

フレキシブル・チャネル乱流の
直接数値シミュレーション

三戸 陽一

フレキシブル・チャネル乱流の
直接数値シミュレーション

平成9年6月

三戸 陽一

目次

1 序論	9
1.1 概論	9
1.2 乱流制御に関する従来の研究	10
1.3 複雑形状流れ内流れに対する従来の数値的アプローチ	11
1.4 乱流の直接数値シミュレーションの進展	15
1.5 本研究の目的	16
2 計算手法	17
2.1 概論	17
2.2 支配方程式	19
2.3 離散化手法	21
2.3.1 時間的離散化手法概説	21
2.3.2 フラクショナル・ステップ法概説	24
2.3.3 移動座標系フラクショナル・ステップ法	27
2.3.4 空間的離散化手法概説	28
2.3.5 2次精度差分	29
2.3.6 計算格子系	37
3 フレキシブル・チャネル層流の数値シミュレーション	43
3.1 概論	43
3.2 チャネル層流の数値シミュレーション	44
3.2.1 目的と計算手法	44
3.2.2 計算条件	45
3.2.3 離散化手法の空間的収束性	45
3.3 螺旋流れの数値シミュレーション	52
3.3.1 目的と計算条件	52
3.3.2 離散化手法の時空間的収束性	58
4 フレキシブル・チャネル乱流の直接数値シミュレーション	66
4.1 概論	66
4.2 平板チャネル乱流の直接数値シミュレーション	67
4.2.1 計算条件	67
4.2.2 計算時間刻み幅の効果	67
4.3 チャネル乱流に対する壁面の正弦振動変形の影響	73
4.3.1 計算条件	73

4.3.2	壁面摩擦の変化	75
4.3.3	投入仕事	82
4.3.4	バルク平均乱流統計量	90
4.3.5	アンサンブル平均乱流統計量	147
4.3.6	乱流構造解析	166
5	結論	197
6	展望	200
6.1	壁面変形パラメータレンジの拡大	200
6.2	3次元壁面変形	200
6.3	壁面変形の最適化(最適形状設計の適用)	201
	謝辞	202
	参考文献	203
A	離散化方程式の数値解法	213
A.1	概論	213
A.2	速度場の数値解法	214
A.2.1	ニュートン法	214
A.2.2	近似因数分解法	214
A.3	圧力場の数値解法	217
A.3.1	離散フーリエ展開の適用	217
A.3.2	不完全LU分解共役勾配自乗法	220
A.4	流量一定条件	224
B	壁面変形による渦対のアクティブ制御	227
B.1	概論	227
B.2	2次元渦対制御モデル	227
B.3	制御則	228
B.4	壁面変形による抵抗低減機構	229
B.5	壁面変形による熱伝達の変化	240
C	波状チャネル乱流の直接数値シミュレーション	245
C.1	目的と計算条件	245
C.2	壁面摩擦係数	245
C.3	バルク平均乱流統計量	247
C.4	アンサンブル平均乱流統計量	248

目次

2.1	1次元スタガード格子系	30
2.2	有限体積法-1次精度積分	33
2.3	壁面上格子系	34
2.4	壁面上片側離散化 (ケース 1)	34
2.5	壁面上片側離散化 (ケース 2)	35
2.6	2次元2次精度補間	36
2.7	3次元2次精度補間	36
2.8	2次精度面積分	37
2.9	2次精度体積積分	38
2.10	コロケート格子系とスタガード格子系	39
2.11	コロケート格子系-速度・圧力計算セル	39
2.12	コロケート格子系 (Zang, Street & Koseff 1994)	40
2.13	スタガード格子系-速度・圧力計算セル	41
2.14	完全スタガード格子系	42
3.1	チャンネル層流計算格子系	46
3.2	時間的離散化スキームの空間的収束性 ($NY = 49$)	48
3.3	時間的離散化スキームの空間的収束性 ($NY = 75$)	49
3.4	時間的離散化スキームの空間的収束性 ($NY = 97$)	50
3.5	時間的離散化スキームの空間的収束性 ($NY = 149$)	51
3.6	MCN 型フラクショナル・ステップ法の空間的収束性 ($\alpha=0.850$)	53
3.7	MCN 型フラクショナル・ステップ法の空間的収束性 ($\alpha=0.900$)	54
3.8	MCN 型フラクショナル・ステップ法の空間的収束性 ($\alpha=0.984$)	55
3.9	2次元蠕動チャンネル概略	56
3.10	2次元蠕動チャンネル計算格子	57
3.11	蠕動チャンネル層流に対する空間的収束性 (MCN-FS)	58
3.12	蠕動チャンネル層流に対する時間的収束性 (MCN-FS)	59
3.13	蠕動チャンネル層流に対する時間的収束性	61
3.14	Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法の蠕動チャンネル層流に対する時間的収束性	62
3.15	蠕動チャンネル α 方向速度分布	63
3.16	蠕動チャンネル速度ベクトル・流線 (MCN-FS, 固定格子系)	64
3.17	蠕動チャンネル速度ベクトル・流線 (MCN-FS, 移動格子系)	64
3.18	蠕動チャンネル速度ベクトル・流線 (CN-FS, 固定格子系)	64
3.19	蠕動チャンネル速度ベクトル・流線 (CN-FS, 移動格子系)	65
3.20	蠕動チャンネル速度ベクトル・流線 (SI-FS, 固定格子系)	65

3.21 蠕動チャネル速度ベクトル・流線 (SI-FS, 移動格子系)	65
4.1 平板チャネル乱流における平均速度勾配の時間変化	68
4.2 平板チャネル乱流平均速度	70
4.3 平板チャネル乱流レイノルズ応力	70
4.4 平板チャネル乱流速度変動強度	71
4.5 平板チャネル乱流温度変動強度	72
4.6 計算対象概略	73
4.7 壁面変形モード	74
4.8 壁面摩擦係数時間変化 ($T^+ = 50$, 短期シミュレーション)	78
4.9 壁面摩擦係数時間変化 ($T^+ = 100$, 短期シミュレーション)	78
4.10 壁面摩擦係数時間変化 ($s^+ = 45$, 短期シミュレーション)	79
4.11 壁面摩擦係数時間変化 ($s^+ = 90$, 短期シミュレーション)	79
4.12 壁面摩擦係数時間変化 ($T^+ = 50$, 長期シミュレーション)	80
4.13 壁面摩擦係数時間変化 ($T^+ = 100$, 長期シミュレーション)	81
4.14 フレキシブル・チャネル流における運動エネルギー・バランス	83
4.15 運動エネルギー・バランス (gross scale, $T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$)	85
4.16 運動エネルギー・バランス (sub-scale, $T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$)	85
4.17 運動エネルギー・バランス (gross scale, $T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$)	86
4.18 運動エネルギー・バランス (sub-scale, $T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$)	86
4.19 運動エネルギー・バランス (gross scale, $T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$)	87
4.20 運動エネルギー・バランス (sub-scale, $T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$)	87
4.21 運動エネルギー・バランス (gross scale, $T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$)	88
4.22 運動エネルギー・バランス (sub-scale, $T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$)	88
4.23 比投入仕事 ($T^+ = 50$)	89
4.24 比投入仕事 ($T^+ = 100$)	89
4.25 x 方向平均速度 ($T^+ = 50$, global scale)	99
4.26 x 方向平均速度 ($T^+ = 100$, global scale)	99
4.27 x 方向平均速度 ($T^+ = 50$, log scale)	100
4.28 x 方向平均速度 ($T^+ = 100$, log scale)	100
4.29 y 方向平均速度 ($T^+ = 50$, global scale)	101
4.30 y 方向平均速度 ($T^+ = 100$, global scale)	101
4.31 z 方向平均速度 ($T^+ = 50$, global scale)	102
4.32 z 方向平均速度 ($T^+ = 100$, global scale)	102
4.33 x 方向速度変動 ($T^+ = 50$)	103
4.34 x 方向速度変動 ($T^+ = 100$)	103
4.35 y 方向速度変動 ($T^+ = 50$)	104
4.36 y 方向速度変動 ($T^+ = 100$)	104
4.37 z 方向速度変動 ($T^+ = 50$)	105
4.38 z 方向速度変動 ($T^+ = 100$)	105
4.39 レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ 分布 ($T^+ = 50$, global scale)	106
4.40 レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ 分布 ($T^+ = 100$, global scale)	106
4.41 レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ 分布 ($T^+ = 50$)	107

4.42 レイノルズ応力 \overline{uv} 分布 ($T^+ = 100$)	107
4.43 x 方向渦度変動 ($T^+ = 50$)	108
4.44 x 方向渦度変動 ($T^+ = 100$)	108
4.45 y 方向渦度変動 ($T^+ = 50$)	109
4.46 y 方向渦度変動 ($T^+ = 100$)	109
4.47 z 方向渦度変動 ($T^+ = 50$)	110
4.48 z 方向渦度変動 ($T^+ = 100$)	110
4.49 $u-v$ 相関係数 ($T^+ = 50$, global scale)	111
4.50 $u-v$ 相関係数 ($T^+ = 100$, global scale)	111
4.51 $u-v$ 相関係数 ($T^+ = 50$)	112
4.52 $u-v$ 相関係数 ($T^+ = 100$)	112
4.53 x 方向速度変動非等方度 ($T^+ = 50$)	113
4.54 x 方向速度変動非等方度 ($T^+ = 100$)	113
4.55 y 方向速度変動非等方度 ($T^+ = 50$)	114
4.56 y 方向速度変動非等方度 ($T^+ = 100$)	114
4.57 z 方向速度変動非等方度 ($T^+ = 50$)	115
4.58 z 方向速度変動非等方度 ($T^+ = 100$)	115
4.59 x 方向速度変動 skewness ($T^+ = 50$)	116
4.60 x 方向速度変動 skewness ($T^+ = 100$)	116
4.61 y 方向速度変動 skewness ($T^+ = 50$)	117
4.62 y 方向速度変動 skewness ($T^+ = 100$)	117
4.63 y 方向速度変動 skewness ($T^+ = 50$)	118
4.64 y 方向速度変動 skewness ($T^+ = 100$)	118
4.65 x 方向速度変動 flatness ($T^+ = 50$)	119
4.66 x 方向速度変動 flatness ($T^+ = 100$)	119
4.67 y 方向速度変動 flatness ($T^+ = 50$)	120
4.68 y 方向速度変動 flatness ($T^+ = 100$)	120
4.69 y 方向速度変動 flatness ($T^+ = 50$)	121
4.70 y 方向速度変動 flatness ($T^+ = 100$)	121
4.71 k 生成項 ($T^+ = 50$)	122
4.72 k 生成項 ($T^+ = 100$)	122
4.73 k 散逸項 ($T^+ = 50$)	123
4.74 k 散逸項 ($T^+ = 100$)	123
4.75 k 乱流輸送項 ($T^+ = 50$)	124
4.76 k 乱流輸送項 ($T^+ = 100$)	124
4.77 k 粘性拡散項 ($T^+ = 50$)	125
4.78 k 粘性拡散項 ($T^+ = 100$)	125
4.79 k 速度圧力勾配項 ($T^+ = 50$)	126
4.80 k 速度圧力勾配項 ($T^+ = 100$)	126
4.81 \overline{uv} 生成項 ($T^+ = 50$)	127
4.82 \overline{uv} 生成項 ($T^+ = 100$)	127
4.83 \overline{uv} 散逸項 ($T^+ = 50$)	128
4.84 \overline{uv} 散逸項 ($T^+ = 100$)	128

4.85 \overline{uv} 乱流輸送項 ($T^+ = 50$)	129
4.86 \overline{uv} 乱流輸送項 ($T^+ = 100$)	129
4.87 \overline{uv} 粘性拡散項 ($T^+ = 50$)	130
4.88 \overline{uv} 粘性拡散項 ($T^+ = 100$)	130
4.89 \overline{uv} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 50$)	131
4.90 \overline{uv} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 100$)	131
4.91 \overline{vw} 圧力・歪速度項 ($T^+ = 50$)	132
4.92 \overline{vw} 圧力・歪速度項 ($T^+ = 100$)	132
4.93 \overline{vw} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 50$)	133
4.94 \overline{vw} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 100$)	133
4.95 \overline{vw} 散逸項 ($T^+ = 50$)	134
4.96 \overline{vw} 散逸項 ($T^+ = 100$)	134
4.97 \overline{vw} 乱流輸送項 ($T^+ = 50$)	135
4.98 \overline{vw} 乱流輸送項 ($T^+ = 100$)	135
4.99 \overline{vw} 粘性拡散項 ($T^+ = 50$)	136
4.100 \overline{vw} 粘性拡散項 ($T^+ = 100$)	136
4.101 \overline{wv} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 50$)	137
4.102 \overline{wv} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 100$)	137
4.103 \overline{wv} 散逸項 ($T^+ = 50$)	138
4.104 \overline{wv} 散逸項 ($T^+ = 100$)	138
4.105 \overline{wv} 乱流輸送項 ($T^+ = 50$)	139
4.106 \overline{wv} 乱流輸送項 ($T^+ = 100$)	139
4.107 \overline{wv} 粘性拡散項 ($T^+ = 50$)	140
4.108 \overline{wv} 粘性拡散項 ($T^+ = 100$)	140
4.109 \overline{vw} 生成項 ($T^+ = 50$)	141
4.110 \overline{vw} 生成項 ($T^+ = 100$)	141
4.111 \overline{vw} 圧力・歪速度項 ($T^+ = 50$)	142
4.112 \overline{vw} 圧力・歪速度項 ($T^+ = 100$)	142
4.113 \overline{vw} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 50$)	143
4.114 \overline{vw} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 100$)	143
4.115 \overline{vw} 散逸項 ($T^+ = 50$)	144
4.116 \overline{vw} 散逸項 ($T^+ = 100$)	144
4.117 \overline{vw} 乱流輸送項 ($T^+ = 50$)	145
4.118 \overline{vw} 乱流輸送項 ($T^+ = 100$)	145
4.119 \overline{vw} 粘性拡散項 ($T^+ = 50$)	146
4.120 \overline{vw} 粘性拡散項 ($T^+ = 100$)	146
4.121 アンサンブル平均 x 方向速度分布 ($T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 5.0$)	151
4.122 アンサンブル平均 x 方向速度分布 ($T^+ = 50, s^+ = 90, a^+ = 5.0$)	151
4.123 アンサンブル平均 x 方向速度分布 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$)	152
4.124 アンサンブル平均 x 方向速度分布 ($T^+ = 100, s^+ = 90, a^+ = 5.0$)	152
4.125 アンサンブル平均 x 方向速度分布 ($T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 2.5$)	153
4.126 アンサンブル平均 x 方向速度分布 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 2.5$)	153
4.127 アンサンブル平均流線 ($T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 5.0$)	154

4.128 アンサンブル平均流線 ($T^+ = 50, s^+ = 90, a^+ = 5.0$)	154
4.129 アンサンブル平均流線 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$)	155
4.130 アンサンブル平均流線 ($T^+ = 100, s^+ = 90, a^+ = 5.0$)	155
4.131 アンサンブル平均流線 ($T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 2.5$)	156
4.132 アンサンブル平均流線 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 2.5$)	156
4.133 アンサンブル平均 ε 渦度 ($T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 5.0$)	157
4.134 アンサンブル平均 ε 方向渦度 ($T^+ = 50, s^+ = 90, a^+ = 5.0$)	157
4.135 アンサンブル平均 ε 方向渦度 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$)	158
4.136 アンサンブル平均 ε 方向渦度 ($T^+ = 100, s^+ = 90, a^+ = 5.0$)	158
4.137 アンサンブル平均 ε 方向渦度 ($T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 2.5$)	159
4.138 アンサンブル平均 ε 方向渦度 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 2.5$)	159
4.139 アンサンブル平均 y 渦度 ($T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 5.0$)	160
4.140 アンサンブル平均 y 方向渦度 ($T^+ = 50, s^+ = 90, a^+ = 5.0$)	160
4.141 アンサンブル平均 y 方向渦度 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$)	161
4.142 アンサンブル平均 y 方向渦度 ($T^+ = 100, s^+ = 90, a^+ = 5.0$)	161
4.143 アンサンブル平均 y 方向渦度 ($T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 2.5$)	162
4.144 アンサンブル平均 y 方向渦度 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 2.5$)	162
4.145 アンサンブル平均 z 渦度 ($T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 5.0$)	163
4.146 アンサンブル平均 z 方向渦度 ($T^+ = 50, s^+ = 90, a^+ = 5.0$)	163
4.147 アンサンブル平均 z 方向渦度 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$)	164
4.148 アンサンブル平均 z 方向渦度 ($T^+ = 100, s^+ = 90, a^+ = 5.0$)	164
4.149 アンサンブル平均 z 方向渦度 ($T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 2.5$)	165
4.150 アンサンブル平均 z 方向渦度 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 2.5$)	165
4.151 平板チャネル乱流時系列乱流構造の変化 (その 1)	168
4.152 平板チャネル乱流時系列乱流構造の変化 (その 2)	169
4.153 平板チャネル乱流時系列乱流構造の変化 (その 3)	170
4.154 平板チャネル乱流時系列乱流構造の変化 (その 4)	171
4.155 平板チャネル乱流時系列乱流構造の変化 (その 5)	172
4.156 平板チャネル乱流時系列乱流構造の変化 (その 6)	173
4.157 平板チャネル乱流時系列解析時の C_f 変化	173
4.158 壁面変形モード時系列解析時の C_{f1} 変化	175
4.159 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 5.0$, その 1)	176
4.160 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 5.0$, その 2)	177
4.161 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 50, s^+ = 90, a^+ = 5.0$, その 1)	178
4.162 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 50, s^+ = 90, a^+ = 5.0$, その 2)	179
4.163 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$, その 1)	180
4.164 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$, その 2)	181
4.165 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100, s^+ = 90, a^+ = 5.0$, その 1)	182
4.166 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100, s^+ = 90, a^+ = 5.0$, その 2)	183
4.167 高低 C_{f1} 時における乱流準秩序構造 (unactuated)	185
4.168 高 C_{f1} 時における乱流準秩序構造	186
4.169 低 C_{f1} 時における乱流準秩序構造	187
4.170 高 C_{f1} 時におけるチャネル断面内の速度ベクトルと u 分布 (unactuated case)	188

4.171 壁面剪断応力分布 (unactuated case)	188
4.172 高 C_{f1} 時におけるチャネル断面内の速度ベクトルと u 分布	189
4.173 高 C_{f1} 時における壁面剪断応力分布	190
4.174 低 C_{f1} 時における壁面剪断応力分布	191
4.175 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$, その 1)	193
4.176 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$, その 2)	194
4.177 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$, その 1)	195
4.178 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$, その 2)	196
A.1 11 点 ILUCGS 法	221
B.1 渦対制御モデル初期場	228
B.2 壁面摩擦係数 (v -control, $Re_\tau = 60$)	231
B.3 壁面摩擦係数 (v -control, $Re_\tau = 500$)	231
B.4 壁面摩擦係数 (w -control, $Re_\tau = 60$)	232
B.5 壁面摩擦係数 (w -control, $Re_\tau = 500$)	232
B.6 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その 1)	233
B.7 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その 2)	234
B.8 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その 3)	235
B.9 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その 4)	236
B.10 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その 5)	237
B.11 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その 6)	238
B.12 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その 7)	239
B.13 熱伝達率 (v -control, $Re_\tau = 60$)	241
B.14 熱伝達率 (v -control, $Re_\tau = 500$)	241
B.15 熱伝達率 (w -control, $Re_\tau = 60$)	242
B.16 熱伝達率 (w -control, $Re_\tau = 500$)	242
B.17 渦対の壁面衝突時の渦度・温度分布 (その 1)	243
B.18 渦対の壁面衝突時の渦度・温度分布 (その 2)	244
C.1 波状壁面摩擦係数 C_{f1} の時間変化	246
C.2 波状チャネル x 方向平均速度	247
C.3 波状チャネルレイノルズ応力 $-\overline{u^+v^+}$	248
C.4 波状チャネル x 方向速度変動	249
C.5 波状チャネル y 方向速度変動	249
C.6 波状チャネル z 方向速度変動	250
C.7 波状チャネル x 方向渦度変動	250
C.8 波状チャネル y 方向渦度変動	251
C.9 波状チャネル z 方向渦度変動	251
C.10 波状チャネル・アンサンブル平均 ($s^+ = 45, a^+ = 5.0$, その 1)	253
C.11 波状チャネル・アンサンブル平均 ($s^+ = 90, a^+ = 5.0$, その 1)	253
C.12 波状チャネル・アンサンブル平均 ($s^+ = 45, a^+ = 5.0$, その 2)	254
C.13 波状チャネル・アンサンブル平均 ($s^+ = 90, a^+ = 5.0$, その 2)	254

Chapter 1

序論

1.1 概論

乱流の定義は、非常に漠然としている。一般的には、乱流は、Kelvin-Holmoltz 不安定によって生じた種々のスケールの後流 (wake) の集合体であり、それらの後流が干渉し合っている状態と位置付けされる。すなわち、乱流中では、層流・静止状態を含めた様々な変動が、時空間的に移動・交替している状態を観測できる。壁乱流の生成において中心的役割を担う後流は壁面近傍で発生し、本構造は擬渦構造として広く認識されている。様々な乱流場において、こうした変動の中心的役割を担う構造、特に渦構造が存在し、これらは、摩擦抵抗低減、熱伝達促進、乱流混合促進、剥離制御といった制御目的に大きくかかわっている。

乱流輸送現象の制御は、従来より様々な形で工学応用上で実践されている。たとえば、

1. 船舶・航空機等の輸送機器の表面や、パイプライン内部表面における摩擦抵抗低減、
2. ガスタービンにおけるタービン冷却や、コンピュータの電子回路基板冷却、熱交換器の熱伝達促進、
3. スワール、スキッシュ、2次空気等による燃料混合促進、
4. 剥離制御、特に、翼・物体の後流における渦放出の制御、

が挙げられる。また、近年の医療技術の発達には、生理・生体工学の発達による部分が大きく、この分野に對しても、上記の種々の制御技術が生かされている。

このように様々な形で乱流の制御が行われている反面、その際の現象のメカニズムが把握されている例はごく限られている。また、このときの具体的制御手法の大部分が、直感と経験に基づくものであり、長年の研究によって、形状等の制御の作動パラメータの最適化がなされてきたとはいえ、そこに必然性(十分性!)はない。よって、それら各制御手法には、依然、改善の可能性が含まれている。このような理由から、一定の制御目的に対して、具体的な制御手法を考える以前に、制御手法・アクチュエータによらない、より一般化された概念の確立が必要とされる。すなわち、結果としてどういった流れ場を得るために、乱流中のどの構造・メカニズムに對し、どういった制御を行えばよいかという知識が求められる。しかしながら、乱流に對する研究は、過去においても、そして現在においても、世界各地で精力的な研究が続けられているにもかかわらず、その統一した認識を得るには程遠い状態にある。そもそも、乱流制御を考える以前に、制御のない乱流のメカニズムについてさえ、不明確な部分がゴロゴロしている。このことから、乱流場に制御を加えた際の出力の予測が困難であることは容易に予想がつく。

近年では、乱流の測定・観察より一歩進んで、ここに外部より乱れ(制御の立場ではアクチュエーションに相当)を投入することによって誘起された流れ場を計ることによって、その制御アクチュエータとしての有用性を調べると同時に、具体的アクチュエーションに對する計測対象流れ場の感度(勾配)を

計ろうという動きも見られる。この種の研究は、アクチュエーションのパラメータ変更が容易であること、および、近年、計算環境が整ってきたこともあって、実験より直接数値シミュレーション (DNS) に負う部分が大い。また、本アプローチには、アクチュエータの形・作動モードの変更によって乱流場に大きな変化が現われた場合、それまでに認識されていない乱流の諸機構を発見・予測できるというという長所がある。本研究では、この立場からチャネル乱流に対しアクチュエーションとして単純化された壁面変形を与え、これによって誘起される乱流構造の変化について検討を加える。そして、ここから、壁乱流における構造の特性を引き出し、乱流制御に対するガイドラインを見い出す。

乱流の制御には、投入仕事なしで一定の制御を加え続けるパッシブ制御と、制御を時間的、空間的に分布させる等のために投入仕事を要するアクティブ制御の2通りがある。アクティブ制御では、当然、投入仕事を上回る制御利得が期待される。近年では、特に、流れ場の変化に柔軟に対応できるアクティブ・フィードバック制御に対する関心が高くなっており、そこに適用される制御則がこれに伴い求められている。また、乱流のフィードバック制御においては、アクチュエータの選択も重要な要因となる。すなわち、乱流制御の実現には、その手法を確立することに加えて、要求される制御を正確に与えることのできる技術を伴う必要がある。近年のマクロメカニクス (Micro-Electro-Mechanical-Systems; MEMS) 技術の発達は、乱流瞬時構造に対するより高度なアクチュエーションを実現するものとして期待される。

1.2 乱流制御に関する従来の研究

本節では、従来の実験・直接数値シミュレーションによる乱流制御に関する研究を概説する。

従来より、様々な工学的応用、自然現象の制御を目的として、壁面・界面上の乱流における、運動量、熱、 CO_2 等の種々のスカラーの輸送機構の制御に対する関心には非常に高いものがある。本問題の応用は非常に幅広く、それらに対する研究も多岐にわたる。本研究では、壁乱流における各種スカラー輸送を考える前に、その下地となる運動量輸送機構の解明を目的とする。よって、本節では、壁面摩擦抵抗低減、混合促進、剥離制御といった、乱流中の運動量・運動エネルギー輸送機構の制御手法について、従来のものを概論することにする。なお、これにスカラーの入った例として、熱伝達促進についても少し触れる。熱伝達制御は、本研究の将来的展望を考えた場合、抵抗低減制御と並び、応用の可能性の非常に高い問題である。これらの制御は、その導入形態によって、制御投入に際し仕事を要しないパッシブ制御と、アクチュエーションに対する仕事を必要とするアクティブ制御に分けることができる。

壁乱流に対するパッシブ制御手法としては、上記諸目的に対してさまざまな手法が考案されている。壁面摩擦抵抗低減に対しては、リプレット (Bechert & Bartenwerfer 1989)、LEBU デバイス (Lynn, Bechert & Gerich 1995)、ポリマー・粒子等の添加 (Kane 1990) によるもの等がある。熱伝達促進 (Webb 1987)、剥離制御 (Gad-el-Hak & Bushnell 1991) はいずれも混合促進という点で概念的には共通する部分が多く、レイノルズ数に依存して、さまざまな形のフィン、粗さ、挿入物を用いる方法等が考案されている。また、乱流遷移に対する制御アクチュエータとして、流れ場の作用により変形する弾性皮膜 (compliant surface) を用いる例もある (Lucey & Carpenter 1995)。また、磁性流体等により形成される表面層 (peripheral layer) によって抵抗低減・剥離制御を検討した例もある (Berkovsky, Medvedev & Krakov 1993)。パッシブ制御に対する研究は長年に渡りかなり詳細に行われてきており、各制御手法に対するパラメトリックな知識はかなり整えられている。

一方、制御投入に対し仕事を必要とするアクティブ制御に対する研究も、近年の MEMS の発達にも助けられ、急速に進んでいる (Ho & Tai 1996)。この場合のアクチュエータとしては、ジェット (Compton & Johnston 1992) あるいは吹き出し・吸い込み (Choi, Moin & Kim 1994) のように流体そのものの運動エネルギーを介するもの、vortex generator 等の微小フィン (Jacobson & Reynolds 1995) あるいは 3 次元ポンプ (実験: Gaster, Grosch & Jackson 1994, 数値計算: Carlson, Berkooz & Lumley 1995) 等のような

壁面の形状変化によるもの等が挙げられる。流れ場の性質によっては、MHD 力 (magnetohydrodynamic force) 等の体積力もアクティブ制御アクチュエータの候補となる (Henoach & Stace 1995)。また、アクティブ制御は、制御手法開発に対する興味に加え、種々のアクチュエーションに対する乱流諸構造の変化を観察することにより、乱流輸送機構の理解を助ける役目も持っている。これにより、流れ場に応じた、より洗練された制御手法の構築も可能になる。

アクティブ制御の壁乱流に対する適用例としては、実験においては、壁面摩擦抵抗低減を目的とした壁面のスパン方向振動 (Laadhari, Skandaji & Morel 1994)、マイクロアクチュエータ・ジェット (Jacobson & Reynolds 1995)、MHD 力 (Henoach & Stace 1995) を用いたものなどがある。直接数値シミュレーションによるものとしては、数値的適用の容易さから体積力、吹き出し・吸い込みをアクチュエータとしたものが多く、速度変動場の波数成分に対し選択的にランダムな体積力を与えたもの (Handler, Levich & Sirovich 1993) 壁面上近傍に体積力を掛けたもの (Goldstein, Handler & Sirovich 1995, 佐竹 1995)、壁面上で壁面近傍の速度と逆位相の速度の吹き出し・吸い込みを与えたもの (Choi, Moin & Kim 1994) 等がある。一方、数値計算上で壁面変形・振動をアクチュエータとしたものとしては、壁面のスパン方向振動 (Jung, Mangiavacchi & Akhavan 1992) の例がある。これらはいずれも壁面摩擦抵抗低減を目的としたものである。本研究では、壁面の時空間的な変形を制御アクチュエータとしており、乱流制御としては本邦類に属する。

これらの流れ場情報のフィードバックのない制御は、流れ場の変化の少ない箇所では有効な手段となるが、流れ場の変化の大きいところ、あるいは、移動物体上のように流れ場の条件が逐次変化する箇所においては、一定の制御を与えるアクティブ・パッシブ制御では、本来の目的とは逆の効果を生じることも少なくない。このため、近年では、流れ場の状況に応じて制御投入をコントロールできる on-demand 制御あるいはフィードバック制御に対する関心が高まってきている。直接数値シミュレーションによる例としては、Choi, Moin & Kim (1994) による、壁面摩擦抵抗低減を目的として、壁面近傍の速度と逆位相の速度の吹き出し・吸い込みを壁面上で与えたものがあり、実験上では、Saddoughi (1995) による、Jacobson & Reynolds (1995) の開発したマイクロ・アクチュエータのスケールアップ版 vortex generator を用いた、on-demand 型混合促進・剥離制御の検討例がある。

近年では、フィードバック制御の準最適化も、Bewley, Choi, Temam & Kim (1993) によって試みられている。この他にも、ニューラル・ネットワーク (Jacobson & Reynolds 1995) の適用等、フィードバック制御のアルゴリズムに対する関心も高い。

1.3 複雑形状流路内流れに対する従来の数値的アプローチ

本研究では、境界適合座標 (Boundary-fitted coordinate system) を使い、壁面変形のあるチャネル乱流の直接数値シミュレーション (DNS) を行う。本研究では、壁面の時空間的な変形アクチュエーションによる乱流構造の変化を考察する。壁面変位および壁面速度は計算上陽的に与え、流れによる変形は考えないため、本問題で解く方程式は流体運動に関する支配方程式のみである。

変形流路内流れの数値解法としては、境界要素法、渦法、有限要素法、有限差分法、スペクトル法、スペクトルエレメント法、CIP 法、摂動法、境界層理論などがある。このうち、計算目的・計算対象に応じて、具体的に取る手法が決められる。

境界要素法では、流れ場にポテンシャル流を仮定することになり、よって、これは、実用上で計算負担軽減という要請がある場合によく用いられる手法である。特に、この手法は、構造・流体連成問題において構造解析の方に重点が置かれる場合 (複雑な構造を考える場合を含めて) によく用いられ、この場合、構造は有限要素法によって解かれ、そのカップリング対象としての流体運動がこの比較的计算負担の小さい境界要素法によって解かれる (Estorff, 1992)。なお、同様の流れ場 (支配方程式が線形とな

る場合)を、構造、流体共に有限要素法で解いたケースも数多く報告されている。たとえば、Olson & Vandini (1989) や Singh, Kant & Kakodkar (1991) によって圧縮非粘性ポテンシャル流 - 構造干渉問題が、Schulkes (1992) によってストークス流 - 構造干渉問題が解かれている。

ランダム渦法 (random vortex method) は、非圧縮非粘性・粘性流のシミュレーションに対して、専用のプロセッサを開発することにより計算の超並列化・超高速化を図れるという利点のほか、グリッドレス・ラグランジアン解法のため数値粘性を極力抑えることができる (このとき NS 方程式は線形化される)、渦エレメントの持つ力学上の適合性 (渦エレメントの粗密がそのまま渦度の高低に結び付けられる) を期待できる、複雑形状の流れ場に対しても適用が容易であるといった様々な長所を含む解法である (Sethian, Brunet, Greenberg & Mesirov 1992)。しかしこの解法には粘性拡散の導入方法 (渦エレメントのランダムウォークで粘性拡散を表す) に問題が残されており、この点が十分にクリアされない限り高価な乱流計算への移行も難しい。

先の2法が支配方程式が線形の場合に限られる解析手法であるのに対し、有限要素法や有限差分法は、支配方程式が非線形の場合においても用いることのできる手法である。構造の大変形に伴う非線形性や、NS方程式中に移流項が生じることによる非線形化のために、一般的な流体 - 構造連成問題のみならず、本研究のような流れ場のみを解く場合においても、多くの場合、これらいずれかの方法が採られる。これらの頻度については、定式化が容易であること、数値的負担が小さいこともあって、現在のところは差分法によるシミュレーションの方が多くなっている。しかしながら、有限要素法による解析手法もかなり充実してきており、それらの汎用化が進めば、この関係が変化することも十分考えられる。

有限要素法を用いて自由表面や流体・構造干渉等の移動境界問題を扱うために、様々な手法が開発されてきている。ALE (arbitrary Lagrangian-Eulerian) 有限要素法は、その中で最も一般的な手法で、運動の小さな領域をラグランジアン的に、メッシュの移動により捕らえられないような運動の大きな領域をオイラー的に解く方法である。ALE法の適用例としては、Nomura & Hughes (1992) による、空間上の離散化に SUPG 法 (streamline-upwind/Petrov-Galerkin method)、時間上の離散化に予測子-修正子法 (predictor-multicorrector method) を用いた方法や、Tworzydło, Huang & Oden (1992) による、空間上に implicit/explicit Taylor-Galerkin 法、時間上に2次テイラー展開を用いた方法等がある。

ALE法が空間上の離散化に基づく方法であるのに対し、時空間を一括して離散化しエレメントを構成する方法も、移動境界問題に対する解法として用いられている。このときの全計算領域を包括したときに時空間上 (時刻 $t^n \rightarrow t^{n+1}$) に形成される歪んだ領域を、時空間スラブ (space-time slab) と呼ぶ。計算エレメントはこのスラブ上で形成される。このスラブの時間上の変形については完全にラグランジアンである必要はなく、この点で ALE 法とも関係する。時空間スラブを導入した解析例としては、Hansbo (1992) による CSD 法 (characteristic streamline diffusion method) や、Tezduyar & Behr (1992) による DSD/ST 法 (deforming-spatial-domain/space-time procedure) 等がある。CSD 法は、固定メッシュに対する SD (streamline diffusion) 法に特性の方法 (method of characteristics) を組み合わせた手法である。SD 法は、Galerkin 有限要素法の試験関数に最小自乗項を加えることによって計算の安定化を図った手法であり、Galerkin/least-squares (GSL) 法とも呼ばれる。この手法は、SUPG 法 (たとえば Nomura & Hughes, 1992) に基づいた安定化の一般形とも考えることができる。なお、この SD (streamline diffusion) は、試験関数内の最小自乗項が、スカラー対流における流線方向拡散の意味を持つことによる。一方、特性の方法は、時空間スラブ内でメッシュを切るうえでの手続きを指し、この方法によりメッシュを流れの特性方向に傾けることができる。DSD/ST 法は、空間上の離散化に GLS 法すなわち SD 法を用いる手法であり、基本的には CSD 法に一致する。

なお、上記のいずれの方法による場合でも、移動境界に伴うメッシュの過大な歪を避けるためリメッシング (remeshing) という操作が必要になる。このときに問題になるのが、この操作に伴う射影誤差である。また、適合格子 (adaptive mesh refinement) の導入も常に考えなければならない問題である。

差分法は、定式化が有限要素法に比べて非常に容易であるため、複雑形状流路や移動境界を含めたより広範囲の問題に適用される手法である。よって、差分法により移動境界を扱ったシミュレーションの例は膨大な数に上る。差分法を用いて移動境界を扱う場合、一般に、支配方程式・境界条件は境界適合座標 (BFC, Boundary-fitted coordinate system) 上に逐次射影 (座標変換) され、その射影空間上で計算されることになる。この座標変換の必要性は Norris & Reynolds (1975) によっても指摘されている。このとき、支配方程式・境界条件は一般座標で記述され、表式は複雑化してしまうが、一方で、計算を一定の格子 (計算空間上) で行える。すなわち計算境界を表す必要から解放されるという利点もある。層流 (2次元計算) を扱った例としては、Yan, Ingham & Morton (1993) による円柱振動により誘起される流れ場の解析、Ralph & Pedley (1988) によるチャネル壁面に局所非定常的な凹凸部がある場合の流れ場の解析、Venkat & Spalding (1991) による境界層下に局所的な振動部がある場合の流れ場の解析等がある。

乱流上で移動境界を扱う場合には、計算領域を (非定常計算の場合には積分時間) も十分大きく、しかも用いる計算スキームに従い計算格子を十分小さく採る必要がある。乱流モデルを用いて移動境界問題を解いた例としては、Kato & Launder (1993) による振動円柱周りの流れ場解析や、Harris & Street (1994) による移動波状壁面を伴うチャネル内乱流の解析等がある。この2つのいずれのケースにおいても $k-\epsilon$ モデルが用いられている。前者はそこで提案した標準型モデル (Launder & Spalding, 1974) の改良型、後者は低レイノルズ数型の Launder-Sharma モデル (Launder & Sharma, 1974) を用いている。LES を用いて移動境界を扱った例としては、岡島・小垣・易 (1994) による振動角柱周りの流れ場の解析例がある。乱流モデル (SGS モデルを含む) を用いない3次元計算としては、移動境界問題を扱った例として、高木 & 松本 (1993) による液体中を上昇する気泡の解析、Izumi, Kawata, Taniguchi & Kobayashi (1993) によるディフューザ内に円柱振動を含む場合の流れ場の解析等がある。壁面・界面の面内移動はあるが、その立体的変形はない例として、Komori, Nagaosa, Murakami, Chiba, Ishii & Kuwahara (1993) による剪断の無い気液界面を含む乱流場の解析、Jung, Mangiavacchi & Akhavan (1992) によるスパン方向振動壁面上の乱流解析等がある。なお、乱流の直接数値シミュレーションを、この種の移動境界問題に適用した例は現在のところなく、Rosenfeld & Kwak (1991) による、スパン方向に数メッシュ切った3次元計算が最大クラス計算となっている。変形静止境界上の乱流の直接数値シミュレーションについては既に多くの報告があり、Choi, Moin & Kim (1993) によるリブレット壁を持つチャネル乱流の直接数値シミュレーションや、Krettenauer & Schumann (1992) による波状壁面上乱流熱対流の直接数値シミュレーション等がある。差分法は一般的にスペクトル法より計算負荷が高くなるため、乱流計算のような多数の時間積分を必要とする複雑系に対しては、計算の線形化によるスペクトル法適用の方が適する面もある。本研究では、時間的により厳密な離散化 (完全陰的な手法) を行うことから、解法は非線形となる。このためスペクトル法等の線形解法を用いることができないため、差分法を用い、移動境界を伴うチャネル内乱流の直接数値シミュレーションを行う。

差分法や有限要素法が局所関数によって表される手法であるのに対し、スペクトル法は包括関数 (global function) の展開によって表される手法である。スペクトル法は、指数的収束性を持ち、空間上の離散化を高精度に行えることから、乱流の直接数値シミュレーションに対する最適手法の一つと考えられている。現在のところ、スペクトル法の DNS への適用は、計算領域の境界がデカルト座標面あるいは円柱座標面で表されるような単純な系に対するものが主となっているが (たとえば、Kim, Moin & Moser (1987) による平行平板間チャネル乱流、あるいは Neves, Moin & Moser (1994) による2重円管内乱流)、近年では複雑形状に対する適用事例も幾つか報告されている。Orszag (1980) は、複雑形状問題に対するスペクトル法の適用方法をマッピング (mapping, 計算格子形成) とパッチング (patching, 領域分割) という2種類に分類している。マッピングは座標変換の導入を意味し、パッチングは、領域分割と、その分割領域のスペクトル展開を意味している。なお、このパッチングは、後述のスペクトル・エレメント法に

相当する。Duraiswami & Prosperetti (1992) は、このマッピングで用いるための直交格子 (orthogonal mapping) 形成法を 2 次元問題に対し紹介している。スペクトル法のデカルト・円柱座標系以外での適用例としては、Piliotis & Beris (1992) による周期収縮管 (PCT, periodically constricted tube) 内非ニュートン流の解析例がある。ただしこの場合の計算は 2 次元である。スペクトル法の 3 次元移動壁面上流れに対する適用例は Carlson, Berkooz & Lumley (1995), Carlson & Lumley (1996) や De Angeles & Banerjee (1996) に見られる。

スペクトルエレメント法 (spectral element method, Patera 1984) は、スペクトル法の指數的収束性と、有限要素法の幾何的柔軟性を兼ね備えた手法である。有限要素法特有の数値的負担からその適用例は少ないが、壁面 (境界) 変形を 2 次元とし、一様変形方向に高速フーリエ変換を併用することにより数値的負担を緩和して 3 次元計算を行った例も報告されている。変形流路内流れを扱った例としては、Ghaddar, Korezak & Mikik (1986) による矩形ダクト流や Guzmán & Amon (1994) による波状ダクト流に対する 2 次元解析例がある。乱流直接数値シミュレーションへの適用例としては、Chu & Karniadakis (1993) によるリブレット壁面を持つチャネル乱流の直接数値シミュレーション例がある。本例が先に述べた 2 次元性変形境界の例に相当する。なお、本手法により 3 次元の変形境界を伴う流れ場のシミュレーションを行った例は現在のところ報告されていない。

CIP (cubic interpolated pseudo-particle) 法は矢部 (1992a) によって提案された解法で、圧縮性流体と非圧縮性流体を同時に、さらには固体から気体までを同時に (矢部, 1992b) 解くことのできる方法として注目されている方法である。これを移動境界問題に適用した例としては、Yabe, Mochizuki & Hara (1992) による金属のレーザ加工問題や、村井 & 松本 (1994) による気泡流の解析等がある。

境界層理論を用いて、変形流路内流れや壁面変動を伴う流れ場を解いた例も報告されている。このような変則的な問題に対する境界層理論の適用は、基本的には、パーティション (摂動スケールに基づいた領域分割) とマッピング (分割領域の接合) という 2 つの段階を踏むことによってなされる (Smith, 1974)。Smith (1976) は、内部流用の 3 層モデル (three-tiered model) を用いて、変形壁面を伴う十分に発達したチャネル内層流の解析を行っている。境界層理論は、内部流よりむしろ外部流、すなわち変形壁面上の境界層に対してかなり詳細な議論を行えるまでに成長してきている。層流境界層に対しては Smith, Brighton, Jackson & Hunt (1981) の 3 層理論 (triple-deck theory) があり、この考え方は、同様のジオメトリ上の乱流境界層に対する Duin & Janssen (1992) の 3 層構造 (three-layer structure)、あるいは Belcher, Newley & Hunt (1993) の 4 層漸近構造 (four-layer asymptotic structure) へと拡張されてきている。なお、Duin & Janssen (1992) が 3 層構造理論を用いて解いているのは、乱流境界層による波面の生成についてであり、4 層構造理論の同問題への適用も Belcher & Hunt (1993) によってなされている。

摂動法 (perturbation method) は、空間上の流路幾何形状に対して、あるいは時間上的変動成分に対して、さまざまな形で、さまざまな問題に対して適用できる解析手法である。変形流路に関する幾何変数を摂動変数として採った例としては、Chow & Soda (1972) による周期収縮管 (PCT) に対するものや、Chow & Soda (1973), Tsangaris & Leiter (1984) による波状チャネルに対するものなどがある。移動壁面を扱った例としては、Burns & Parkes (1967) による、壁面に波状ぜん動を伴ったチャネル・パイプ内のストークス流れ (慣性項を落とせる低レイノルズ数流れ) の解析例がある。この場合の摂動変数には、チャネル/パイプの幾何的変動係数が充てられている。Harris & Street (1994) は、波状移動壁を伴うチャネル内流れをシミュレートするために、空間上に差分法を構成し、各位置におけるフローパラメータの時間変動に対して摂動解析を適用している。このときの 0 次解がこの流れ場の平均流に対する解で、1 次以上の解が波状壁面移動に伴う摂動成分分解ということになる。なお、解析対象が乱流場であるため、その予測に $k-\epsilon$ モデルを用いている。よって、速度、圧力、乱流運動エネルギー、およびその散逸率という 4 つの変数が上記摂動解析の対象となる。

