 今野浩, 山下浩, 非線形計画法, 日科技連, pp.135–138, 1978.

[機工 86] 機械工学会編, 機械工学便覧 A3 力学, 機械力学, 丸善, pp.A3-36–A3-38, 1986.

[寺沢 89] 寺沢幹雄, 柴本猛, 物理法則ベースモデリング, PIXEL, No.77, pp.59–62, 1989.

[寺沢 92a] 寺沢幹雄, 木村文彦, 動力学に基づいたアニメーションのための体積保存変形手法, グラフィクスと CAD シンポジウム, pp.177–184, 1992.

[寺沢 92b] 寺沢幹雄, 木村文彦, 超2次曲面を用いた濃度表現モデルとその多面体化手法, グラフィクスと CAD シンポジウム, pp.115–124, 1992.

[戸川 81] 戸川隼人, 有限要素法概論, 培風館, pp.246–251, 1981.

[内木 86] 内木哲也, 丸一威雄, 所真理雄, 行動シミュレーションに基づいたアニメーションシステム Paradise, pp.24–38, 1986.

[西村 85] 西村, 平井, 河合, 河田, 白川, 大村, 分布関数による物体モデリングと画像生成の一手法, 電子通信学会論文誌, Vol.J68-D, No.4, pp.718–725, 1985.

[ブラディ 85] ブラディ他編, ロボットモーション II, HBJ 出版局, pp.12–18, 1985.

[理科年表 83] 東京天文台編, 理科年表, 丸善, p.440, 1983.

発表論文

投稿論文

1. M. Terasawa and F. Kimura, Collision Response for Deformable Models Based on the Hertz's Contact Theory, Computer Graphics and Applications, World Scientific, pp.45–60, 1993.

2. 寺沢幹雄, 木村文彦, 動力学に基づくコンピュータアニメーションのための質点・ばね系モデル, 情報処理学会論文誌 (投稿中)

学会会議録

1. 鈴木宏正, 木村文彦, 寺沢幹雄, 原田毅士, 安藤英俊, プロダクトモデリングのための機械形状モデルの生成と処理, グラフィクスと CAD シンポジウム, pp.167–174, 1986.

2. 寺沢幹雄, 柴木猛, 変形による衝突回避のアニメーション手法, 第 4 回 NICOGRAPH 論文コンテスト, pp.130–138, 1988.

3. 寺沢幹雄, 木村文彦, 超 2 次曲面を用いた濃度表現モデルとその多面体化手法, グラフィクスと CAD シンポジウム, pp.115–124, 1992.

4. 寺沢幹雄, 木村文彦, 動力学に基づいたアニメーションのための体積保存変形手法, グラフィクスと CAD シンポジウム, pp.177–184, 1992.

5. 寺沢幹雄, 木村文彦, 動力学的アニメーションのための運動特徴モデリング, グラフィクスと CAD シンポジウム, pp.181–187, 1993.

口頭発表

1. 寺沢幹雄, 木村文彦, 佐田登志夫, 曲面立体の集合演算における干渉の生成法, 昭和 59 年度精機学会秋期大会, pp.275–276, 1984.

2. 寺沢幹雄, 木村文彦, 佐田登志夫, 形状モデリングの対話処理の分散化, 昭和 60 年度精機学会秋期大会, pp.307–308, 1985.

3. 寺沢幹雄, 木村文彦, プロダクトモデリングのためのユーザ・インタフェース, 昭和 61 年度精機学会秋期大会, pp.139–140, 1986.

4. 寺沢幹雄, 原田毅士, 木村文彦, 佐田登志夫, 機械部品形状モデリングのための対話処理用モデラの試作, 第 4 回設計自動化講演会, pp.75–77, 1986.

5. 寺沢幹雄, 柴木猛, 複雑なアニメーションの簡易モデル化, 情報処理学会第 36 回全国大会, pp.2165–2166, 1988.

6. 寺沢幹雄, 木村文彦, キーフレームアニメーションの二点境界値問題としての定式化, 第 50 回グラフィクスと CAD 研究会, pp.75–82, 1991.

付録

付録 A: 回転角の微分

ここで用いる回転行列は各軸回りの回転の合成であるとする．すなわち，

$$\boldsymbol{R}(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = \boldsymbol{R}_x(\theta_x)\boldsymbol{R}_y(\theta_y)\boldsymbol{R}_z(\theta_z). \tag{7.1}$$

このときに $\dot{\mathrm{R}}\boldsymbol{p}_i$ を考える．一般に角速度 ω はどんな座標の時間微分でもないが， Euler の定理よりある瞬間にはただ一つの回転軸が定まる．この軸回りの微小回転についての近似式を用いて微分を求める．

原点回りの Taylor 展開は x 軸、y 軸、z 軸回りの微小変位をそれぞれ $\delta\theta_x$, $\delta\theta_y$, $\delta\theta_z$ とすると

$$\mathbf{R}(\delta\theta_x, \delta\theta_y, \delta\theta_z) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (\delta\theta_x \quad \delta\theta_y \quad \delta\theta_z) \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_x} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_y} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_z} \end{pmatrix}_{(0,0,0)} . \tag{7.2}$$

ここで

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_x}\right]_{(0,0,0)} &= \left[\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \theta_x}\mathbf{R}_y\mathbf{R}_z\right]_{(0,0,0)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_x & -\cos\theta_x \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \end{pmatrix}_{\theta_x=0} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix}_{\theta_y=0} \end{aligned}$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\theta_z=0}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_y}\right]_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_z}\right]_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

式(7.2)–式(7.5) より

$$\mathbf{R}(\delta\theta_x, \delta\theta_y, \delta\theta_z) \approx \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta_z & \delta\theta_y \\ \delta\theta_z & 1 & -\delta\theta_x \\ -\delta\theta_y & \delta\theta_x & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

したがって原点回りの微小回転の時間微分は

$$\dot{\mathbf{R}}(\delta\theta_x, \delta\theta_y, \delta\theta_z) \approx \begin{pmatrix} 0 & -\delta\dot{\theta}_z & \delta\dot{\theta}_y \\ \delta\dot{\theta}_z & 0 & -\delta\dot{\theta}_x \\ -\delta\dot{\theta}_y & \delta\dot{\theta}_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

一般には次の式になる.

$$\dot{\mathbf{R}}(\theta_x + \delta\theta_x, \theta_y + \delta\theta_y, \theta_z + \delta\theta_z)$$
$$= \mathbf{R}(\theta_x, \theta_y, \theta_z) \begin{pmatrix} 0 & -\delta\dot{\theta}_z & \delta\dot{\theta}_y \\ \delta\dot{\theta}_z & 0 & -\delta\dot{\theta}_x \\ -\delta\dot{\theta}_y & \delta\dot{\theta}_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.8}$$

したがって $\dot{\mathrm{R}}\boldsymbol{p}_i$ は次のように変形できる.

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{R}}\boldsymbol{p}_i &= \mathrm{R}\begin{pmatrix} 0 & -\delta\dot{\theta}_z & \delta\dot{\theta}_y \\ \delta\dot{\theta}_z & 0 & -\delta\dot{\theta}_x \\ -\delta\dot{\theta}_y & \delta\dot{\theta}_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ p_{iz} \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{R}\begin{pmatrix} 0 & p_{iz} & -p_{iy} \\ -p_{iz} & 0 & p_{ix} \\ p_{iy} & -p_{ix} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\dot{\theta}_x \\ \delta\dot{\theta}_y \\ \delta\dot{\theta}_z \end{pmatrix} \\ &= -\mathrm{R}\boldsymbol{p}_i \times \dot{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

付録 B: Hertz の接触理論

ここでは文献 [Goldsmith 60] に基づいて Hertz の接触理論の概略を述べる.

Hertz は接触現象を説明するための単純なモデルを立てた. このモデル化は本質的に弾性現象にのみ成り立ち静的なものであるが, 多くの実験により接触現象に広く適用できることが示されている [機工 86].

接触点の近傍では衝突物体の表面は放物面で近似される. 図 7.1のように z 軸は接平面に垂直にとる. x 軸と y 軸を標準形になるように選べば, 2 面の垂直距離は

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2. \tag{7.10}$$

ここで A, B は正の定数であり, z_i は物体 i の表面上の点の z 座標である. w_1, w_2 を 2 物体の z 方向の変位とすると

$$w_1 + w_2 = \alpha - z_1 - z_2 = \alpha - Ax^2 - By^2. \tag{7.11}$$

ここで α は物体の最大相対圧縮値である. 一方, 弾性論によると 2 物体の変位と圧力の関係は, η を圧力, ξ を表面上の点の元の位置から圧力がかかった後の原点までの距離とすると

$$w_1 + w_2 = \left(\frac{1-\sigma_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\sigma_2^2}{\pi E_2}\right)\iint_\Omega \frac{\eta dx dy}{\xi}. \tag{7.12}$$