1.4 乱流の直接数値シミュレーションの進展

乱流の直接数値シミュレーション手法は、Kim, Moin & Moser (1987) による 2 次元平行平板チャネル乱流のシミュレーション以降、計算機の発達により急速に発達してきた。計算対象も多様化し、それに伴い様々な計算手法が考案されている。直接数値シミュレーション手法は、時間と空間に対する離散化手法より成る。両者は独立なものではなく、特に空間的離散化手法については、半陰解法の適用による解法の線形化等、一定の時間的離散化手法を前提とするものが多い。ここでは、簡単のために、時空間の離散化手法を個別に述べ、両者間の制約については、各説明中において適宜触れることにする。

時間的離散化手法は、陽解法、陰解法、陽解法と陰解法を併用した半陰解法、fractional step 法 (Chorin 1969, Temam 1984)、influence matrix 法 (Kleiser & Schumann 1980) に分類される。Kim, Moin & Moser (1987) のような簡単な流路形状に特化した場合 (圧力解法を除いた場合) に用いられる半陰解法を除けば、汎用性の高い手法は陽解法と後の 2 つ近似解法で、中でも計算負荷が小さく、収束性等の数学的根拠に対する議論も充実した fractional step 法に対する使用頻度は influence matrix 法を凌ぐ。

Fractional step 法は、Chorin (1969), Temam (1984) らによって開発された速度・圧力場の分離解法である。本手法は陰解法をベースとし、Temam (1984) は構成方程式を完全陰解法で、Chorin (1969) はその非線形項の一部を陽解法化 (線形化) している。Fractional step 法による乱流の直接数値シミュレーションに対する適用は、構成方程式を半陰解法化 (線形化) した Kim & Moin (1985) に遡る。この際、移流項は 2 次精度 Adams-Bashforth 法、粘性項は 2 次精度 Crank-Nicolson 法で表されており、速度場に対し全体として時間的 2 次精度を保っている。近年では、この陽解法部分は省メモリ型の 3 次精度 Runge-Kutta 法 (Spalart, Moser & Rogers 1991) で置き換えられることが多く、結果、計算の安定化を図り、より大きなタイムステップによる時間積分を実現している (Le & Moin 1991, Rai & Moin 1991)。Fractional step 法の除的 2 次精度化、すなわち完全 Crank-Nicolson 法化した fractional step 法の乱流直接数値シミュレーションに対する適用は、Choi, Moin & Kim (1992) によって達成された。引き続き、Choi & Moin (1994) によって、より強い時間的収束性を保証する、すなわち計算時刻刻依存性を弱くし、数値的時間位相遅れを小さく抑える Crank-Nicolson 型 fractional step 法に対する圧力勾配項の delta-form 化が示された。このとき解法は 4 段階に分割されるため、Choi & Moin (1994) はこれを 4 段階時間進行法と名付けた。完全 Crank-Nicolson 法により、陽解法の非収束性および陽解法と半陰解法の間の予測誤差すなわち位相誤差は無視出来るようになるが、陰解法化に伴う非線形解法化は、計算負荷の膨大に直結してしまう。

Influence matrix 法 (Kleiser & Schumann 1980) は、陽解法あるいは半陰解法によって線形化した離散化方程式に対して適用される。本手法では、連続の式を満足させるために τ 修正を必要とする。Kleiser & Schumann (1980) は、2 次元平行平板チャネルのように、1 つの非周期方向に Chebyshev 多項式を用いる場合の τ 修正法を、Tuckerman (1989) は、矩形ダクトのように、2 非周期方向に Chebyshev 多項式を用いる場合の τ 修正法を示している。2 方向 τ 修正の influence matrix 法を矩形ダクト内三次元流に適用した例が、Madabhushi, Balachandrar & Vanka (1993) に示されている。

直接数値シミュレーションに対する空間的離散化手法としては、スペクトル法、有限差分法 (有限体積法)、スペクトル・エレメント法が挙げられる。

スペクトル法 (Canuto, Hussaini, Quatreoni & Zang 1988) は、陽解法あるいは半陰解法により運動方程式を線形化したときに適用可能な解法である。本手法は、空間的離散化に関して指數的な収束性を期待できることから、高解像度の要求される乱流解析のための最適のツールとされている。Kim, Moin & Moser (1987) による 2 次元平行平板間チャネル乱流の直接数値シミュレーションもスペクトル法によるものである。スペクトル法の複雑境界を含む流れ場に対する適用法も検討されており、それらは大きく mapping と patching に分けられる (Orszag 1980)。Mapping は座標変換を用いる手法であり、patching

は分割領域内のスペクトル展開であり、スペクトル・エレメント法に相当する。Mapping (適合スペクトル法) を用いた直接数値シミュレーションの例としては、乱流境界層 (Spalart & Leonard 1985)、矩形ダクト内乱流 (Madabhushi, Balachandar & Vanka 1993)、3次元壁面バンプ周りの流れ (Carlson, Berkooz & Lumley 1995) 等がある。

スペクトル・エレメント法 (Patera 1984) は高次の有限要素法であり、スペクトル法の patching 解法でもある。本手法は、有限要素法の流れ場に対する柔軟性と、スペクトル法の指數的収束性を合わせて持つ。乱流の直接数値シミュレーション例としては、Karniadakis (1990) による乱流遷移のシミュレーション、Chu & Karniadakis (1993) によるリブレット面上乱流のシミュレーション等がある。

Rai & Moin (1991) によって、乱流直接数値シミュレーションに対する高次差分の有用性が示されたが、Kim & Moin (1985) による2次中心差分・fractional step 法のコンビネーションも、様々な例に対して優れた適用性および有用性が示されている。Rai & Moin (1993) は、高次差分によって、乱流境界層の直接数値シミュレーションを行っている。一方、Lele (1992) により、少ない格子点の設定で高次の離散化を実現するコンパクト有限差分法 (Hirsh 1975, Adam 1977) の有用性も示された。2次中心差分による例としては、Gavrilakis (1992) による矩形ダクト内乱流、Choi, Moin & Kim (1993) によるリブレット面上乱流、Zang, Street & Koseff (1994) による変形管路内流れ、三戸・笠木 (1996) による2次元正弦振動壁面上の乱流等が挙げられる。

なお、上記各空間離散化手法には、スペクトル法、スペクトル・エレメント法の場合には、Fourier 級数、Chebyshev 多項式、Legendre 多項式、Jacobi 多項式等の展開多項式の選択 (Canuto, Hussaini, Quarteroni & Zang 1988) が、差分法 (有限体積法) の場合には、staggered 格子、collocated 格子等の格子点配置選択がカップリングされる。

1.5 本研究の目的

本研究では、従来の直接数値シミュレーション手法、および移動境界を含む流れ場の数値シミュレーション手法に対する再検討を行い、移動境界を含む流れ場の直接数値シミュレーションに対する一手法を構築する。

引き続き、発達チャネル乱流に対する壁面変形アクトエーションの効果に対する検討を行う。本シミュレーションにおいて、先述の本研究で開発した直接数値シミュレーション手法を用いる。本研究では、壁面変形に、流れ方向一定の2次元変形、その時空間的分布を正弦振動で与えるモードを仮定する。この壁面変形の2次元性は、発達した壁乱流、特に壁面近傍における、流れ方向に長く伸びた乱流諸構造の特性に基づく。壁乱流においては、流れ方向に長時間にわたり持続するストリーク状の構造の発生頻度が非常に高くなっており、また、間欠的な縦渦構造、スweep構造等についても流れ方向に長時間持続することが知られている。本研究では、これらの乱流諸構造の操作による、摩擦抵抗・熱伝達の効果に深く係わる縦渦構造やスweepといった乱流準秩序構造の操作の可能性を検討する。また、壁面変形モードに時空間的正弦振動を仮定することにより、壁面形状支配変数を、時空間的な周期、すなわち時間周期とピッチ、と変形振幅の3変数に減らすことができる。このパラメータの縮小化により、乱流構造や抵抗に及ぼす係数依存性をより明確に表現することができ、またこのことによって、壁乱流における抵抗生成、乱流変動生成等の諸効果に対し、より大きく関与する時空間的な乱流変動スケールを明示化することができる。本研究では、このようなスケール選択的な壁面変形アクトエーションによる乱流輸送機構の変化を考察し、乱流抵抗・変動生成に係わる乱流構造の諸スケール効果に対して検討を加える。

Chapter 2

計算手法

2.1 概論

本章では、本研究で用いる時空間的な離散化手法を解説する。方程式の離散化の際には、その微分のオーダーをまず考慮しなければならない。そして離散化の際には、その中に含まれる全ての微係数が定義される離散化精度を選ぶ必要がある。Navier-Stokes 方程式上では、速度場に関しては、時間的には1階、空間的には2階、圧力場に関しては、時間的には0階、空間的には1階の微係数を必要とする。連続の式においては、速度場に1回微分を必要とするのみのため、Navier-Stokes 方程式の解法に基づいた離散化を行ってあげれば、連続式での微分に関する考慮は必要ない。しかしながら、連続の式は、圧力ポアソン方程式（フラクショナル・ステップ法使用時には、射影スカラー（疑似圧力）のポアソン方程式）によって考慮されることが多く、この場合には圧力に関しても空間的2回微分可能性を要求する必要がある。圧力ポアソン方程式(2.47)における速度場の空間微分のオーダーは1階に抑えられており、Navier-Stokes 方程式を解く際の2回微分可能性で十分である。

以上の微分可能性は、しばしば微分に対するクラス C^n で整理される。すなわち、 n 回連続微分可能 (n 回連続微分可能で、 n 階導関数が連続) な関数は C^n 級の関数と表現される。なお、差分法等による離散化においては連続という概念が存在しないため、 n 次までの導関数が定義される C^n 級が n 次精度の離散化に対応する。Navier-Stokes 方程式を解く際には、速度場には時間的 C^1 級、空間的 C^2 級、圧力場には時間的 C^0 級、空間的 C^1 級が最低限要求される。また、圧力ポアソン方程式を解く際には、圧力に空間的 C^2 級が要求される。この速度・圧力に対するクラスの見積もりは、そのまま数値計算において要求される最低限の離散化精度に当てはまる。なお、ここでの見積もりは、通常の微分形式の Navier-Stokes 方程式に対してであり、有限体積法（コントロール・ボリューム法）等の積分形式の Navier-Stokes 方程式を支配方程式とする場合には、先の差分法上での微分クラスに対する見積もりのうち、空間的なクラスの制限が1オーダー緩和される。

本研究における直接数値シミュレーションでは、速度場に関しては、空間的には最低限の離散化精度である2次精度、時間的には Navier-Stokes 方程式各項の時間変化を表すことのできる最低限のオーダーである2次精度を取っている。本研究では、フラクショナル・ステップ法を用いるため、時間積分計算上、圧力の代わりに疑似圧力とも呼ばれるスカラー場を解く必要がある。このスカラーは、性質上、時間的精度には係わらず、空間的には圧力の場合と同様の見積もりができる変数である。本研究における疑似圧力の空間的離散化は、そのポアソン方程式上で要求される最低限のオーダーである2次精度で行っている。

関数クラスと構造スケール

ここでは、Navier-Stokes 方程式各項の関数クラスと、その流れ構造スケールに対する意味合いを考察する。Navier-Stokes 方程式は、(1) 非定常項、(2) 観測系の移動、すなわち計算格子変形を含めた非線形

移流項, (3) 圧力勾配項, (4) 粘性拡散項より成る。ここでは、まず空間上のクラスを考える。

速度場に空間的 n 次精度, すなわち C^n 級を要求するとき, 加速度すなわち運動量の時間変化を記述する Navier-Stokes 方程式は C^n 級で表される。各項のクラスは, (1) 非定常項が C^n 級, (2) 空間の1階の微係数を含む移流項が C^{n-1} 級, (4) 二階の微係数を含む粘性拡散項が C^{n-2} 級となる。非線形移流項以外は、関数クラスにより宣言される微分オーダーと数値計算上生じる微係数の次数が等しくなり、各項の効果が関数クラスに直接反映されるが、非線形の場合はこれとは異なり、速度場 C^n 級の時、微係数は本項関数クラスの n 次を超えて、 $2n-1$ 次まで至る。これは移流項の非線形効果とも言えるが、本項は C^n 級ながら、数値計算上でも、実現象上でも、 C^{2n-1} 級相当の効果を含んでいる。圧力勾配項 (3) は、Navier-Stokes 方程式上では各階導関数に対するポテンシャル効果としてはたらく。このとき、圧力関数自体は、作用するいずれの速度導関数より 1 オーダ大きい関数クラスとなる。この速度・圧力間における関数クラスの差が、両者の間の構造のスケール比に現われている。以上の見積もりに、本研究において速度場・圧力場の離散化に要求する 2 次精度を代入すれば、Navier-Stokes 方程式各項の関数クラスは, (1) 非定常項 - C^2 級, (2) 非線形項 - C^1 級, (3) 圧力勾配項 - C^2 級, (4) 粘性拡散項 - C^0 級となる。ただし、移流項 (2) の非線形効果による派生微係数を含めた実質有効クラスは C^3 級に達する。この移流項 (2) の実質有効クラスにおける高次成分 (3 次微係数成分) は、運動量・運動エネルギーを高次項に輸送する役割を持つ。これは、乱流における大スケール運動から小スケール運動へのエネルギー輸送効果を表している。一方、移流項 (2) の関数クラスにも対応する C^1 級関数は、大スケール運動へのエネルギー輸送効果を表す。前者は、非線形移流項によるエネルギー・カスケードの効果、後者は同項によるエネルギー逆伝播 (back propagation) の効果を表している。移流項 (2) には、このような項の非線形性に基づく、広いスケールレンジに対するエネルギー伝播性能がある。粘性項 (4) の空間的関数クラスは速度場より 2 オーダ落ちるが、このことは、本項が曲率の大きい小スケールの運動の持つエネルギーを低次の大スケールの運動に輸送する効果を持つことを意味する。本研究における 2 次精度差分においては、 C^2 級最終オーダーの持つエネルギーが、本項効果により C^0 級の大スケール運動に輸送される。また、本項により、移流項の持つ運動エネルギーの高次成分が低次成分に輸送される。たとえば、非線形移流項中の C^3 級速度変動分布の持つ運動量は、この粘性項 (4) の効果により C^1 級の速度関数上に輸送される。この小スケール運動散逸のメカニズムが粘性拡散に相当する。なお、この C^3 級最終オーダーの速度関数の効果は、粘性拡散上で消費されない場合、速度場に対する空間解像度の制限から、運動方程式上の余剰効果となり数値誤差さらには数値的不安定に直結する。このため、数値計算上では、この効果を小さくするために、計算格子を細かく取る、あるいは離散化精度を上げるすなわち関数クラスを大きく取る等の配慮が必要になる。この配慮が不十分の場合には、運動量・運動エネルギー輸送効果を的確に捉えられなくなり、計算は破綻する。なお、本研究で用いる速度場 2 次精度差分では、空間的 C^2 級速度関数に対する粘性拡散効果は、空間的 C^0 級で評価される。本精度で数値計算は可能であるが、元来離散的な差分法上では C^0 級は不連続に等しく、よってその空間的な分布を仮定するうえでも空間的離散化精度の改善、すなわち 3 次精度以上の空間的離散化が望まれる。

上記に示されるように、運動量輸送を要求する精度内で適切に表現するためにも、支配方程式上の変数について一貫した精度を要求した離散化を行うことが必要である。

次に、速度・圧力場に対する時間的な関数クラス、およびそこに内在する構造スケールについて述べる。Navier-Stokes 方程式中の時間的な演算 (微積分) は、非定常項の 1 回微分のみである。速度場に時間的 n 次精度を要求する場合、すなわち時間的 C^n 級を要求する場合、非定常項自体では C^{n-1} 級が有効関数クラスとなる。よって、この C^{n-1} 級が Navier-Stokes 方程式を支配する関数クラスとなる。この場合、非定常項以外の各項効果は、離散対象点上にこの $n-1$ 次精度で補間されることになる。本研究では、各項の時間的変化を考慮できる 2 次精度すなわち C^2 級を取る。この場合、離散対象点は $\tau^{n+1/2}$ に設定され、この上で非定常項は 2 次精度で離散化され、他の項は 1 次精度で補間される。なお、この 1 次精度補間が、

台形積分則に相当し、Crank-Nicolson 法に相当する。なお、圧力解法上には時間は含まれず、空間スケールの場合と同様、時間スケールのにも圧力場は速度場より 1 オーダ大きな構造であることが示される。

2.2 支配方程式

流れ場に非圧縮性を仮定すると、Cartesian 座標系における Navier-Stokes 方程式、連続の式は、それぞれ次のように表される。

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) v_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

($i = 1, 2, 3$). ここで、 v_i は速度ベクトル Cartesian 成分、 ρ は密度、 ν は動粘性係数を表す。これらは、チャンネル半幅 δ 、層流仮定中心流速 U_1 により無次元化される。

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \operatorname{div} v_i \mathbf{u} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \nabla^2 v_i, \quad (2.3)$$

このとき、レイノルズ数は $\operatorname{Re} = U_1 \delta / \nu$ で定義される。移流項表現には、数値的により安定とされる発散型 (保存型) を用いている。なお、以下の表記において、Cartesian 座標系 x_i およびその成分 (v_i 等) は全て下付きの指標によって表す。Einstein の総和規約もこれに従って定義する。

Navier-Stokes 方程式および速度場の変数には、反変成分に座標変換のヤコビアンを掛けた成分を取る (Rosenfeld, Kwak & Vinokur 1991)。本計算ではスタガード格子系を用いており、この成分はそれぞれの速度成分計算定義点に掛かる計算格子体積の重みを掛けた力および流量を表す。一般座標の計算においては、この他に Cartesian 成分がしばしば用いられる。この場合、支配方程式は、ボリウム・フラックス成分表記に比較して簡略化される。なお、Cartesian 成分による計算においては、スタガード格子系における速度定義成分の各格子面上での直交性が保証されなくなるため、スタガード格子系使用の意味が薄れる。このため、Cartesian 成分を用いる計算は、速度・圧力を同一点で定義する collocated 格子で行われる場合が多い (Zang, Street & Koseff 1994)。

$$J g^i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) = J g^i \cdot \left(-\operatorname{grad} p + \frac{1}{\operatorname{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \right), \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow J \frac{\partial \eta^i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \operatorname{div} v_j \mathbf{u} \right) = J \frac{\partial \eta^i}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 v_j \right), \quad (2.5)$$

$$q^i = J u^i = J \frac{\partial \eta^i}{\partial x_j} v_j. \quad (2.6)$$

ここで、 J は座標変換のヤコビアン、 g^i は反変基底ベクトル、 x_i はカーテシアン座標、 η^i は一般座標を表す ($i = 1, 2, 3$)。 u^i は速度の反変成分であり、これに座標変換のヤコビアンを掛けた速度場の変数 q^i はボリウム・フラックスと呼ばれる。時間偏微分 $\partial/\partial t$ 項は、移動座標系では次式に置き換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta^j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial x_k}{\partial \tau} \frac{\partial \eta^j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \eta^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} - v_g^j \frac{\partial}{\partial \eta^j}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで τ は、それぞれ物理空間と計算空間における時刻を表す。 v_g^j ($j = 1, 2, 3$) は、物理座標速度、すなわち格子点速度の反変成分を表す。

$$v_g^j = \frac{\partial x_k}{\partial \tau} (g^j)_k = \frac{\partial x_k}{\partial \tau} \frac{\partial \eta^j}{\partial x_k}. \quad (2.8)$$

なお, (2.7) 式において次式を用いている.

$$\frac{\partial \eta^j}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial \eta^j}{\partial t} + \frac{\partial x_k}{\partial \tau} \frac{\partial \eta^j}{\partial x_k} = 0$$

(2.5), (2.7) 式より, 移動座標系における運動方程式および連続の式は次のように表される.

$$\frac{\partial q^i}{\partial \tau} + T^i(q) + N^i(q) = -G^i(p) + L^i(q). \quad (2.9)$$

$$D^i q^i = \frac{1}{J} \frac{\partial q^j}{\partial \eta^j} = 0, \quad (2.10)$$

ここで,

$$\begin{aligned} T^i(q) &= -v_j \frac{\partial \gamma_j^i}{\partial \tau} - v_g^m \left(\frac{\partial q^i}{\partial \eta^m} - v_j \frac{\partial \gamma_j^i}{\partial \eta^m} \right) \\ &= -\frac{1}{J} c_k^j q^k \frac{\partial \gamma_j^i}{\partial \tau} - v_g^m \left(\frac{\partial q^i}{\partial \eta^m} - \frac{1}{J} c_k^m q^k \frac{\partial \gamma_j^i}{\partial \eta^m} \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$N^i(q) = J(g^i)_m \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta^j} v^m q^j = \frac{1}{J} \gamma^i_m \frac{\partial}{\partial \eta^j} c_k^m q^k q^j, \quad (2.12)$$

$$G^i(p) = J g^{ij} \frac{\partial p}{\partial \eta^j} = \alpha^{ij} \frac{\partial p}{\partial \eta^j}, \quad (2.13)$$

$$L^i(q) = \frac{1}{Re} J(g^i)_j \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta^k} J g^{kl} \frac{\partial}{\partial \eta^l} v_j = \frac{1}{Re} \frac{1}{J} \gamma_j^i \frac{\partial}{\partial \eta^k} \alpha^{kl} \frac{\partial}{\partial \eta^l} \frac{1}{J} c_m^j q^m. \quad (2.14)$$

また, 次の 3 変数は, 表記簡略化のために新たに定義したメトリックである (Choi, Moin & Kim 1992).

$$c_k^j = (g_k)_j = \frac{\partial x_j}{\partial \eta^k}, \quad \gamma_k^j = J(g^j)_k = J \frac{\partial \eta^j}{\partial x_k}, \quad \alpha^{ij} = J g^{ij}. \quad (2.15)$$

$T^i(q)$, $N^i(q)$, $G^i(p)$, $L^i(q)$ は, それぞれ, 座標時間変形項, 非線形移流項, 圧力勾配項, 線形粘性拡散項を表す. また, $(g^i)_j$ は, i 成分反変基底ベクトルのカーテシアン j 成分, $(g_i)_j$ は, i 成分共変基底ベクトルのカーテシアン j 成分を表す.

以上の定式化は, 3 次元壁面変形, すなわち 3 次元境界適合座標系に基づくものである. 本研究では, 壁面変形に空間的 2 次元を仮定しており, このことにより, 問題, 現象の簡略化に加えて, 定式化, 計算の簡略化・縮小化を図っている. この仮定により, 計算の大幅な高効率化・高速化が可能になる. 全ての方程式は, 変形断面内において一般座標系で記述され, これに直交する変形一定方向においては Cartesian 座標系で記述される. このとき, 運動方程式各項 (2.11) ~ (2.14), 連続の式 (2.2) 式は, それぞれ次のように表される.

運動方程式各項 (2.11) ~ (2.14) 式は,

$i=1$ のとき,

$$T^1(q) = -v_g^j \frac{\partial q^1}{\partial \eta^j}, \quad (2.16)$$

$$N^1(q) = \frac{\partial}{\partial \eta^1} q^1 q^1 + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta^j} q^1 q^j, \quad (2.17)$$

$$G^1(p) = \frac{\partial p}{\partial \eta^1}, \quad (2.18)$$

$$L^1(q) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial \eta^1} \frac{\partial}{\partial \eta^1} q^1 + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta^k} \alpha^{kl} \frac{\partial}{\partial \eta^l} q^1 \right), \quad (2.19)$$

$i=2, 3$ のとき,

$$T^i(q) = -\frac{1}{J} c_k^j q^k \frac{\partial \gamma_j^i}{\partial \tau} - v_g^m \left(\frac{\partial q^j}{\partial \eta^m} - \frac{1}{J} c_k^j q^k \frac{\partial \gamma_j^i}{\partial \eta^m} \right), \quad (2.20)$$

$$N^i(q) = \frac{\partial}{\partial \eta^l} q^l q^i + \frac{1}{J} c_m^i \frac{\partial}{\partial \eta^j} \frac{1}{J} c_k^m q^k q^j, \quad (2.21)$$

$$G^i(p) = \alpha^{ij} \frac{\partial p}{\partial \eta^j}, \quad (2.22)$$

$$L^i(q) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial \eta^l} \frac{\partial}{\partial \eta^l} q^i + \frac{1}{J} \gamma_j^i \frac{\partial}{\partial \eta^k} \alpha^{kl} \frac{\partial}{\partial \eta^j} \frac{1}{J} c_m^j q^m \right), \quad (2.23)$$

連続式 (2.2) 式は,

$$D^i q^i = \frac{\partial q^i}{\partial \eta^1} + \frac{1}{J} \frac{\partial q^j}{\partial \eta^j} = 0, \quad (2.24)$$

ここで, $\eta^1 = x_1$, $q^1 = v_1$, $j, k, l, m = 2, 3$. これらの式は, 計算格子系に制限を加えることにより, たとえばスパン方向に Cartesian 座標系を仮定し, 座標変換の用いる方向を 1 方向のみに限定することにより, さらに簡潔化される.

2.3 離散化手法

2.3.1 時間的離散化手法概説

非定常流れの数値シミュレーションに用いられる時間的離散化手法には, 陽解法, 陰解法, フラクショナル・ステップ法 (Chorin 1969, Temam 1983), influence matrix 法 (Kleiser & Schumann 1980) 等がある.

時間的離散化の性能は, 支配方程式系, すなわち, Navier-Stokes 方程式, 連続の式系に対する収束性, およびその離散化精度によって評価される. 特に, 収束性は, 時間的離散化上の phase error として現われる. この時間的離散化誤差である phase error を除去する方法は陰的解法を用いる以外にないが, 陽的解法を用いる場合にも, この誤差を十分に小さくする高次化等の配慮によって改善を図ることも可能である. ただし, その場合にも, 陽解法を用いる場合には (併用する場合も含めて), phase error に対する見直しを明示しておく必要がある. これらの非定常計算に対する指針は ASME (1993) によっても明示されているが, これらのことについて若干でも配慮を行っている論文は, 現在の直接数値シミュレーションが一般化した時代においても非常に希少である (Jiménez & Moin 1991, Dukowicz & Dvinsky 1992). 一方, 乱流の直接数値シミュレーションの際には, 実際にこれを実用化するうえでの収束判定とも関連して, 数値的負担の軽さも重要なパラメータとなる. しかしながら, これらの事象を全て満足するスキームは存在せず, 計算目的に応じて, 一定の妥協点を設けることが必要である. ここでは, 非定常非圧縮性流に対する時間的離散化手法として主として用いられる先の 4 手法および陽解法と陰解法の混合形式である半陰解法について解説する. 各手法に対する収束性は, Ladyzhenskaya (1979), Chorin (1969), Temam (1983) の記述に基づく.

[陰解法]

任意の離散化精度に対して収束性の保証される数値手法であり, 唯一, 原方程式内挿離散化系の時間進行法である. なお, 次掲のフラクショナル・ステップ法も同じ内挿形式であるが, 原方程式系に対する近似解法という点で異なる. 空間的離散化と同様, 時間的離散化においても, 内挿形式の方が, 外挿形式よりも, 実質上高い精度を見込める. これは, 内挿法における収束性のためであり, 逆に, 外挿法では, このような収束性は一般には保証されていない. 代表的陰解法としては, 0 次 (NS 方程式各項に適用する

場合、速度場については1次の完全陰解法、1次(同速度場については2次)のCrank-Nicolson法(台形則)がある。

陰解法では、連立非線形偏微分方程式を解かなければならないため、解法が非常に大きくなるという欠点がある。このため、繰り返し時間積分を要する乱流の数値シミュレーションにおいては、ほとんど実現不可能な計算手法である。

[フラクショナル・ステップ法]

フラクショナル・ステップ法は、陰解法における収束性を保ちつつ、速度、圧力計算を分離することにより解法の縮小化を図った、Navier-Stokes方程式の近似解法である。特に近年では、本手法を用いたシミュレーション例が多数報告されており、それぞれにおいて、実験値、他の手法による直接数値シミュレーション結果とも非常に良い一致を示している。よって、本手法は、一般的な問題に対し乱流の直接数値シミュレーションを実践できる最良の手法の一つと言える。しかしながら、その一方で、本手法の近似解法化、特に分離方程式の時間的離散化手法に対する依存性が残っており、この点を無視することはできない。この効果の数値的な除去も、速度・圧力場の離散化の高精度化、圧力境界条件の変更、圧力項のdelta-form化等によって試みられている(Dukowicz & Dvinsky 1992)。これらの点に関する系統的な検討を行った例は少なく、Stokes問題に対して、圧力境界条件の異なる半陰的フラクショナル・ステップ法の時間刻み幅に対する収束性の検討が、Dukowicz & Dvinsky (1992)によって行われている例を挙げるに留まる。

本手法の数学的根拠を考慮すれば、また、本手法に数学的な収束性を期待するのであれば、支配方程式は完全陰的に展開されるべきである(Temam 1983)。しかしながら、本手法の長所は解法のコンパクト性にあり、このことは、支配方程式の非線形項に陽解法を用いるなどした線形化によってさらに高めることができる(Chorin 1969)。Kim & Moin (1985)の手法は、中間速度場発展方程式の非線形移流項を陽解法の2次精度Adams-Bashforth法で、線形粘性拡散項を陰解法の2次精度Crank-Nicolson法で表したものであり、陽解法化による解法のコンパクト性と、陰解法化による数値的安定性を同時に達成した手法となっている。この他に、Krettenauer & Schumann (1992)による、陰解法の併用を避け、全ての項を2次精度Adams-Bashforth法で表した完全陽的な直接数値シミュレーションの例もある。また、近年では、数値的安定性を向上させて、時間刻み幅を大きく取る目的から、陽解法部分の省メモリ型3次精度Runge-Kutta法(Spalart, Moser & Rogers 1991)化が進んできている。このフラクショナル・ステップ法の半陰解法化・陽解法化の傾向は、様々な複雑乱流場に対する直接数値シミュレーションの要請とともにさらに強くなってきている。しかしながら、陽解法使用時には、次で述べるような非収束性という問題が常に介在する。また、これに半陰解法を用いる場合には、陽解法部の予測性能の劣化、あるいは陽解法部と陰解法部の予測の不一致、すなわち時間的離散化手法間の位相誤差(phase error)による悪影響が生じる。よって、半陰解法、陽解法のフラクショナル・ステップ法を用いる場合には、時間刻み幅の選択には十分注意を払わなければならない。しかしながら、実際においては、陽解法、半陰解法の場合と等しく、そのフラクショナル・ステップ法適用時においても、数値的不安定を免れることのできる最大限程度の時間刻み幅が取られる傾向がある。

近年では、完全陰的なフラクショナル・ステップ法の乱流の直接数値シミュレーションに対する適用も報告されている(Choi, Moin & Kim 1992)。陰的表現の長所は、数値的に安定ということもあるが、それよりも、陽解法と陰解法といった異なった離散化手法を用いることによる予測不可能な数値誤差の介入、すなわち時間的離散化手法の相違に基づくphase errorを防ぐことができ、各効果を忠実に(離散化手法上平等に)表すことができる。よって、陰解法使用時には、時間刻み幅が十分に細かく取られていない場合には、その効果が数値計算結果に直結してしまうため、その依存性を十分に検討しておく必要がある。この点では、先の陽解法、半陰解法適用時と同様である。

[陽解法]

陽解法は、既知のデータを用い、精度によっては数段階の予測子を準備し、新たな時刻の値を外挿により求める解法である。本手法では連立方程式の解法を含まないため、計算負担は極めて小さくなる。

本手法の問題点は、収束性が保証されないということと、計算負担が小さいことの方で解法が極めて不安定であるために、過分に小さい計算時間刻みを要するという点である。このため、一定時間幅の時間積分に対して、返って時間が掛かることもある。また、この問題回避のために、陰的高次拡散項の形で数値拡散を導入する場合もある。この場合には、解法は半陰解法と同様、連立線形方程式を解かなければならなくなるが、それでもフラクショナル・ステップ法の実線形解法よりは計算負担は遥かに低い。陽解法を用いる場合には、予測精度を高めるために、すなわち外挿誤差を減らすために、より高次の離散化手法が用いられる。なお、陽解法における精度は、収束性を前提としない精度であり、陰解法、もっと一般的には空間的離散化を含めた内挿法の精度とは性質が異なる。本手法では、陰的に求められる厳密解との差である位相誤差を十分小さく抑えるために、過度に小さい時間刻みを取ることが必要となる。これと同様のことが、陽解法に陰解法を組み合わせた半陰解法において言える。

[半陰解法]

半陰解法は、陽解法の特徴計算の簡便さに、数値粘性を粘性拡散項の一部で与えることにより計算の安定化を図った手法に相当する。このため、陽解法に比べて計算時間刻み幅を大きく取ることができるという長所を持つ。Kim, Moin & Moser (1987) の発達チャネル乱流の直接数値シミュレーション手法においても本手法が用いられている。従来は、Kim, Moin & Moser (1987) の手法を踏襲し、非線形移流項に対し陽解法の2次精度 Adams-Bashforth 法、線形粘性拡散項に対し陰解法の2次精度 Crank-Nicolson 法を用いたものが多かったが、近年では、Spalart & Leonard (1985) の直接数値シミュレーションに見られるように、数値的安定性を向上させて時間刻み幅を大きく取る目的から、陽解法部分の2次精度 Adams-Bashforth 法から3次精度 Runge-Kutta 法 (Spalart, Moser & Rogers 1991) へ移る傾向が進んできている。しかしながら、半陰解法を用いた場合には、時間刻み幅を陽解法の予測可能な幅より大きく取ったことによる陽解法の予測誤差が、陰的離散化部分、具体的には粘性拡散効果に吸い上げられることになり、結果として、予測不可能な(目に見えない)数値誤差が時間積分上に常に蓄積されることになる。また、このときの陽解法部と陰解法部の予測誤差は、離散化手法間の位相誤差 (phase error) に相当する。このため、これらの誤差の影響を監視しつつ、その十分小さく抑えられるタイムステップの範囲内で計算を進めていかなければならない。しかしながら、実際においては、数値的不安定を免れることのできる最大の時間刻み幅が取られることが多く、これらの点に対する配慮のなされている例はない。

[influence matrix 法]

Influence matrix 法は支配方程式の線形化を前提とするため、先述の陽解法あるいは半陰解法の部類にも属する。よって、本手法に対する収束性等の数学的・数値的背景は、陽解法、半陰解法の場合と一致する。Influence matrix 法の適用例は、Kleiser & Schumann (1980) による平行平板間発達チャネル乱流に対する適用例が示されて以降、Madabhushi, Balachandar & Vanka (1993) による矩形ダクト内流、Carlson, Berkooz & Lumley (1993) による3次元バンプ上流れ等が示されているが、先述の同じ速度・圧力連立解法である fractional-step 法に比して計算負担が高いことから (35% 増, Madabhushi, Balachandar & Vanka 1993) その乱流のシミュレーションに対する適用例は非常に限られている。

2.3.2 フラクショナル・ステップ法概説

フラクショナル・ステップ法 (Chorin 1969, Temam 1984) は、非圧縮 Navier-Stokes 方程式の近似解法であり、その原理は以下のように示される。

非圧縮 Navier-Stokes 方程式は次のように表される。

$$\partial_t \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f}_u. \quad (2.25)$$

ここで、 \mathbf{f}_u は、非定常項、圧力勾配項を除く、移流項、粘性項、観測系 (座標系) の移動を表す項等より成る。

$$\mathbf{f}_u = (\mathbf{v}_g \cdot \nabla) \mathbf{u} - \text{div } \mathbf{u} \mathbf{u} + \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.26)$$

ここでは、非定常項を離散化した次の形を考える。

$$\mathbf{u}^{n+1} + \Delta \tau \text{grad } p = \mathbf{u}^n + \Delta \tau \mathbf{f}_u. \quad (2.27)$$

(2.27) 式の離散化精度は、関数 \mathbf{f}_u を $\tau^n \sim \tau^{n+1}$ 間のどの時刻について離散化するかによって、速度場について 1~2 次を取りうる。なお、本研究では、時間的離散化精度について、NS 方程式各項の時間的変化を考慮できる 2 次を取る。このとき、時間的離散化は、時刻 τ^n と τ^{n+1} の中間 $\tau^{n+\frac{1}{2}}$ においてなされる。なお、関数 \mathbf{f}_u に対する時間的 2 次精度離散化手法として、後述のように様々な手法が提案されているが、本研究では、このうち 2 次精度陰解法の台形則 (Crank-Nicolson 法) を用いる。

(2.27) 式 ((2.25) 式) は、NS 方程式に対するヘルムホルツ分解を示している。すなわち、右辺に示されるヒルベルト空間内のベクトルは、左辺の発散 0 のソレノイダル・ベクトルと、スカラー関数の勾配によって表される回転 0 のポテンシャル・ベクトルの 2 成分に分解される。一般に、ヒルベルト空間 H 、すなわち内積 (\cdot, \cdot) が定義される実ベクトル値関数 \mathbf{u} より成る空間は、 $\text{div } \mathbf{u} = 0$ を満たす実ベクトル値関数 \mathbf{u} の閉空間 H_σ 、すなわちソレノイダル・ベクトル場と、 H の部分空間で H_σ に直交する空間 H_p に分解できる。 H_p は、スカラー関数 p により表される実ベクトル値関数 ∇p の閉空間に相当し、ポテンシャル・ベクトル場と呼ばれる。この空間分解は、次式によって表される (Ladyzhenskaya, 1961, Fujita & Kato, 1964)。

$$H = H_\sigma \oplus H_p. \quad (2.28)$$

ここで、 \oplus はベクトル空間に対する和の演算を表す。また、ベクトル空間 H_σ と H_p の直交性とは、2 つのベクトル $\mathbf{u} \in H_\sigma$, $\mathbf{v} \in H_p$ のスカラー積 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) に対して、次式の成り立つことを意味する。

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{u} \mathbf{v} dx = \int_\Omega u_i v_i dx = 0. \quad (2.29)$$

ここで、 Ω は n 次元ユークリッド空間 E^n を表し、 \mathbf{u}, \mathbf{v} が、それぞれソレノイダル・ベクトル、ポテンシャル・ベクトルに相当する。

ここで、Hilbert 空間内の任意のベクトルを、その部分空間であるソレノイダル・ベクトル場へ正射影 (orthogonal projection) するオペレータ P_H を考える。これを (2.27) 式に作用させると、ベクトルの直交性より、

$$P_H(\Delta \tau \text{grad } p) = 0. \quad (2.30)$$

よって、次式を導ける。

$$\mathbf{u}^{n+1} = P_H(\mathbf{u}^n + \Delta \tau \mathbf{f}_u). \quad (2.31)$$

ここで、 $\mathbf{u}^{n+1} = P_H(\mathbf{u}^*)$ を満たす Hilbert 空間内のベクトル \mathbf{u}^* を次式によって定義する。

$$\mathbf{u}^* \equiv \mathbf{u}^n + \Delta \tau \mathbf{f}_u. \quad (2.32)$$

もし、(2.32) 式により、 u^* を求めることができれば、(2.27)、(2.32) 式より導かれる正射影、

$$u^{n+1} + \Delta\tau \operatorname{grad} p = u^*, \quad (2.33)$$

により、 τ^{n+1} 時刻における速度場を求めることができる。なお、(2.33) 式中の圧力 p は、(2.33) 式両辺に div を作用させることによって得られる次のポアソン方程式を解いて求めることができる。

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\Delta\tau} \operatorname{div} u^*, \quad (2.34)$$

フラクショナル・ステップ法の長所は、ここに示されるように、速度場と圧力場の解法を分離できる点にある。このことにより、速度場と圧力場の偏微分方程式の連立解法を、大幅に縮小化することができる。

以上においては、(2.32) 式右辺の fu の離散化には触れていないが、それ以外の箇所においては、本手法は一切の近似、モデル化を含んでいない。 fu は速度場の関数であり、本来、 τ^{n+1} 、 $\tau^n \dots$ 時刻における速度場 u^{n+1} 、 $u^n \dots$ を用いて離散化されなければならない。このうち時刻 τ^{n+1} における速度場 u^{n+1} については、(2.32) 式の解法では得ることができない。陽解法適用時には、 u^{n+1} を用いないため、(2.32) 式の時間的離散化について特別な配慮は必要ないが、一方で、陽解法単独の場合と同様に、本手法の収束性に対する疑問が残されることになる。(2.32) 式離散化に陰解法を用いる場合には、 u^{n+1} が必要になり、よって、これを補う時刻 τ^{n+1} における変数が必要になる。なお、 u^{n+1} を得るために、(2.32) 式と (2.33) 式 (2.34) 式を連立させて解くことは、簡易解法としての本手法の長所が失われるため避ける。Temam (1984) は、この問題に際し、関数 fu 内の速度場 u^{n+1} を中間速度場 u^* で置き換えた時間的 1 次精度の完全陰解法により、本手法が Navier-Stokes 解に収束することを示している。このことにより、陰解法使用時にも、(2.32) 式の解法を単独で終結することができ、フラクショナル・ステップ法の解法のコンパクト性を保つことができる。

時間的に 1 次精度の Euler 陽解法を併用した場合についても、同様の収束性が Chorin (1969) によって示されている。Chorin (1969) は、本手法の実用化を考慮して、非線形項に時間的 1 次精度の Euler 陽解法、他の項に陰的 1 次精度の完全陰解法を用いている。 fu 内に陽的離散化を用いる場合には、中間速度変数 u^* の導入を避けることができ、特に非線形項に陽解法を用いることによって解法を線形化することができるため、計算の大幅な縮小化を図ることができる。一方、フラクショナル・ステップ法が、後述のように時刻 τ^n 、 τ^{n+1} 間のベクトル発展・射影より構成される解法であることを考えれば、この 2 時刻間の多分割化 (Chorin 1969, Temam 1984, Rai & Moin 1991)、および陰解法使用時の τ^{n-1} 以前の時刻まで及ぶ離散点の拡張、すなわち高次精度陽解法の併用 (Kim & Moin 1985) より期待される効果は極めて不明瞭である。これは、 fu に対する時間的離散化、すなわち (2.32) 式に対する発展方程式化の考え自体に既に近似が含まれているということと、 τ^n 、 τ^{n+1} 間の離散化の前後には、ベクトル射影という操作が挟まれており、 τ^n より後の時刻の速度場および τ^{n+1} より先の速度場が、関数 fu を構成する関数 $u^n \sim u^*$ の時間的離散点の延長上に存在することが期待できないことによる。なお、フラクショナル・ステップ法に完全陽解法を用いる場合にはこの種の問題は生じない (収束性についての問題は残る)。フラクショナル・ステップ法における速度ベクトルの発展・射影という解釈に基づけば、フラクショナル・ステップ法で期待できる時間的離散化手法は、陽解法としては、1 次精度の Euler 法、陰解法としては、1 次精度の完全陰解法と、2 次精度の Crank-Nicolson 法 (台形積分則) に限られたものとなる。しかしながら、本手法は本質的に近似解法であり、計算時間刻み幅等の計算条件を十分吟味したうえで、高次の陽解法を用いることによる数値的な改善も期待できる。

速度場 u^{n+1} と中間速度場 u^* の可換性は、時間的離散化上、(2.32) 式を、時刻 τ^n より仮想的 (Hilbert 空間内、射影前) 速度場 u^* の属する時刻 τ^- へ至る発展方程式とみなすことに対応する。座標基底が時刻によって変化しない系では、中間速度 u^* の属する時刻 τ^- を特定する必要はないが、計算格子が変形する移動座標系においては、支配方程式の離散化の際に必要な基底ベクトルを特定する目的から、その参

照時刻 τ^* を知る必要がある。(2.32) 式が発展方程式とみなせることは先に述べたが、(2.33) 式についても、(2.32) 式と同様計算時間ステップ $\Delta\tau$ を含むことから、発展方程式と考えることが可能である。しかしながら、これら 2 式中に含まれる計算時間幅 $\Delta\tau$ を、それぞれの時間進行分と考えてしまうと、全体の時間発展は $2\Delta\tau$ となり、これは、実時間間隔の $\Delta\tau$ に矛盾してしまう。

ここで、先に (2.33) 式を Hilbert 空間→ソレノイダル空間の射影式と考えたことを考慮して、(2.33) 式の役割を一定時刻 τ^{n+1} 上でのベクトル射影のみに限ることとする。このことにより、(2.33) 式を構成する諸量も時刻 τ^{n+1} に属することになり、中間速度 u^* の属する時刻 τ^* も τ^{n+1} に特定できる。そして (2.32) 式は、時刻 τ^n より時刻 τ^{n+1} へ至る発展方程式となる。ただし、速度ベクトルに対してのものではなく、その正射影前のベクトル u^* に対する発展方程式となる。この解釈により、フラクショナル・ステップ法に対する解釈が明らかになると同時に、時間的変形境界を含む移動座標系に対しても対応可能な一般的な定式化が可能となる。

次に、(2.32) 式 fu に対する時間的離散化手法として、これまでに提案されている主要なものを示しておく。なお、ここでは、座標系の移動を表す (2.26) 式 fu 中の $(v_g \cdot \nabla)u$ は省いて示す。

Chorin (1969) は、

$$fu = (u^n \cdot \nabla)u^* + \nabla^2 u^*, \quad (2.35)$$

として、基本的には 1 次精度の完全陰解法を用い、非線形移流項の移流成分については 1 次精度 Euler 陽解法を用いている。1 次精度陽解法の適用は、本手法の実用化を意識したうえでのもので、このことにより本解法は線形となり、計算負担は大幅に軽減される。

一方、Temam (1984) は、

$$fu = \frac{1}{2}((u^* \cdot \nabla)u^* + \text{div } u^* u^*) + \nabla^2 u^*, \quad (2.36)$$

として、移流項に反対称 (skew-symmetric) 型を用い数値的安定化を図ったうえで、各項に対し 1 次精度の完全陰解法を用いている。本手法における時間的離散化は、Chorin (1969) の基本形と一致する。

フラクショナル・ステップ法は、非圧縮性非定常流れに対する数値解法として、特に乱流の直接数値シミュレーション手法として Kim & Moin (1985) によって用いられて以降、様々な系に対して用いられている。直接シミュレーションにおいては、Chorin (1969) や Temam (1984) によって議論された NS 方程式に対する収束性のほかに、時間的な離散化精度も要求される。従来の乱流の直接数値シミュレーションにおいては、Navier-Stokes 方程式各項の時間変化を考慮できる 2 次精度が取られることが多く、本研究においてもこれに従っている。時間的 2 次精度は、基本的には当該精度の陰解法である Crank-Nicolson 法により、用途に応じて、先にも述べた理由から、これに高次の陽解法が併用される。Kim & Moin (1985) は、2 次精度 Adams-Bashforth 法によって保存型表示の非線形項を陽的に与え、

$$fu = -\frac{1}{2} \text{div} (3u^n u^n - u^{n-1} u^{n-1}) + \frac{1}{2} \nabla^2 (u^* + u^n), \quad (2.37)$$

としている。Le & Moin (1991), Rai & Moin (1991) は、時刻 $\tau^n \sim \tau^{n+1}$ を 3 段階に分割し、非線形移流項に対しては省メモリ型の 3 次精度 Runge-Kutta 法を、粘性項に対しては Crank-Nicolson 法を用いている (Spalart, Moser & Rogers 1991)。なお、Le & Moin (1991) は移流項を保存型で表し、Rai & Moin (1991) はこれを非保存型で表している。3 次精度 Runge-Kutta 法により、Kim & Moin (1985) の場合より計算が安定化され、計算時間ステップも大きく取ることができるようになる (Le & Moin 1991, Rai & Moin 1991)。

Rosenfeld, Kwak & Vinokur (1991) は、一般座標問題に対し、移流項については Adams-Bashforth 法、粘性項については、対角項に各種陰解法、非対角項に移流項と同じ陽解法を用いる形を提案している。本手法は、引き続き、移動境界を含む流れ場に対して適用されている (Rosenfeld & Kwak 1991)。一般座

標問題における粘性拡散項に対する陽解法と陰解法の併用は、計算の高効率化のためにしばしば用いられる (Zang, Street & Koseff 1994).