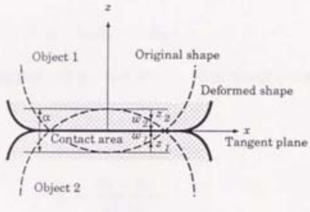


図 7.1: Hertz のモデル

ここで σ は Poisson 比，E は縦弾性係数，Ω は接触領域を表す．接触力 F は抗力の総和となり次のように定義される．

$$F = \iint_{\Omega} \eta_z dxdy. \tag{7.13}$$

ここで η_z は接触領域における圧力の垂直成分である．圧力分布が接触点周辺に楕円体状に分布していると仮定すると接触力は式(7.11) と式(7.12) から次のように得られる．

$$F = n_z \alpha^{\frac{3}{2}}. \tag{7.14}$$

ただし，

$$n_z = \frac{4}{3}\frac{q_k\left(\frac{A}{B}\right)}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}}, \tag{7.15}$$

$$\delta_1 = \frac{1-\sigma_1^2}{\pi E_1}, \quad \delta_2 = \frac{1-\sigma_2^2}{\pi E_2} \tag{7.16}$$

ここで q_k は表3.3で示すような A/B の関数である．式(7.14) の導出は Hertz の接触理論と呼ばれている．

一方，動的挙動の解析からも接触力が得られる．重心を結ぶ線上で衝突が生じるとすると式(7.11) は次のようになる．

$$\ddot{w}_1 + \ddot{w}_2 = \ddot{\alpha}. \tag{7.17}$$

Newton の第二法則から

$$F = -M_1\ddot{w}_1 = -M_2\ddot{w}_2. \tag{7.18}$$

ここで M_i は物体 i の総質量である．したがって，衝突力は式 (7.19) のようになる．

$$F = -\frac{1}{n_1}\ddot{\alpha}. \tag{7.19}$$

ただし，

$$n_1 = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}. \tag{7.20}$$

式(7.14) と式(7.19) から次の運動方程式が求まる．

$$\ddot{\alpha} = -n_1 n_z \alpha^{\frac{3}{2}}. \tag{7.21}$$

$d\alpha$ を両辺にかけて速度を求めると

$$\frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 - v_0^2) = -\frac{2}{5}n_1 n_z \alpha^{\frac{5}{2}}. \tag{7.22}$$

ここで v_0 は相対初速度を表す．式(7.22) を t について解き楕円関数近似を使うと α は次のように求まる．

$$\alpha = \alpha_{zm} \sin \frac{1.068 v_0}{\alpha_{zm}} t. \tag{7.23}$$

ただし，

$$\alpha_{zm} = \left(\frac{5}{4}\frac{v_0^2}{n_1 n_z}\right)^{\frac{2}{5}}. \tag{7.24}$$

式(7.23) を式(7.19) に代入すると衝突力 F と接触時間 T_{max} は式(7.25) で求められる．

$$F = F_{max} \sin \frac{\pi}{T_{max}} t \qquad 0 \leq t \leq T_{max}. \tag{7.25}$$

ただし，

$$F_{max} = \frac{1.140 v_0^2}{n_1 \alpha_{zm}}, \tag{7.26}$$

$$T_{max} = \frac{\pi \alpha_{zm}}{1.068 v_0}. \tag{7.27}$$

この結果は時間 - 力曲線が正弦曲線であることを示している．式(7.25)から力積を計算すると

$$\int_0^{T_{max}} F\,dt = \frac{2}{\pi}F_{max}T_{max} = 2.135v_0\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}. \tag{7.28}$$

となり，これは力積運動量則を満たすことも確認できる．

柔らかい物体については衝突力 F_{max} が小さく接触時間 T_{max} が長くなるという現象は，E が小さい場合式(7.15)の n_z が小さく式(7.24)の α_{zm} が大きくなることから式(7.26)と式(7.27)により説明できる．

付録 C: 停留条件

関数 $\boldsymbol{q}(t)$ の近傍にある任意の許容関数 $\hat{\boldsymbol{q}}(t)$ を微小パラメータ ε を用いて，

$$\hat{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{q}(t) + \varepsilon\boldsymbol{\eta}(t). \tag{7.29}$$