Chorin (1969) や Temam (1984) による完全陰解法を 2 次精度陰解法に拡張すると、全ての項に Crank-Nicolson 法 (台形則) を用いた Choi, Moin & Kim (1992) の定式化に到達する。なお、ここでは移流項は保存型で表されている。

$$f\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\operatorname{div}(\mathbf{u}^*\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n\mathbf{u}^n) + \frac{1}{2}\nabla^2(\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n). \quad (2.38)$$

Choi & Moin (1994) は、この完全 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法の時間積分上の数値誤差を小さくする目的で、(2.25) 式両辺に $-\operatorname{grad} p^n$ を加えた圧力勾配項に対する delta-form を示した。この圧力項に対する delta-form 化は、本計算手法の近似化の影響の現われる計算圧力による射影誤差をより小さく抑えることを期待してのものである。なお、この操作による数値計算上の損害は (理論上では) 存在しない。このとき (2.27) 式は、

$$\mathbf{u}^{n+1} + \Delta\tau \operatorname{grad} p^{n+1} - \Delta\tau \operatorname{grad} p^n = \mathbf{u}^n + \Delta\tau f\mathbf{u} - \Delta\tau \operatorname{grad} p^n, \quad (2.39)$$

となり、解法は中間速度場 \mathbf{u}^* を介して次の 2 式により構成される。

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta\tau f\mathbf{u} - \Delta\tau \operatorname{grad} p^n, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} + \Delta\tau \operatorname{grad} p^{n+1} - \Delta\tau \operatorname{grad} p^n = \mathbf{u}^*. \quad (2.41)$$

なお、(2.41) 式は、次のように分解して解かれる (Choi & Moin 1994)。

$$\hat{\mathbf{u}} - \Delta\tau \operatorname{grad} p^n = \mathbf{u}^*, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} + \Delta\tau \operatorname{grad} p^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}. \quad (2.43)$$

ここでは、また新たな中間速度場 $\hat{\mathbf{u}}$ を定義しているが、これは (2.42) 式によって $\hat{\mathbf{u}}$ より代数的に求めることができる。

2.3.3 移動座標系フラクショナル・ステップ法

計算領域に移動境界が含まれる場合、流れ場の変化に加え、境界適合座標の基底の時間的な変化まで考慮しなければならない。境界適合座標系 (一般座標系) における、フラクショナル・ステップ法適用時の基底参照の方法については前章で述べた。ここでは、本研究で用いる修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法 (Choi & Moin 1994, (2.40) ~ (2.43) 式) の移動座標系拡張形式を示す。

(2.9) ~ (2.14) 式の表記を用いると、移動座標系における修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法は次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{q^{*i} - q^{in}}{\Delta\tau} &= \frac{1}{2} \left(L^{in+1}(q^*) + L^{in}(q^n) \right) - \frac{1}{2} \left(T^{in+1}(q^*) + T^{in}(q^n) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(N^{in+1}(q^*) + N^{in}(q^n) \right) - G^{in}(\phi^n), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\frac{\hat{q}^i - q^{*i}}{\Delta\tau} = G^{in}(\phi^n), \quad (2.45)$$

$$\frac{q^{in+1} - \hat{q}^i}{\Delta\tau} = -G^{in+1}(\phi^{n+1}). \quad (2.46)$$

ここで、変数の肩に付いている $n, n+1$ は、それぞれ座標基底の参照時刻 τ^n, τ^{n+1} を表す。ここで、(2.46) 式内のスカラー関数 (計算圧力) ϕ^{n+1} は、(2.46) 式の発数を取った次式によって求められる。

$$(D^i G^i)^{n+1}(\phi^{n+1}) = \frac{1}{\Delta\tau} D^{in+1} \hat{q}^i. \quad (2.47)$$

スカラー ϕ^{n+1} の境界条件については, Chorin (1969), Temam (1984) に従い,

$$G^{2n+1}(\phi^{n+1}) = \alpha^{2j} \frac{\partial \phi}{\partial \eta^j} \Big|^{n+1} = 0, \quad (2.48)$$

を与える。このとき、中間速度 q^{n+1} に対する境界条件も決まる。

$$q^{n+1} = q^{2n+1}. \quad (2.49)$$

2.3.4 空間的離散化手法概説

直接数値シミュレーションの空間的離散化手法としては、スペクトル法 (Canuto et al. 1988), 有限差分法 (Peyret & Taylor 1983), スペクトル・エレメント法 (Patera 1984) が挙げられる。

スペクトル法は、離散化を多項式展開によって表す手法である。本手法は、計算格子数すなわち項数に対して指数的な収束性を期待できるという長所を持ち、この点で後に述べる差分法に優れている。一方、本手法適用の際には、支配方程式の線形化が要求され、このため非線形の支配方程式に対しては陽的な離散化が必要になる。このため、空間的離散化にスペクトル法を用いる場合には、時間的な離散化は、陽解法、あるいは非線形項に陽解法を用いる半陰解法に制限される。前章で述べたように、陽解法 (半陰解法) には、収束性が保証されないという欠点があるため、スペクトル法を用いる場合には、時間刻み幅を十分細かくし、その影響を十分吟味しておく必要がある。スペクトル法で用いられる代表的な多項式としては、Cartesian 周期境界に対する Fourier 級数、球面周期境界に対する Legendre 多項式、2つの界面 (壁面等) 間の Chebyshev 多項式、これらをさらに一般化した Jacobi 多項式がある (Canuto et al. 1988)。スペクトル法の乱流の直接数値シミュレーションへの適用例としては、Kim, Moin & Moser (1987) による2方向 Fourier 級数、1方向 Chebyshev 多項式を用いた平行平板間チャネル乱流の直接数値シミュレーションを初め、Spalart (1988) による2方向 Fourier 級数、1方向 Jacobi 多項式による exponential mapping を用いた乱流境界層の直接数値シミュレーション等がある。スペクトル法の複雑境界を含む流れ場に対する適用法も検討されており、それらは大きく mapping と patching に分けられる (Orszag 1980)。mapping は座標変換を用いる手法であり、patching は分割領域内のスペクトル展開であり、スペクトル・エレメント法に相当する。乱流の直接数値シミュレーションにおけるスペクトル法の有用性は、先に示した指数的な収束性以上に、その計算の高速性にある。乱流のシミュレーションにおいては、統計量の計算や乱流諸量の時間変化を追跡するために過大な時間積分を要するため、解法のコンパクト性、すなわち迅速に時間発展計算を行えることが必須の条件とされる。この点で、高速フーリエ変換等の高速解法を用いることができることのメリットは大きい。

スペクトル・エレメント法 (Patera 1984) は高次の有限要素法であり、スペクトル法の patching でもある。本手法は、有限要素法の流れ場に対する柔軟性と、スペクトル法の指数的収束性を持つ。乱流の直接数値シミュレーション例としては、Chu & Karniadakis (1993) によるリブレット面上乱流のシミュレーション等があるが、有限要素法固有の計算負担の大きさから、本手法による3次元変形境界上の乱流のシミュレーションは依然行われていない。すなわち、スペクトル・エレメント法は、計算負荷の面では、スペクトル法、差分法に対して柔軟とは言えない面を持つ。また、スペクトル法における場合と同様、本手法においても、時間的に陽的 (半陰的) な離散化、すなわち線形解法が要求される (Karniadakis, Israeli & Orszag 1991)。

有限差分法の乱流の直接数値シミュレーションに対する有用性は、特にその適用の柔軟性によって認識されている。Rai & Moin (1991) によって、高次風上差分法 (移流項に対し5次精度風上差分、粘性項に対し4次精度中心差分) の乱流直接数値シミュレーションに対する有用性が示された。Lele (1992) は、本来の精度で要求される格子点数より少ない設定で、高次の離散化を実現するコンパクト有限差分法 (Hirsh 1975, Adam 1977) の有用性を示した。一方、Kim & Moin (1985) による2次精度中心差分を用いたチャ

ネル乱流の直接数値シミュレーション以降、数値計算上で空間的離散化に要求される最小のオーダーである 2 次精度差分の乱流直接数値シミュレーションに対する有用性も多くのシミュレーション結果によって認識されている。先に示した 2 法と異なり、差分法を用いる場合には、収束性に優れた陰解法、あるいは陰的 fractional step 法の適用が可能となる。乱流のシミュレーションにおいては、空間的な離散化のみでなく時間的な離散化についても注意を払う必要があり、差分法はこの両者を考慮することのできる手法である。空間的離散化と時間的な離散化のカップリングを考えれば、全体としては、先の 2 法、すなわちスペクトル法、スペクトル・エレメント法が必ずしも差分法よりも精度の高い手法とは言えないことは明らかである。むしろ、時空間的に陰的な離散化を行う場合には収束性が保証されるため、離散化手法の選択によっては差分法が最も高精度な計算手法となりうる。本研究では、時間的離散化手法として陰的フラクショナル・ステップ法、空間的離散化手法として 2 次精度差分法を用いる。本手法は、空間的離散化という点では最低のオーダーになるが、時間的に陰的離散化手法を選択することによって、全体として収束を保証する解法を構成する。

2.3.5 2 次精度差分

差分法は、局所にける諸量の評価を、要求される精度に基づいて、その点まわりの数点のデータを用いて離散的に表す手法である。離散化の保存性 (梶島 1994, 森西 1996)、一貫性 (鈴木・河村 1994) は、低次の離散化、特に補間演算に 1 オーダー精度を落とした離散化手法を用いた場合、あるいは低次の表面積分、特に 0 次精度の積分離散化に基づく場合に生じる問題である。空間的離散化における外挿化の欠陥性は諸保存量の計算領域からの漏れ等の事象により広く知られている。本研究においてもこのことを確認しているが、これと同様のことが、時間的な離散化の上でも生じる。先の保存性・一貫性に対する議論の上では、この時間的な外挿化、すなわち陽解法化に対する配慮が欠けている。時間的離散化の外挿化、すなわち陽解法化に伴う保存量の非保存性の問題は、移動座標系の場合には基底関係諸量に対しても現われる。この分野では、古くから幾何保存則 (GCL, Geometric conservation law) に対する検討が様々な形で行われており (Thomas & Lombard 1979)、この陽解法化に伴う非保存性もその一端に属する。過大な時間積分を要する乱流の数値シミュレーションにおいては、流れ場諸量の保存性の崩壊は、数値的不安定さらには計算の破綻へとつながる。これらの数値的保存性に対する問題は、時空間全ての方向に対して内挿形式、時間的には特に陰解法を用いることによって回避することができるが、一般的には計算負担からの制約により時空間的完全陰解法化は容易ではない。本研究では、この時空間的に完全陰的な解法の適用を試みる。これにより、本計算手法では、流れ場・基底諸量に対する保存性は計算精度の範囲内で保証される。なお、差分の一貫性については、各離散点上で微分・補間・積分の全ての演算を要求する一定の精度以上で離散化することにより、すなわち離散的に要求精度を満足させることによって保証している。強形式に対する解法である差分法における離散化の一貫性は、本来、このことを指す。計算格子単位上、あるいは計算体積上における積分的すなわち弱い意味での一貫性、保存性の概念は差分法にはなく (そもそも後述のように離散点が発散し、収束しない)、本議論はむしろ弱形式の有限要素法に固有のものである。

また、離散化の際には、項の形に対する配慮が必要になる。たとえば、本研究のように Navier-Stokes 方程式中の速度場に時間的 2 次精度を要求する場合、本章序論でも述べたように、非定常項の速度場には 2 次精度を要求し、その他の時間的演算 (特に時間微分) を含まない項については 1 次精度による離散化対象点、具体的には $t^{n+1/2}$ 時刻上への 1 次精度補間、すなわち Crank-Nicolson 法にあたる線形補間が必要になる。また、非線形移流項の空間的離散化においても項の形式が依存する。すなわち、Euler 微分本来の形式である移流速度を微分から外した勾配型の離散化においては、項の形が速度とその微分との積になるため、移流速度の補間が必要となる格子系 (スタガード格子系) においては、その補間精度を速度場に要求される精度より 1 次落とすことが可能になるが (Rai & Moin, 1991)、本研究におけるように保

存形式 (発散型) でこの項の離散化を行う場合には、移流速度は速度との積を形成するため、その補間には速度に要求される精度と同じものを用いる必要がある。なお、勾配型移流項の移流速度補間精度を1次落とした場合 ($n-1$ 次)、項全体の関数クラスは C^{n-1} 級で変わらないが、非線形効果による派生成分を含めた実質有効クラスは $C^{2(n-1)}$ 級となる。一方、保存形式で移流速度補間精度を1次落とした場合、項全体の関数クラスは C^{n-2} 級、非線形効果を考慮した実質有効クラスは $C^{2(n-1)}$ 級となる。速度場に2次精度を要求する場合、このうち1次補間勾配型が C^1 級で実質 C^2 級、一方の1次補間発散型が C^0 級で実質 C^2 級となる。両ケースにおいて実質有効クラスが C^2 級に保たれていることから、非線形項の高次化による、関数クラス上のエネルギー・カスケード効果の一部分が欠落することが示される。また、勾配型の関数クラスが1オーダー落ちており、このことは移流効果の空間分布情報の欠落を意味する。

ここでは、本シミュレーションで用いる2次精度差分法、すなわち、本章概論で述べたように、Navier-Stokes 方程式・圧力ポアソン方程式系のシミュレーションを行える最低限の離散化精度に対する諸公式を示す。2次精度差分には、本章概論で述べたような、高い空間解像度を要求する乱流のシミュレーションには十分ではない面もあるが、最低限の精度を保証するシミュレーションは可能である。なお、2次精度差分が乱流シミュレーションに十分でないとする見解もあるが、それらは、梶島 (1994)、鈴木・河村 (1994)、森西 (1996) のように非線形移流項内の速度場を1次精度で離散化しており、2次精度本来の移流効果を表していない。なお、本研究で示す本来の2次精度差分をそれより高次のものと比較・検討した例は現在のところ存在しない。また、本章概論でも示したように、速度場の空間的離散化には、本来、3次精度以上が望まれる。

離散化には、微分、補間、積分という3種類の演算があり、全ての離散化式は Taylor 展開をもとに計算される。本計算では差分法を用いているために、積分演算はほとんど存在しない。本シミュレーションにおける積分演算は、流量を一定に保つ圧力差の計算、壁面摩擦係数、および投入仕事を含むチャネル内運動エネルギー・バランスの計算等の、速度場の精度とは直接には関係しない箇所に限られている。よって、ここでは、微分・補間演算に対する2次精度離散化手法を中心に述べる。

境界適合座標を用いる場合、離散化は等間隔に切った計算空間上で行われる。この場合、境界形状を滑らかな関数で表すことができ、境界を空間内の点補間で与える場合よりも、変形境界の流れ場に及ぼす効果をより忠実に表すことができる。一方、座標変換を用いた場合の等間隔格子 (計算空間) 上の離散化においては、物理空間における離散化の場合と異なり、離散点間隔のストレッチングに対する評価がなされない。離散化に座標変換を用いる場合には、境界表現の適切化に対する代償として、このことによる悪影響を受け入れなければならない。

本計算では、次節でも述べるようにスタガード格子系を用いている。ここでは、まず、図 2.1 に示すような1次元の系を考える。図において、変数 f と ϕ の定義点がスタガードの関係にあり、座標 x における $f(x)$ は定義されていない。

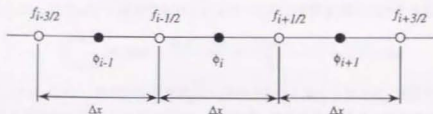


Figure 2.1: 1次元スタガード格子系

x 方向の格子間隔を Δx とすると、関数 $f(x)$ の $x \pm \Delta x$, $x \pm 3\Delta x$ における値 $f(x \pm \frac{1}{2}\Delta x)$, $f(x \pm \frac{3}{2}\Delta x)$

は、次の Taylor 展開によって表される。

$$f(x \pm \frac{1}{2}\Delta x) = f(x) \pm \frac{1}{2}\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{8}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(\Delta x^3), \quad (2.50)$$

$$f(x \pm \frac{3}{2}\Delta x) = f(x) \pm \frac{3}{2}\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{9}{8}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(\Delta x^3), \quad (2.51)$$

ここで、右辺には Δx について 2 次の項まで示しており、2 次精度離散化式においては、全てこのオーダーまで考慮しなければならない。また、各微分量は $x=x$ における値を示す。2 次精度離散化式は、これらの式に基づいて得られる。 $f(x)$ の補間については、2 次精度の場合 x 周りの 3 点によって得られるが、後述の壁面上を除いては、格子点分布の対象性を考慮して、次式によって示される 4 点を用いる 3 次精度補間を用いる。

$$f(x) = \frac{-f(x-3\Delta x/2) + 9(f(x-\Delta x/2) + f(x+\Delta x/2)) - f(x+3\Delta x/2)}{16}, \quad (2.52)$$

なお、多くの名目上 2 次精度差分で用いられている次の補間式は 1 次精度 (線形補間) に相当し、2 次精度差分で用いることは適切ではない。

$$f(x) = \frac{f(x-\Delta x/2) + f(x+\Delta x/2)}{2} + O(\Delta x^2), \quad (2.53)$$

差分法における積分演算は、先にも述べたように、格子面を通過する種々のフラックスの計算にほとんど限られている。これは、図 2.1 に示した 1 次元の系では、 $\phi(x)$, $\phi(x \pm \Delta x)$ を用いて離散化する場合に相当する。ここでは、長さ Δx の $\phi(x)$ のコントロール・ボリューム (線分) 上での $\phi(x)$ の 2 次精度積分を考える。このために、 $x = x + \Delta x_1$ ($-\Delta x/2 \leq \Delta x_1 \leq \Delta x/2$) における離散化を考える。このとき、 $\phi(x)$, $\phi(x \pm \Delta x)$ は次式によって表される。

$$\phi(x) = \phi(x + \Delta x_1) - \Delta x_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x_1)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + O((\Delta x_1)^3), \quad (2.54)$$

$$\phi(x + \Delta x) = \phi(x + \Delta x_1) + (\Delta x - \Delta x_1) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x - \Delta x_1)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + O((\Delta x - \Delta x_1)^3), \quad (2.55)$$

$$\phi(x - \Delta x) = \phi(x + \Delta x_1) - (\Delta x + \Delta x_1) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta x_1)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + O((\Delta x + \Delta x_1)^3), \quad (2.56)$$

なお、(2.54)~(2.56) 式における微分値は、 $x = x + \Delta x_1$ における値を示す。(2.54)~(2.56) 式より、 $\phi(x + \Delta x_1)$ を得る。

$$\phi(x + \Delta x_1) = \frac{1}{2\Delta x^2} \{-\Delta x_1(\Delta x - \Delta x_1)\phi(x - \Delta x) + 2(\Delta x - \Delta x_1)(\Delta x + \Delta x_1)\phi(x) + \Delta x_1(\Delta x + \Delta x_1)\phi(x + \Delta x)\}. \quad (2.57)$$

これを $-\Delta x/2 \leq \Delta x_1 \leq \Delta x/2$ で積分することにより、次の 2 次精度積分に対する離散化式を得る。

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \phi(x) dx = \frac{\phi(x - \Delta x) + 2\phi(x) + \phi(x + \Delta x)}{24} \Delta x. \quad (2.58)$$

このように、2, 3 次元のほか、壁面近傍で離散点の選択が異なる場合も含めて、積分スキームにおいては、セル中心に対する重みが圧倒的に大きくなる。このため、積分演算が連立支配方程式の解法以外にしか出てこない差分法においては、セル中心の値のみを用いる 0 次精度の積分スキームで十分な場合が多い。本計算においても、離散化精度には係わらない流量計算の際の体積積分には、計算セル内の中心値のみを用いる 0 次精度の積分スキームを用いている。なお、この 0 次のアルゴリズムによる場合にも、倍精度計算時で単精度の範囲の流量保存性を確認している。

有限体積分法 (コントロール・ボリューム法) は積分形式の差分法とも言えるが, 既存の殆ど手法は, この積分の段階で簡略化しすぎた定式化を行っている。有限体積分法では, Navier-Stokes 方程式の体積分を面積分に置き換え, この式の離散化を行っている。本章概論でも述べたように, この積分方程式に最低限要求される空間的離散化精度は 1 次である。よって, 微分, 補間に加えて, 積分に対してもそれに相当する離散化を行わなければならない。ところが, 有限体積分法の離散化の第一段階となるこの面 (2 次元の場合, 線) 積分の離散化において, 殆んど全てのプログラムがこれを 0 次精度, すなわち, 面積分を面上代表値で表す形式を取っている。なお, 1 次精度面積分 (2 次元) には最低 3 点, 離散点の対称性を考えればそれ以上を取る必要がある。1 次精度面積分は, 図 2.2 に示した ϕ のように, セル中心で関数が定義される系では, この中心点 $\phi_{i,j}$ を用いる場合, x 方向あるいは y 方向のいずれか 2 点を加えた計 3 点で行うことができる。離散点の対称性を考えれば, $\phi_{i,j}$ 上の対角位置にある, $\phi_{i+1,j+1}$, $\phi_{i+1,j-1}$, $\phi_{i-1,j+1}$, $\phi_{i-1,j-1}$ の 4 点を用いる方法が妥当である。図 2.2 上の ϕ の 1 セル $-\Delta x/2 \leq \Delta x_1 \leq \Delta x/2$, $-\Delta y/2 \leq \Delta y_1 \leq \Delta y/2$ 当たりの 1 次精度積分は, $\phi_{i,j}$ を用いる場合, 次の 3 点,

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \phi dx dy = \frac{\phi_{i-1,j} + 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{24} \Delta x \Delta y, \quad (2.59)$$

あるいは,

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \phi dx dy = \frac{\phi_{i,j-1} + 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{24} \Delta x \Delta y, \quad (2.60)$$

によって, また, 離散点の対称性を優先すれば, $\phi_{i,j}$ を離散点から外した次の 4 点を用いる積分式が導かれる。

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \phi dx dy = \frac{\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j-1}}{4} \Delta x \Delta y. \quad (2.61)$$

これらの積分公式 (2.59)~(2.61) 式は, (2.58) 式と同様, テイラー展開式から求められる。

2 次元の有限体積分法では (2.58) 式, 3 次元の有限体積分法では (2.59)~(2.61) 式のいずれかを用いて, 積分型の Navier-Stokes 方程式を離散化しなければならない。このため, 有限体積分法では, 微分演算が 2 次から 1 次に軽減される反面, 積分型の支配方程式の離散化を逆に難しくしてしまう。なお, 有限体積分法では, 積分演算が支配方程式の離散化精度に直接関係するため, セル中心値に対する重みが他に比較して大きいというだけで, それらの項を離散化から外すことはできない。

一方, 図 2.1 における, ϕ の $x=x$ における 1 階, 2 階の微分値については,

$$\phi(x \pm \Delta x) = \phi(x) \pm \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + O(\Delta x^3), \quad (2.62)$$

より, 次式を得る。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x - \Delta x)}{2\Delta x}, \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi(x + \Delta x) - 2\phi(x) + \phi(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}. \quad (2.64)$$

次に, 壁面近傍における離散化の扱い方について述べる。平板上の流れのシミュレーションの場合には, 壁面内に流れ場に対称な格子点を設け, 壁面上での勾配を制御するように, その仮想点上の値を容易に与えることができるが, 壁面形状が変形している場合には, そのような処置は一般的に容易ではない。よって, 本研究で扱うような変形壁面上の流れのシミュレーションでは片側差分が用いられる。このとき, 数値的不安定, 具体的には, 流量, 運動量の壁面からの漏れによる計算の発散を防ぐために, 外挿型差分は避けなければならない。外挿を用いた場合には, いかに小さい計算格子を取っても壁面からの流量, 運動量の漏れをコントロールすることができないことを, 本研究におけるプログラミングの段階で確認している。本研究ではスタガード格子系を用いているが, 外挿を防止するために, 壁面上では変則的に全

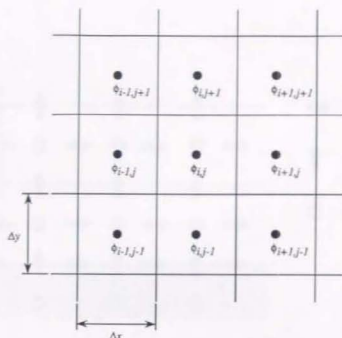


Figure 2.2: 有限体積法-1次精度積分

ての変数が格子点を持つように格子系をアレンジなおしている (図 2.3 参照). このことにより, 壁面上で全ての離散化を, 当該精度の (本研究では 2 次精度の) 内挿型片側差分で表すことが可能になる. なお, 壁面近傍の空間離散化に対して, 精度を落とす方法も報告されているが, この場合には壁面近傍で物理的に異なる現象をシミュレートしていることになり, 適切な処置とはいえない.

図 2.4 に示すように, 壁面上に格子点がある場合, 1 階, 2 階微分は, 下壁, 上壁についてそれぞれ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm \frac{1}{2\Delta x} \{-\phi(x \pm 2\Delta x) + 4\phi(x \pm \Delta x) - 3\phi(x)\}, \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \{\phi(x \pm 2\Delta x) - 2\phi(x \pm \Delta x) + \phi(x)\}, \quad (2.66)$$

と表される. 壁面上の補間演算については, 壁面上に格子点があるか, (2.62) 式で行えるかのいずれかである.

図 2.5 に示すように, 壁面から半格子幅離れて格子点 $\phi(x)$ が存在する場合, 1 階, 2 階微分は, 下壁, 上壁についてそれぞれ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm \frac{1}{3\Delta x} \left\{ \phi(x \pm \Delta x) + 3\phi(x) - 4\phi(x \mp \frac{1}{2}\Delta x) \right\}, \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{4}{3(\Delta x)^2} \left\{ \phi(x \pm \Delta x) - 3\phi(x) + 2\phi(x \mp \frac{1}{2}\Delta x) \right\}, \quad (2.68)$$

と表される. また, ϕ_i に対するスタガード格子点で定義される変数 $f(x)$ の ϕ_i ノード上への補間は, 壁面上に立つ格子線上の 3 点を用いる 2 次精度で行われる. 補間式は, 下壁, 上壁について, それぞれ次式で与えられる.

$$f(x) = \frac{1}{8} \left\{ 3f(x \mp \frac{1}{2}\Delta x) + 6f(x \pm \frac{1}{2}\Delta x) - f(x \pm \frac{3}{2}\Delta x) \right\}. \quad (2.69)$$

以上では, 微分と補間に対する離散式を別々に表しているが, 離散対象点上に離散点がない場合には, 両者を併用して離散化する方法と, 全てを一括して離散化式を導く方法の 2 通りがある. 多くの場合, 後

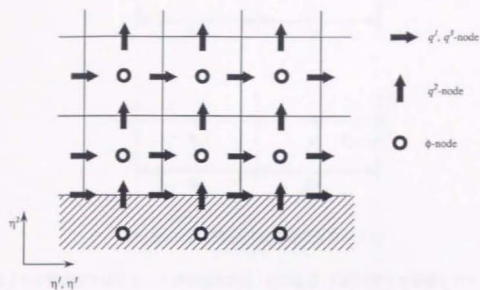


Figure 2.3: 壁面上格子系

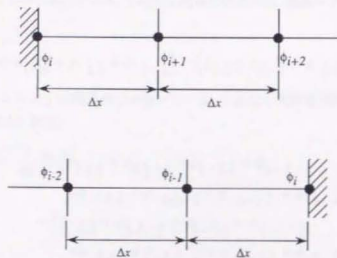


Figure 2.4: 壁面上片側離散化 (ケース 1)

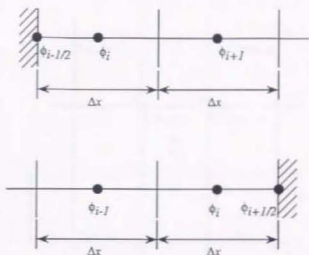


Figure 2.5: 壁面上片側離散化 (ケース 2)

者の方法によって離散点を減らすことが可能となる。このとき、2次の項まで考慮したテイラー展開に基づき、2次精度の離散化は、全ての演算に対し、1次元の場合は3点、2次元の場合は6点、3次元の場合は10点以上を要する。なお、展開式の符号の関係によって、1階微分項の離散化は、補間演算を含む場合であっても、1オーダー低い1次精度の離散点数、すなわち1次元の場合は2点、2次元の場合は3点、3次元の場合は4点で行える。

このほかにも、格子点の配置関係によって、多数の補間、微分離散式が必要になるが、それらは全て上記と同じ手順に従って計算される。さらに、シミュレーション上では、これらの離散化を2次元、3次元空間で行う必要があり、離散化式はさらに複雑化する。その場合にも、離散化式の算出手順はこれと変わらない。

2次・3次元の場合の離散化式は、2次・3次元の補間式に1次元の場合の微分離散化式(2.63), (2.64)等を組み合わせることによって導出できる。2次元2次精度補間式は、流路コア領域において次式で表される(図2.6参照)。

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{32} \left\{ 9 \left(\phi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \phi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + \phi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \phi_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right) - \left(\phi_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + \phi_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}} + \phi_{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + \phi_{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}} \right) \right\}. \quad (2.70)$$

ここで、 $\phi_{i,j}$ のインデックス i, j は簡単のため省いている。3次元2次精度補間式は、流路コア領域において次式で表される(図2.7参照)。

$$\begin{aligned} \phi_{i,j} = & \frac{1}{64} \left\{ 9 \left(\phi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \phi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + \phi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \phi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \phi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \phi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + \phi_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \phi_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right) \right. \\ & \left. - \left(\phi_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + \phi_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}} + \phi_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + \phi_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \phi_{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + \phi_{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}} + \phi_{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + \phi_{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}} \right) \right\}. \quad (2.71) \end{aligned}$$

図2.6, 2.7中の格子点に添えてある数字は、補間演算における各点の重みを表している。壁面近傍では、当該精度の片側差分を用いる必要があり、格子点配置によってさらに多種多様な補間式が必要となる。ここでは、それらについては省略する。

次に2次精度の、2次元面積分離散化式と、3次元体積分離散化式の、チャネルコア領域における形式を示す。2次元面積分の場合の離散点分布を図2.8に、また3次元体積分の場合の離散点分布を図2.9

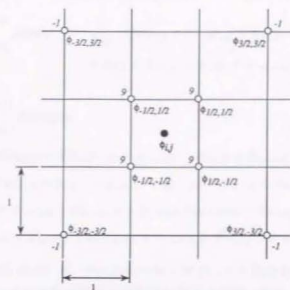


Figure 2.6: 2次元2次精度補間

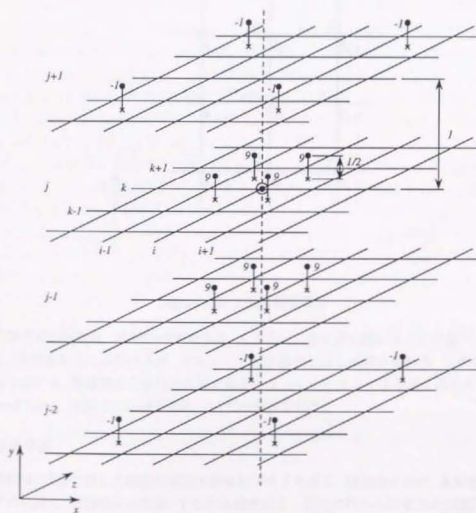


Figure 2.7: 3次元2次精度補間

に示す。各図中の格子点に示している数字は、積分離散化における各点の重みを表している。

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \phi dx dy = \frac{1}{576} \{ 484\phi_{0,0} + 22(\phi_{1,0} + \phi_{-1,0} + \phi_{0,1} + \phi_{0,-1}) + \phi_{1,1} + \phi_{1,-1} + \phi_{-1,1} + \phi_{-1,-1} \}. \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \phi dx dy dz \\ &= \frac{1}{13824} \{ 10648\phi_{0,0,0} + 484(\phi_{1,0,0} + \phi_{-1,0,0} + \phi_{0,1,0} + \phi_{0,-1,0} + \phi_{0,0,1} + \phi_{0,0,-1}) \\ & \quad + 22(\phi_{1,1,0} + \phi_{1,0,1} + \phi_{1,0,-1} + \phi_{1,-1,0} + \phi_{0,1,1} + \phi_{0,1,-1} \\ & \quad + \phi_{0,-1,1} + \phi_{0,-1,-1} + \phi_{-1,1,0} + \phi_{-1,0,1} + \phi_{-1,0,-1} + \phi_{-1,-1,0} \\ & \quad + \phi_{-1,1,1} + \phi_{-1,1,-1} + \phi_{-1,-1,1} + \phi_{-1,-1,-1} + \phi_{-1,1,-1} + \phi_{-1,-1,1} + \phi_{-1,-1,-1} \}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

前者の2次元面積分離散化式(2.72)は、コントロール・ボリューム積分を表面積分に置き換えた際の2次精度差分に相当する。2次精度の離散手法の保存性に対する議論(鈴木・河村 1994, 梶島 1994, 森西 1996 等)は、本来は、この式の上で行われなければならない。また、体積積分を表面積分に落とさずに、体積積分のままに離散化した場合が、次の式の(2.73)式に対応する。

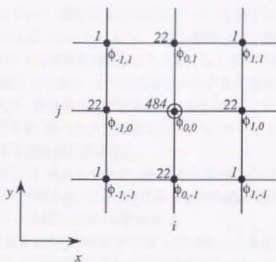


Figure 2.8: 2次精度面積分

これらの離散化式の複雑化・多様化の大部分は、スタガード格子系を用いることに基づき、このことの回避のために、数値安定性には欠けるが、コロケート格子系がしばしば用いられる。この傾向は、壁面近傍で片側差分を用いる、複雑境界を含む流れ場の数値シミュレーションでより強く現われている (Zang, Street & Koseff 1994)。次節でこの格子系についての解説を行う。

2.3.6 計算格子系

空間的離散化は、前節で示した離散化手法と計算格子系より成る。離散化手法が、各変数に対する離散化精度を表すのに対し、計算格子点配置、すなわち速度成分・圧力に対する計算点の配置関係は、各変数に要求する空間的離散化精度の相互関係を表している。

本章概論で既に述べたように、Navier-Stokes 方程式を解く際、速度場の微分クラスには、圧力場に要求される微分クラスより1オーダー(実質2オーダー)高い関数クラスが要求される。このことが、運動量輸

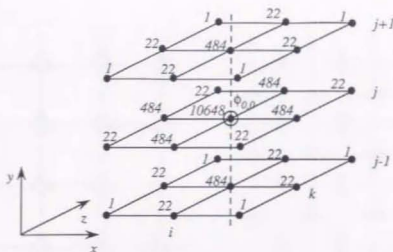


Figure 2.9: 2次精度体積分

送現象における速度・圧力間のスケール比としても表れているわけであるが、離散化手法のみでなく、計算格子点配置においてもこのことを反映していなければならない。この点を考慮すれば、1つの速度計算コントロール・ボリュームについて、速度各成分の計算ノードが、圧力計算ノードより各方向に1点（以上）多くなるように配置を行えばよいことになる。一方、連続の式を満たすための圧力ポアソン方程式においては、圧力場の微分クラスは速度場の微分クラスよりも1オーダー高くなっている。この場合は、先のNavier-Stokes方程式の場合とは逆に、各方向に圧力の格子点が速度格子点より1点多くなるように計算セルを構成する必要がある。計算格子点配置を考える場合には、これらの点を考慮した格子を構成する必要があるが、実際の適用の際、特に3次元問題においては、さらにこれに計算上の便宜的な面、特に計算負担軽減という面に対する考慮が必要になる。

差分法で用いられる計算格子には、大きく分けて、図2.10に示すようなコロケート (collocated) 格子系とスタガード (staggered) 格子系がある。ここではそれら2つの格子系の特徴を概説し、本研究においてスタガード格子系を用いることの理由について触れる。

コロケート格子系は、速度各成分と圧力の計算点を同一点に配し、これを計算領域中に格子状に組む手法である。この場合には、離散化上で非常に厄介な多次元補間を全て除去することができるため、プログラミングが簡単であるに、計算負担も軽減することができる。しかしながら、本格子系の場合には、速度・圧力計算点の一致に伴う、速度・圧力変数の空間的数値振動が非常に起こりやすくなる (Patankar 1980)。これは、速度・圧力を運動方程式と同じ微分クラスの変数とみなしたことに伴う圧力 (運動方程式の解法時)・速度 (連続式の解法時) の不定成分、すなわち要求される関数クラス以上に格子点を取ることに基づく効果である (図2.11参照)。この数値的振動の回避のために、Zang, Street & Koseff (1994) らのように格子中間点に速度反変成分 (移流速度成分) の補間点を置く手法も提案されている (図2.12)。本手法は、後述のスタガード格子系の数値的安定性を補間操作によって得ようとしたものであり、新たな計算定義点を抜きにして、補間操作に伴う数値的誤差要因の貢献を期待する安定化操作に相当する。なお、文献によっては、図2.10に示したコロケート座標系をスタンダード格子系、図2.12に示した座標系をコロケート格子系と言う場合もある (森西 1996)。

一方、スタガード格子系では、速度成分、圧力の計算点が、食い違い (staggered) の位置で定義される。通常は、図2.10に示すように、圧力計算コントロール・ボリューム各面上で速度反変成分 (カーチアン座標系の場合には面に垂直な速度成分) の計算ノードが設定される。このように速度と圧力の計算点を

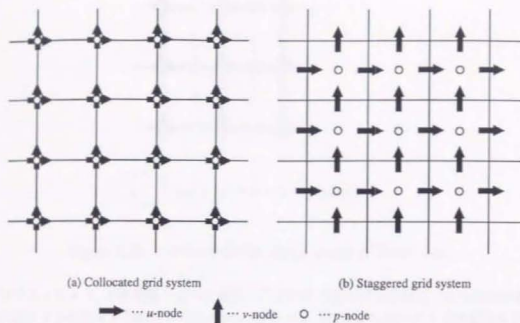


Figure 2.10: コロケート格子系とスタガード格子系

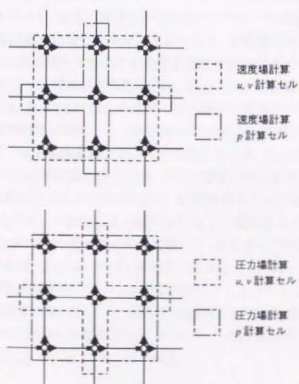


Figure 2.11: コロケート格子系-速度・圧力計算セル

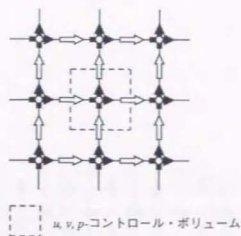


Figure 2.12: コロケート格子系 (Zang, Street & Koseff 1994)

半格子ずらすことにより、本章概論で述べた速度・圧力計算で要求される速度・圧力関数の微分クラスを部分的に満足する仮想セルの定義が可能になる。すなわち、図 2.13 において 2 次精度差分を考えると、速度計算セルについては、各速度成分について、各座標方向に 2 次精度に基づく 3 点を要する。計算成分と一致しない速度成分については、定義点が存在しないために、(2.70) 式等による同点上への補間が必要になる。この補間操作を含めた離散対象点を図 2.13 に示す。圧力については、計算速度成分と一致する方向には 2 点、その他の方向には離散対象点上の対称性を考慮して 3 点を取る。このうち計算速度成分の方向と一致しない方向において、速度と圧力の離散点の数が一致しており、ここにコロケート格子の場合と同様の数値的不安定性を生じる要因が含まれる。しかしながら、他の方向においては、先述の関数クラスに対する要求は満足されており、全体の数値的不安定性はコロケート格子に比べて改善される。次に、図 2.13 に示した 2 次精度離散化時の圧力計算セルを考えると、各座標方向に 3 点で表される圧力ノードに対し、速度は各座標方向に共変微分を構成する各反変速度成分 2 点ずつで表される ((2.47) 式参照)。このとき、圧力・速度成分によって構成される格子系は、圧力ポアソン方程式 (2.47) 上で要求される関数クラスを満足する。この系は、図 2.14 に示した速度・圧力解法に要求される関数クラスを全て保証する完全スタガード格子系の簡略形式に相当する。図 2.14 に示す完全スタガード格子系においては、関数クラス的不定成分による速度・圧力振動を抑えることが可能となるが、図 2.13 の場合より速度・圧力計算点とともに空間次元倍 (2 次元空間計算の場合 2 倍、3 次元空間の場合 3 倍) になり、図 2.13 の場合のような複雑な補間操作からは免れることができるものの、計算負荷はその空間次元倍近くになる。このことから、スタガード格子系としては、一般的には、図 2.13 に示した簡略形式が用いられている。

本研究においては、以上に示した数値的長所を考慮して、スタガード格子系を用いている。本研究では、一般座標によって支配方程式 (2.44)~(2.47) を記述するため、スタガード格子系を用いることに伴う補間操作がカーテシアン座標系の場合に比べて急激に増大してしまう。このことは、変形境界を含む場合の片側差分使用時にさらに顕著に現われる。このため、本研究のような定式化が非常に複雑になるケースにおいては、プログラミングの簡略化を目的として、コロケート格子系を保ったままで数値的安定化を図る手法の使用頻度も高い (Zang, Street & Koseff 1994)。

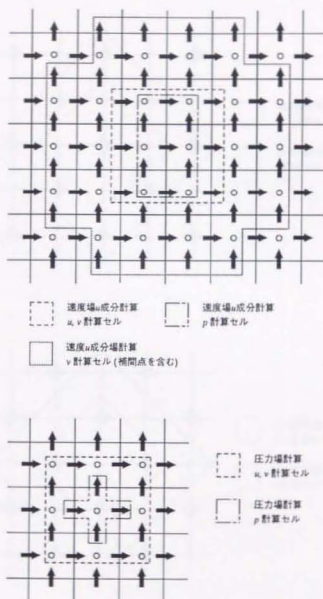


Figure 2.13: スタガード格子系-速度・圧力計算セル

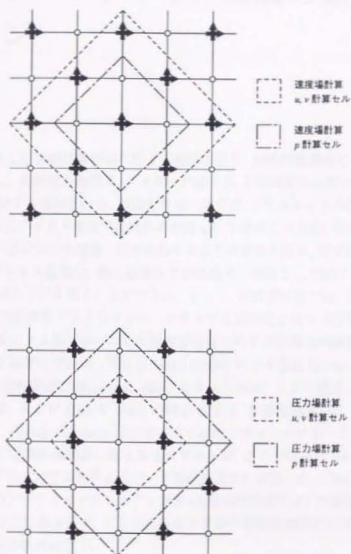


Figure 2.14: 完全スタガード格子系

Chapter 3

フレキシブル・チャネル層流の数値シミュレーション

3.1 概論

本章では、前章で示した数値計算手法に対する検証を行う。空間的離散化については、複雑境界を含む乱流場への適用を考え、境界適合座標系、スタガード格子系、2次精度中心差分で固定化し、ここでは特に時間的離散化手法に対する検討を行う。検証対象流れ場には、1次元チャネル層流および2次元蠕動チャネル層流を選ぶ。1次元チャネル層流では流れ場が完全に固定されるため、時間的離散化に用いた各フラクショナル・ステップ法における速度・圧力解法の高精度性を、定常流に対してではあるが検討できる。一方、蠕動チャネル層流は、静止座標系では移動境界問題として解けると同時に、蠕動速度で移動する系では固定座標系上でも解くことができる。よって、本計算対象では、移動・固定座標系間の計算結果の比較による移動座標系フラクショナル・ステップ法定式化に対する評価と、時間的離散化スキーム間の計算結果の比較による諸スキームの移動境界問題に対する収束性の評価が行える。

ここで用いた時間的離散化手法は、Choi & Moin (1994) による修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法 (4段階時間進行法)、Choi, Moin & Kim (1992) による完全 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法、および Kim & Moin (1985) による、非線形移流項に Adams-Bashforth 法を用い、線形粘性拡散項に Crank-Nicolson 法を用いた半陰的フラクショナル・ステップ法である。なお、これらの手法はもともと静止座標系に対するものであるが、ここではそれらの手法を前章に示したフラクショナル・ステップ法に対する解釈に基づいて移動座標系に拡張した。Choi & Moin (1994) による修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法 (4段階時間進行法) の移動座標系に対する拡張形式は前章において既に示してあるので、ここでは他の2手法の移動座標系に対する拡張形式を示す。なお、記号表記は (2.9) ~ (2.14) 式に従う。

Choi, Moin & Kim (1992) による完全 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法の移動座標系に対する拡張形式は以下のように示される。

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta\tau} = \frac{1}{2} \left(L^{n+1}(q^n) + L^n(q^n) \right) - \frac{1}{2} \left(T^{n+1}(q^n) + T^n(q^n) \right) - \frac{1}{2} \left(N^{n+1}(q^n) + N^n(q^n) \right), \quad (3.1)$$

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta\tau} = -G^{n+1}(\phi^{n+1}). \quad (3.2)$$

ここで、変数の肩に付いている $n, n+1$ は、それぞれ座標基底の参照時刻 τ^n, τ^{n+1} を表す。(3.2) 式中のスカラー関数 ϕ^{n+1} は、(3.2) 式の発散を取った式より求められるが、これは修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法の場合の (2.47) 式に一致する。また、このスカラー関数 ϕ^{n+1} 、および中間

速度 q^i に対する境界条件についても、修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法の場合の (2.48) 式, (2.49) 式と一致する。

Kim & Moin (1985) による、非線形移流項に Adams-Bashforth 法を用い、線形粘性拡散項に Crank-Nicolson 法を用いた半陰的フラクショナル・ステップ法の移動座標系に対する拡張形式は次のように示される。

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta\tau} = \frac{1}{2} \left(L^{n+1}(q^n) + L^n(q^n) \right) - \frac{1}{2} \left(T^{n+1}(q^n) + T^n(q^n) \right) - \frac{1}{2} \left(3N^n(q^n) - N^{n-1}(q^{n-1}) \right), \quad (3.3)$$

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta\tau} = -G^{n+1}(\phi^{n+1}). \quad (3.4)$$

この場合の、 ϕ^{n+1} のポアソン方程式、 ϕ^{n+1} , q^i の境界条件も、修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法の場合 (2.47) ~ (2.49) と等しくなる。

3.2 チャネル層流の数値シミュレーション

3.2.1 目的と計算手法

ここでは、1次元チャネル層流に対して、前節で示した3種類のフラクショナル・ステップ法の空間的収束性、すなわち計算格子依存性に対する検討を行う。この場合特に注目すべき点は、射影スカラに対する近似的境界条件 (2.48) 式の影響、すなわち壁面上の中間速度、射影スカラ (疑似圧力) に対する境界条件の低次化の影響である。この影響は、時間的離散化手法および壁面上の計算格子点分布に依存し、ここでは、それら諸因子の壁面近傍における速度分布、およびその1回、2回微分上に現われる影響に対する検討を行う。なお、速度の一回微分は剪断応力、二回微分は運動量流束の変化に伴う (剪断応力の変化に伴う) 流体に掛かる力すなわち運動量生成・消滅の効果を表す。本研究では、2次精度中心差分を用いており、この差分のオーダーでは、速度の1回微分については離散化のオーダーによって空間的1次の分布が保証されるが、2回微分については空間的0次の分布となるため、この効果 (流体力・運動量変化) については格子密度によってその分布を制御しなければならない。よって、2次精度差分においては、粘性効果の卓越する領域において計算格子を密に取るが必要となり、またその粗密度で計算結果を大きく左右することになる。本問題においてもシミュレーションは時間発展によって行われ、層流解はその収束解として得られる。

修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法 (2.44) ~ (2.46) 式は、定常流れ場においては、Navier-Stokes 方程式に完全一致する。すなわち、本解法上では、時間的離散化による誤差要因は含まれない。一方、delta-form 化されていない完全 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法 (3.1) ~ (3.2) と半陰的フラクショナル・ステップ法 (3.3) ~ (3.4) にはこのような性格はなく、速度場と中間速度場には圧力勾配分 (本問題の場合、流れ方向の圧力勾配が存在する) の差が存在する。このため、(3.1), (3.3) 式における非線形項表現にも差が生じる。なお、この点を改善して、Kim & Moin (1985) による半陰的フラクショナル・ステップ法を delta-form 化すると次のように表される。

$$\frac{\tilde{q}^i - q^n}{\Delta\tau} = \frac{1}{2} \left(L^{n+1}(\tilde{q}) + L^n(q^n) \right) - \frac{1}{2} \left(T^{n+1}(\tilde{q}) + T^n(q^n) \right) - \frac{1}{2} \left(3N^n(q^n) - N^{n-1}(q^{n-1}) \right) - G^n(\phi^n), \quad (3.5)$$

$$\frac{q^{n+1} - \tilde{q}^i}{\Delta\tau} = G^n(\phi^n), \quad (3.6)$$

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta\tau} = -G^{n+1}(\phi^{n+1}). \quad (3.7)$$

この場合の、 ϕ^{n+1} のポアソン方程式および ϕ^{n+1} , q^i に対する境界条件も、修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法の場合 (2.47) ~ (2.49) と等しくなる。この修正 Adams-Bashforth & Crank-Nicolson 型半陰的フラクショナル・ステップ法の場合、定常流に対しては、修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法の場合と同様、Navier-Stokes 方程式に完全一致する。本手法により、非定常流に対しても、完全 Crank-Nicolson 型の場合と同様の数値的改善が見られることが予想される。なお、本 1 次元チャネル層流問題に対しては、本手法と修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法による解は一致するため、その検証は省く。

なお、全ての計算の空間的離散化は、2 次精度差分によって行っている。ここでは、先に述べた時間的離散化手法に合わせて、2 次精度差分、壁面近傍の片側差分処理等の空間的離散化の妥当性に対する検討も行う。

3.2.2 計算条件

ここでは 3 種類の時間的離散化、すなわち、修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法、完全 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法、および Adams-Bashforth & Crank-Nicolson 型半陰的フラクショナル・ステップ法に対し、空間的収束性、すなわち計算格子依存性を検討する。計算格子は、 $[-1, 1]$ に対し、次式によって表される。

$$y(j) = \frac{1}{a} \tanh \left[\frac{1}{2} \left(-1 + 2 \frac{j-1}{NY-1} \right) \log \frac{1+a}{1-a} \right], \quad j = 1, 2, \dots, NY. \quad (3.8)$$

ここで、 a は格子間隔のストレッチング・パラメータ ($0 < a < 1$)、 NY は格子点数を表す。 a が 1 に近い程、格子点は壁面近傍で密になり、小さくなるに従って格子点分布はチャネル中心方向に寄り均一化される。

本チャネル層流問題に対しては、まず、先に示した 3 種類のフラクショナル・ステップ法に対して、ストレッチング・パラメータ a をチャネル乱流直接数値シミュレーション時の値 $a = 0.984$ に合わせ、その上での計算格子数の影響を検討する。計算格子数には、チャネル乱流シミュレーション時の 97 のほかに、49, 75, 149 を加えた計 4 通りを取る。

次に、その 3 種類の手法中で最も優れた数値予測性能が示される修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法に対して、格子点数に加え、ストレッチング・パラメータを含めた計算格子依存性を検討する。計算格子数には、先述の 49, 75, 97, 149 の 4 通り、ストレッチング・パラメータには、0.850, 0.900, 0.984 の 3 通りを取り、これらの各ケースにおける時間的離散化スキームの空間的収束性を検討している。

ここで用いている 1 次元計算格子点分布を図 3.1 に示す。

観測量は、速度および速度の 1 回、2 回微分とする。チャネル層流においては、速度場は放物型関数、速度勾配は壁面上で ± 2 となる線形関数、2 回微分については流れ場を通して -2 で一定となる。データ検証はこれらに基づいて行う。

3.2.3 離散化手法の空間的収束性

空間的収束性の時間的離散化スキーム依存

図 3.2 ~ 3.5 に、ストレッチング・パラメータ $a = 0.984$ 時の、計算格子数 $NY = 49, 75, 97, 149$ に対する、フラクショナル・ステップ法の時間的離散化の影響、および空間的離散化の影響を示す。チャネルコア領域においては、これらの計算手法の結果はほとんど一致するため、ここではそれらの間の差が顕著に現われる壁面近傍の分布のみを示す。計算格子が最も粗い $NY = 49$ のケースでは、修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法 (MCN-FS) の予測は、速度の 1 回、2 回微分とともに、他の 2 法、すなわち、

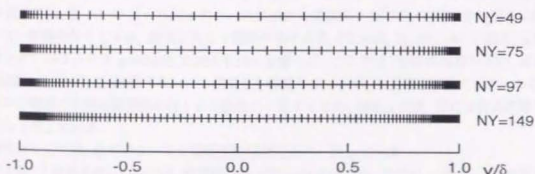
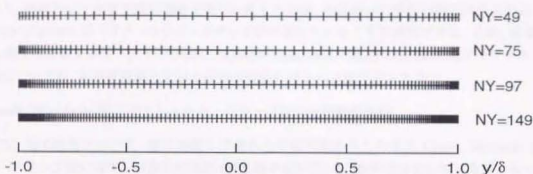
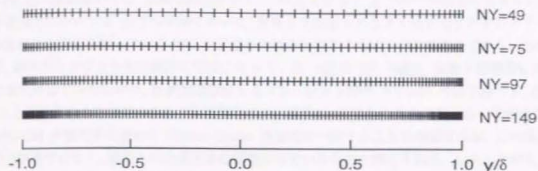


Figure 3.1: チャネル層流計算格子系

完全 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法 (CN-FS), Adams-Bashforth & Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法 (SI-FS) より悪くなっている。しかしながら, ある程度格子を細かく取れば ($NY=75$ 以上), これらの諸量に対する収束性は, MCN-FS で最もよくなる。

速度分布に対しては, どの手法についても真値に完全に一致している。

速度勾配の予測については, MCN-FS の場合, 最大誤差は $NY=75$ で真値の 0.2 %, 乱流直接数値シミュレーション時計算格子数に相当する $NY=97$ では 0.1 %, $NY=149$ では 0.05 % となっている。一方, CN-FS, SI-FS においては, 速度勾配に対して, このような NY についての収束性は見られない。

速度 2 回微分については, 全ての手法について, 壁面上で真値より大きく外れた予想を行っている。その中で比較的よい予測を行っているのは, 1 回微分の場合と同じく MCN-FS の場合である。他の 2 法については, 図示のレンジより懸け離れた予測を行っている。MCN-FS の場合, 速度 2 回微分に対しても収束性の傾向が出ているものの, 乱流直接数値シミュレーション時の $NY=97$ の格子数でも, 壁面上で真値の 2 と逆符号の 2.8, $NY=149$ でも逆符号の 1.1 を示し, とても十分とは言えない予測結果を得ている。MFS-CN が定常流において Navier-Stokes 方程式に一致することを考慮すれば, この傾向は, 時間的離散化手法ではなく, 壁面上の片側差分の影響が出ているものと考えられる。しかしながら, 先述のように壁面上の片側差分を避ける手法はなく, よって, 速度 2 回微分相当量およびその相關量の壁面近傍の挙動については, この程度の妥協が必要である。

以上より, 絶対的に十分な予測の期待できない量もあるが, 今回用いた手法の中では全ての点について修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法が優れていることを確認できる。なお, 完全 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法と, Adams-Bashforth/Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法については, 本計算対象上ではその予測性能にほとんど差が見られない。

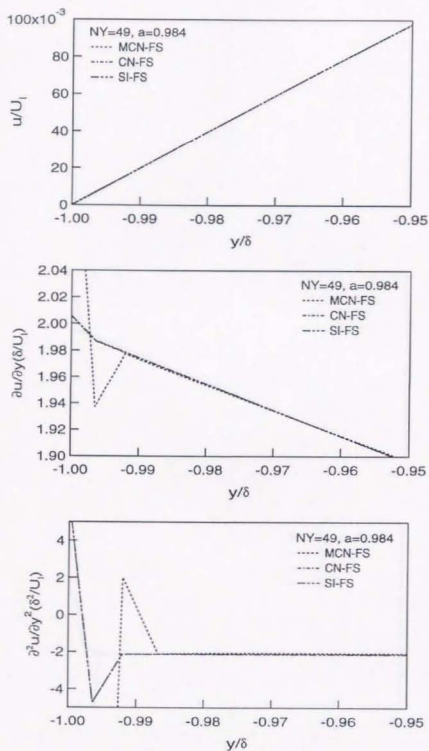
修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法の空間的収束性

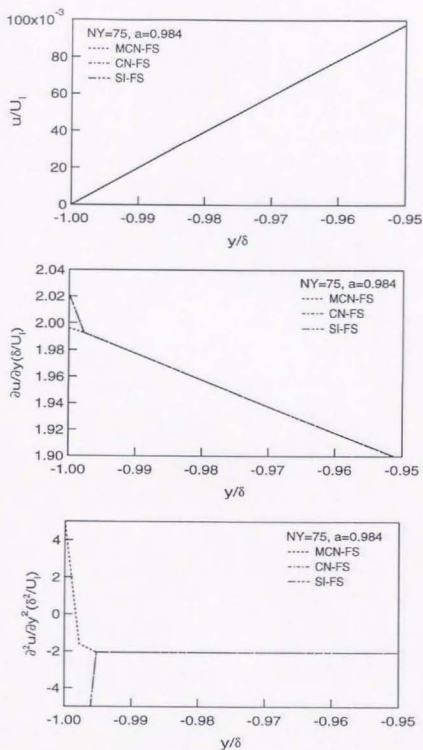
ここでは, 先の検討において, 他に比較して優れた予測性能を示した修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法に対する空間的収束性 (計算格子依存性) を, 格子点分布に対するストレッチング・パラメータを含めて検討する (図 3.6 ~ 3.8)。

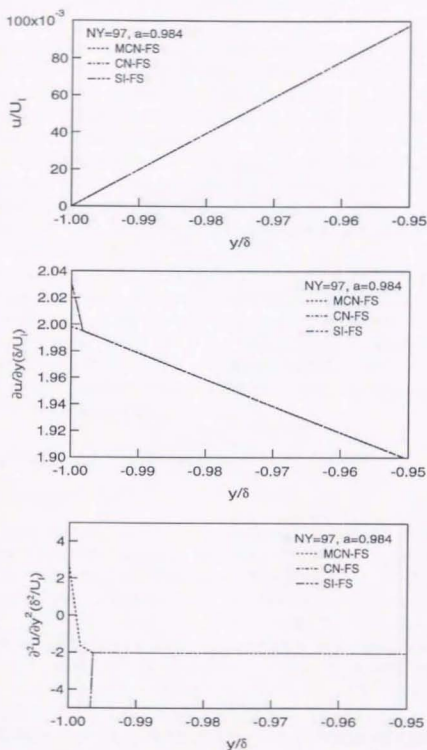
先に示した, ストレッチング・パラメータ α を一定 ($\alpha = 0.984$) としたときの, 本手法の計算格子数に対する収束性は, 図 3.8 の $\alpha = 0.984$ のケースにおける速度の 1 回微分, 2 回微分の図中に明確に表されている。計算条件としては, 前項と同じ 4 種類の格子点数 $NY=49, 75, 97, 149$ に加え, 3 種類のストレッチング・パラメータ $\alpha=0.850, 0.900, 0.984$ を選んだ。ここでは, 各計算結果の速度, およびその 1 回・2 回微分値に対して, 計算スキームの収束性を検討しているが, 今回選んだ全てのケースについて, チャネルコア領域の予測は厳密値にほとんど完全に一致するため, 前項と同様, 図には壁面近傍の挙動のみを拡大して示している。

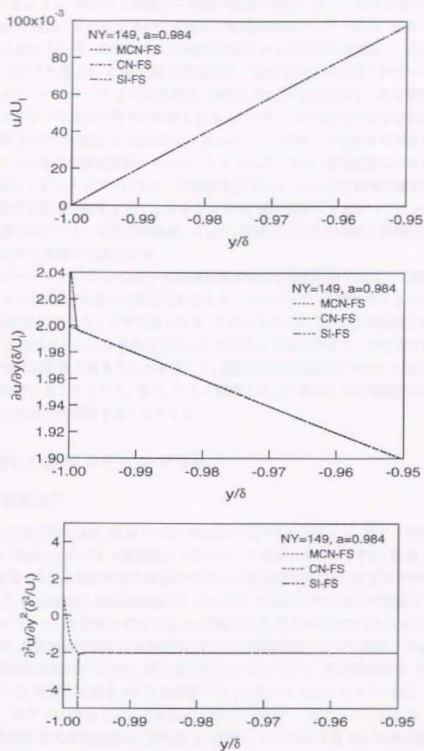
速度分布については, 全てのケースが厳密値にほぼ完全に一致している。

速度の 1 回・2 回微分値については, 計算格子数 $NY=49$ の場合は, 全ての α について, 壁面近傍における空間解像度不足のために, 他の格子点数のケースより明らかに劣る結果を示している。この $NY=49$ のケースを除くと, 各ストレッチング・パラメータのケースについて, 速度 1 回, 2 回微分の計算格子数増加に伴う収束の傾向を見ることができる。また, ストレッチング・パラメータ α の影響が, 速度 2 回微分値に顕著に現われてきており, α が小さいほどその厳密値に近付く様子が示されている。この収束性は, 格子の等間隔化の方向を指しており ($0.984 \rightarrow 0.900 \rightarrow 0.850$), 特に $\alpha=0.850$ の場合には, $NY=97, 149$ のケースで, 厳密値にかなり近い値を得ている。また, $\alpha=0.900, 0.850$ のケースでは, $\alpha=0.984$ の場合のような, 壁面上での速度 2 回微分値が厳密値より懸け離れた値を示すような挙動は見られない。特に, 速度分布, 速度勾配上に, それらストレッチング・パラメータによる差がほとんど見られないことから, この速度 2 回微分の壁面上の差には, 壁面上の格子点分布ストレッチングの大きさ, すなわち格子点

Figure 3.2: 時間的離散化スキームの空間的収束性 ($NY = 49$)

Figure 3.3: 時間的離散化スキームの空間的収束性 ($NY = 75$)

Figure 3.4: 時間的離散化スキームの空間的収束性 ($NY = 97$)

Figure 3.5: 時間的離散化スキームの空間的収束性 ($NY = 149$)

間隔変化率が影響しているものと考えられる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta^2} \alpha^{22} \frac{\partial u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{J} \left(\alpha^{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{22}}{\partial \eta^2} \frac{\partial u}{\partial \eta^2} \right). \quad (3.9)$$

(3.9) 式に示されるように、速度の 2 回微分には格子基底の変化に基づく微分が導入され、ストレッチングが大きい場合には壁面上におけるその片側差分が適切に評価されないため、速度 2 回微分が適切に評価されないものと考えられる。このために、本層流問題に対する収束性に関して、今回選んだストレッチング・パラメータのうち最小の $\alpha = 0.850$ の計算格子で最も良い結果が得られていると解釈できる。一方、ストレッチング・パラメータ α の拡大化は、壁面上で大きな速度変化・速度剪断を生じる壁乱流のシミュレーションにおいて必要不可欠の条件となる。この点で、本問題で良好な結果を得たストレッチング・パラメータ域 (0.850, 0.900) は、乱流のシミュレーションにおいて要求される条件を十分に満たすものではない。チャネル乱流の直接数値シミュレーションにおいては、壁面近傍における空間解像度の要請から、今回選んだストレッチング・パラメータの最大値である $\alpha = 0.984$ 前後の値が通常取られる。このとき、図示の速度の 2 回微分結果を見ても分かるように、直接数値シミュレーション上、壁面上の運動方程式が正しく計算されていない可能性がある。よって、壁面上における速度 2 回微分に係わる項の評価の際にはこの点に対する考慮が必要となる。

今回のシミュレーションでは、計算格子基底関係量は全て 2 次精度差分によって評価しているが、計算格子を 3 次スプライン関数、あるいは解析的に与えることによって、各格子点における座標基底微分量を差分ではなく、解析的に与えることが可能となる。このことによって、ここで問題となった壁面上の計量 (メトリクス) の片側差分化による弊害を防ぐことができる可能性がある。本研究では、座標基底についても流れ場と同等の状態量であることを考慮して、座標基底の離散化についても流れ場の離散化と同じ 2 次精度差分法を用いることとする。また、ここで問題となった壁面上の片側差分化についても、本計算手法の一般性を高めるため保持することとする。

3.3 蠕動流れの数値シミュレーション

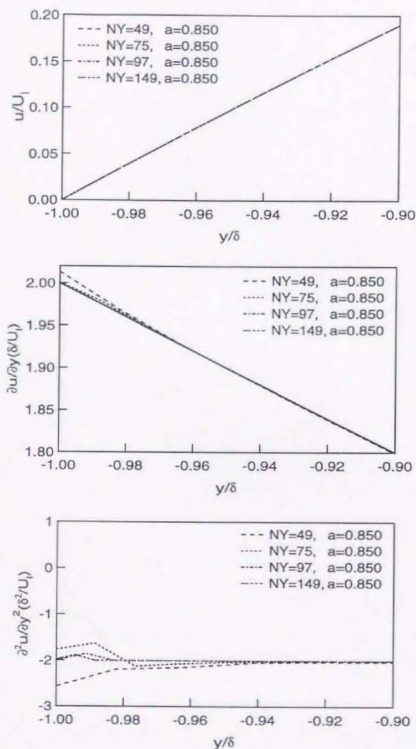
3.3.1 目的と計算条件

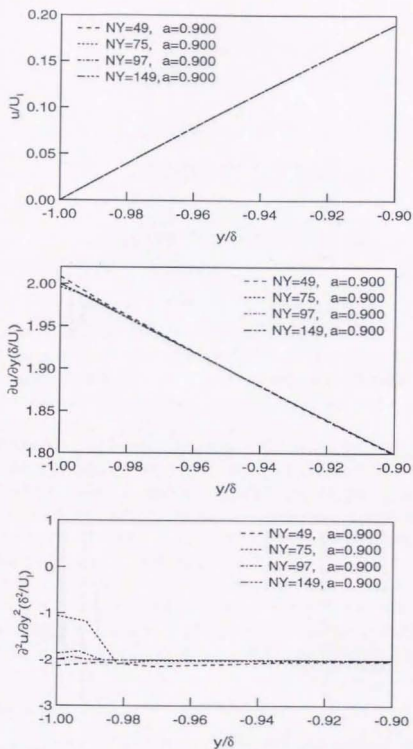
前節において、定常問題の場合、修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法が、Navier-Stokes 方程式の Crank-Nicolson 法による離散化に一致することを示した。ここでは、蠕動チャネル層流を計算対象に選び、本研究で用いる数値手法の移動格子系および非定常流れ場に対する予測性能を検討する。蠕動チャネル層流は、静止座標系 (静止観測系) においては、流路の変形に伴って変動する流れ場に見え、この場合のシミュレーションも壁面の変動によって移動する計算格子点上で行われることになる。一方、蠕動チャネル層流は、蠕動速度で移動する座標系、すなわち蠕動波形とともに移動する座標系から見た場合には、流路は一定形状に保たれており、流れ場も定常となっている。この場合には、蠕動チャネル層流のシミュレーションは、時間的に固定された計算格子点上で行われることになり、修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法は Navier-Stokes 方程式に完全に一致することになる。

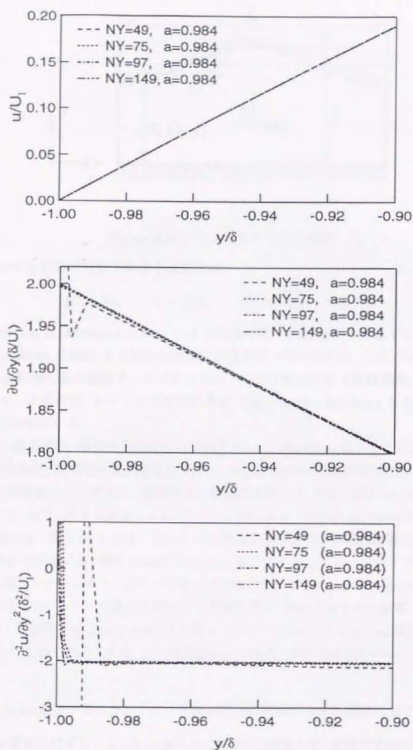
2 次元非圧縮性蠕動流の支配変数は、振幅比 ϕ 、波数 α 、レイノルズ数 Re 、無次元流量 Q (あるいは圧力差) の計 4 つである。

$$\phi = \frac{\epsilon}{\delta}, \quad \alpha = \frac{\delta}{\lambda}, \quad Re = \frac{c\delta}{\nu}, \quad Q = \frac{\bar{Q}}{c\delta^2}. \quad (3.10)$$

式中のチャネル形状パラメータの定義を図 3.9 に示す。 δ が平均チャネル幅、 ϵ が蠕動波振幅、 λ が蠕動波ピッチ、 c が蠕動波速度を表す。チャネル壁面は $y = 0$, $y = \eta(x, t)$ にあり、下壁 $y = 0$ を固定、上壁 $y = \eta(x, t)$ に対して蠕動振動を与える。先の形状パラメータを用いて、正弦関数で与えられる蠕動振動

Figure 3.6: MCN 型フラクショナル・ステップ法の空間的収束性 ($a=0.850$)

Figure 3.7: MCN 型フラクショナル・ステップ法の空間的収束性 ($a=0.900$)

Figure 3.8: MCN 型フラクショナル・ステップ法の空間的収束性 ($a=0.984$)

$\eta(x, t)$ は次式によって表される。

$$\eta(x, t) = \delta - \epsilon \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct). \quad (3.11)$$

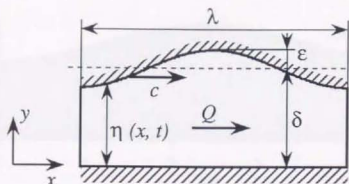


Figure 3.9: 2次元蠕動チャンネル概略

上記各変数について本問題では以下のように与える。

$$\phi = 0.19, \quad \alpha = 0.21, \quad Re = 210, \quad Q = 0. \quad (3.12)$$

本条件は, Takabatake & Ayukawa (1982) による数値計算・実験条件に一致する。なお, 本研究では, Takabatake & Ayukawa (1982) より遥かに詳細な計算を行っているため, ここではそれとの比較は行っていない。なお, 本計算対象の蠕動ポンプのチャンネル・パイプ流に対する性能試験, すなわち蠕動ポンプ効率の形状パラメータ依存性, レイノルズ数依存性が, Takabatake, Ayukawa & Mori (1988) によって数値的に詳細に行われている。

ここでは, まず, 静止座標・移動格子系における修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法に対して, 計算格子依存性, 時間刻み幅依存性を検討し, 本手法において収束性の確認できる計算格子数, タイムステップ等の計算条件を決定する。検証対象の計算格子数には, $NY \times NX = 49 \times 60, 59 \times 80, 69 \times 90, 79 \times 100$ の4通りを, また, タイムステップには, $\Delta\tau = 400, 800, 1000$ steps/cycle の3通りを選んだ。ここで用いた計算格子を, 図 3.10 に示す。次にこの計算条件を用いて, 時間的離散化スキーム依存性を検討する。時間的離散化手法には, 修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法 (MCN-FS), 完全 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法 (CN-FS), および Adams-Bashforth & Crank-Nicolson 型半陰のフラクショナル・ステップ法 (SI-FS) の3種類を用い, それぞれを静止座標・移動格子系 (moving grid) と移動座標・固定格子系 (fixed grid) 上で解く。なお, シミュレーションは非定常的に行われ, 定常解はその収束値として得られる。また, この時間発展は, 流量一定のもと行われる (アルゴリズムについては付録参照)。

修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法の蠕動チャンネル層流に対する空間的収束性

前節のチャンネル層流に対するシミュレーションにおいて, 壁面上で, 離散化手法の影響が最も顕著に現れることを確認した。ここでは, 静止座標系における蠕動壁側壁面温度分布 (速度1回微分係数) より, MCN-FS 法の空間的収束性を検討する。

先に述べた4通りの計算格子に対する壁面温度計算結果を図 3.11 に示す。今回調べたうちの計算格子の最も粗いケースに相当する 49×60 の場合以外は, 壁面温度はほとんど一致している。 59×80 の場合に, これより計算格子の細かい2ケース ($69 \times 90, 79 \times 100$) からのずれがわずかに見られ, よって, 本節検証問題における計算格子には 69×90 の場合を選ぶ。

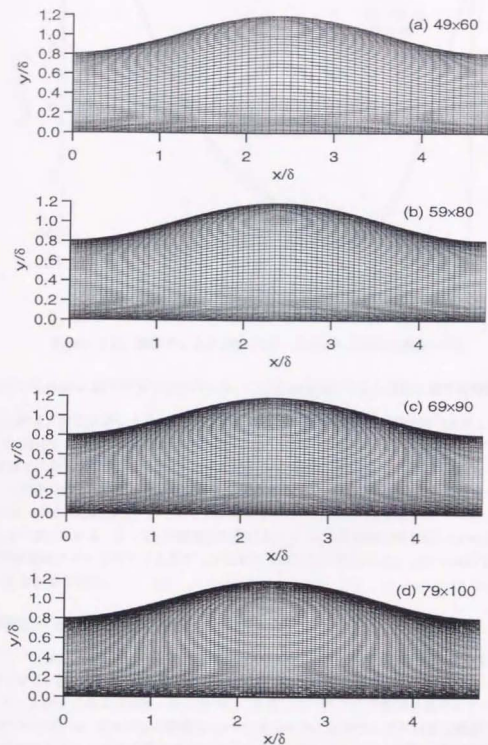


Figure 3.10: 2次元蠕動チャネル計算格子

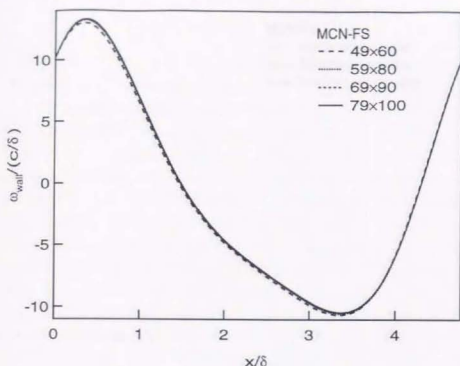


Figure 3.11: 蠕動チャネル層流に対する空間的収束性 (MCN-FS)

修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法の蠕動チャネル層流に対する時間的収束性

ここでは、前項と同じ要領により、静止座標系における蠕動壁側壁面温度分布（速度 1 回微分係量）に対して、MCN-FS 法の時間的収束性を検討する。

先述の 3 通りの計算時間刻み幅に対する壁面温度計算結果を図 3.11 に示す。今回調べた 3 通りのタイムステップの中では、その最も大きなケースに相当する $\Delta\tau = 400$ steps/cycle の場合に、他の 2 ケース ($\Delta\tau = 800, 1000$ steps/cycle) からのずれがわずかに見られるが、後者の 2 ケースについては壁面温度はほとんど一致している。よって、本節検証問題における、計算時間刻み幅には、 $\Delta\tau = 800$ を選ぶ。なお、各時間的離散化スキームのタイムステップに対する収束性を見るために、 $\Delta\tau = 400$ の場合のシミュレーションも合わせて行う。

3.3.2 離散化手法の時空間的収束性

図 3.13 に、タイムステップ $\Delta\tau = 400, 800$ の場合の、3 種類の時間的離散化手法、すなわち、MCN-FS、CN-FS、および SI-FS による、静止座標系上蠕動壁側壁面温度分布を示す。

2 つのタイムステップおよび移動・固定格子系に共通して、CN-FS の傾向は他の 4 ケースより大きく外れた挙動を示している。CN-FS の挙動について、2 つのタイムステップに対する結果の比較から、移動格子系、固定格子系によるもの両方のケースについて、他の 4 ケース（移動・固定両格子系に対する MCN-FS、SI-FS）方向への収束の傾向を見ることができる。

CN-FS における時間的収束性を調べるために、移動格子系、固定格子系それぞれの場合における壁面温度分布の変化を図 3.14 に示す。移動座標系の場合には、1500 steps/cycle では収束状態が得られているのに対し、固定格子の場合には、30000 steps/cycle を要している。いずれの場合においても、MCN-FS や SI-FS より遥かに細かい計算時間ステップを要している。本結果では、特に、固定座標系 CN-FS にお

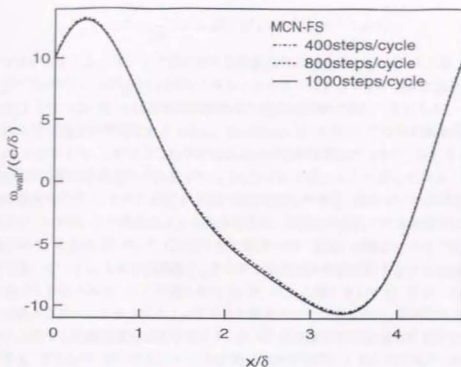


Figure 3.12: 蠕動チャネル層流に対する時間的収束性 (MCN-FS)

いて収束性が悪くなることが顕著に表されている。また、その際の収束解についても、移動格子系の場合には MCN-FS の解にはほとんど一致しているが、固定格子系の場合には MCN-FS の解との間に一定の差異が生じている。これらの傾向は圧力項の delta-form 化の有無の差が反映されたものであり、本結果より、この圧力項の delta-form 化により時間的収束性が大きく改善されることを確認できる。

また、CN-FS および SI-FS では、平均流れの有無、あるいは平均流れの大きさによらず、圧力 (射影スカラー) 境界条件は次式によって一定に与えられる (Chorin 1969, Temam 1984)。

$$G^{2n+1}(\phi^{n+1}) = \frac{q^{*2} - q^{*2n+1}}{\Delta\tau} = 0. \quad (3.13)$$

(3.13) 式上に表されているように、本圧力境界条件、およびそれに伴う中間速度 q^{*i} 境界条件、

$$q^{*i} = q^{*n+1} + \Delta\tau G^{n+1}(\phi^{n+1}) = q^{*n+1}, \quad (3.14)$$

上では、(3.13) 式の仮定に伴う精度低下に伴い流れ場の情報が大きく欠落する ((3.13) 式においては $q^{*2} \rightarrow q^{*2n+1}$, (3.14) 式においては $G^{n+1}(\phi^{n+1}) \rightarrow 0$)。CN-FS における壁面高度収束値の時間刻み幅依存性は、この圧力境界条件の低次化の効果が現れたものと考えられる。また、CN-FS における固定格子系と移動格子系の収束値の差異については、それぞれの系の境界条件中における平均成分の有無が反映されたものと考えられる。本計算結果においては、移動格子系の場合に良好な収束性が得られていることから、境界条件 (3.13)、(3.14) 式の適用は、平均成分を除いた変動成分に対する方が数値的により適切であることが示される。一方の MCN-FS では、前タイムステップの圧力勾配項を用いる圧力項の delta-form 化により、フラクショナル・ステップ法における圧力の射影因子を小さく抑えられたことが、CN-FS において顕著に示される時間的位相遅れの効果を改善しているものと考えられる。本効果は、MCN-FS 法

構成式 (2.45) ~ (2.46) より導かれる次式において示される。

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta\tau} = G^n(\phi^n) - G^{n+1}(\phi^{n+1}) = 0, \quad (3.15)$$

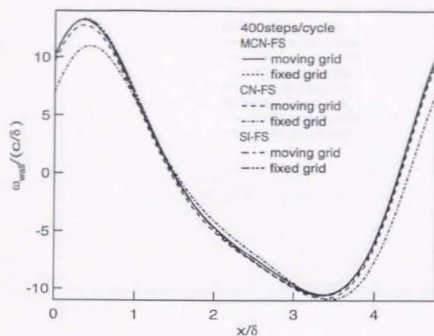
すなわち、フラクショナル・ステップ法における射影操作に相当する (3.15) 式では、(3.2) 式や (3.4) 式と異なり、 $G^{n+1}(\phi^{n+1}) \rightarrow G^n(\phi^n)$ に伴いフラクショナル・ステップ法中の射影因子の効果は縮小する。

先に示したように CN-FS では時間的位相遅れの効果が顕著に現われているが、一方で、非線形移流項についての 2 次精度外挿法である Adams-Bashforth 法を用い、その他の離散化は全く同じ手法で行った SI-FS においては、このような時間的位相遅れの効果は現われない。むしろ、本計算対象においては、その結果は時間的位相遅れの改善された MCN-FS にほとんど一致している。このことは、SI-FS における陽的離散化部分と、それに対応する陰的離散化部分の予測、具体的には非線形移流項の予測が異なることを示す。本来は、この陽解法による外挿効果は、収束性の保証される陰解法による内挿効果に一致する必要があるが、今回の SI-FS と CN-FS 間の結果の不一致は、陽解法による予測限界を越えたタイムステップを用いたことによる予測誤差と、その予測誤差の陰的表現部すなわち粘性拡散項上へのシンクの効果に基づくものである。ここで得られた SI-FS による解においては、移流・粘性拡散効果は個別には解法上の過大なタイムステップによって不当に評価されているものの、最終的な速度場のアウトプット上ではそれらのうちの誤差成分が打ち消され、残った数値誤差効果によって良好な結果が得られていると解釈できる。すなわち、SI-FS についての結果は数値的效果によるものであり、その本来の予測性能に基づくものではない。よって、SI-FS について、別の計算条件・計算対象を課した場合に、同様の良好な結果を得る保証はない。時間的離散化手法としては、全ての項を対等に陰的に評価し、時間的位相遅れについても小さく抑えた MCN-FS が、他の 2 手法、CN-FS および SI-FS より優れているといえるが、計算負荷という点では、線形解法を実現する SI-CN において計算が大幅に縮小・高速化されるため、予測の難しい数値的效果に対する問題が残されているものの、その有用性は注目値する。特に、近年のフラクショナル・ステップ法を用いた乱流直接数値シミュレーションの大部分においては、高速計算の要請からこの半陰的離散化が用いられている。なお、半陰的フラクショナル・ステップ法を用いる場合にも、Adams-Bashforth & Crank-Nicolson 型の場合の (3.5) ~ (3.7) 式のように delta-form 化することにより、さらに時間的位相遅れの効果を抑えることができる。

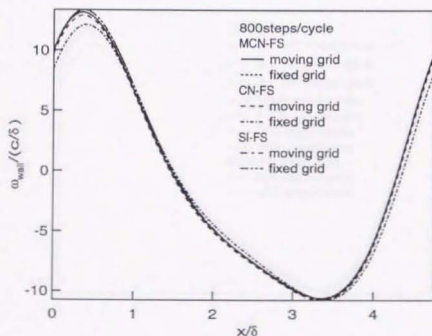
MCN-FS と SI-FS の結果は、移動格子系、固定格子系、それぞれの場合について、ほとんど一致した分布を示し、格子系の異なるデータ間には、この 2 つの手法に共通して系統的な誤差が生じている。固定格子系における MCN-FS が Navier-Stokes 方程式解法に一致することは先に述べたが、一方の移動格子系の場合には、格子点移動速度を時間的に 2 次精度、すなわちタイムステップ前後 τ^n, τ^{n+1} 時刻における座標値の差によって表しており、この基底に対する有次精度離散化の影響が、いわば基底の時間的離散化を厳密に行っているケースに相当する固定格子系との差異になっていると考えられる。よって、本離散化においては、この格子系依存の効果を取り除くことはできない。このことは、移動格子系を用いた数値シミュレーションの際には、このオーダの誤差の影響を考慮に入れておく必要があることを意味する。

以上の議論は、本シミュレーション上、数値手法の差が最も大きく現われる壁面上に限定されるものである。観測しているデータも、速度の 1 回微分関係量であり、この点でも離散化手法の差を強調するものになっている。図 3.15 に、 $\Delta\tau=800$ の場合の、蠕動チャネルのトラフ（最収縮部）と クレスト（最拡大部）における、 \mathbf{e} 方向速度分布を示す。完全 Crank-Nicolson 型の場合の移動格子系と固定格子系の結果で、他とのわずかな差が見られるが、全ての結果はほとんど一致している。

次に、 $\Delta\tau=800$ の場合の、各ケースに対する流線・速度ベクトルを図 3.16 ~ 3.21 に示す。この場合にも、先の \mathbf{e} 方向速度分布の場合と同様、格子系、時間的離散化手法による差異は見られない。

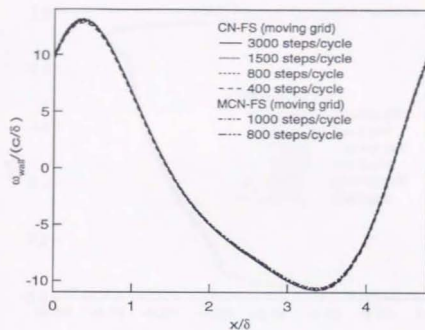


(a) 400steps/cycle

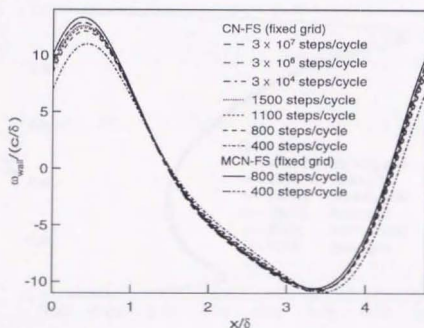


(b) 800steps/cycle

Figure 3.13: 蠕動チャンネル層流に対する時間的収束性

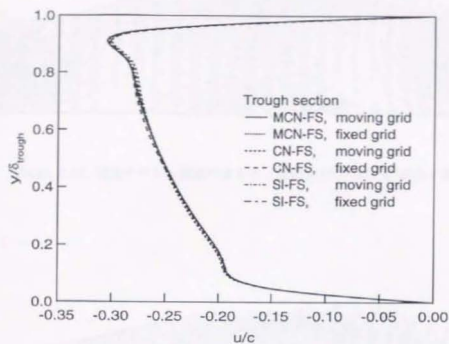


(a) moving grid

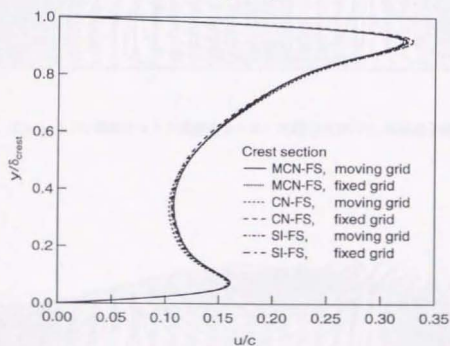


(b) fixed grid

Figure 3.14: Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法の蠕動チャンネル層流に対する時間的収束性