と表す．ただし，$\boldsymbol{\eta}(t)$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(t_0) &= 0, \quad (7.30)\\ \boldsymbol{\eta}(t_f) &= 0. \quad (7.31) \end{aligned}$$

を満たす連続，微分可能な任意の関数とする．このとき $\boldsymbol{q}$ を変数とする評価関数 J の変位は，

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(\hat{\boldsymbol{q}}) - J(\boldsymbol{q})\\ &= J(\boldsymbol{q}(t)+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(t)) - J(\boldsymbol{q}(t))\\ &= \delta J + \delta^2 J + \cdots. \end{aligned} \tag{7.32}$$

ただし，

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}\varepsilon\boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\varepsilon\dot{\boldsymbol{\eta}}\right)dt. \quad (7.33)\\ &\vdots \end{aligned}$$

ε が十分小さければ J の停留条件は第一変分 δJ だけで決まる．第一変分が 0 になる条件は，

$$\begin{aligned}\delta J &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\varepsilon\boldsymbol{\eta}\right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)\right\}\varepsilon\boldsymbol{\eta}dt \\ &= 0. \end{aligned} \tag{7.34}$$

となるが，境界条件 (式 (7.30)–(7.31)) より第一項が消え，$\varepsilon\boldsymbol{\eta}(t)$ は任意なので

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) = \boldsymbol{0}. \tag{7.35}$$

となる．これは Euler の方程式と呼ばれる．

付録 D: Lagrange 未定乗数法

付帯条件付きの停留問題でよく用いられる解法は Lagrange 未定乗数法である．停留しようとする関数に，付帯条件の未定乗数倍を加えたものを拡張関数とする．微分方程式関数付帯条件と関数付帯条件があるので未定乗数ベクトルは 2 つ必要で，それぞれを $\boldsymbol{\lambda}(t)$，$\boldsymbol{\rho}(t)$ とおくと，拡張関数 $L^*(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u},t)$ は

$$\begin{aligned} L^*(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u},t) &= L(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)(\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u},t)) \\ &\quad +\boldsymbol{\rho}^T(t)\boldsymbol{s}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u},t). \end{aligned} \tag{7.36}$$

未定乗数も $\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{u}$ 同様，独立変数と考えると Euler 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\rho}^T\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{\lambda}} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{7.37}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{u}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\boldsymbol{u}}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} - \boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\rho}^T\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{u}} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{7.38}$$

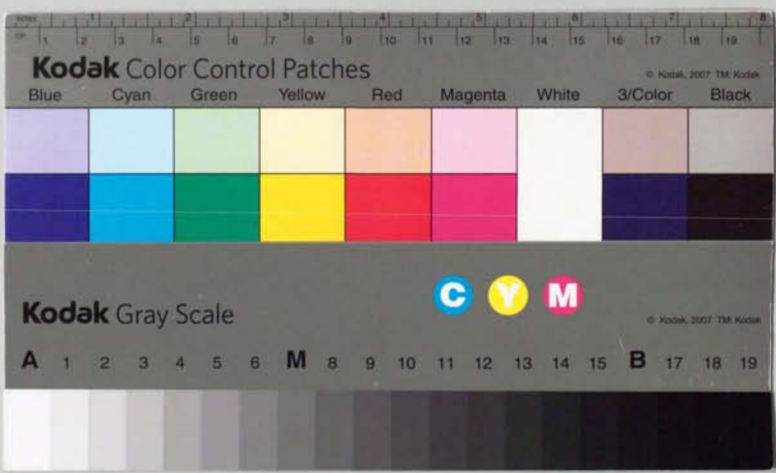
$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\lambda}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\lambda}}}\right) &= \dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{f} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{7.39}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\rho}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}}\right) &= \boldsymbol{s} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{7.40}$$

このうち式(7.39)，(7.40) はもとの付帯条件を表していることが分かる．

境界条件を考慮すると評価関数 J の拡張関数 J^* は

$$J^* = \int_{t_0}^{t_f} L^* dt + \left[\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\psi}\right]_{t_f}. \tag{7.41}$$


Kodak Color Control Patches
© Kodak, 2007 TM: Kodak
Blue
Cyan
Green
Yellow
Red
Magenta
White
3/Color
Black
Kodak Gray Scale
C Y M
© Kodak, 2007 TM: Kodak
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19