(a) Trough



(b) Crest

Figure 3.15: 螺旋チャネル z 方向速度分布

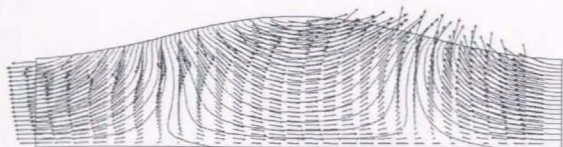


Figure 3.16: 蠕動チャンネル速度ベクトル・流線 (MCN-FS, 固定格子系)

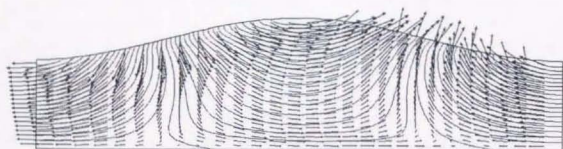


Figure 3.17: 蠕動チャンネル速度ベクトル・流線 (MCN-FS, 移動格子系)

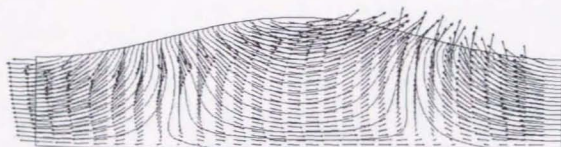


Figure 3.18: 蠕動チャンネル速度ベクトル・流線 (CN-FS, 固定格子系)

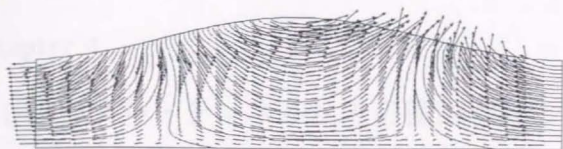


Figure 3.19: 蠕動チャネル速度ベクトル・流線 (CN-FS, 移動格子系)

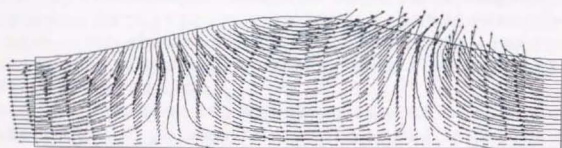


Figure 3.20: 蠕動チャネル速度ベクトル・流線 (SI-FS, 固定格子系)

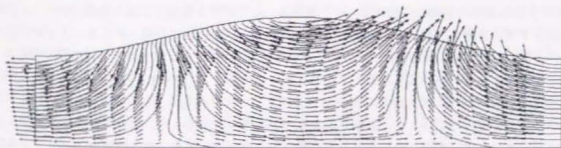


Figure 3.21: 蠕動チャネル速度ベクトル・流線 (SI-FS, 移動格子系)

Chapter 4

フレキシブル・チャネル乱流の直接数値シミュレーション

4.1 概論

時間的に変形する壁面・界面と乱流境界層との干渉、流れ場の作用による界面の変形、界面を通してのスカラー輸送等、変形境界と乱流場の間の運動量・諸スカラーの輸送機構には依然未解明の部分が多い。近年では、特に、さまざまな形態の乱流に対する摩擦抵抗低減、混合促進、剥離制御、熱伝達促進等の制御に対する関心が高く、これまでにアクティブ・パッシブの両面から多くの制御手法が考案されている。中でも、乱流のフィードバック制御に対する関心は強く、このことは制御手法構築という面だけではなく、乱流輸送機構を理解し、より高効率な制御手法を実現するうえでの知見、すなわち制御手法に対する現象的解釈を得るうえでも重要な意味を持つ。

壁乱流のフィードバック制御の例としては、壁面摩擦抵抗低減を目的とした Choi, Moin & Kim (1994) による壁面上の吹き出し・吸い込み、Bewley, Choi, Temam & Moin (1993) による吹き出し・吸い込みの準最適制御化等があるが、いずれも直接数値シミュレーションによるものである。実験的に、位相遅れなく乱流のフィードバック制御を行うことは非常に難しいが、近年の Micro-Electro-Mechanical (MEM) 技術の発達により on-demand 型マイクロ・アクチュエータの開発が進んできている。Saddoughi (1995) は、混合促進、剥離制御を目的として、on-demand 型 vortex generator の開発を現在進めている。しかしながら、制御投入に伴う外部からのノイズが少ないこと、制御の効果をより忠実に実現できること、および制御の時空間的位相遅れに対する影響をより理想的に検討できることから、乱流のフィードバック制御に関する研究は、直接数値シミュレーションによる数値実験を中心として行われている。

本研究では、壁面をアクチュエータとした乱流制御手法構築の準備として、簡単化された壁面変形モードを仮定し、その乱流場には及ぼす影響を検討する。本研究では、摩擦抵抗低減等の制御目的は設定せず、一定の壁面変形モードを与え続けた場合の壁乱流中の諸構造の挙動の時空間的な変化に対する検討を加える。具体的壁面変形モードとしては、流れ方向一定の時空間的正弦振動変形を仮定する。壁面の流れ方向一様化については、壁乱流においては、低速ストリーク構造や壁面近傍剪断層に見られるように流れ方向に長く伸びた構造、あるいは縦渦構造やスイープのように空間的に間欠的であっても流れ方向に長く持続する構造が乱流輸送現象の中心的役割を担っていることを考慮して、それらの諸構造にはたつきかける基本モードとして設定した。壁面変形分布の時空間的正弦振動化は、変形パラメータを減らすために仮定した。このとき、本壁面変形モードは、ピッチ (スパン方向波長)、時間周期、振幅という3つのパラメータを持ち、それぞれが本アクチュエーション (制御) の空間スケール、時間スケール、強度に対応する。それら諸スケールの乱流場には及ぼす効果を検討することにより、乱流輸送機構の促進・抑制に対する時空間的有效スケール、および投入強さの影響を考察することができる。本研究においては、壁面変

形状チューニングによる乱流準秩序構造の操作を目的とし、よって、壁面変形パラメータは、縦渦構造、低速ストリークといった乱流準秩序構造の時空間スケールを参照して決められる。さらに、粘性底層内における制御を仮定し、その強度、すなわち振動振幅については、粘性底層厚さ程度あるいはそれ以内のスケールを仮定する。

4.2 平板チャネル乱流の直接数値シミュレーション

前章において、本研究で用いる乱流の直接数値シミュレーション手法の解説と、その2次元層流場に対する予測性能を検討した。ここでは、その手法に基づき開発したプログラムの乱流シミュレーションに対する適用性および予測性能を発達チャネル乱流の直接数値シミュレーションに対して検討する。

4.2.1 計算条件

計算初期場には、移流項に Adams-Bashforth 法、粘性項に Crank-Nicolson 法を用いたフラクショナル・ステップ法、およびスタガード格子系2次精度中心差分による発達チャネル乱流直接数値シミュレーション場時場 (佐竹 1995) を用いている。本シミュレーションでは、計算領域の大きさおよび計算格子点数については初期場に準じ、流れ方向 (x 方向)、壁面垂直方向 (y 方向)、スパン方向 (z 方向) にそれぞれ $1.25\pi\delta \times 2\delta \times 0.375\pi\delta$, $48 \times 97 \times 36$ としている。本計算体積は、当該レイノルズ数に対する minimal flow unit (Jiménez & Moin 1991) の x 方向におよそ 2.5 倍、 z 方向におよそ 1.5 倍、体積ではおよそ 4 倍相当にあたる。計算格子は、 x, z 方向には等間隔で取り、 y 方向には (3.8) 式の \tanh 分布を用いて与えた ($a=0.984$)。本研究で用いる計算領域の大きさおよび計算格子数の minimal flow unit シミュレータとしての妥当性は佐竹 (1995) によって検討されている。よって、ここでは、それらの検証については省略する。シミュレーションは流量一定で行われ、バルク平均流速およびチャネル幅に基づくレイノルズ数 $Re_b (= U_b\delta/\nu)$ を $Re_b = 4600$ とした。

本研究で用いる数値手法は時空間的に内挿系であるため、陽解法や半陰解法を用いる場合に問題となる計算時間刻み、計算格子幅に対する収束性は保証される。また、陰解法は数値的に安定な解法であるため、時間刻みを大きく取ることができ、時間発展をより少ない計算回数で行うことができる。この点では、本計算手法は、大部分の乱流の直接数値シミュレーションにおいて行われている陽解法の併用 (すなわち解法の線形化) 時の問題点、すなわち1タイムステップ当たりの計算が速くなる反面、収束性・安定性からの制約により時間刻みを過度に小さく取らなければならないという点を解決する。ただし、陰解法を用いる場合にも、Kolmogorov タイムスケール等を考慮した乱流挙動を損なわない時間刻み幅を取る必要がある。チャネル乱流の直接数値シミュレーションにおいて、過度に大きな時間刻み幅による層流化の効果が報告されている (Choi & Moin 1994)。ここでは、前章で示した計算手法の乱流計算に対する妥当性を、得られた統計量を既存のものと比較することによって示すとともに、計算時間刻み幅の効果および乱流の直接数値シミュレーションにおける適切な時間刻み幅の選定についての検討を行う。

4.2.2 計算時間刻み幅の効果

本研究で選んだ時間刻み幅を表 4.1 に示す。また、各シミュレーションにおける壁面摩擦係数 C_f および摩擦速度 u_τ により定義されるレイノルズ数 $Re_\tau (= u_\tau\delta/\nu)$ 、時間積分間隔、時間積分回数 (α サンプリング数) を、これに併記する。全てのシミュレーションの平均操作は、large eddy turnover time で50以上行っている (Handler, Levich & Sirovich 1993)。なお、large eddy turnover time T_e は、 u_{rms} の最大値 u'_{max} とチャネル半幅 δ を用いて $T_e = 2\delta/u'_{max}$ と表される。また、Choi & Moin (1994) によつて、乱流のシミュレーションには CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 数で1以下に相当するタイムステッ

が必要であるという報告がなされており、本シミュレーションの各時間刻みのケースに対しても、この CFL 数を示しておく。ここで、CFL 数は次式で定義される。

$$CFL = \max \left(\frac{|v_1|}{\Delta x_1} + \frac{|v_2|}{\Delta x_2} + \frac{|v_3|}{\Delta x_3} \right) \Delta t. \quad (4.1)$$

Table 4.1: 平板チャネル乱流 DNS における計算時間ステップの影響

$\Delta t U_b / \delta$ ($\Delta t u_\tau / \delta$)	0.0133 (0.142)	0.0333 (0.342)	0.0667 (0.630)	0.100 (0.875)
CFL	0.4	1	2	3
$T_{int} U_b / \delta$ ($T_{int} u_\tau / \delta$)	677 (7200)	1040 (10700)	660 (6240)	750 (6560)
eddy turnover times	55.3	87.5	56.7	66.4
sampling number	50800	31300	9900	7500
$C_f \times 10^3$	9.17	8.84	8.16	7.55
Re_τ	157	154	148	142

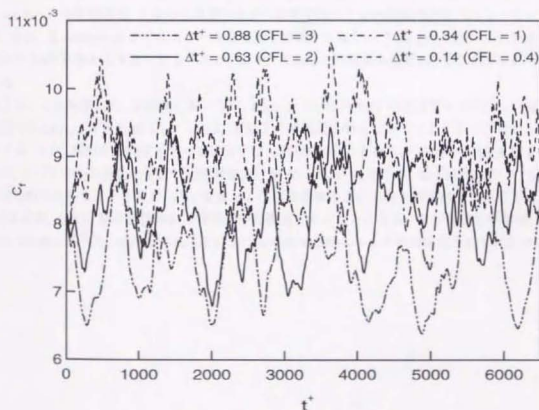


Figure 4.1: 平板チャネル乱流における平均速度勾配の時間変化

図 4.1 に、各時刻におけるチャネル両壁面平均摩擦係数 C_f の時間変化を示す。なお、以降の無次元化は、シミュレーション各ケースの摩擦速度 u_τ と動粘性係数 ν に基づく。また、 C_f は、層流分布において 2.50×10^{-3} となる。Choi & Moin (1994) によって、陰的ブラクショナル・ステップ法使用時に過度に大きな時間刻み幅を用いることによって、発達チャネル乱流が層流化する現象が報告されているが、本シミュレーションでは、そこまで至る時間幅を選んでいないこともあり、そのような現象は本 C_f 図か

らは見られない。計算初期の C_f の時間変化において、時間刻みの大きい方が、他の時間刻みの小さいシミュレーションよりもより速く分岐の起こっている様子を見ることができる。時間刻みの変化に伴う乱流構造の変化は、表 4.1 に示した積分時間上で取った各種乱流統計量より考察する。

図 4.3 に平均速度分布を示す。なお、以下の結果において、レイノルズ数のほぼ一致するスペクトル法による DNS の結果 ($Re_\tau = 150$, Kuroda, Kasagi & Hirata 1993) および 2 次精度差分法による DNS の結果 ($Re_\tau = 150$, Satake 1994) を併記する。本研究のシミュレーションおよび佐竹 (1994) の 2 次精度差分法のシミュレーションとはともに minimal flow unit より若干大きめの計算体積によるもので、Kuroda et al. (1993) の十分に大きな領域をとったシミュレーションとの間のチャネルコア領域における統計量上の一定の隔たりは避けられない。図 4.3 にレイノルズ応力、図 4.4 に速度変動の rms 値、図 4.5 に渦度変動の rms 値の分布をそれぞれ示す。本シミュレーションにおける $\Delta t^+ = 0.875$ ($CFL = 3$) のケースは、どの統計量においても、他の結果より大きく外れた傾向を示している。また、速度変動の rms 分布においては、 $\Delta t^+ = 0.630$ ($CFL = 2$) のケースの傾向の隔たりも大きくなっている。この時間刻み幅の大きい場合の乱流統計量の傾向の変化は、表 4.1 に示すように Re_τ すなわち C_f の縮小の効果が表れたものである。このことは、図 4.2 における平均速度の上昇、図 4.3 におけるレイノルズ応力の効果、図 4.5 に示す縦渦強度 $\omega_{z,rms}^+$ の縮小、およびその構成成分 u_{rms}^+, v_{rms}^+ の減少に顕著に見られる。このことは、一定の計算時間刻み以上では、与えられたチャネル計算初期場における乱流変動のレベルが維持されないこと、特に弱くなることを示している。具体的には、先の考察より、計算時間刻みを大きくとった場合は、小スケールの変動構造、すなわち高波数成分の変動がカットされた乱流のシミュレーションにも相当する。なお、Kolmogorov タイムスケールは壁面上で最小となり、 $\tau^+ \equiv (u_\tau^4/\epsilon\nu)^{1/2} = 2 \sim 3$ となるのが既存の DNS 結果からも知られているが、表 4.1 に示した時間刻み幅は、全てこの半分以下に抑えられている。

以上のことを考慮して、本研究においては、Choi & Moin (1994) の推奨する $CFL = 1$ 以下の範囲にも相当する $\Delta t u_b/\delta = 0.0333$ ($\Delta t^+ = 0.3$) を以下の壁面変形のあるシミュレーションに対して用いることとする。また、壁面を振動変形させる場合には、縦渦構造等によるスパン方向の速度変動が活性化されるため、スパン方向の計算格子数 (空間解像度) を 36 から 48 に増やす。格子解像度が不十分の場合、主に粘性拡散の見積り不足により、質量および運動量輸送上に過剰な移流効果を生じさせることになり、その結果、収束計算の発散等から時間積分を破綻させることになる。この数値的現象は、計算手法のところで既に述べた、非線形移流項上における過剰な運動エネルギーの残留効果にも対応する。

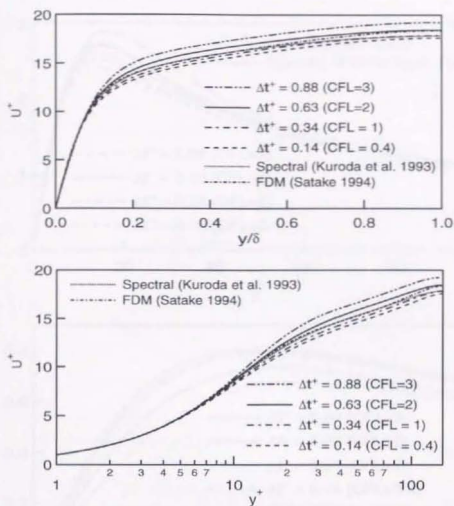


Figure 4.2: 平板チャネル乱流平均速度

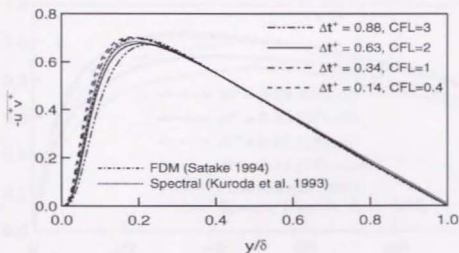


Figure 4.3: 平板チャネル乱流レイノルズ応力

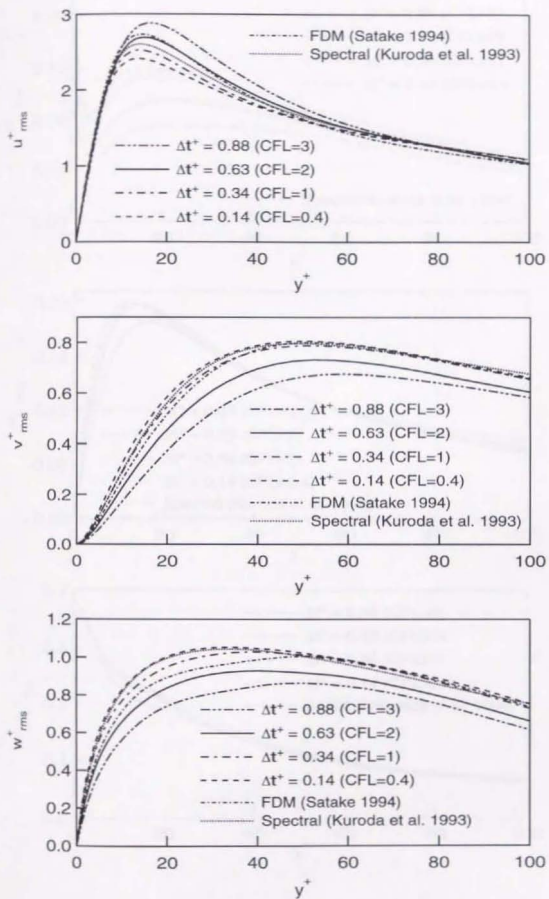


Figure 4.4: 平板チャネル乱流速度変動強度

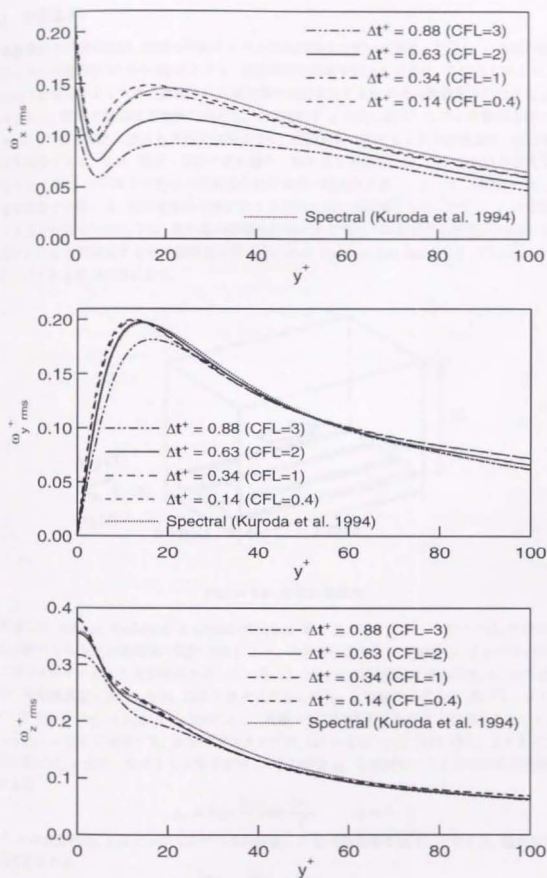


Figure 4.5: 平板チャネル乱流渦度変動強度

4.3 チャネル乱流に対する壁面の正弦振動変形の影響

4.3.1 計算条件

計算領域および座標系は、前節の平板チャネル乱流の場合と同一に取る。ただし、 x 方向の格子点数を平板チャネルの場合の 36 から 48 に上げる。計算領域の概略を図 4.6 に示す。このことにより、壁面に変形振動がある場合により大きく誘起される速度場の高次成分すなわち高周波数成分に対する空間解像度が改善される。壁面の変形は下壁側のみとし、その変位を y 方向に限る。このとき壁面形状は陽的に与えられ、よって壁面変形に関する方程式は解かない。壁面変形に対するこれらの仮定は、完全陰的な解法の適用を可能とする。なお、壁面・界面と流れ場の干渉を考える場合には、加えて表面方程式を解かなければならなくなり、この場合の解法の除算化は計算量の膨大化を招く。よって、本問題に対して実用的な計算を実現する際には、表面変形の予測に対する陽的な扱いが必要となる。ただし、この境界・座標系に対する陽的な扱いに対しては、流れ場の陽解法化時の非収束性・時間的位相誤差に対応するところの座標系における位相誤差すなわち幾何保存則 (geometric conservation law (GCL) Thomas & Lombard 1979) に対する考慮が必要になる。

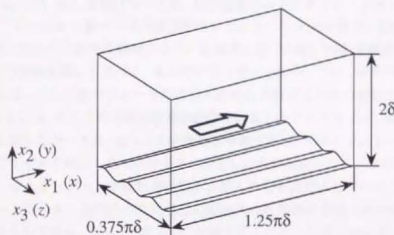


Figure 4.6: 計算対象概略

初期場には、Adams-Bashforth & Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法、2 次中心差分を用いた平板チャネル乱流瞬時場 (佐竹 1995) より、本手法により更に $12000 \nu / u_\tau^2$ ($1800 \delta / U_i$) 時間積分した後の平板チャネル乱流瞬時場を用いている。ここで、 U_i は層流仮定中心流速、 u_τ は平板チャネル乱流の平均摩擦速度を表す。なお、以降の無次元化はこの u_τ と動粘性係数 ν に基づく。レイノルズ数は、バルク平均で $Re_b = U_i \delta / \nu = 4600$ とし、流量一定で時間積分を行う。初期場のレイノルズ数は、 $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu = 150$ に相当する。計算時間ステップは、 $\Delta \tau = 0.33 \nu / u_\tau^2$ ($0.05 \delta / U_i$) とする (CFL = 1)。壁面変形には、 x 方向一定の 2 次元性を仮定し、その変位 y_w を次式のように時空間的正弦関数で与える (図 4.7)。

$$y_w = a \sin \frac{2\pi z}{s} \sin \frac{2\pi \tau}{T}, \quad z_w = 0. \quad (4.2)$$

ここで、 a は変形振幅、 s はピッチ (スパン方向波長)、 T は時間周期を表す、このとき、壁面変形速度 v_w は次式で示される。

$$v_w = \frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi z}{s} \cos \frac{2\pi \tau}{T}, \quad w_w = 0. \quad (4.3)$$

(4.3) 式に表されているように、壁面変形速度の振幅は $2\pi a/T$ 、またその位相は変形変位より $\pi/2$ ずれている。また、本壁面変形モードにおいては、変形の節の位置は一定に保たれ、変形の山と谷の位置は半

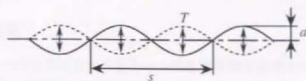


Figure 4.7: 壁面変形モード

周期に1ピッチごと移動する。ただしこの場合にも変形は一定位置に保たれ、スパン方向速度を持たない。本壁面変形モードのパラメータには、壁面変形の時空間的なスケールである周期 T 、ピッチ s とそのアクチュエーション強度である振幅 a の3変数がある。またこれらの3変数を用いて、壁面変形速度、変形勾配、変形歪速度のスケールを表す次の3変数 a/T , a/s , a^2/Ts をそれぞれ定義できる。これらのパラメータは、縦渦構造、低速ストリーク等の乱流準秩序構造のスケールを参照して決められる。ピッチについては、縦渦径 ($\approx 30\nu/u_\tau$, Kim, Moin & Moser 1987), 低速ストリーク間隔 ($\approx 100\nu/u_\tau$, Smith & Metzler 1983) を参照して $s^+ = 23, 45, 90, 180$, 周期については、縦渦周期 ($\approx 30 \sim 100\nu/u_\tau^2$) を参照して $T^+ = 50, 100, 150$, 振幅については、粘性底層でのアクチュエーションを仮定して $a^+ = 2.5, 3.8, 5.0, 7.5$ とし、この中から数ケースの直接数値シミュレーションを行う。なお、この粘性底層内での制御は、壁面近傍の粘性の支配的な領域において乱流生成渦（の種）の生成頻度が高いとする Brook & Hauratty (1992) の観測結果にも基づく。本研究で行ったシミュレーションのパラメータを表 4.2, 表 4.3 に示す。表 4.2 には、これら各パラメータの効果の概略を検討するために短期シミュレーションを行ったケースを、表 4.3 には、それに引き続き各種統計量を計算したケースを示す。表 4.3 に示される引き続き各種統計量を計算したケースは、表 4.2 の計算結果を踏まえて、本マニピュレーションによって典型的な効果の現われるケースを抽出したものである。表 4.2 に示されるパラメータは均等になっていないが、これは本段階のシミュレーションが流れ場の傾向を探ることを目的としていることと、壁面振動変形により誘起された小スケール・高波数の乱流構造に起因する数値的不安定（時間積分計算の発散・破綻）からの制約によるものである。よって、表 4.2 の計算を行えなかった幾つかのケースについては、計算格子数を増やし、空間分解能を増加させることによりシミュレーションが可能となる。なお、表 4.2, 表 4.3 中の $T^+ = 100$ は、乱流摩擦抵抗低減を目的として壁面にスパン方向振動を課した実験 (Laadhari et al. 1994), 計算 (Jung et al. 1992) より得られた有効周波数にも一致する。

Table 4.2: 壁面振動パラメータ (短期シミュレーション)

T^+	50				100				150	
s^+	23	45	90	180	45	90	180	45	90	180
a^+	3.8	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	5.0	7.5	5.0
		3.8	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	7.5		
		5.0	7.5		7.5					

Table 4.3: 壁面振動パラメータ (統計量計算)

T^+	50		100	
s^+	45	90	45	90
a^+	2.5, 5.0	5.0	2.5, 5.0	5.0

4.3.2 壁面摩擦の変化

短期シミュレーションの結果

表 4.4 に、短期シミュレーションを行った各ケースの変形壁側表面摩擦係数 C_{f1} を、平板チャネル乱流の結果とともに示す。 C_{f1} の平均は、時刻 0 より $1300 \nu/u_*^2$ 間 ($\Delta T^+ = 1300$) の時間積分より得た。これはおよそ 11 large eddy turnover time に相当する。 C_{f1} は、 ΔT 時間上の変形壁 Γ_w 上の壁面剪断応力 τ_w の平均値として次のように表される。

$$C_{f1} = \left[\frac{1}{\Delta T} \int_{\Delta T} d\tau \cdot \int_{\Gamma_w} \tau_w \frac{d\Gamma}{\Gamma_{w0}} \right] / \left(\frac{1}{2} \rho U_b^2 \right), \quad (4.4)$$

ここで、 Γ_{w0} は、変形壁 Γ_w の x_1 - x_3 面に対する投影面積を表す。表 4.4 中、平板チャネル乱流の C_f より 3% 以上増大しているケースを ↑、3% 以上減少しているケースを ↓ で示している。 C_{f1} が最も敏感に変化するパラメータは壁面変形の空間スケール s^+ であり、 $T^+ = 50$ と 100 に共通して、 $s^+ = 45$ では C_{f1} の変化、すなわち増大・減少の交替が顕著に見られる。このような大きな C_f の変化が、平均縦渦径 ($\approx 30 \nu/u_*$) に近い s^+ で起こっていることは興味深い。なお、表中には、本壁面振動変形モードに関する 3 つのパラメータについても併記している。すなわち、 a^+/s^+ 、 a^+/T^+ 、 $a^{+2}/T^{+2}s^+$ は、それぞれ、壁面変形に対する勾配、速度、変形速度を表している。この短期のシミュレーション上では、この 3 つのパラメータ上においては、先のピッチ上に見られるような明らかな傾向は見い出せない。この原因として、時間積分幅の短小に起因している可能性も考えるため、本パラメータに対する依存性については、後の長期のシミュレーション結果において改めて検討することとする。

図 4.8 ~ 4.11 に、 $T^+ = 50, 100$ 、 $s^+ = 45, 90$ 、 $a^+ = 2.5, 5.0$ の場合の、瞬時場平均の振動壁側 C_{f1} の時間変化を示す。ここで示した C_{f1} は、(4.4) 式より時間積分を取り除いた、次式によって与えられる。

$$C_{f1} = \left(\int_{\Gamma_w} \tau_w \frac{d\Gamma}{\Gamma_{w0}} \right) / \left(\frac{1}{2} \rho U_b^2 \right), \quad (4.5)$$

図中に示される C_{f1} の振動の時間周期・振幅に壁面振動変形の時間周期・振幅が反映されている。すなわち、 C_{f1} の振動周期は壁面変形周期の半周期に等しくなっており、(位相遅れなしで) 変形変位が 0 の場合に C_{f1} が最小、変形変位が最大の位相において C_{f1} が最大となっている。一方、変形振幅が大きくなるほど、 C_{f1} の振動振幅も大きくなっている。変形ピッチの効果は、 C_{f1} の振幅に現われる。すなわち、変形ピッチが小さくなり、壁面変形勾配が大きくなるほど、 C_{f1} の振動振幅が大きくなっている。また、壁面変形の時間周期の効果は、発達チャネル乱流に対する壁面変形印加後の C_{f1} 挙動が平板チャネルの場合と分かれる時刻、たとえば図 4.10 の場合、 $T^+ = 100$ 、 $s^+ = 45$ 、 $a^+ = 5.0$ の場合には $\tau^+ = 150$ 、 $T^+ = 50$ 、 $s^+ = 45$ 、 $a^+ = 5.0$ の場合には $\tau^+ = 350$ にも現われている。同様の効果を、壁面変形アキュチュレーションの空間スケールであるピッチにおいても見ることができ。たとえば図 4.9 の場合、 $T^+ = 100$ 、 $s^+ = 45$ 、 $a^+ = 5.0$ の場合には $\tau^+ = 150$ 、 $T^+ = 100$ 、 $s^+ = 90$ 、 $a^+ = 5.0$ の場合には $\tau^+ = 250$ にも現われている。これは、それぞれの壁面振動モードの乱流場に対する感受性 (sensitivity)、受容性 (receptivity) が現われているものと考えられる。

長期シミュレーションの結果

表 4.5 に、上記の短期シミュレーションに引き続き行った統計量計算を行った長期シミュレーションの各ケースに対する振動壁側壁面摩擦係数 C_{f1} およびチャネル上下壁平均の壁面摩擦係数 C_{fT} を示す。表中の Re_{τ} は、チャネル上下壁平均の壁面摩擦係数 C_{fT} より計算される摩擦速度およびチャネル半幅 δ に基づく。時間積分には、およそ 20000 ステップ、 $6500 \nu/u_*^2$ 時間を要している。これは、およそ 55 large eddy turnover time に相当する。Handler, Levich & Sirovich (1993) は、平板チャネル乱流の統計

量計算に 50 large eddy turnover time を要し、これに phase randomization を加えたシミュレーションの統計量計算に 100 large eddy turn overtime を要した。統計量計算に必要なサンプリング数は、レイノルズ数および計算領域の大きさにも依存する。本計算では、Handler, Levich & Sirovich (1993) よりレイノルズ数の変化を考慮しても相対的に計算領域を大きく取っており、1 瞬時場当たりに得られるサンプル数は本シミュレーションの方が多くなる。また、50 large eddy turnover time 以上の時間積分で統計量計算結果にはほとんど差が生じなかったため、本研究における統計量計算ではこれを積分時間間隔の目安にしている。

表 4.5 において、変形壁側の摩擦抵抗 C_{f1} が減少するケースは、 $(T^+, s^+, a^+) = (50, 90, 5.0)$, $(50, 45, 2.5)$, $(100, 90, 5.0)$ の 3 ケースであり、一方の C_{f1} が増加するケースは、 $(T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 5.0)$, $(100, 45, 2.5)$, $(100, 45, 5.0)$ の 3 ケースである。これより、 $a^+ = 2.5$ の場合には例外的挙動も見られるものの、アクトチュエーション強度の等しい $a^+ = 5.0$ の場合に限れば、変形ピッチ $s^+ = 45$ の場合に抵抗低減が、 $s^+ = 90$ の場合に抵抗増加が得られている。この摩擦抵抗の変化に見られる壁面変形、特にピッチと乱流瞬時構造との関係については、後の乱流準秩序構造に対する考察において改めて触れることにする。また、初期シミュレーション時に述べた壁面変形に関する 3 つのパラメータ、勾配 a^+/s^+ 、速度 a^+/T^+ 、歪速度 a^{+2}/T^+s^+ の壁面摩擦に対する依存性・傾向については、結局ここでも見出すことができない。しかしながら、縦渦成分にも相当する壁面変形の歪速度 a^{+2}/T^+s^+ の本計算対象における中間領域 $3 \sim 6 \times 10^{-3}$ において、抵抗低減と増大の両ケースが生じていることは非常に興味深い。本観測結果より、この範囲の歪速度を持つ壁面変形アクトチュエーションが乱流構造の変化に対してより敏感であることを推測できる。

図 4.12 ~ 4.13 に、 $T^+ = 50, 100$, $s^+ = 45, 90$, $a^+ = 2.5, 5.0$ における長期シミュレーション時の振動壁側 C_{f1} ((4.5) 式) の時間変化を示す。 C_{f1} の時間トレース上における振動挙動は、短期シミュレーションにおいても述べた壁面の振動変形に基づくもの (短期振動) と、その上に存在するさらに大きな時間周期の振動 (長周期振動) の 2 成分より成っている。前者の短周期振動は、壁面変形の半周期を 1 周期とする振動であり、後者の長周期振動は、平板チャネルの場合にも観測される計算領域内における乱流構造 (の分布) の変化、特に乱流変動レベルの時間的な変化が反映されたものである。なお、壁面に振動変形が加えられている本ケースでは、いずれのケースにおいても、 C_{f1} の長周期振動の振幅は平板チャネルの場合より大きくなっている。このことは、本壁面変形モードを加えることによって、乱流瞬時構造の時間的な変化の度合がより強くなることを表している。また、本壁面変形モードを加えた場合の C_{f1} の時間トレースの振動は、平板チャネルの場合の C_{f1} の振動レンジより、下方側へも、上方側へも大きく変化しており、時間的位相を限れば、本壁面振動変形モードが摩擦抵抗低減側にも増大側にもはたらくことを確認できる。本研究における壁面変形モードでは、摩擦抵抗の操作を目的とするものではないためセンサを付けていないが、本観測結果より、センサを設置して、一定のアルゴリズム (on-demand (on-off) 化、フィードバック化) のもと壁面変形を作用させることにより、摩擦抵抗操作に対してさらに効果的な成果を期待できる。

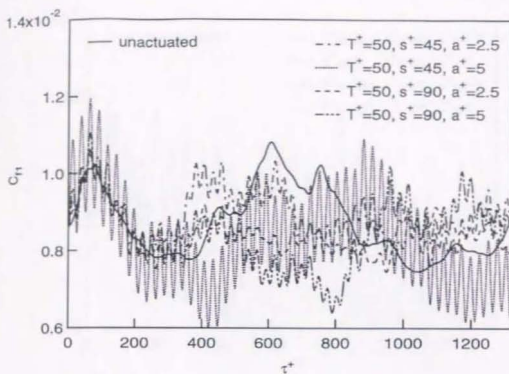
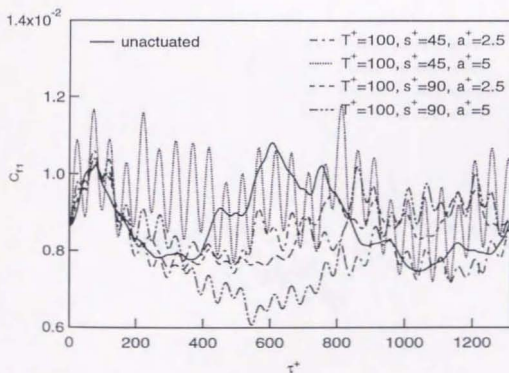
ここで観測した C_{f1} の変化に現われている乱流構造の変化については、後の乱流構造解析において逐次検討を行う。

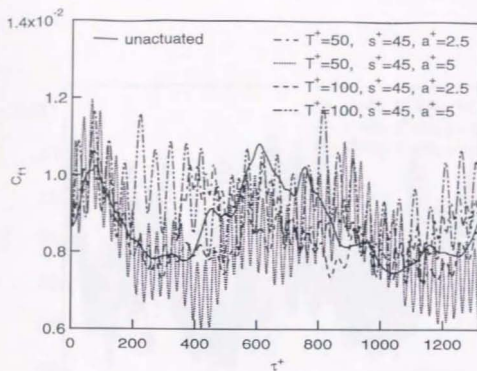
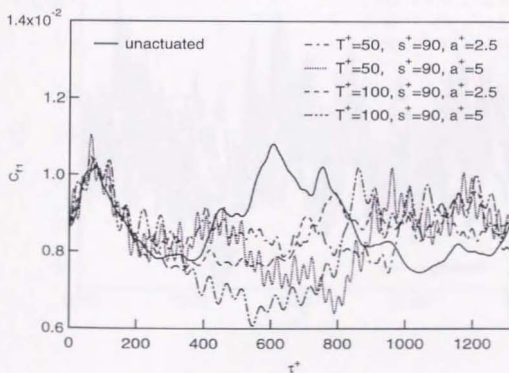
Table 4.4: 壁面摩擦係数 (初期計算結果)

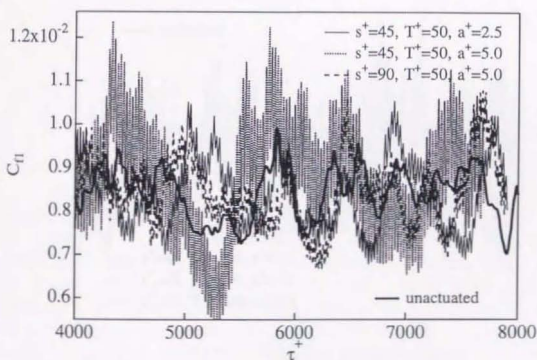
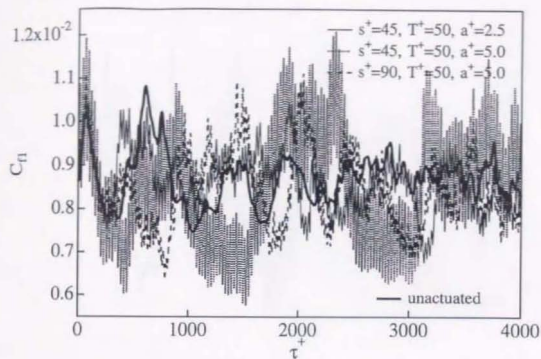
T^+	s^+	a^+	a^+/s^+	a^+/T^+	$\frac{a^{+2}/T^+s^+}{\times 10^3}$	$\frac{C_{f1}}{\times 10^3}$	$Re_{\tau 1}$	
-	-	-	-	-	-	8.72	153	-
50	22	3.8	0.170	0.072	12.19	10.34	167	↑
		2.5	0.057	0.048	2.71	8.87	154	
	45	3.8	0.085	0.072	6.10	9.02	156	↑
		5.0	0.113	0.096	10.84	8.30	149	↓
		2.5	0.028	0.048	1.35	8.51	151	
	90	5.0	0.057	0.096	5.42	8.46	151	
		7.5	0.085	0.144	12.19	8.49	151	
	180	2.5	0.014	0.048	0.68	8.84	154	
		5.0	0.028	0.096	2.71	8.59	152	
100	45	2.5	0.057	0.026	1.44	8.20	148	↓
		5.0	0.113	0.051	5.78	9.35	158	↑
	90	2.5	0.028	0.026	0.72	8.58	152	
		5.0	0.057	0.051	2.89	8.36	150	↓
		7.5	0.085	0.077	6.50	8.80	154	
	180	2.5	0.014	0.026	0.36	8.36	150	↓
		5.0	0.028	0.051	1.44	8.77	154	
	150	5.0	0.113	0.033	3.77	9.32	158	↑
7.5		0.170	0.055	8.48	10.32	167	↑	
90		7.5	0.085	0.055	4.24	9.06	156	↑
180		5.0	0.028	0.033	0.94	8.84	154	

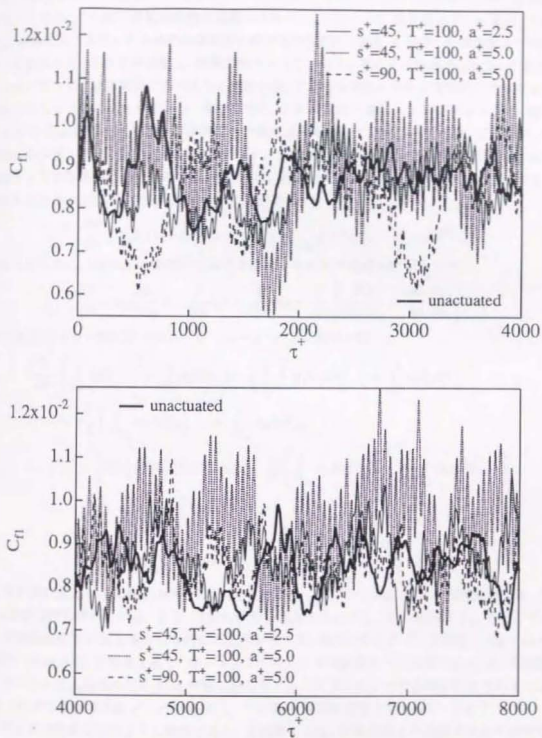
Table 4.5: 壁面摩擦係数 (統計量計算長期シミュレーション)

T^+	s^+	a^+	a^+/s^+	a^+/T^+	a^{+2}/T^+s^+ $\times 10^3$	C_{f1} $\times 10^3$	$Re_{\tau 1}$	C_{fT} $\times 10^3$	$Re_{\tau T}$
-	-	-	-	-	-	-	-	8.53	151
50	45	2.5	0.057	0.048	2.7	8.46	151	8.55	152
		5.0	0.113	0.096	10.8	8.71	153	8.59	152
	90	5.0	0.057	0.096	5.4	8.46	151	8.48	151
		2.5	0.057	0.026	1.4	8.64	152	8.51	151
100	45	5.0	0.113	0.051	5.8	9.20	157	8.90	155
	90	5.0	0.057	0.051	2.9	8.46	151	8.60	152

Figure 4.8: 壁面摩擦係数時間変化 ($T^+ = 50$, 短期シミュレーション)Figure 4.9: 壁面摩擦係数時間変化 ($T^+ = 100$, 短期シミュレーション)

Figure 4.10: 壁面摩擦係数時間変化 ($s^+ = 45$, 短期シミュレーション)Figure 4.11: 壁面摩擦係数時間変化 ($s^+ = 90$, 短期シミュレーション)

Figure 4.12: 壁面摩擦係数時間変化 ($T^+ = 50$, 長期シミュレーション)

Figure 4.13: 壁面摩擦係数時間変化 ($T^+ = 100$, 長期シミュレーション)

4.3.3 投入仕事

本研究では、壁面振動変形の乱流輸送現象に及ぼす影響を検討するが、壁面変形操作を通して投入されるエネルギーを把握することは、計算対象チャネル内における運動エネルギー分配・分布を考察するうえで、また、乱流制御という観点からアクチュエーション効率を考えるうえでも重要である。壁面変形操作に要するエネルギー、さらには計算対象内の運動エネルギー・バランスは、固定座標系から見た、すなわち完全 Eulerian 系におけるチャネル内の流体要素に掛かる力と変位 (速度 × 時間) の体積および時間上の積分によって表される。これを時間軸上 (計算時間ステップ当たり) すなわち仕事率 (出力) で考えれば、運動エネルギーバランスは流体要素にかかる力と速度の積、すなわち運動エネルギー方程式のチャネルボリューム積分によって表されることが分かる。本研究では、チャネル内の運動エネルギー方程式のチャネルボリューム積分すなわち Crank-Nicolson 法、空間的に 2 次精度差分を用いて評価する。なお、ここでは、チャネル内の運動エネルギー・バランスの時間変化を観測する目的から、時間軸上の積分値が運動エネルギー・バランスを表すように各時刻における単位時間当たりの運動エネルギー・バランスを示すこととする。

運動エネルギー $k = u^i u_i / 2$ の支配方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} - v_g^i k_{,i} = -(u^i k)_{,i} - (u^i p)_{,i} + \frac{1}{Re} \left[(g^{ij} k_{,j})_{,i} - u_j^i u_{i,k} g^{jk} \right]. \quad (4.6)$$

理解を助けるために、Cartesian 座標系における運動エネルギー方程式も併記しておく。

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} - v_{gi} \frac{\partial k}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} v_i k - \frac{\partial}{\partial x_i} v_i p + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right]. \quad (4.7)$$

(4.6) 式を完全オイラー的にチャネル・ボリューム V 上で積分を行うと、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta \tau} \left(\int_V k dV \right)^{n+1} - \int_V k dV \Big|_V^n - \frac{1}{2} \left(\int_V v_g^i k_{,i} dV \right)^{n+1} + \int_V v_g^i k_{,i} dV \Big|_V^n \\ &= -\frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_w} u_n k d\Gamma_w \right)^{n+1} + \int_{\Gamma_w} u_n k d\Gamma_w \Big|_V^n \\ & \quad - \frac{1}{2} Q_1 \left((\Delta p)_1^{n+1} + (\Delta p)_1^n \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_w} u_n p d\Gamma_w \right)^{n+1} + \int_{\Gamma_w} u_n p d\Gamma_w \Big|_V^n \\ & \quad + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_w} \frac{\partial k}{\partial n} d\Gamma_w \right)^{n+1} + \int_{\Gamma_w} \frac{\partial k}{\partial n} d\Gamma_w \Big|_V^n \right] \\ & \quad - \frac{1}{2} \left(\int_V u_j^i u_{i,k} g^{jk} dV \right)^{n+1} - \int_V u_j^i u_{i,k} g^{jk} dV \Big|_V^n. \end{aligned} \quad (4.8)$$

ここで、本計算対象における境界条件、すなわち流れ方向・スパン方向に対する周期境界条件、上下境界に対する粘着条件を用いている。また、下壁に変形を加えることとし、その境界を Γ_w で表している。なお、上下両壁面に変形がある場合にも同様の拡張が行える。(4.8) 式中の Q_1 は流量、 $(\Delta p)_1$ はチャネル出入口間の (流れ方向) 圧力差を表す。本シミュレーションでは流量を一定に保つため Q_1 は定数として扱われ、チャネル出入口間の圧力差は、付録に示したアルゴリズムによって各時刻計算される。上添字 n , $n+1$ はそれぞれの参照時刻 τ^n , τ^{n+1} を表し、下添字 n は壁面垂直方向 (成分) を表す。

(4.8) 式各項の効果は次のように解釈できる。左辺第 1 項は、計算空間上の運動エネルギーの時間変化を表す。左辺第 2 項は、壁面変形を含む、計算対象内の全ての格子点移動に伴う観測系依存の見掛けのエネルギー変化を表す。右辺第 1 項は、壁面上の速度非負に起因するエネルギー移流効果を表す。右辺第 2 項は、流れ方向成分の圧力 (押し込み、ポンプ) 仕事、右辺第 3 項は、壁面垂直方向の壁面上の速度非負に基づく圧力押し込み仕事を表す。右辺第 4 項は運動エネルギーの粘性拡散効果を表し、これは次式に示されるように、応力 (運動量束流) に対する仕事とも解釈できる。

$$\frac{1}{Re} (g^{ij} k_{,j})_{,i} = \frac{1}{Re} (g^{ij} u_{k,j})_{,i} = \frac{1}{Re} (g^{ij} u^k u_{k,j})_{,i}. \quad (4.9)$$

Cartesian 座標系では,

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (4.10)$$

右辺第 5 項は, 運動エネルギーの粘性散逸効果を表す. 右辺の他の効果が保存量であるのに対して, この項の効果は散逸系である. すなわち, この項の運動エネルギー・バランスに対する効果は, 常に 0 または負となる. 以上より, 下壁変形に関する効果をまとめて示すと, 右辺第 1, 3, 4 項より,

$$\begin{aligned} v_n k &: k \text{ 移流効果} \\ v_n p &: \text{圧力押し込み仕事} \\ -\frac{1}{Re} \frac{\partial k}{\partial n} \left(= -\frac{1}{Re} v_i \frac{\partial v_i}{\partial n} \right) &: k \text{ 粘性拡散 or 応力 (運動量流束) 仕事} \end{aligned}$$

よって, 単位時間当たりの壁面変形に要する仕事 W_{in} は次式によって表される.

$$W_{in} = \int_{\Gamma_w} \left(v_n k + v_n p - \frac{1}{Re} \frac{\partial k}{\partial n} \right) d\Gamma_w. \quad (4.11)$$

(4.11) 式を (4.8) 式のように時間的に台形則 (Crank-Nicolson 法) により離散化して表すと,

$$W_{in} = \int_{\Gamma_w} \left(\frac{1}{2} (v_n k|^{n+1} + v_n k|^{n}) + \frac{1}{2} (v_n p|^{n+1} + v_n p|^{n}) - \frac{1}{Re} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial k}{\partial n} \right|^{n+1} + \frac{\partial k}{\partial n} \right|^{n} \right) d\Gamma_w. \quad (4.12)$$

計算対象チャネル内の運動エネルギー・バランスとしては, この投入仕事分と, 流れ方向の圧力押し込み仕事と, 粘性内部散逸項かの和が, チャネル内の運動エネルギー時間変化のボリューム積分量に釣り合うことになる. この関係を, 図 4.14 に示す. 壁面の変形がない場合には, 壁面からのエネルギー散逸 (= 投入エネルギー) は 0 になり, 粘性拡散によるエネルギー内部散逸と, 流れ方向の圧力押し込み仕事の和が, 運動エネルギーのチャネル・ボリューム積分値の時間変化と釣り合う. さらに, 平均流のない, たとえば閉キャビティ内流れの場合には, 内部散逸項の効果のみが残り, これは流れが時間とともに減衰していく系を示している. また, 流れが静止している場合にも, これに対して移動している系からは流れが存在しているように観測されるが, この系では, 内部散逸が 0 に抑えられ, 見かけ上の k の移流効果が系の移動に基づく圧力押し込み仕事と釣り合い, その結果保存系が保たれる.

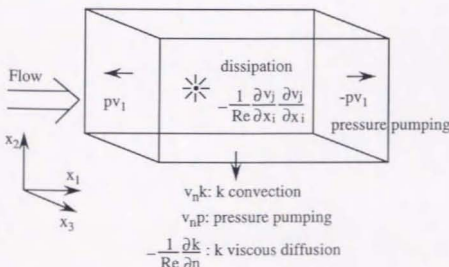


Figure 4.14: フレキシブル・チャネル流における運動エネルギー・バランス

図 4.15, 4.17, 4.19, 4.21 に, $T^+ = 50, 100$, $s^+ = 45, 90$, $a^+ = 5.0$ の場合の, チャネル内運動エネルギー・バランスを示す. なお, 横軸時間 τ^+ の無次元化には, 壁面変形がない場合の C_f に基づく摩擦速度

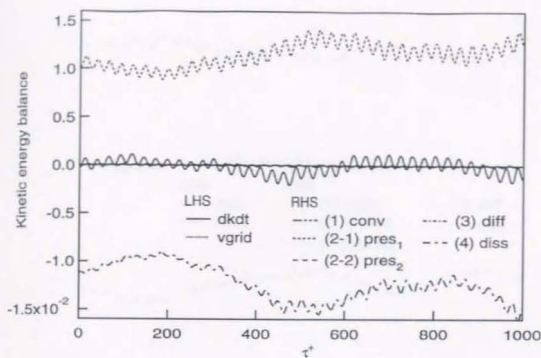
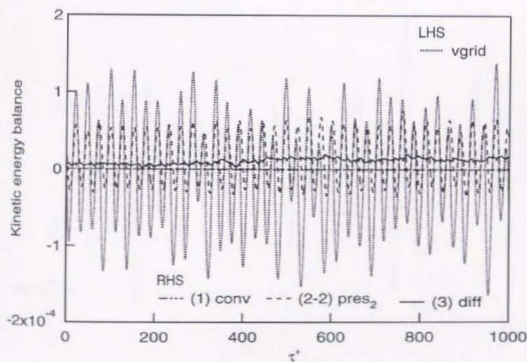
u_{rms} を用いている。これら全てのケースにおいて、流れ方向の圧力押し込み仕事と粘性内部散逸が支配的となっており、ほぼ釣り合いの関係にある。他の効果は、この2項に比べて無視できるほど小さく、チャネル内運動エネルギー時間変化のボリューム積分値が、この2つの効果の和(差)として現れている。このことから、壁面振動に要するエネルギーが、チャネル流の駆動に掛かるエネルギーに比べて十分小さいスケールに抑えられていることが分かる。

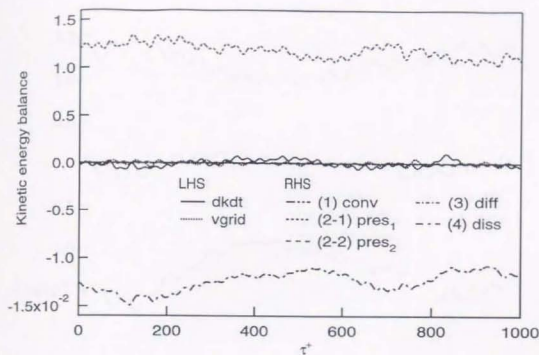
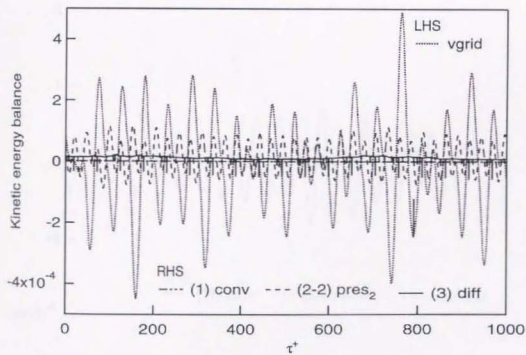
図 4.16, 4.18, 4.20, 4.22 に、壁面変形投入エネルギーに関する各項の時間変化を見るために、図 4.15, 4.17, 4.19, 4.21 の縦軸をおよそ2オーダー (10^2 倍) 拡大したものを示す。このスケールでも、全てのケースについて壁面上の非負の速度に基づくエネルギー移流効果は0となっている。なお、今回壁面振動に用いた変数範囲では、この k 移流効果は全てのケースについて無視できる程度に小さく抑えられている。

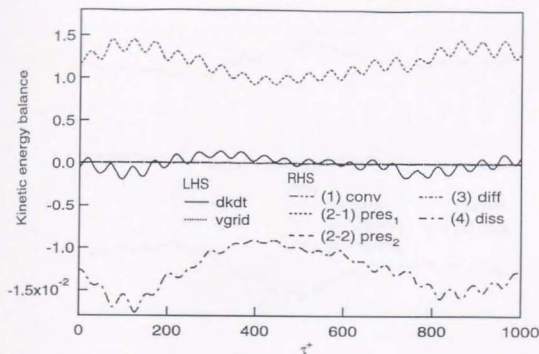
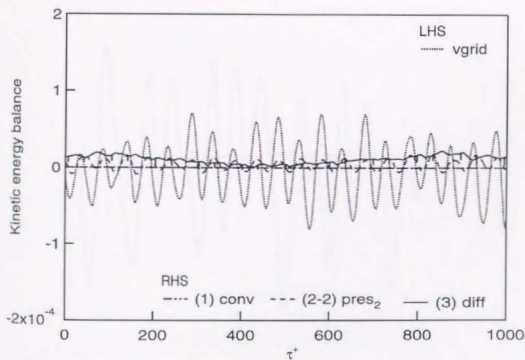
図 4.23, 4.24 に、流れ方向一定流量の駆動に要するポンピング仕事、すなわち (4.8) 式右辺第2項の流れ方向圧力押し込み仕事に対する投入仕事 (4.11) 式あるいは (4.12) 式の割合を表す比投入仕事 (specific work input) ψ を示す。

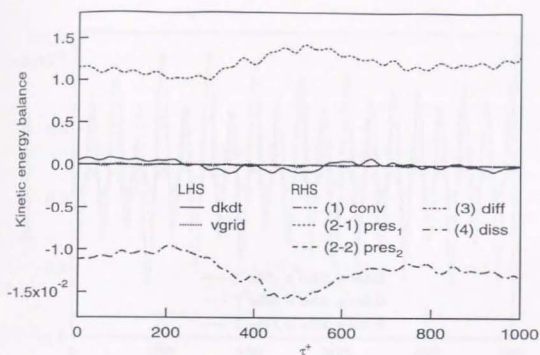
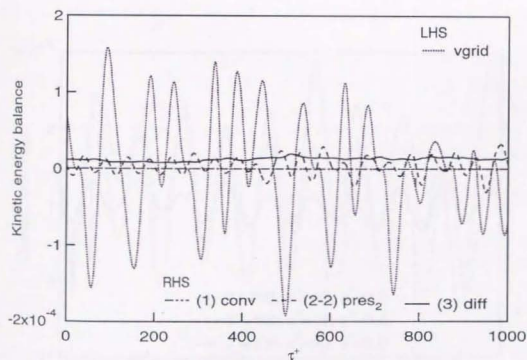
$$\psi = -W_{in}/Q_1(\Delta p)_1. \quad (4.13)$$

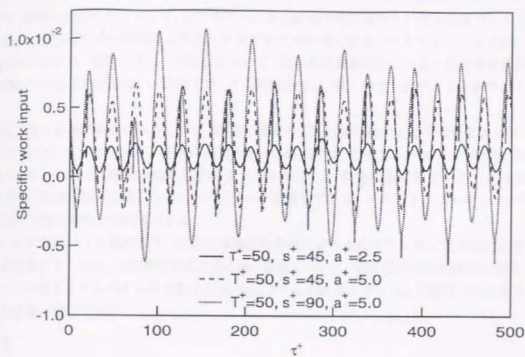
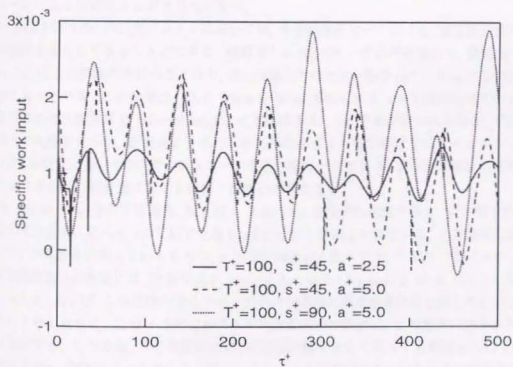
図 4.16, 4.18, 4.20, 4.22 において、壁面振動に要するエネルギーは、 k の移流効果、壁面垂直方向に対する圧力押し込み仕事、および k の粘性拡散、すなわち応力(運動量流束)に対してなす仕事より成る。このうち後者の2項が壁面変形に掛かるエネルギー内の主要効果となっている。このときにも、図 4.23, 4.24 に示されるように、本壁面変形モードにおける投入仕事のオーダーが、いずれのケースにおいても、流れ方向の圧力押し込み仕事(内部散逸エネルギーにも相当)に比較して $10^{-3} \sim 10^{-2}$ のオーダーに抑えられていることがわかる。また、 k の粘性拡散効果の時間変化において、不連続的なクラックが見られるが、これは本効果の瞬間的な消滅、すなわち壁面速度が0となる時刻に対応している。図において、壁面の速度が0となる時刻、すなわち壁面の変形変位が最大となる位相と、このクラックの生じる時刻が一致していないが、これは、この項を壁面上の k の勾配から計算したことによる数値的な誤差が現れているものと考えられる。

Figure 4.15: 運動エネルギー・バランス (gross scale, $T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$)Figure 4.16: 運動エネルギー・バランス (sub-scale, $T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$)

Figure 4.17: 運動エネルギー・バランス (gross scale, $T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$)Figure 4.18: 運動エネルギー・バランス (sub-scale, $T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$)

Figure 4.19: 運動エネルギー・バランス (gross scale, $T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$)Figure 4.20: 運動エネルギー・バランス (sub-scale, $T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$)

Figure 4.21: 運動エネルギー・バランス (gross scale, $T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$)Figure 4.22: 運動エネルギー・バランス (sub-scale, $T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$)

Figure 4.23: 比投入仕事 ($T^+ = 50$)Figure 4.24: 比投入仕事 ($T^+ = 100$)

4.3.4 バルク平均乱流統計量

壁面の振動変形するチャネル内乱流の統計処理について、本研究では2種類の方法を用いている。

1つは、壁面の変形位相によらず、全てのデータを振動壁平均位置からの高さに基づいて平均を取ったものであり、本研究では本処理によるデータをバルク平均値と呼ぶ。シミュレーション時には計算格子は移動しているため、各サンプリング時刻において、統計量計算参照格子上に一定の補間操作によりデータを蓄積していく必要がある。本研究では、この補間操作に、第2章でも述べた2次精度のものを用いている。

本研究で用いる統計処理のもう1つは、特定の壁面の変形位相に基づいて平均を取るものであり、条件つき平均、すなわちアンサンブル平均に相当する。本研究では、このアンサンブル平均を、壁面の変形変位が最大となる位相 (= 壁面の変形速度が0となる位相) と、壁面の変形変位が0となる位相 (= 壁面の変形速度が最大となる位相) の2ケースについて計算している。このときのアンサンブル平均は、壁面振動変形の空間半周期上で計算される。

本節では前者のバルク統計量を、次節では後者の手法により求めたアンサンブル統計量を示す。なお、バルク統計量については、比較を容易にするため、各量について、壁面変形のある場合の周期 $T^+ = 50$ の3ケースと平板チャネルのケースの計4ケースと、 $T^+ = 100$ の3ケースと平板チャネルのケースの計4ケースの2図に分けて示す。

平均速度

図 4.25 ~ 4.28 に x 方向平均速度を示す。図 4.25 および図 4.26 は、 x 方向平均速度をグローバルスケールで表したものであり、図 4.25 および図 4.28 は振動壁近傍の x 方向平均速度を対数スケールで表したものである。

図 4.25 および図 4.26 より、壁面振動変形によって壁面近傍より排除された流量 (運動量) が、静止壁面に移動していることが観測される。この分布のシフト効果を除けば、いずれの速度分布形状にも、本壁面変形モードによる差はほとんど生じていない。

図 4.25 および図 4.26 の対数プロットにおいては、本壁面変形モードによる、変形壁近傍の流量 (運動量) 排除効果を拡大して見ることができる。周期 $T^+ = 50, 100$ いずれの場合にも、振幅 a^+ の小さい場合 ($a^+ = 2.5$) にこの排除効果は小さくなり、逆に振幅 a^+ の大きい場合 ($a^+ = 5.0$) にこの排除効果は一種に大きくなっている。この効果は、Choi, Moin & Kim (1993) によっても観測されているリブレット面上の乱流における仮想原点 (virtual origin) にも対応する。この効果が現われる場合、平板乱流における統計量との比較のために、断面積より求められる平均原点より仮想原点上にデータがシフトされる場合もあるが、本研究においては、アクチュエータの無作動モードであり、また変形変位の基準位置でもある平板の高さを全ての統計量に対する比較・検討の基準とする。

図 4.29 ~ 4.30 に y 方向平均速度、図 4.31 ~ 4.32 に z 方向平均速度を示す。 y 方向平均速度成分は、 x 方向平均速度成分に比べて 10^{-6} 以下であり、ほとんど0に抑えられている。 z 方向平均速度成分については、若干平均成分が残っているものの、 x 方向平均成分に比べて 10^{-3} 以下に抑えられている。この z 方向平均速度成分の残留には、計算領域を minimal flow unit (Jiménez & Moin 1991) に準じて小さくしていること、および、この相関の落ちない z 方向の境界間に周期境界条件を課していることが影響しているものと考えられる。この z 方向における平均速度成分の残留は、この方向に対する秩序的な構造を生成を意味する。このため、この残留効果は、時間積分幅を大きく取っても解消されにくい。また、瞬時流れ場の上でも、計算ユニットを小さく取ったことによる弊害が生じていることが当然予測される。なお、 z 方向、およびこの他の統計量についても、この種の弊害が含まれていることが容易に予測できる。

本研究では、Jiménez & Moin (1991) によって提案された minimal flow unit のおよそ4倍の体積を取っており、 z 方向平均成分もかなり小さく抑えられていることから、この種の弊害はかなり改善されて

いると考えられる。なお、この種の問題は、十分に計算領域を大きくとったフル・シミュレーションにおいても生じている。その典型的な結果が、本来 0 になるべき z 方向変動速度成分の歪み度 (skewness) $S(w)$ の非零の結果に現われている (たとえば、Kim et al. 1987, 通常, z 方向平均速度成分は、当然 0 になるものとして公表されない)。後述の本シミュレーション結果の $S(w)$ と、Kim et al. (1987) に示されている $S(w)$ を比較する限り、両者の計算結果の質はほとんど変わらないと考えられる。

速度変動

図 4.33 ~ 4.34 に x 方向速度変動分布、図 4.35 ~ 4.36 に y 方向速度変動分布、図 4.37 ~ 4.38 に z 方向速度変動分布を示す。

速度変動 3 成分についての全体的な傾向としては、周期 $T^+ = 50$ の場合には、いずれの速度変動成分についても壁面変形モードによる変化は小さいものの、 x 方向速度変動のピーク値の様な低下と、 z 方向速度変動の様な増加が観測される。これは、本壁面変形モードによって、一様に乱流混合が促進されることを意味する。一方、 $T^+ = 100$ の場合には、壁面摩擦の増大するケース ($T^+, s^+, a^+ = (100, 45, 5.0)$) と低減するケース ($T^+, s^+, a^+ = (100, 90, 5.0)$) で、 y 方向速度変動と z 方向速度変動がいずれも大きく増加、減少している。 x 方向速度変動の場合に対しても、これより程度は小さいものの、同様の傾向が現われている。なお、この $T^+ = 100$ の場合には、 x 方向速度変動のピーク値はほぼ平板チャネルのレベルで保たれており、よって、本壁面変形モードがチャネル断面内の速度変動の増幅・減衰に効果的にはたらくモードであることが推測される。以上のことから、本壁面変形モードにおいては、周期 $T^+ = 100$ の方が乱流構造の変化に敏感であることが分かる。これは、本壁面変形モードにおける時間スケール $T^+ = 100$ が、乱流構造の操作に対してより効果的であることを意味する。壁面の速度・歪速度の大きくなる時間周期の小さい場合 $T^+ = 50$ より、これらの壁面変形アクチュエーションの程度を表すパラメータがいずれも小さくなる時間周期の大きい場合 $T^+ = 100$ にこのような大きな変化が現われることは、この時間スケールの本壁面変形モードに対応する乱流輸送機構の中心的役割を担う構造が存在すること、および本壁面変形モードがその構造に対して選択的に作用することを暗示している。 $T^+ = 100$ は、縦渦構造の平均時間周期 $100 \nu / u_\tau^2$ に基づいて設定した値であり、先に示した選択的アクチュエーションの対象がこの時間スケールを持つ縦渦構造であることが本結果より推測される。

この $T^+ = 100$ の場合における変形ピッチの効果は、 $s^+ = 45$ における壁面摩擦およびチャネル横断面内速度変動の増加、および $s^+ = 90$ における壁面摩擦およびチャネル横断面内速度変動の減少に現われることができる。 $s^+ = 45$ は平均縦渦径より若干大きめのスケールに相当し、 $s^+ = 90$ はほぼ平均低速ストリーク間隔、すなわち縦渦構造の空間的生成頻度に相当する。この本壁面変形ピッチの壁面摩擦に対する影響は、後の乱流構造の考察の箇所でも詳細に触れることにし、ここではそのメカニズムの概略のみを示す。すなわち、壁面振動変形モードの低速ストリーク幅に対するスケーリングは、同時に高速領域に対するスケーリングを意味する。乱流抵抗の生成においては、壁面近傍における高速領域・スweepの成長が壁面摩擦の増大、渦構造の発達に対し主要な役割を担っており、高速領域平均発生間隔にスケールされた $s^+ = 90$ の壁面変形モードでは、摩擦抵抗生成の中心的役割を担う高速ストリークをより効果的に弱めたり、強めたりすることができるものと考えられる。このことは、後述のように、高速・低速ストリークの生成位置と壁面変形の空間的位相の相関が非常に高いことから、その効果の強い一貫性が推測できる。一方、縦渦構造平均直径に近い空間スケールを持つ壁面振動変形は、先の高速ストリークの空間的生成頻度にスケーリングされた壁面変形モードの半分のピッチのケースに相当し ($s^+ = 45$)、よって本モードには先の $s^+ = 90$ の場合の効果も含まれていることになる。これに加えて、 $s^+ = 45$ の場合には、さらに高い運動エネルギーを持つ高波数成分・小スケールの速度変動誘起成分が含まれる。この場合には、この高波数速度変動成分により壁面近傍の速度変動がさらに活性化・増幅されることにより壁面摩擦が増加している。

本シミュレーションの結果より、壁面変形によって直接渦構造に干渉することのできる小スケール・高波数成分の速度変動を与えるより、渦構造の生成に大きく係わる高速領域の壁面近傍における成長を抑えるような壁面変形モードの方が、特に摩擦抵抗を抑える目的においては有用であることが分かる。

レイノルズ応力

図 4.39 ~ 4.40 に、各壁面振動変形モードにおけるレイノルズ応力をグローバルスケールで、また図 4.41 ~ 4.42 にこの壁面近傍拡大図を示す。振動壁上の図 4.41 ~ 4.42 において、壁面摩擦の増大するケースにおいてレイノルズ応力が増大、壁面摩擦の減少するケースにおいてレイノルズ応力が減少している様子を見ることができる。中でも、速度変動の差異が顕著に現われている 2 ケース (T^+, s^+, a^+) = (100, 45, 5.0), (100, 90, 5.0) については、レイノルズ応力 $-\overline{u'v'}$ はそれぞれ大きく増大、減少している。

静止壁側においては、図 4.39 ~ 4.40 に示されるように、(T^+, s^+, a^+) = (100, 45, 2.5) の場合を除いて一様にレイノルズ応力は増大している。これは、壁面振動変形の効果が、チャネルコア領域における乱流構造の変化、特に増幅を介して、静止壁側の乱流輸送効果に及んだためと考えられる。中でも、変形壁側壁面摩擦の低減するケースに相当する (T^+, s^+, a^+) = (100, 90, 5.0) の場合には、静止壁側のレイノルズ応力は著しく増大しており、当該流れ場において振動壁側と静止壁側で異なった摩擦レベル (乱流変動レベル) の流れが共存していることを表している。

温度変動

図 4.43 ~ 4.48 に、各壁面振動変形モードにおける温度変動を示す。振動壁側摩擦係数の大きくなる (T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 5.0), (100, 45, 5.0) の 2 ケースにおいては、他の壁面変形モードと比較しても温度変動 3 成分はいずれも大きく増大している。特に、これらのケースにおける変形壁近傍の y 方向温度変動の挙動は他と大きく異なっており、壁面近傍においてスパン方向に大きな勾配を示す構造の生成頻度が高いことが示されている。これは、後の乱流準秩序構造に対する考察においても触れるように、本壁面変形モードにおいて、振動壁上に高速領域・スweepの生成・侵入する頻度が高くなっていることが現われていると考えられる。振動壁摩擦係数の増大したもう一つのケース (T^+, s^+, a^+) = (100, 45, 2.5) においては、 x 方向温度変動成分がわずかに増大しているものの、その他の成分については平板チャネルの間との変化はほとんど見られない。

なお、 x 方向温度変動成分は、本壁面変形モードの流れ場に対し直接与える効果 (速度・温度変動成分) にも対応する。よって、図 4.43 ~ 4.44 は、チャネル乱流の本壁面変形モードの対する受容性 (receptivity) と感度・敏感性 (sensitivity) を表しているとも考えることができる。このとき、抵抗増大のケース (T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 5.0), (100, 45, 5.0), (100, 45, 2.5) は、チャネル乱流上では、受容性が低く、感度の高いモードに対応し、このために壁面変形に誘起された速度変動がさらに活性化されたと考えることができる。逆に、抵抗低減のケース (T^+, s^+, a^+) = (50, 90, 5.0), (100, 90, 5.0), (50, 45, 2.5) は、チャネル乱流上では、受容性が高く、感度の低いモードに対応し、このために壁面変形に誘起された速度変動が活性化されるまえに乱流中に吸収・減衰されたと考えることができる。

相関係数

図 4.49 ~ 4.50 に、各壁面振動変形モードにおける x 方向速度変動と y 方向速度変動の相関係数 R_{uv} をチャネルグローバルスケールで、また、図 4.51 ~ 4.52 に、この変形壁面近傍における拡大値を示す。ここで、相関係数 R_{uv} は、次式によって与えられるパラメータであり、本計算対象とする 2 次元チャネル乱流における速度変動の構造を特徴づけるパラメータの一つである。

$$R_{uv} = \frac{-\overline{u'v'}}{u_{rms}v_{rms}}. \quad (4.14)$$

図 4.49 ~ 4.50 に示されるように、相関係数 R_{uv} においては、レイノルズ応力 $-\overline{u'v'}$ に見られたような

静止壁側における変化はいずれのケースにおいても見られない。チャネルコア領域においては、変形周期 $T^+ = 50$ の場合には大きな変化は見られないものの、 $T^+ = 100$ の場合には、変形壁側摩擦抵抗増大のケースに相当する $s^+ = 45$ の場合に、変形壁側の速度変動の効果がチャネルコア領域により大きく浸透していることが相関値の増大として観測され、また、変形壁側摩擦抵抗低減のケースに相当する $s^+ = 90$ の場合には、変形壁側の速度変動が壁面近傍に抑えられていることが相関値の減少として現われている。また、後者の $s^+ = 90$ の場合には、変形壁側で相関 R_{uv} が抑えられている反面、静止壁側で本相関が他のケースに比較して大きく増加していることが観測できる。このことは、本壁面変形モード $(T^+, s^+, a^+) = (100, 90, 5.0)$ により、静止壁側に平板上で生じる乱流構造とは別個の構造が誘起されることを示している。

図 4.51 ~ 4.52 に示される変形壁近傍の相関係数 R_{uv} については、それぞれのピークの位置は異なるものの、分布の形状はいずれのケースも酷似している。このことから、乱流の構造としては相似的な構造がいずれのケースにおいても占められており、各ケースの相違点は、その増幅率・減衰率と、その壁面上の位置であることが分かる。図中、変形振幅の異なる $a^+ = 2.5$ の場合は、アクチュエーションの高さが異なるため、乱流構造上の変化の現われる高さも異なっている。このアクチュエーションの高さの変化が、 $a^+ = 2.5$ の場合における振動壁近傍における相関係数 R_{uv} の増大に現われている。ゆえに、この場合の相関係数 R_{uv} の変化は、乱流構造の変化を表すものではない。次に、変形振幅 $a^+ = 5.0$ の場合の相関係数 R_{uv} の変化に注目すると、壁面摩擦が増大している $(T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 5.0)$ 、 $(100, 45, 5.0)$ の場合には、壁面摩擦の減少する $(T^+, s^+, a^+) = (50, 90, 5.0)$ 、 $(100, 90, 5.0)$ の場合より、相関係数のピーク位置が壁面近傍に移動していることを見ることができる。これは、速度変動に対する考察でも述べたように、縦渦構造等の乱流変動の中心的役割を担っている諸構造が、壁面近傍へ浸透している様子を表している。

速度変動非等方度

図 4.53 ~ 4.54 に x 方向速度変動の非等方度 b_{11} 、図 4.55 ~ 4.56 に y 方向速度変動の非等方度 b_{22} 、図 4.57 ~ 4.58 に z 方向速度変動の非等方度 b_{33} を示す。これら各速度変動成分の非等方度 b_{ij} は、次式によって表される。

$$b_{ij} = \left(\overline{u_i u_j} - \frac{q^2}{3} \delta_{ij} \right) / q^2, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.15)$$

ここで、 $q^2 = \overline{u_i u_i}$ を表す。

壁面変形周期 $T^+ = 50$ の場合には、壁面摩擦抵抗低減のケースに相当する $(T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 2.5)$ において、 x 方向速度変動の相対的強度 b_{11} が低下し、 z 方向速度変動の相対的強度 b_{33} が増加している。一方、 $T^+ = 100$ の場合には、壁面摩擦抵抗増大のケースに相当する $(T^+, s^+, a^+) = (100, 45, 2.5)$ において、これと同様の効果が生じている。また、 $T^+ = 50$ の場合には、壁面摩擦抵抗増大のケースに相当する $(T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 5.0)$ において、 b_{11} が対数領域において増大し、 b_{33} が同対数領域において減少している。 $T^+ = 100$ の場合には、壁面摩擦抵抗低減のケースに相当する $(T^+, s^+, a^+) = (100, 90, 5.0)$ において、これと同様の効果が生じている。このように、本計算対象においては、速度変動の非等方度において、壁面摩擦抵抗の効果、および壁面変形パラメータの効果は反映されていない。

歪み度 (skewness)

ここでは、壁面変形を加えた場合の速度変動の歪み度の変化を示す。歪み度 (skewness) は変動成分の 3 重相関にあたり、卓越する変動 (prevailing motion) を表す。歪み度 $S(u_i)$ は次式によって与えられる。

$$S(u_i) = \frac{\overline{u_i^3}}{u_{rms}^3}. \quad (4.16)$$

たとえば、平板チャネル乱流における x 方向速度変動成分に対する歪み度は、壁面近傍では正、壁面から離れると負になることが知られている。このことは、壁面近傍では壁面上方からの高速流体の侵入、すなわちスweep運動が支配的であること、および、壁面から離れると、壁面近傍の低速流体塊のチャネルコア領域への侵入、すなわちイジェクションが支配的であることを示している。なお、 x 方向速度変動成分については、ガウス分布 (Gaussian distribution) の場合と同様の挙動を示し、歪み度 ≈ 0 となる。ただし、Kreplin & Eckelmann (1979) の指摘にもあるように、この場合の両者の分布が同じであるとは限らない。

図 4.59 ~ 4.60 に x 方向速度変動の歪み度 $S(u)$ 、図 4.61 ~ 4.62 に y 方向速度変動の歪み度 $S(v)$ 、図 4.63 ~ 4.64 に z 方向速度変動の歪み度 $S(w)$ を示す。

本シミュレーションにおける z 方向速度変動の歪み度 $S(w)$ を見てみると、壁面変形のない平板チャネルのケースにおいても、歪み度が必ずしも小さくないレベルで残っていることが確認できる。本計算対象における流れ場の z 方向に対する対称性を考慮すれば、本来は $S(w)$ はチャネル高さ方向に一様に 0 になるはずである。同様の傾向は、十分に大きな計算領域を取ったシミュレーションにおいても見られる (たとえば Kim et al. 1987)。これは時間積分間隔が不十分であることに基づくというより、むしろ同方向に対する平均成分の残留と同様の理由に基づくものである。すなわち、計算領域の大きさが不十分であること、この境界面に対する周期境界条件の適用に伴うものである。

図 4.59 ~ 4.62 に示される x 方向および y 方向の速度変動の歪み度の分布に、壁面変形効果によって、速度変動、乱流構造が壁面上方にシフトしている様子を見ることができ。ただし、抵抗増大のケースに相当する $(T^+, s^+, a^+) = (100, 45, 2.5)$ の場合には、 $S(u)$ の分布が平板チャネル乱流の場合とほぼ等しい高さにあることが示されている。

$S(u)$ は、壁面近傍の対数領域内に、イジェクション・低速ストリークの卓越を示す負のピーク値を持つが、壁面変形負荷時には、抵抗低減のケースに相当する $(T^+, s^+, a^+) = (50, 90, 5.0)$ の場合を除いて、このピーク値の絶対値は減少している。また、対数領域における $S(u)$ については、周期 $T^+ = 50, 100$ のいずれの場合にも、抵抗低減ケースにあたるピッチ $s^+ = 90$ の場合の方が、抵抗増大ケースに相当する $s^+ = 45$ の場合より絶対値が大きくなっており、 $s^+ = 90$ の場合のこの領域における低速成分の卓越が示されている。この具体的な $-u^+$ の大きい構造としては、イジェクション、低速ストリークが考えられる。しかし、平板チャネルの場合と比べると、先のピーク値の比較でも示したように、 $(T^+, s^+, a^+) = (50, 90, 5.0)$ の場合以外は、この低速構造の生成頻度が減少していることが表されている。

図 4.61 ~ 4.62 に示される y 方向速度変動の歪み度 $S(v)$ の分布では、抵抗増大のケースに相当する $(T^+, s^+, a^+) = (100, 45, 2.5), (100, 45, 5.0)$ の場合には、壁面近傍における負のピーク値の絶対値が大きくなっていることを観察できる。一方、抵抗低減のケースに相当する $(T^+, s^+, a^+) = (50, 90, 5.0), (100, 50, 5.0)$ の場合には、 $S(v)$ は平板チャネルの場合より抑えられている。特に、 $(T^+, s^+, a^+) = (50, 90, 5.0)$ の場合の $S(v)$ の減少の程度は大きくなっている。前者の壁近傍における負の $S(v)$ を特徴づける $-v$ の卓越した流体運動はイジェクションに対応し、後者の抵抗低減ケースにおける $S(v)$ の壁近傍における抑制は、チャネルコア領域と壁面近傍の運動量輸送 (交換) の中心的役割を担う、イジェクションとスweepの抑制に対応する。

平坦度 (flatness)

ここでは、壁面変形を加えた場合の速度変動の平坦度の変化を示す。平坦度 (flatness) は変動成分の 4 重相関にあたり、速度変動の間欠性 (intermittency) を表す。平坦度 $F(u_i)$ は次式によって与えられる。

$$F(u_i) = \frac{\overline{u_i^4}}{\overline{u_i'^2}^2} \quad (4.17)$$

平坦度は、構造が大きいか、また構造の空間的生成頻度が低いほど高くなるパラメータである。たとえ

ば、平板チャネル乱流においては、速度変動全成分に対する平坦度が壁面上で最大となる。なお、 z 方向速度変動成分については、ガウス分布 (Gaussian distribution) の場合と同様の挙動を示し、平坦度 ≈ 3 となる。この場合も、歪み度の場合と等しく、両者の分布が同じであるとは限らない (Kreplin & Eckelmann 1979)。

図 4.65 に x 方向速度変動の平坦度 $F(u)$ 、図 4.67 ~ 4.68 に y 方向速度変動の平坦度 $F(v)$ 、図 4.69 ~ 4.70 に z 方向速度変動の平坦度 $F(w)$ を示す。

x 方向速度変動の平坦度 $F(u)$ には、アクトエーションの高さ、すなわち壁面変形の振幅の効果が現われているが、分布形状はいずれのケースにおいても平板チャネルのケースにほとんど一致している。各ケースにおける乱流準秩序構造解析は後で行うが、その瞬時構造の解析においてはこのような結果は得られず、各座標方向に明らかなパラメータ依存性が見られる。本データは、各ケースにおける乱流構造の増幅時と減衰時の全てのデータの平均にあたるため、このような結果となっている。

y 方向速度変動の平坦度 $F(v)$ には、本壁面変形モードの効果が最も直接的に現われている。すなわち、本シミュレーションにおける壁面変形は v 成分のみによって与えられ、本成分の平坦度 $F(v)$ には、本アクトエーションにより直接的に生成・誘起される速度変動・構造のスケールが反映される。図 4.67 ~ 4.68 において、平坦度 $F(v)$ が低く、すなわち速度変動 v の間欠性が低く、壁近傍における乱流混合が最も促進されているケースが $(T^+, s^+, a^+) = (50, 90, 5.0)$ 、 $(100, 90, 5.0)$ に相当し、いずれも壁面摩擦の低減ケースに相当している。また、変形振幅 $a^+ = 2.5$ の場合においても、壁面摩擦の低減するケースに相当する時間周期 $T^+ = 50$ の場合の方が、壁面摩擦増大のケースに相当する $T^+ = 100$ の場合より v 成分の平坦度、すなわち間欠性が低下している。このことより、本壁面変形モードにおいては、壁面近傍でスパン方向に分布する速度変動・乱流構造を分断することが、壁面摩擦抵抗の低減に対し有効であると推測される。ただし、本結果に示されているように、 $F(v)$ すなわち速度変動 v 成分の間欠性の低減は、壁面変形の空間スケール、すなわちピッチを小さくすることは直接には結び付かない。よって、本問題は、壁面近傍における乱流構造に対してより敏感なパラメータを見つけるという問題に帰着される。 z 方向速度変動の平坦度 $F(w)$ については、壁面変形の振幅に対応するアクトエーションの高さの影響が現われてきているものの、各ケースについて大きな傾向の差は見られない。ただし、乱流瞬時構造上では、 $F(u)$ に対する説明でも述べたように、また後述するように変形パラメータの影響が明らかに現われる。

レイノルズ応力の収支

レイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ の収支 (budget) は次式によって表される (たとえば, Mansour et al. 1988)。

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} = P_{ij} + T_{ij} + D_{ij} + \Pi_{ij} - \epsilon_{ij}. \quad (4.18)$$

ここで、(4.18) 式は、平板チャネル乱流における壁面剪断応力 u_τ と動粘性係数 ν で無次元化されている。なお、(4.18) 式右辺各項は次のように表される。

$$\begin{aligned} P_{ij} &= -[\overline{u_i u_k} U_{j,k} + \overline{u_j u_k} U_{i,k}] && : \text{生成率 (production rate),} \\ \epsilon_{ij} &= 2\overline{u_{i,k} u_{j,k}} && : \text{散逸率 (dissipation rate),} \\ T_{ij} &= -(\overline{u_i u_j u_k})_{,k} && : \text{乱流輸送率 (turbulent transport rate),} \\ D_{ij} &= (\overline{u_i u_j})_{,kk} && : \text{粘性拡散率 (viscous diffusion rate),} \\ \Pi_{ij} &= -\frac{1}{\rho} (\overline{u_i p_{j,j} + u_j p_{i,i}}) && : \text{速度・圧力勾配項 (velocity pressure-gradient term).} \end{aligned}$$

ここで、速度・圧力勾配項は次のように圧力輸送項 (pressure-transport term) と再分配項 (redistributive term) に分けられる。

$$\Pi_{ij} = -\frac{1}{\rho} (p(\overline{u_i \delta_{j,k} + u_j \delta_{i,k}}))_{,k} + \phi_{ij}. \quad (4.19)$$

$$\phi_{ij} = \frac{2}{\rho} \overline{p s_{ij}}$$

: 圧力・歪項 (pressure-strain term),

ここで, $s_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ を表す。

乱流運動エネルギー k の収支

図 4.71 ~ 4.80 に $k = (\overline{u_i u_i})/2$ の収支を示す。図 4.71 ~ 4.72 に生成項 P_k , 図 4.73 ~ 4.74 に散逸項 ϵ , 図 4.75 ~ 4.76 に乱流輸送項 T_k , 図 4.77 ~ 4.78 に粘性拡散項 D_k , 図 4.79 ~ 4.80 に速度・圧力勾配項 Π_k を示す。このうち, 生成項 P_k , 乱流輸送項 T_k , 速度・圧力勾配項 Π_k には, 本壁面変形におけるパラメータ効果はほとんど現われていない。また, これらの項においては, 壁面変形の印加による効果も, 平板チャネル乱流の結果との比較においてほとんど現われていない。本壁面変形モードの効果は, k の収支式の中では, 散逸項 ϵ と粘性拡散項 D_k に現われている。

散逸項 ϵ (図 4.73 ~ 4.74) においては, 壁面変形アクチュエーションの高さの影響, すなわち振幅の影響が, 壁面近傍における高散逸領域のシフトアップ効果として現われている。このときのシフトアップ量には, 変形振幅がそのまま反映されている。また, 振幅の大きいケース $a^+ = 5.0$ において, 高い散逸効果が示されている。

粘性拡散項 D_k (図 4.77 ~ 4.78) においても, 散逸項 ϵ_k の場合と同様, アクチュエーションの高さの影響が現われている。また, 変形振幅が大きい場合 ($a^+ = 5.0$) に, 乱流運動エネルギー k の粘性拡散が小さく抑えられることが示されている。これは, 粘性拡散による k の消失が, 先の散逸項 ϵ に置き換えられたためである。

レイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ の収支

図 4.81 ~ 4.90 に $\overline{u_i u_j}$ の収支を示す。図 4.81 ~ 4.82 に生成項 P_{ij} , 図 4.83 ~ 4.84 に散逸項 ϵ_{ij} , 図 4.85 ~ 4.86 に乱流輸送項 T_{ij} , 図 4.87 ~ 4.88 に粘性拡散項 D_{ij} , 図 4.89 ~ 4.90 に速度・圧力勾配項 Π_{ij} (= 圧力・歪項 ϕ_{ij}) を示す。 $\overline{u_i u_j}$ の収支において, 速度・圧力勾配項以外は, k の収支の場合とほぼ同じ傾向を示している。

速度・圧力勾配項 Π_{ij} (図 4.89 ~ 4.90) については, 壁面摩擦抵抗増大のケースに相当する ($T^+, s^+, a^+ = (50, 45, 5.0)$ および $(100, 45, 5.0)$) において, 壁近傍で他ケースより大きく減少 (負側に大きく増加) している様子を見ることができる。後述の \overline{uv} , \overline{uw} においても, 本パラメータ選択時に, 速度・圧力勾配項は他のケースより大きく変化している。このことから, 本パラメータによって壁面上に大きな圧力変動が誘起され, これが各方向の速度変動の生成・消滅により大きく関わっていることが分かる。具体的には, このとき, \overline{uv} , \overline{uw} の速度・圧力勾配項が共に増加していることより (後述), x 方向の速度変動成分が, y, z 方向の速度変動成分に輸送される模式を見ることができる。すなわち, 流れ方向の運動量が, チャネル断面内の 2 次流れ成分により多く消費されるため, このことが本パラメータ選択時における抵抗増加につながっていると考えられる。

レイノルズ応力 \overline{uv} の収支

図 4.91 ~ 4.100 に \overline{uv} の収支を示す。図 4.91 ~ 4.92 に圧力・歪速度項 ϕ_{22} , 図 4.93 ~ 4.94 に速度・圧力勾配項 Π_{22} , 図 4.95 ~ 4.96 に散逸項 ϵ_{22} , 図 4.97 ~ 4.98 に乱流輸送項 T_{22} , 図 4.99 ~ 4.100 に粘性拡散項 D_{22} を示す。

\overline{uv} の生成項に相当する速度・圧力勾配項については, 壁面変形ピッチ $s^+ = 45$ の場合の ($T^+, s^+, a^+ = (50, 45, 2.5), (50, 45, 5.0), (100, 45, 5.0)$) で, 対数領域に存在するピーク値が増大している。最初の 1 ケースは摩擦抵抗低減のケースに相当し, 後者の 2 ケースは, 壁面摩擦の増加するケースに相当する。同様の傾向が, 再分配を表す圧力・歪速度項 ϕ_{22} にも現われている。このことは, 壁面近傍における v 成分の生成が必ずしも抵抗増大につながるものではないことを意味する。また, 変形ピッチ $s^+ = 45$ が, y

方向速度変動成分の生成に効果的であることを表している。

③ 散逸項 ϵ_{22} においては、この速度・圧力勾配項の効果がほとんどそのまま反映されている。すなわち、ピッチ $s^+ = 45$ の場合の $(T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 2.5), (50, 45, 5.0), (100, 45, 5.0)$ において、対数領域付近の散逸率が増加している。

④ 乱流輸送項 T_{22} については、壁面摩擦の増大する $(T^+, s^+, a^+) = (100, 45, 5.0)$ の場合に、生成・散逸のピークとなる $y^+ = 30$ 付近で減少が見られるが、壁面近傍では逆に増大している。これは、壁面上方、ここでは生成・散逸のピーク位置近傍、における y 方向速度変動成分が、乱流速度変動によって壁面近傍に輸送される効果を表している。壁面摩擦の増加が、この壁面近傍における乱流の活性化に基づくとも考えることができる。

速度変動 w 成分自体が、本壁面振動変形モードにおける制御量 (制御アクチュエータ) であるため、他の速度変動成分における収支と比べて、各効果間の出入りは大きく、また複雑になっているが、この中にも、④ 粘性拡散項については、壁面変形の影響はほとんど現われていない。

レイノルズ応力 \overline{wv} の収支

図 4.101 ~ 4.108 に \overline{wv} の収支を示す。図 4.101 ~ 4.102 に速度・圧力勾配項 Π_{33} 、図 4.103 ~ 4.104 に散逸項 ϵ_{33} 、図 4.105 ~ 4.106 に乱流輸送項 T_{33} 、図 4.107 ~ 4.108 に粘性拡散項 D_{33} を示す。

① ④ の収支の中で、壁面変形の影響は、変動速度 w 成分の生成効果に相当する速度・圧力勾配項と、散逸項、変形ピッチ $s^+ = 45$ の場合の壁面近傍において顕著に現われている。特に、変形振幅 $a^+ = 5.0$ の場合の $(T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 5.0), (100, 45, 5.0)$ において、その変化が顕著に現われている。このことから、変形ピッチ $s^+ = 45$ の振動変形モードが、チャネル・スパン方向の速度変動を活性化するのに通していることが分かる。この結果と、先の速度変動 w 成分の活性化壁面変形モードがほぼ一致していることを考慮すると、スパン方向に分布する本壁面変形モードによって、スパン方向断面内の速度変動成分、さらにはこの速度変動成分によって構成される乱流瞬時構造が活性化されていることが推測できる。

② ③ の乱流輸送項 T_{33} および 粘性拡散項 D_{33} においても壁面変形の影響は現われているが、先の 2 項における変形ピッチ $s^+ = 45$ の場合に現われる変化に比べると小さく抑えられている。乱流輸送項 T_{33} と粘性拡散項 D_{33} には、ともに変形アクチュエーションの高さ、すなわち変形振幅の影響が現われている。また、壁面近傍の粘性拡散項 D_{33} の負側のピーク値の絶対値は、壁面変形の印加時に、また変形振幅の大きい場合 ($a^+ = 5.0$) に、より増大しており、この場合に z 方向速度変動成分の粘性拡散効果が増大することが示されている。

レイノルズ応力 \overline{uv} の収支

図 4.109 ~ 4.120 に \overline{uv} の収支を示す。図 4.109 ~ 4.110 に生成項 P_{12} 、図 4.111 ~ 4.112 に圧力・至速項 Π_{12} 、図 4.113 ~ 4.114 に速度・圧力勾配項 Π_{12} 、図 4.115 ~ 4.116 に散逸項 ϵ_{12} 、図 4.117 ~ 4.118 に乱流輸送項 T_{12} 、図 4.119 ~ 4.120 に粘性拡散項 D_{12} を示す。

① ② の生成項 P_{12} については、壁面変形周期の違いによって、その壁面近傍における挙動が大きく異なっている。周期の大きい場合 ($T^+ = 100$) には、 P_{12} の壁面漸近挙動は平板チャネルの場合とほぼ等しく 0 に落ちる傾向にあるが、周期の小さい場合 ($T^+ = 50$) には、壁面近傍で高生成側に化する傾向がある。これは、 $T^+ = 50$ の壁面変形に対しては流れの追従性が高くなることを意味し、この高周波数の壁面振動変形時には、壁面近傍の乱流準秩序構造とチャネルコア領域における乱流変動が分離した状態にある程度が高いことが推測される。なお、この傾向は、壁面近傍で高生成側に化する程度の大きい変形ピッチの大きいケース ($s^+ = 90$) で強くなっている。また、 \overline{uv} の生成は、壁面変形振幅が大きい場合 ($a^+ = 5.0$) より大きくになっているが、その程度は周期の小さい場合 ($T^+ = 50$) の方が大きくなっている。すなわち、これらの場合に、スweep、イジェクション等のレイノルズ応力を増大させる乱流準秩序構造の

生成頻度が高くなることが示される。

\overline{w} の圧力・歪速度項 ϕ_{12} 、速度・圧力勾配項 Π_{12} は、速度変動・圧力変動の干渉によるレイノルズ応力の消滅・生成効果を表す。なお、平板チャネル乱流の場合には、両項はともに壁面近傍において正の値を示し、 \overline{w} の消滅のみを示すが、壁面に変形を加える場合には、後にも述べるように、この効果が大きく抑えられたり、逆に増幅側に転じる場合も生じる。 \overline{w} の圧力・歪速度項 ϕ_{12} は、上記のレイノルズ応力 3 成分 $\overline{w_i w_j}$ ($i = 1, 2, 3$) における再分配効果と異なり、レイノルズ応力 \overline{w} の絶対値を抑える効果、すなわち乱流の非等方性を減少させる効果を示す (Hinze 1975, pp. 325–328)。なお、本項が負の場合は、逆に、レイノルズ応力 \overline{w} の絶対値を大きくする効果、すなわち乱流の非等方性を促進させる効果を示す。また、速度・圧力勾配項 Π_{12} には、レイノルズ応力 \overline{w} の減衰に対し、圧力変動の寄与する効果が全て含まれる。

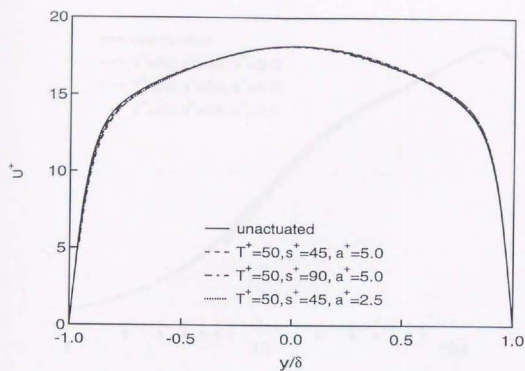
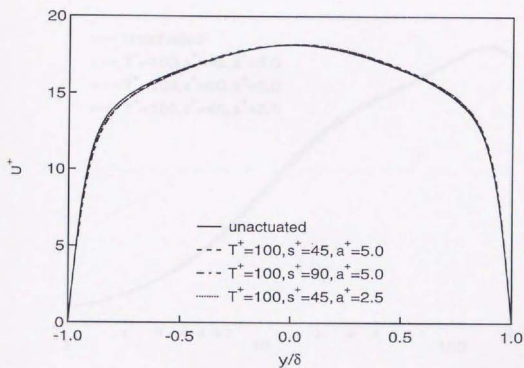
図 4.111 ~ 4.112 に示される圧力・歪速度項 ϕ_{12} について、変形周期 $T^+ = 50$ の場合の全ケースならびに $(T^+, s^+, a^+) = (100, 90, 5.0)$ の場合に、壁近傍における大きな減少が見られる。これらの壁面変形モード時には、壁近傍における圧力変動によって、レイノルズ応力 \overline{w} は増幅される。特に、 $(T^+, s^+, a^+) = (50, 90, 5.0)$ の場合には、この効果は負に大きく傾いており、本項が壁面上でレイノルズ応力 \overline{w} の生成効果に転じていることが示されている。一方、 ϕ_{12} の対数領域下方 $y^+ = 15$ 近辺におけるピーク値の増加が、 $(T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 2.5)$, $(100, 45, 5.0)$ の場合に見られる。これは、この領域において、圧力変動に伴う \overline{w} の減衰効果が大きいことを表す。なお、この結果は、本領域における \overline{w} 収支各項の値が反映されたものでもあり、壁面変形によって誘起される高い圧力変動の効果が現われているものと考えられる。

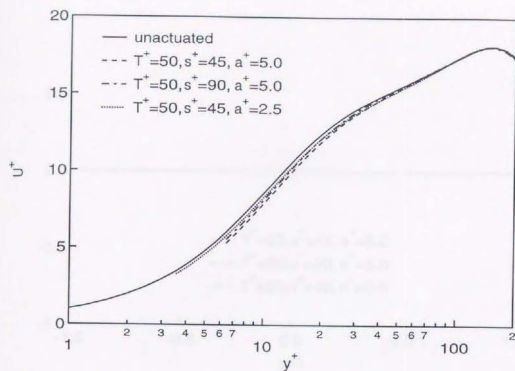
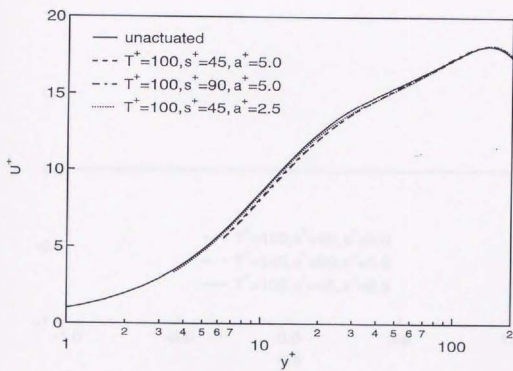
速度・圧力勾配項 Π_{12} においては、壁面変形のある全てのケースについて、圧力変動によって \overline{w} の減衰効果が大きくなることが示されている。特に、変形壁面上の圧力・歪速度項 ϕ_{12} で大きな減少の示されたうちの $(T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 5.0)$, $(100, 90, 5.0)$ の 2 ケースでは、他のケースと大きく傾向の異なった急激な増加現象を見ることが出来る。この効果は、 \overline{w} の生成項 P_{12} に釣り合うものであり、壁面変形に対する速度変動の追従性の効果が現われていると考えられる。

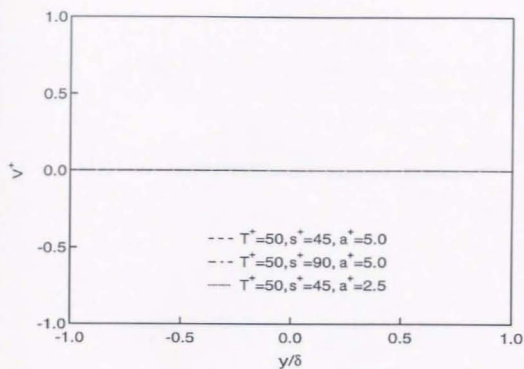
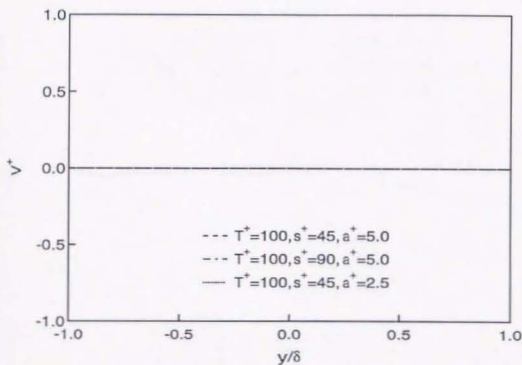
壁面近傍の \overline{w} の散逸項 ϵ_{12} については、壁面変形振幅 $a^+ = 5.0$ の場合、時間周期 $T^+ = 50$ と 100 のいずれの場合においても、変形ピッチの大きい場合 ($s^+ = 90$) において小さく抑えられている。ここで、変形ピッチ $s^+ = 45$ のケースが壁面摩擦の増大するケース、 $s^+ = 90$ のケースが壁面摩擦の減少するケースに相当する。また、変形振幅 $a^+ = 2.5$ の場合には、 $T^+ = 50$, $s^+ = 45$ の場合に壁面近傍において ϵ_{12} が平板チャネルの場合より増加する一方、 $T^+ = 100$, $s^+ = 45$ の場合には、 ϵ_{12} は平板チャネルの場合より減少している。ここで、前者の $(T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 2.5)$ のケースは摩擦抵抗低減ケース、 $(T^+, s^+, a^+) = (100, 45, 2.5)$ のケースは摩擦抵抗増大ケースとなっており、先の $a^+ = 5.0$ の場合の傾向とは異なる。

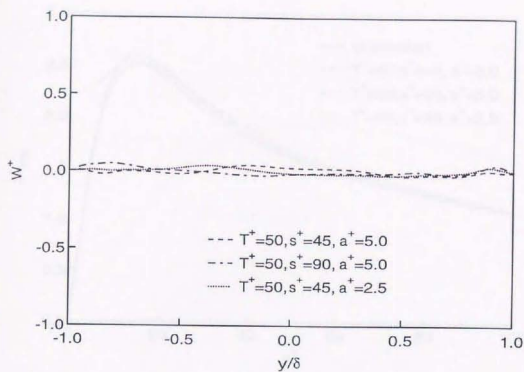
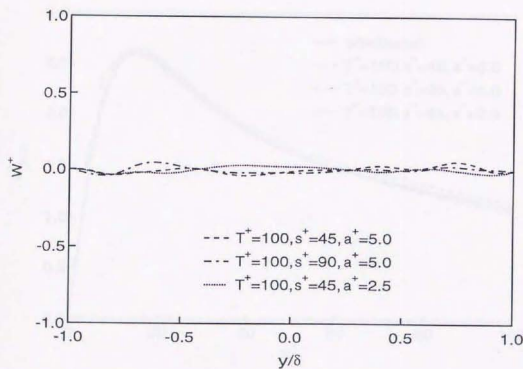
乱流輸送項 T_{12} は、対数領域においては \overline{w} の減衰効果、壁近傍および対数領域より上方においては増幅効果が支配的となる。なお、今回の計算結果において、この傾向を大きく変化させるケースはない。この対数領域における \overline{w} の減衰効果について、 $(T^+, s^+, a^+) = (50, 90, 5.0)$ 以外のケースにおいて、そのピーク値が壁面方向に移動している様子が見られる。これは、壁面変形により、速度変動による乱流拡散効果が壁近傍にまで浸透していることを表している。

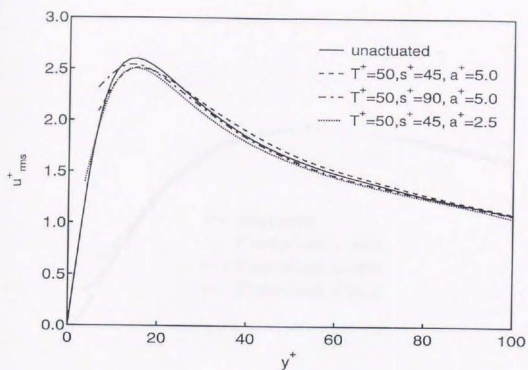
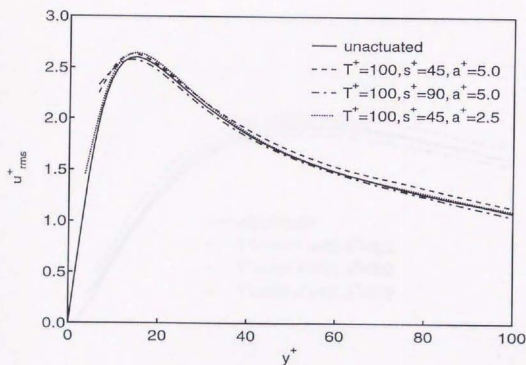
\overline{w} の粘性拡散項 D_{12} には、壁面変形の影響はほとんど現われていない。

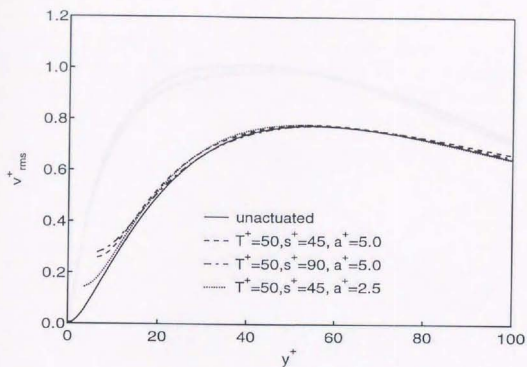
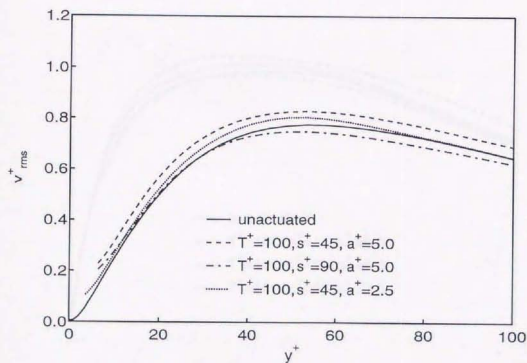
Figure 4.25: x 方向平均速度 ($T^+ = 50$, global scale)Figure 4.26: x 方向平均速度 ($T^+ = 100$, global scale)

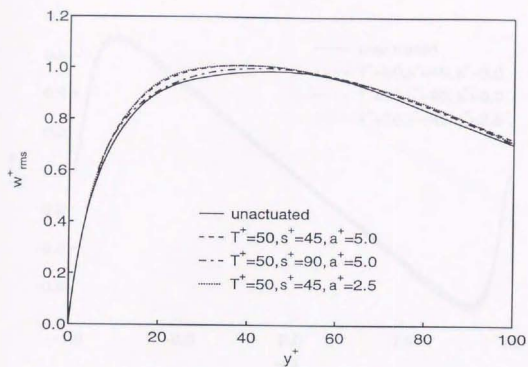
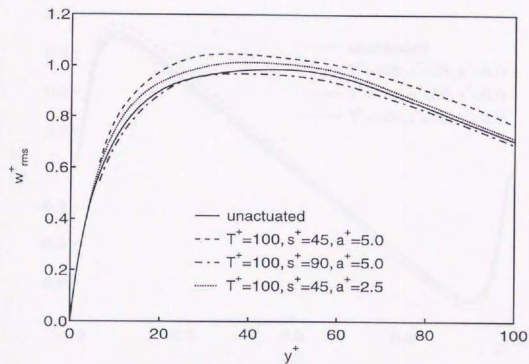
Figure 4.27: x 方向平均速度 ($T^+ = 50$, log scale)Figure 4.28: x 方向平均速度 ($T^+ = 100$, log scale)

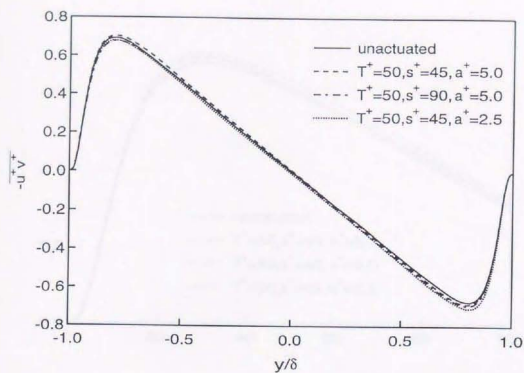
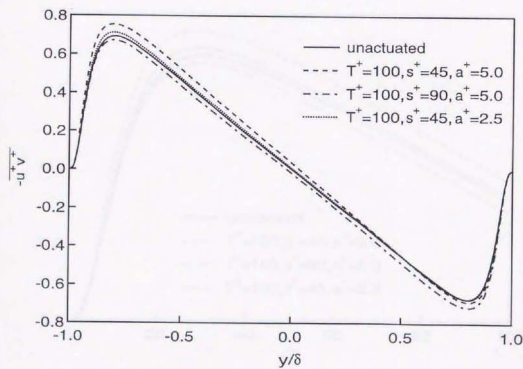
Figure 4.29: y 方向平均速度 ($T^+ = 50$, global scale)Figure 4.30: y 方向平均速度 ($T^+ = 100$, global scale)

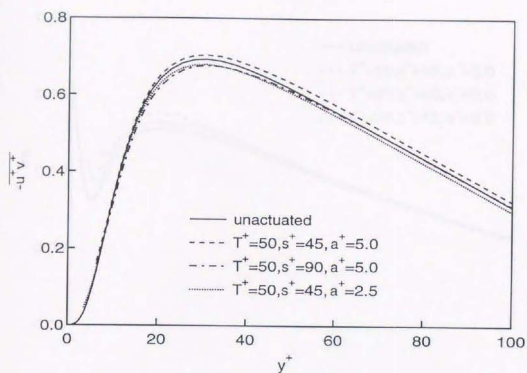
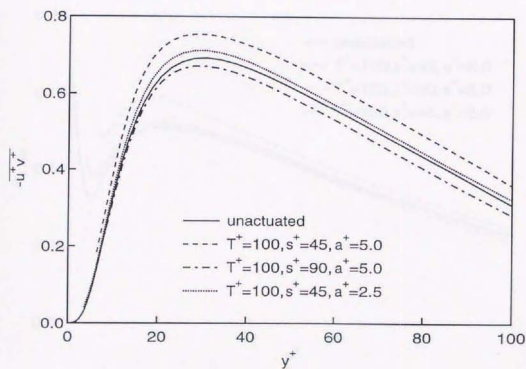
Figure 4.31: z 方向平均速度 ($T^+ = 50$, global scale)Figure 4.32: z 方向平均速度 ($T^+ = 100$, global scale)

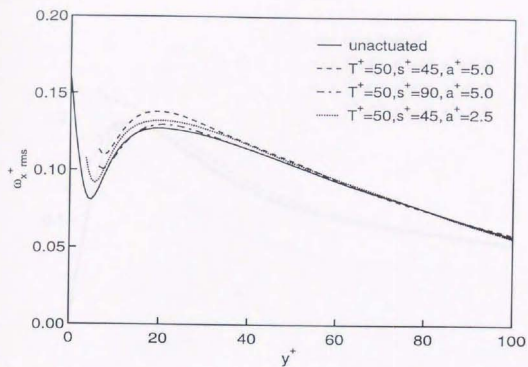
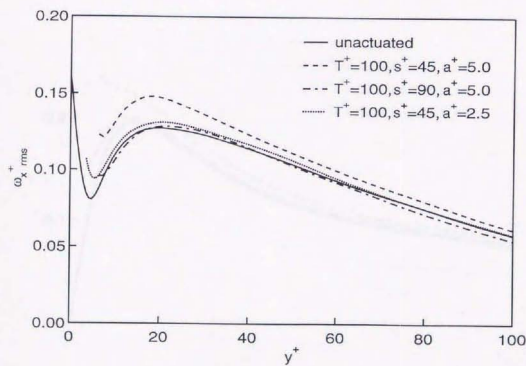
Figure 4.33: x 方向速度変動 ($T^+ = 50$)Figure 4.34: x 方向速度変動 ($T^+ = 100$)

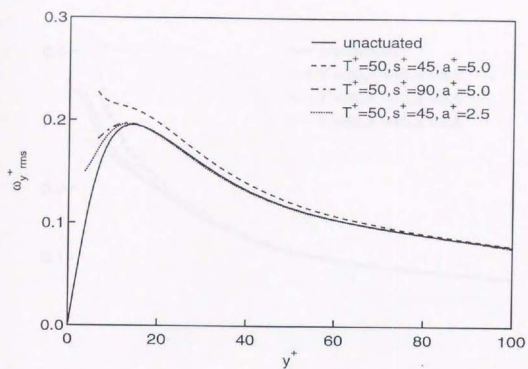
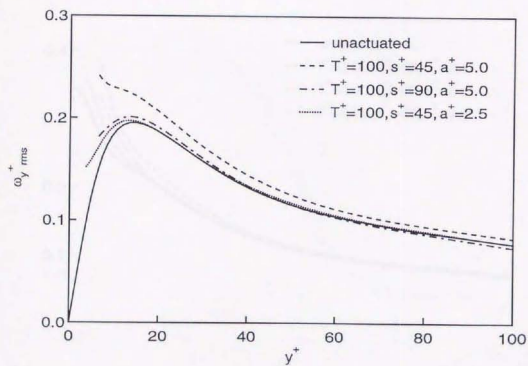
Figure 4.35: y 方向速度変動 ($T^+ = 50$)Figure 4.36: y 方向速度変動 ($T^+ = 100$)

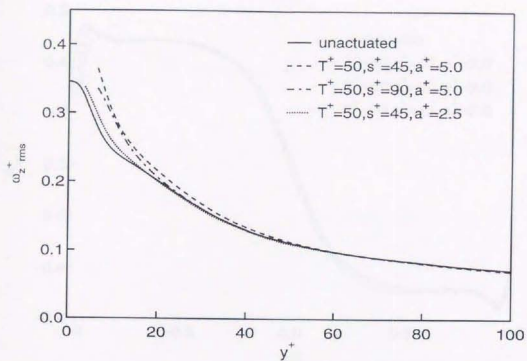
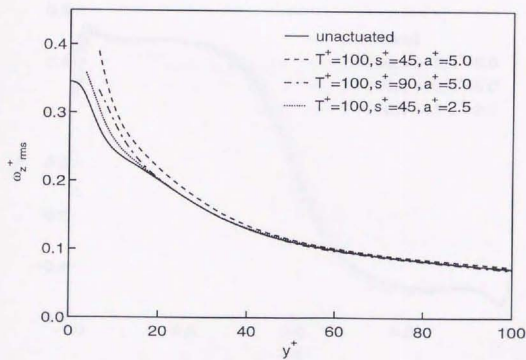
Figure 4.37: z 方向速度変動 ($T^+ = 50$)Figure 4.38: z 方向速度変動 ($T^+ = 100$)

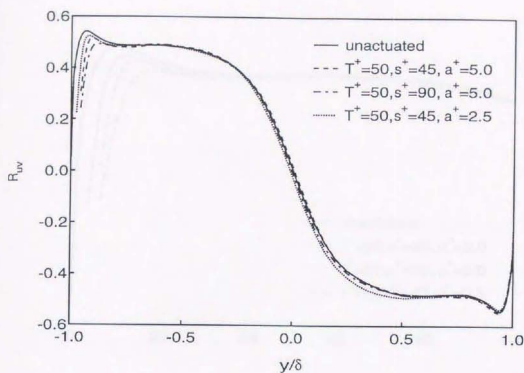
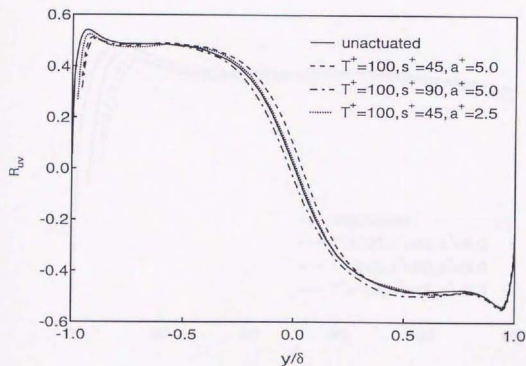
Figure 4.39: レイノルズ応力 $-\overline{u'v'}$ 分布 ($T^+ = 50$, global scale)Figure 4.40: レイノルズ応力 $-\overline{u'v'}$ 分布 ($T^+ = 100$, global scale)

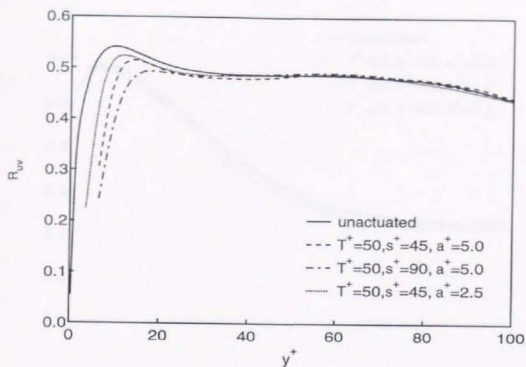
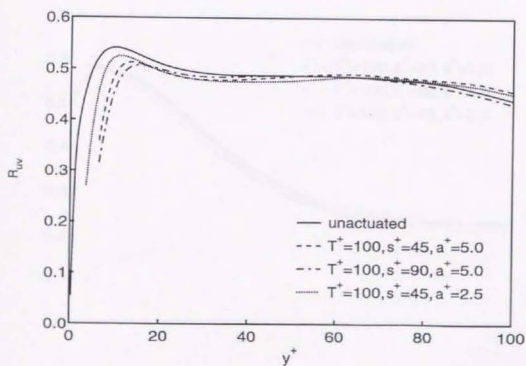
Figure 4.41: レイノルズ応力 $-\overline{u^+v^+}$ 分布 ($T^+ = 50$)Figure 4.42: レイノルズ応力 $-\overline{u^+v^+}$ 分布 ($T^+ = 100$)

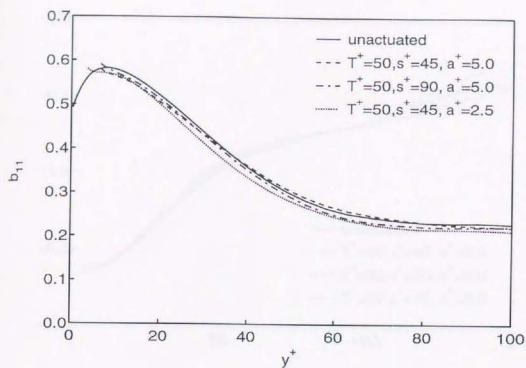
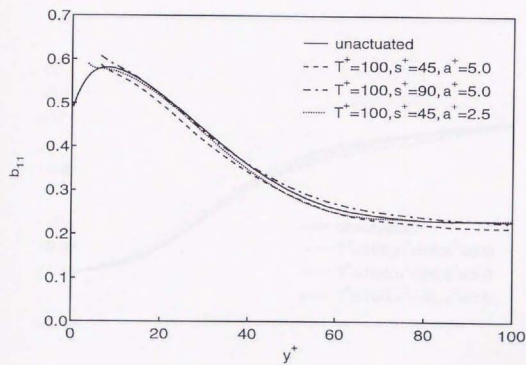
Figure 4.43: x 方向渦度変動 ($T^+ = 50$)Figure 4.44: x 方向渦度変動 ($T^+ = 100$)

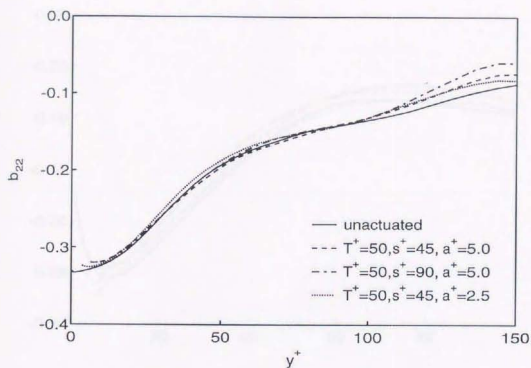
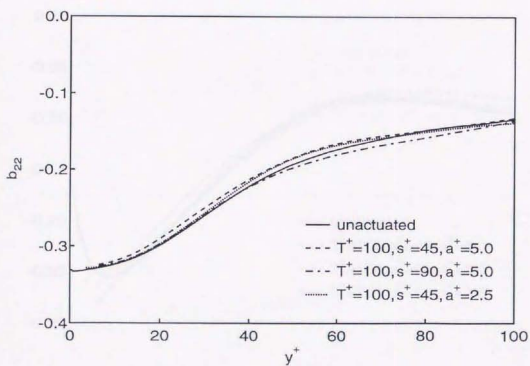
Figure 4.45: y 方向渦度変動 ($T^+ = 50$)Figure 4.46: y 方向渦度変動 ($T^+ = 100$)

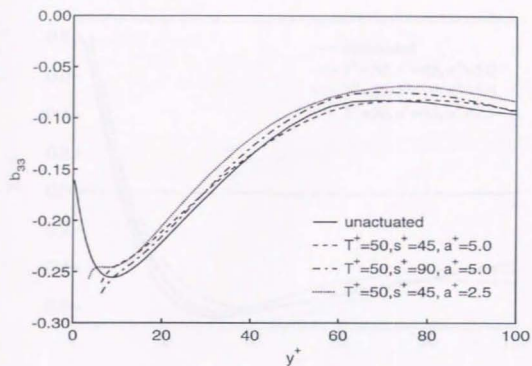
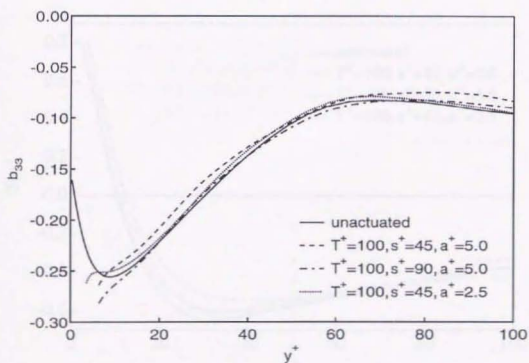
Figure 4.47: z 方向渦度変動 ($T^+ = 50$)Figure 4.48: z 方向渦度変動 ($T^+ = 100$)

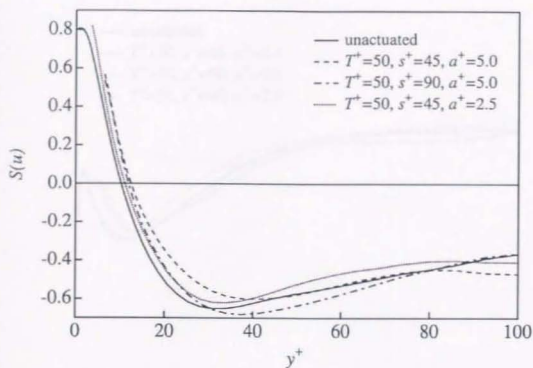
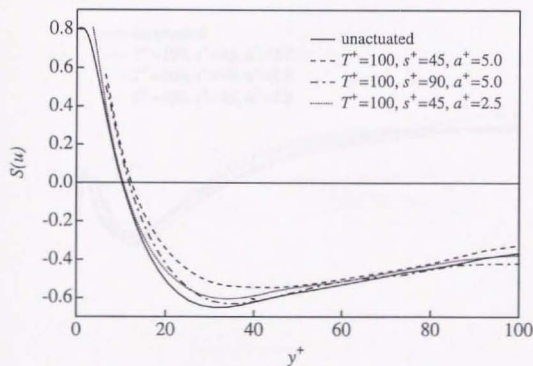
Figure 4.49: $u-v$ 相関係数 ($T^+ = 50$, global scale)Figure 4.50: $u-v$ 相関係数 ($T^+ = 100$, global scale)

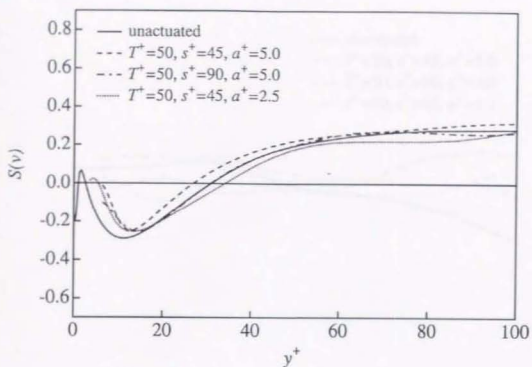
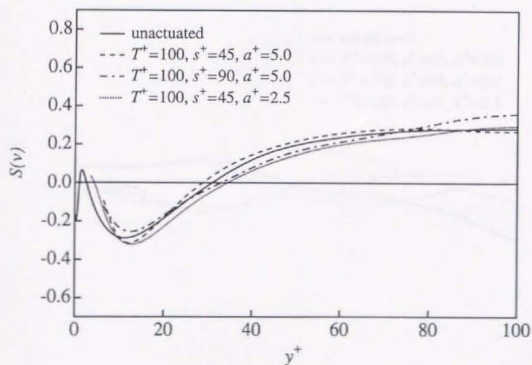
Figure 4.51: $u-v$ 相関係数 ($T^+ = 50$)Figure 4.52: $u-v$ 相関係数 ($T^+ = 100$)

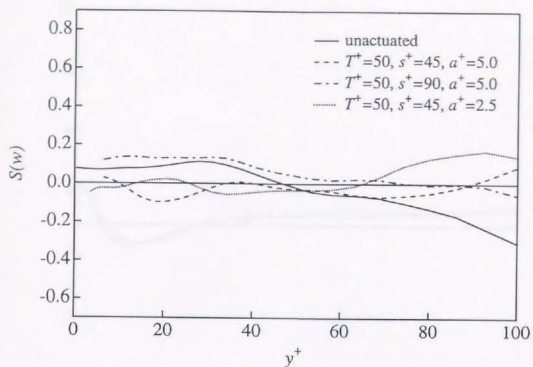
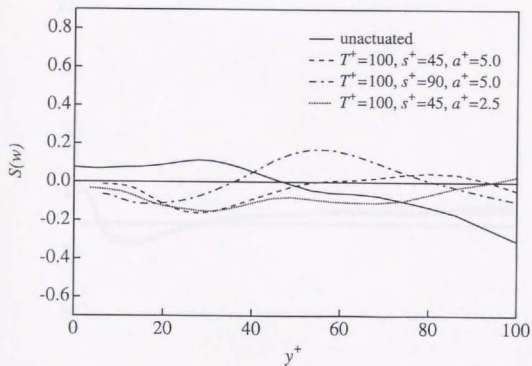
Figure 4.53: x 方向速度変動非等方度 ($T^+ = 50$)Figure 4.54: x 方向速度変動非等方度 ($T^+ = 100$)

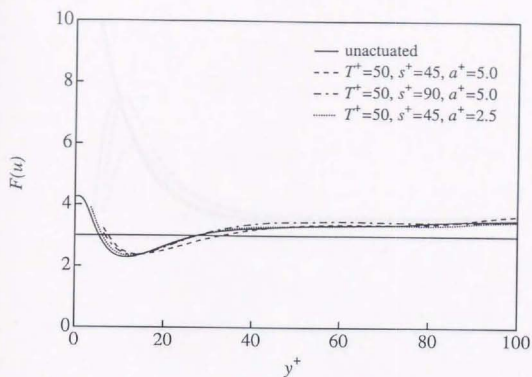
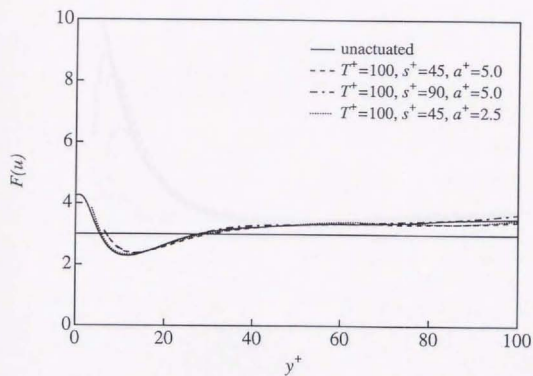
Figure 4.55: y 方向速度変動非等方度 ($T^+ = 50$)Figure 4.56: y 方向速度変動非等方度 ($T^+ = 100$)

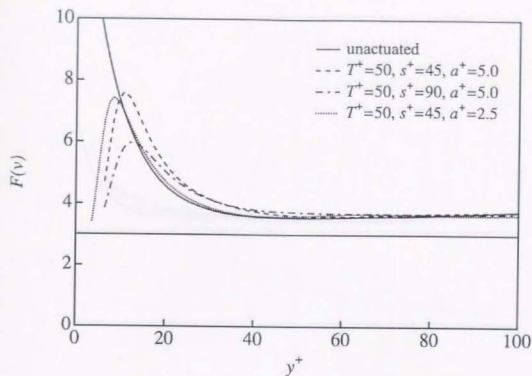
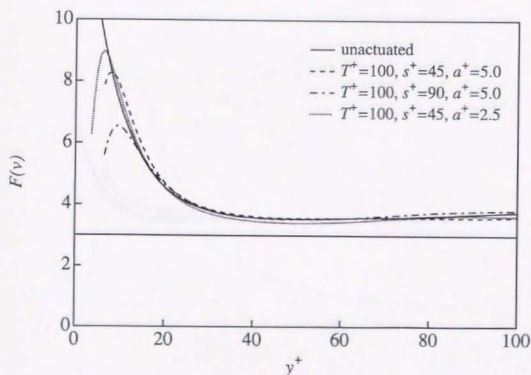
Figure 4.57: z 方向速度変動非等方度 ($T^+ = 50$)Figure 4.58: z 方向速度変動非等方度 ($T^+ = 100$)

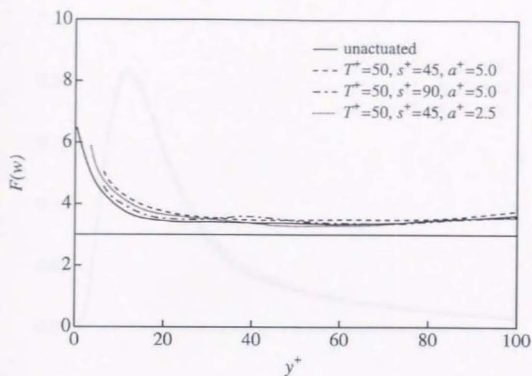
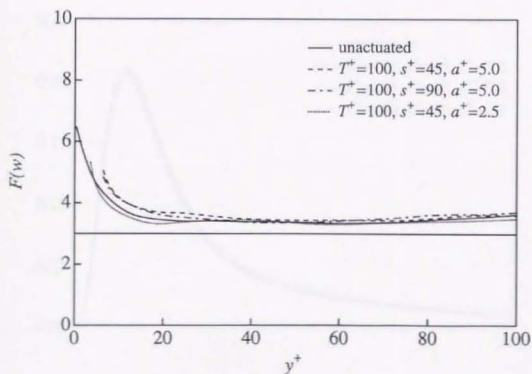
Figure 4.59: x 方向速度変動 skewness ($T^+ = 50$)Figure 4.60: x 方向速度変動 skewness ($T^+ = 100$)

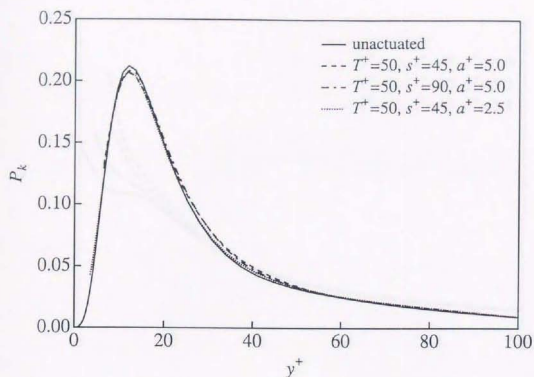
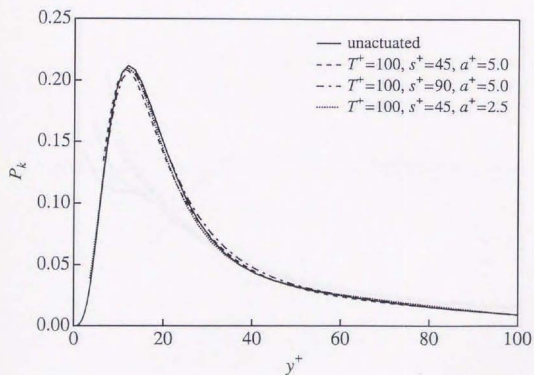
Figure 4.61: y 方向速度変動 skewness ($T^+ = 50$)Figure 4.62: y 方向速度変動 skewness ($T^+ = 100$)

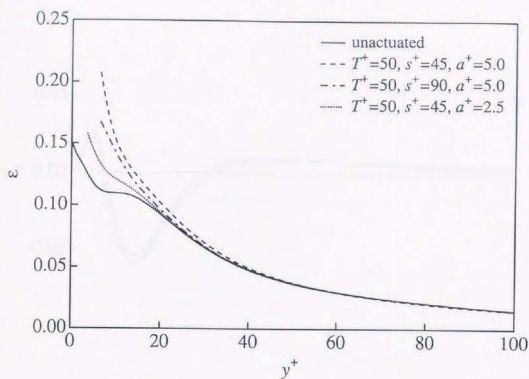
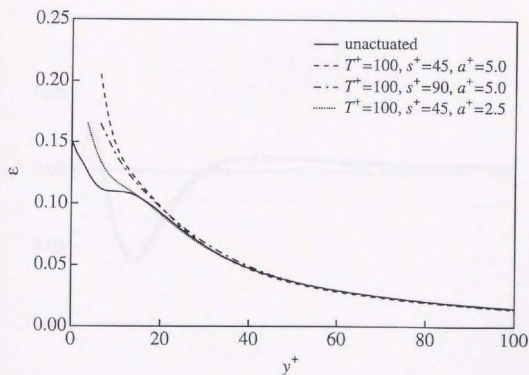
Figure 4.63: y 方向速度変動 skewness ($T^+ = 50$)Figure 4.64: y 方向速度変動 skewness ($T^+ = 100$)

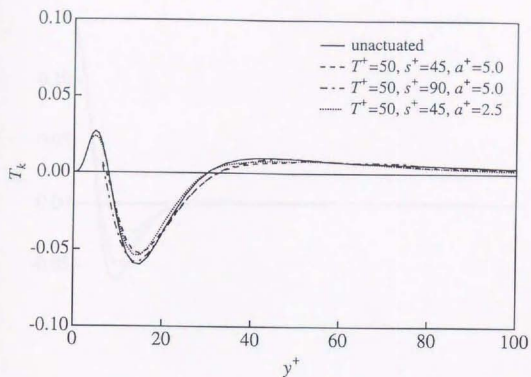
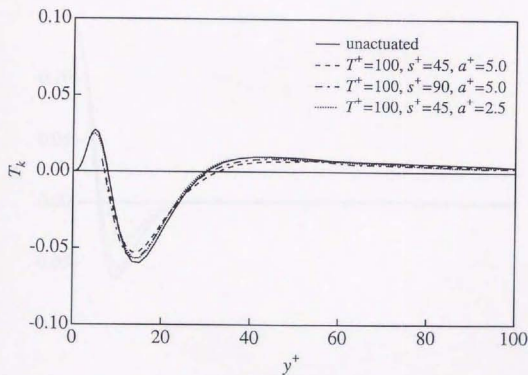
Figure 4.65: x 方向速度変動 flatness ($T^+ = 50$)Figure 4.66: x 方向速度変動 flatness ($T^+ = 100$)

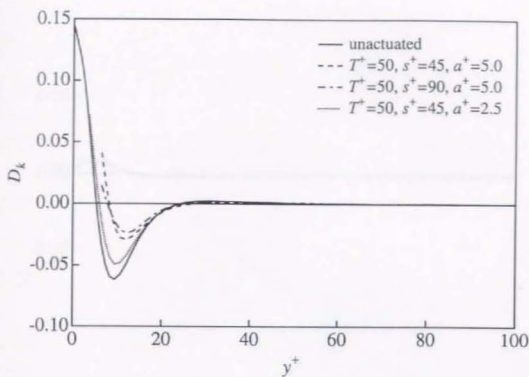
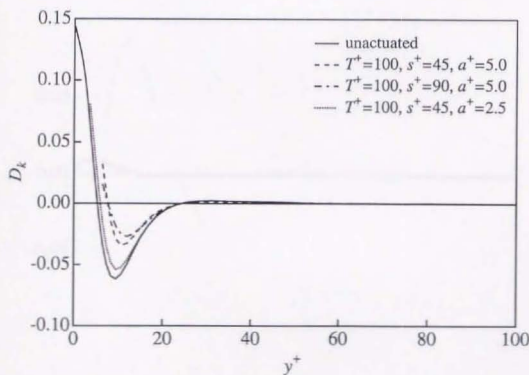
Figure 4.67: y 方向速度変動 flatness ($T^+ = 50$)Figure 4.68: y 方向速度変動 flatness ($T^+ = 100$)

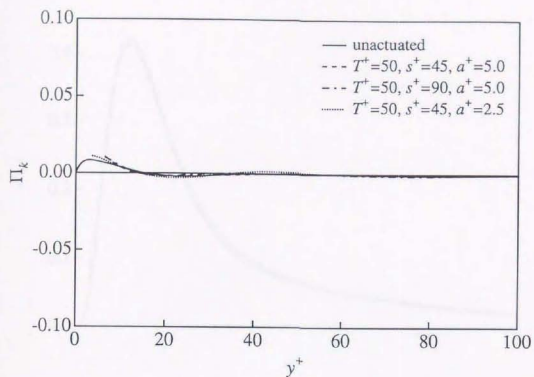
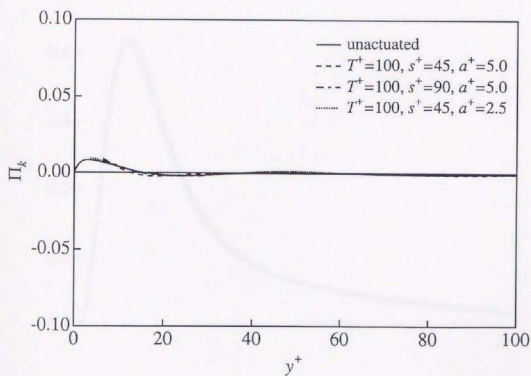
Figure 4.69: y 方向速度変動 flatness ($T^+ = 50$)Figure 4.70: y 方向速度変動 flatness ($T^+ = 100$)

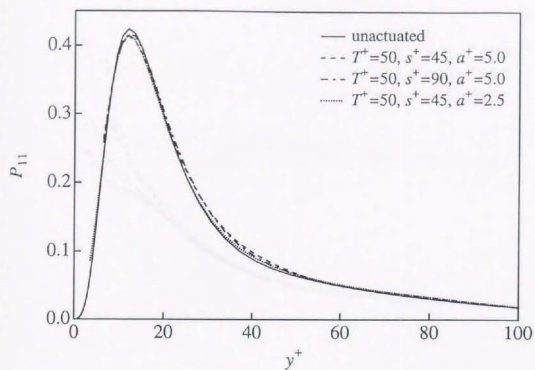
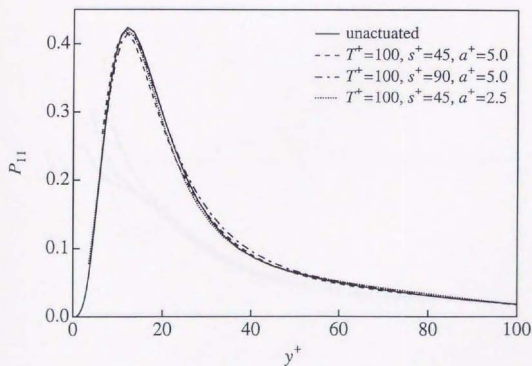
Figure 4.71: k 生成項 ($T^+ = 50$)Figure 4.72: k 生成項 ($T^+ = 100$)

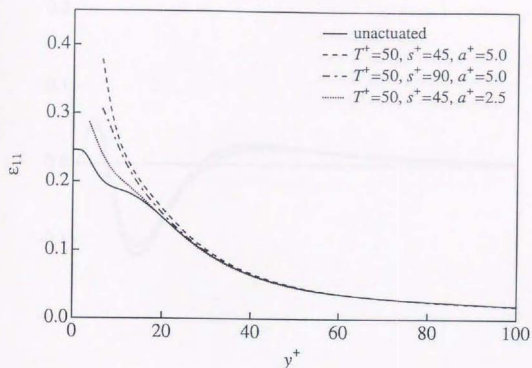
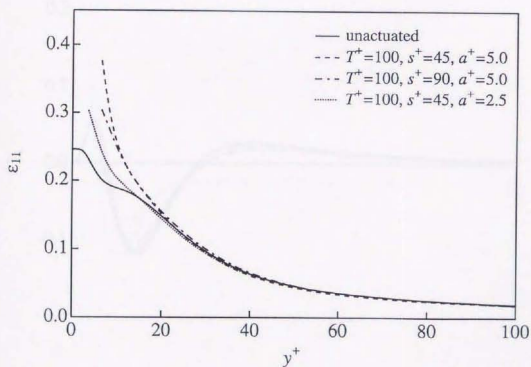
Figure 4.73: k 散逸項 ($T^+ = 50$)Figure 4.74: k 散逸項 ($T^+ = 100$)

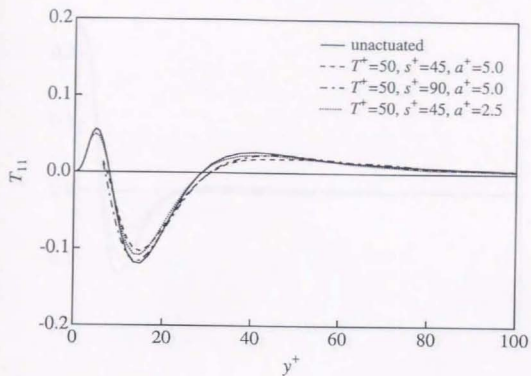
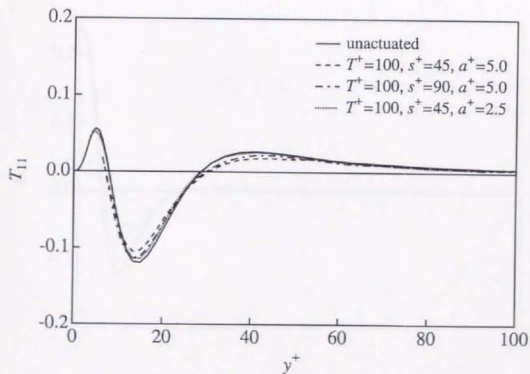
Figure 4.75: k 乱流輸送項 ($T^+ = 50$)Figure 4.76: k 乱流輸送項 ($T^+ = 100$)

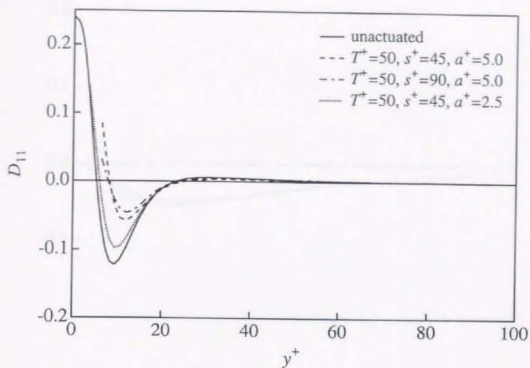
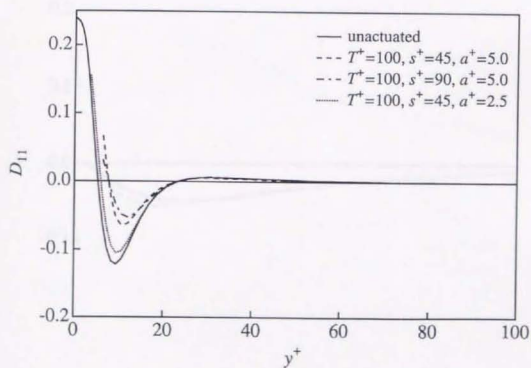
Figure 4.77: k 粘性拡散項 ($T^+ = 50$)Figure 4.78: k 粘性拡散項 ($T^+ = 100$)

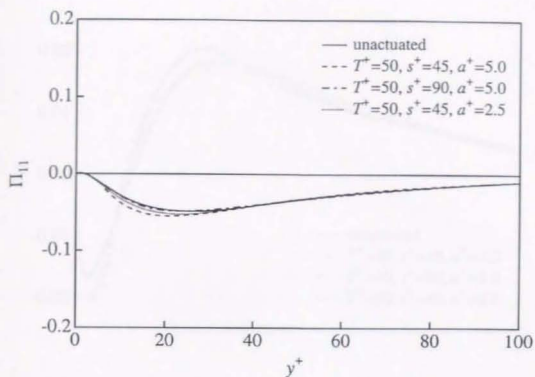
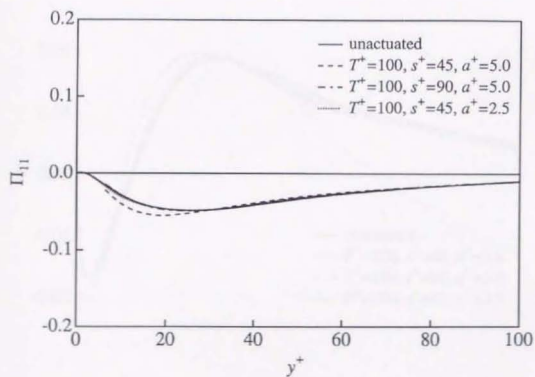
Figure 4.79: k 速度圧力勾配項 ($T^+ = 50$)Figure 4.80: k 速度圧力勾配項 ($T^+ = 100$)

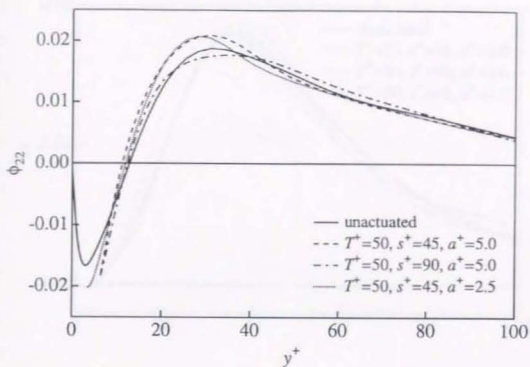
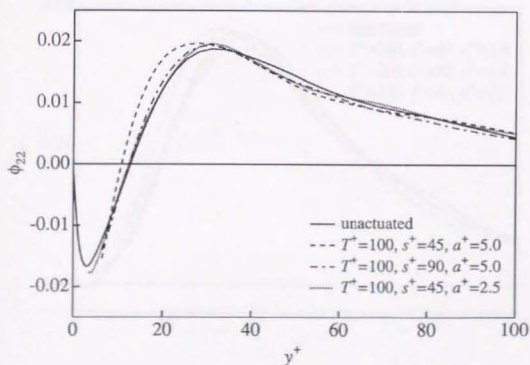
Figure 4.81: $\overline{w'u}$ 生成項 ($T^+ = 50$)Figure 4.82: $\overline{w'u}$ 生成項 ($T^+ = 100$)

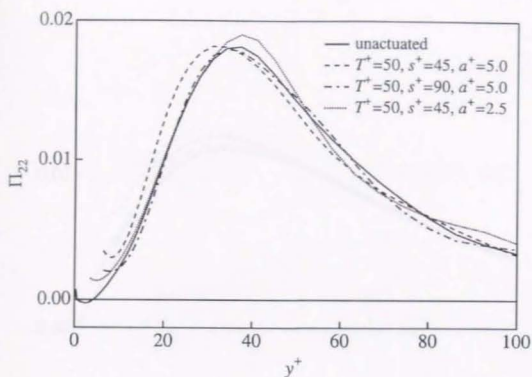
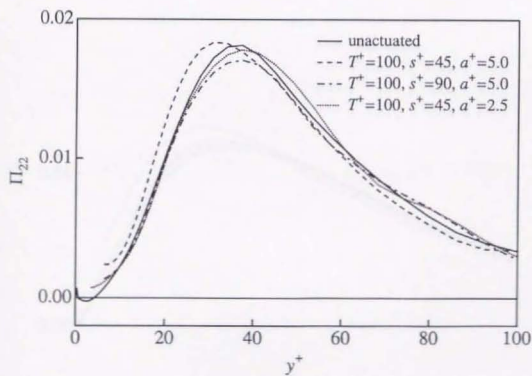
Figure 4.83: $\overline{u'u'}$ 散逸項 ($T^+ = 50$)Figure 4.84: $\overline{u'u'}$ 散逸項 ($T^+ = 100$)

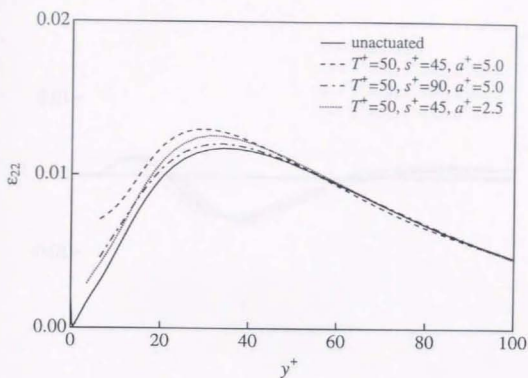
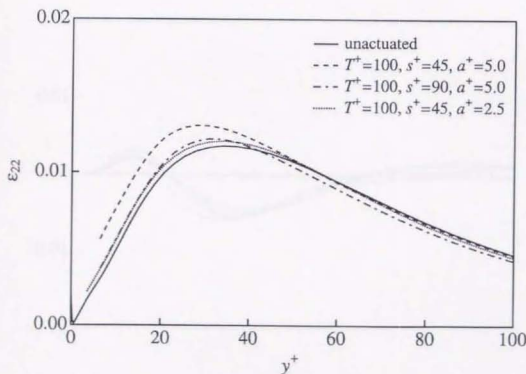
Figure 4.85: $\overline{u'u'}$ 乱流輸送項 ($T^+ = 50$)Figure 4.86: $\overline{u'u'}$ 乱流輸送項 ($T^+ = 100$)

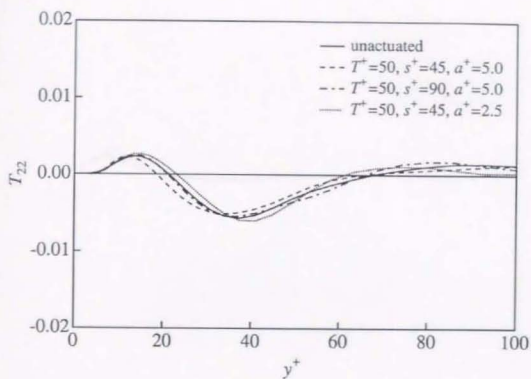
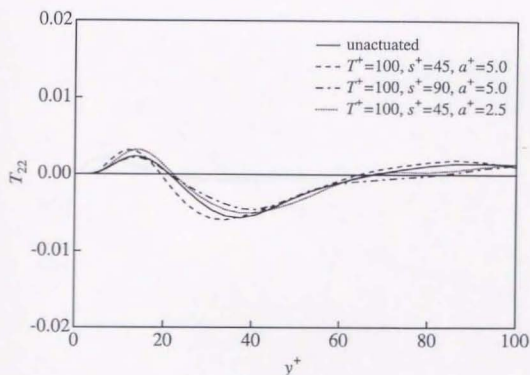
Figure 4.87: $\overline{u}\overline{u}$ 粘性拡散項 ($T^+ = 50$)Figure 4.88: $\overline{u}\overline{u}$ 粘性拡散項 ($T^+ = 100$)

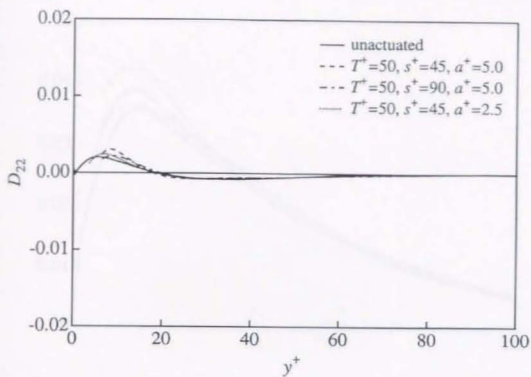
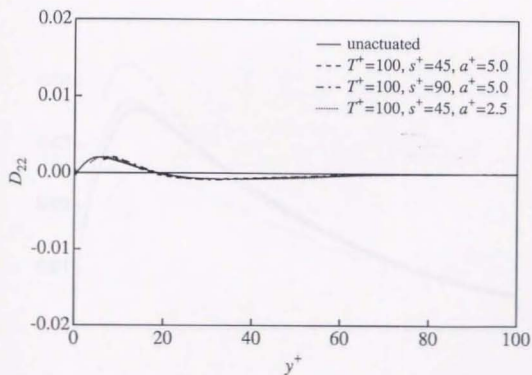
Figure 4.89: \overline{uv} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 50$)Figure 4.90: \overline{uv} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 100$)

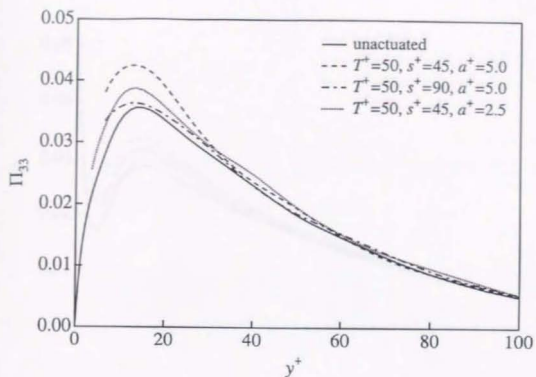
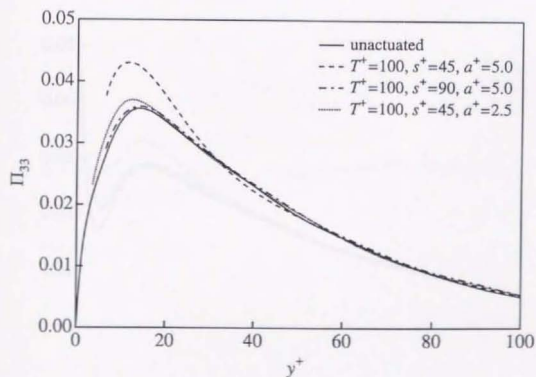
Figure 4.91: \overline{uv} 圧力・歪速度項 ($T^+ = 50$)Figure 4.92: \overline{uv} 圧力・歪速度項 ($T^+ = 100$)

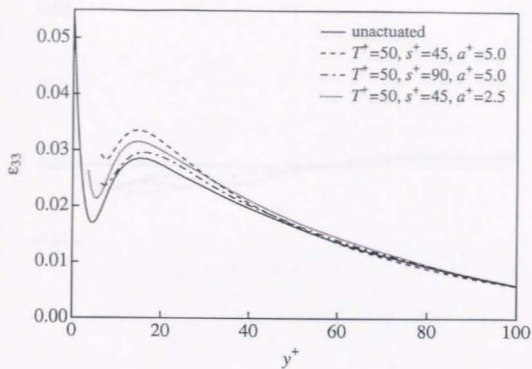
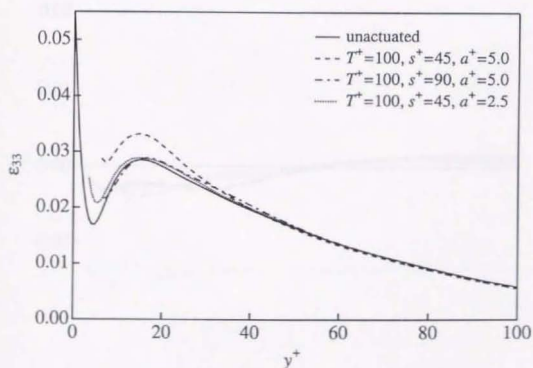
Figure 4.93: \overline{uv} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 50$)Figure 4.94: \overline{uv} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 100$)

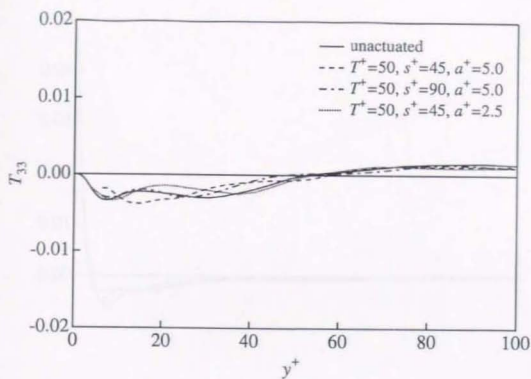
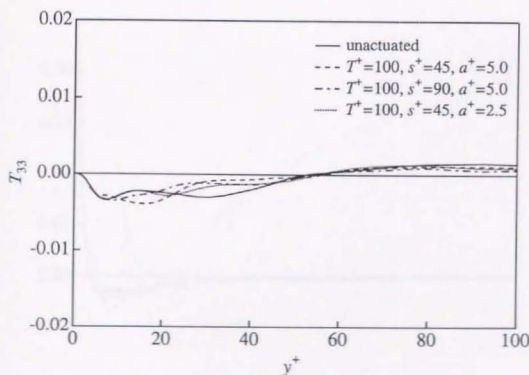
Figure 4.95: $\bar{v}v$ 散逸項 ($T^+ = 50$)Figure 4.96: $\bar{v}v$ 散逸項 ($T^+ = 100$)

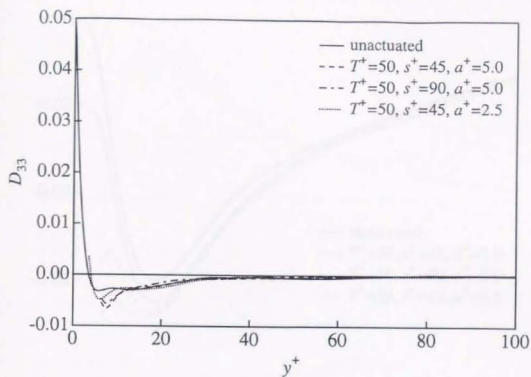
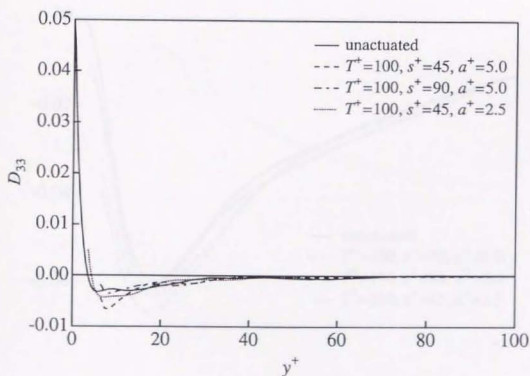
Figure 4.97: $\overline{v v}$ 乱流輸送項 ($T^+ = 50$)Figure 4.98: $\overline{v v}$ 乱流輸送項 ($T^+ = 100$)

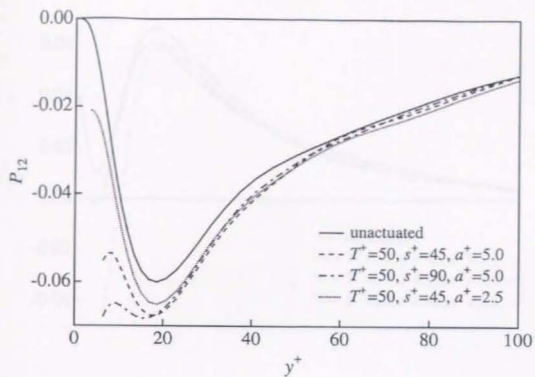
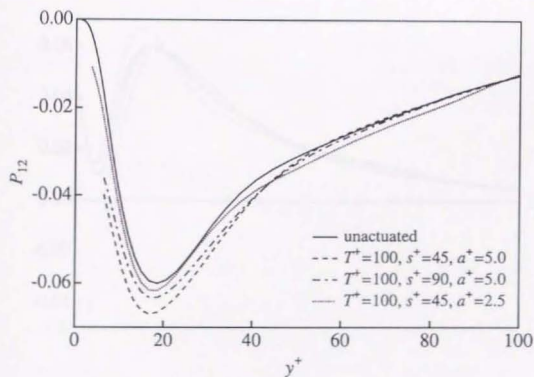
Figure 4.99: $\overline{v\overline{v}}$ 粘性拡散項 ($T^+ = 50$)Figure 4.100: $\overline{v\overline{v}}$ 粘性拡散項 ($T^+ = 100$)

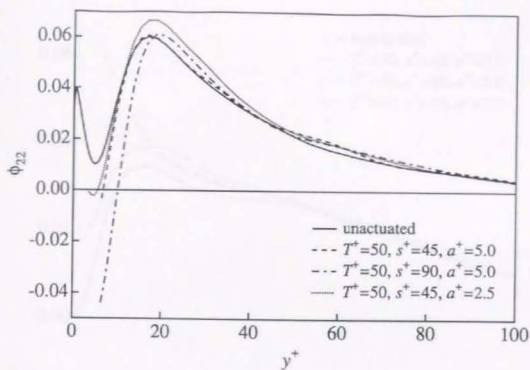
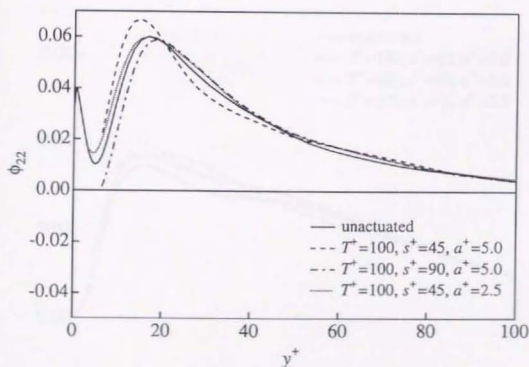
Figure 4.101: $\overline{w}w$ 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 50$)Figure 4.102: $\overline{w}w$ 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 100$)

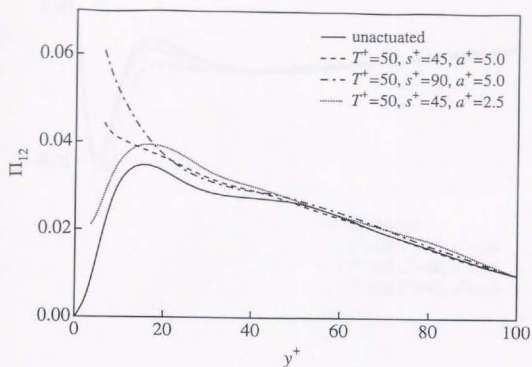
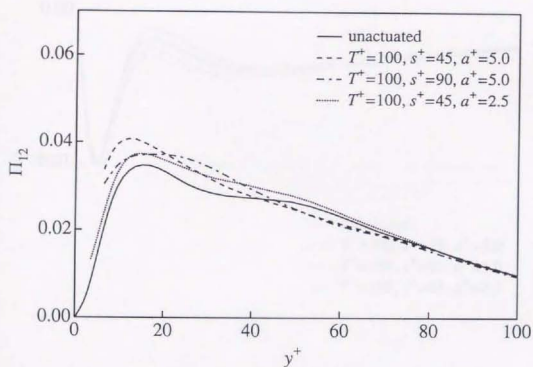
Figure 4.103: $\overline{w'w'}$ 散逸項 ($T^+ = 50$)Figure 4.104: $\overline{w'w'}$ 散逸項 ($T^+ = 100$)

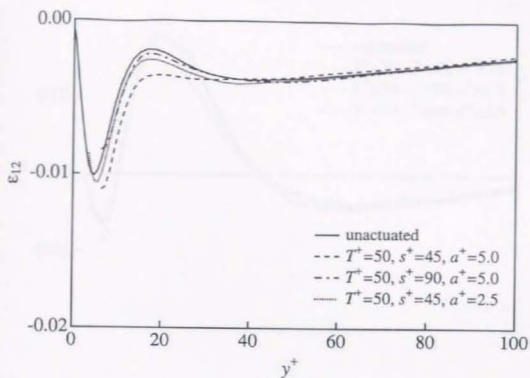
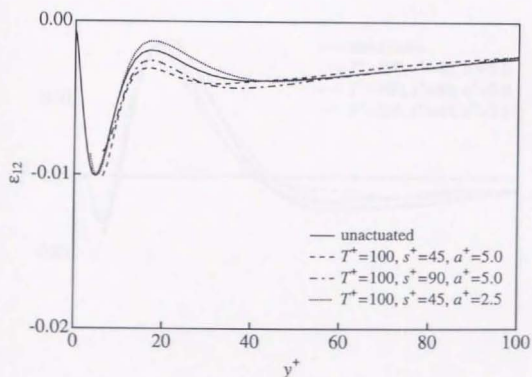
Figure 4.105: $\overline{w}w$ 乱流輸送項 ($T^+ = 50$)Figure 4.106: $\overline{w}w$ 乱流輸送項 ($T^+ = 100$)

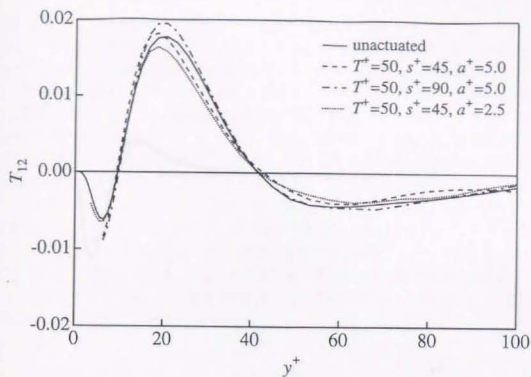
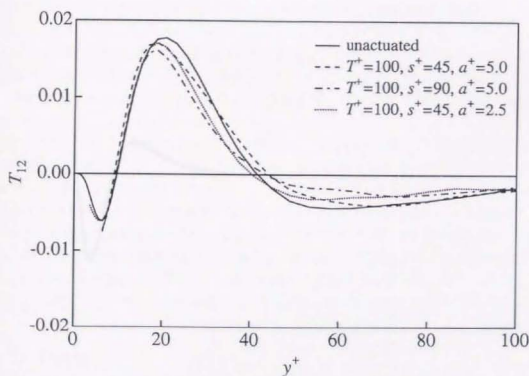
Figure 4.107: $\overline{w w}$ 粘性拡散項 ($T^+ = 50$)Figure 4.108: $\overline{w w}$ 粘性拡散項 ($T^+ = 100$)

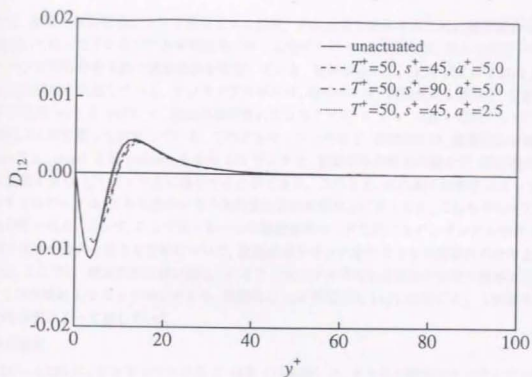
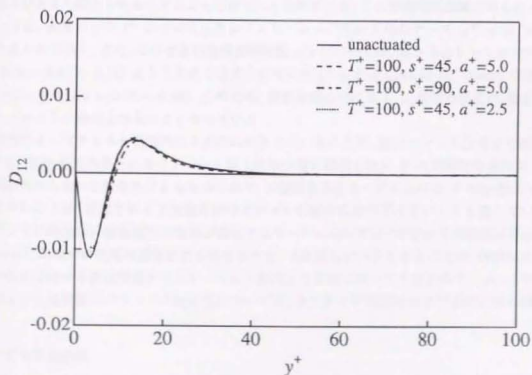
Figure 4.109: \overline{wv} 生成項 ($T^+ = 50$)Figure 4.110: \overline{wv} 生成項 ($T^+ = 100$)

Figure 4.111: $\overline{w} \overline{w}$ 圧力・歪速度項 ($T^+ = 50$)Figure 4.112: $\overline{w} \overline{w}$ 圧力・歪速度項 ($T^+ = 100$)

Figure 4.113: \overline{uv} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 50$)Figure 4.114: \overline{uv} 速度・圧力勾配項 ($T^+ = 100$)

Figure 4.115: \overline{uv} 散逸項 ($T^+ = 50$)Figure 4.116: \overline{uv} 散逸項 ($T^+ = 100$)

Figure 4.117: \overline{uv} 乱流輸送項 ($T^+ = 50$)Figure 4.118: \overline{uv} 乱流輸送項 ($T^+ = 100$)

Figure 4.119: \overline{uv} 粘性拡散項 ($T^+ = 50$)Figure 4.120: \overline{uv} 粘性拡散項 ($T^+ = 100$)

4.3.5 アンサンブル平均乱流統計量

本節では、壁面の振動変形によって誘起される速度・渦度成分を観測するために壁面変形の時空間的位相に基づいて取ったアンサンブル平均結果に対する検討を行う。本研究では、流れ方向に一定で、チャネル・スパン方向に分布を持つ壁面変形を仮定している。壁面変形には、(4.2) 式に示されるように、時空間的に正弦関数を仮定している。アンサンブル平均は、時間的には、壁面変形 1 周期中、変形変位が最大となる 2 位相、 $\pi/2$ と $3\pi/2$ と、変形速度が最大となる 2 位相、0 と π 、の計 4 位相について、壁面変形の毎周期ごと和を取って計算している。このアンサンブル平均は、空間的には、壁面変位が最大の場合が、変形の頂上 (crest) と谷 (valley) を含む $1/2$ ピッチ上、壁面速度が最大の場合が、変形速度の最大位置と最小位置を含む $1/2$ ピッチ上に落とすことができる。このとき、流れ場の対称性によって、残りの $1/2$ ピッチ上のデータは、これに向かい合う統計量計算対象領域上に落とされ、これも合わせてアンサンブル平均が取られる。よって、ここで示した一つの壁面変形モードに対するアンサンブル平均は、壁面変形の変位と速度が最大となる 2 位相について、壁面変形半ピッチ分のチャネル断面内の分布上で整理される。なお、ここでは、壁面変形に伴い誘起されるアンサンブル平均乱流構造の時間的推移を見やすくするため、この空間的 $1/2$ ピッチ分の分布を、時間的に $1/4$ 周期ごと ($\pi/2$ 位相ごと)、1 周期あたり 4 フレームの時系列によって表している。

a 方向平均速度

図 4.121 ~ 4.126 に、アンサンブル平均 U 分布 (等高線) と、チャネル断面内アンサンブル平均速度ベクトル (V, W) を示す。このとき、各モードにおける壁面変形のアクチュエーションの強度が、図中の壁面変形振幅に加え、位相 0 のときの壁面上の速度ベクトルの大きさに現われている。

アンサンブル平均 U については、壁面変形の変位が最大となる位相 $\pi/2$ と $3\pi/2$ において、変形谷部で減衰している様子が見られる。リブレットにおける摩擦抵抗低減は、この変形谷部における U の壁面上への侵入が大きく抑えられることによって得られる効果である。この摩擦抵抗低減の得られるリブレットにおいては、変形ピッチ s^+ については本シミュレーションのいずれのケース ($s^+ = 45, 90$) よりも小さく与えられており、また、このときの壁面変形勾配 a/s については、本シミュレーションのいずれのケース ($a/s = 0.05 \sim 0.11$) よりも大きく与えられている (たとえば Choi et al. (1993) の場合、 $s^+ = 30, a^+ = 5 \sim 8.6, a/s = 0.25 \sim 0.43$)。このため、変形谷部における U の減衰の程度が、抵抗低減の得られるリブレットの場合よりも小さくなっている。

壁面変形によってチャネル断面内に 2 次流れが生じていることが、速度ベクトル分布より確認できる。なお、先述の抵抗低減の得られるリブレット面上の流れ場に観測される U の局所的な減衰は、リブレット上に誘起される強い 2 次流れによるものであり、本壁面変形各モードにおける U の谷部における減衰効果が小さいことは、誘起される 2 次流れがリブレットの場合に比べて小さいことも表している。なお、本研究のように時間的に壁面変形の位相が変化するモードにおいては (すなわち半周期後には変形位相が π ずれる)、時間的に変形の固定される場合よりも、2 次流れが小さくなることが、付録に示した波状チャネル乱流に対する直接数値シミュレーション結果との比較においても現われている。この 2 次流れの強度および生成位置のパラメータ依存性については、後で示す平均流線および渦度分布の検討時に考察する。

アンサンブル平均流線

図 4.127 ~ 4.132 に、アンサンブル平均流線 ψ 分布を等高線で示す。本アンサンブル平均流線は、壁面変形によって誘起された平均 2 次流れ成分を表す。その流れ関数 ψ の値、すなわち流線の等高線数が、誘起された 2 次流れの強度を表し、図中の流線の閉じたケースは、2 次渦構造の誘起を示している。本アンサンブル平均によって得られる 2 次流れ構造は、壁面変形の頂上部と谷部間の半ピッチ上で分離され、

壁面変形 1 ピッチ中にはこれを境に符号の異なる対称構造が存在する。

振動壁の摩擦係数が特に大きくなる (T^+, s^+, a^+) = (100, 45, 5.0) の場合に、2 次流れ構造が特に大きくなっていることを、図 4.129 中の位相 $\pi/2, 3\pi/2$ における平均流線より確認できる。この場では、2 次流れ構造は、他のケースと比較しても、壁面上かなり上方まで達している。図 4.131, 4.132 に示されるように、壁面変形振幅の小さい場合 ($s^+ = 2.5$) には、振幅の大きい場合 ($s^+ = 5.0$) より誘起される 2 次流れ構造は小さい。また、流線の数によって表される 2 次渦構造の強度については、壁面速度の最大となる変形位相 0 および π 時には、変形速度 a^+/T^+ と、本平均で取った 2 次渦構造の単位、すなわち流れ関数積分スケールに相当する変形ピッチ s^+ による差異が見られるが、壁面変形速度が 0 となる位相 $\pi/2$ および $3\pi/2$ においては、先述の変形振幅による差異を除けば、いずれのケースもほとんど等しくなっている。なお、このときにも、後述の x 方向渦度のアンサンブル平均 Ω_x に見られるように、壁面や流れ場にはす剪断・回転効果において、その他の壁面変形パラメータ (周期 T^+ , ピッチ s^+) の影響が明確に現れている。

壁面変形に誘起される 2 次流れ構造は、変形位相に伴い次のように変化する。壁面変形の位相 0 時に、壁面上の正弦速度分布を中心とする 2 次渦構造が生成される。このときの渦中心は、壁面変形の節の位置にある。また、壁面上に形成されるこの半分の渦構造の上方に、この前の半周期で生成された 2 次渦構造が残っている。この渦構造の符号は、壁面上の 2 次渦構造とは逆符号を示し、この符号の変化は半周期ごとの壁面変形位相の π のずれを反映している。この上方の 2 次渦構造の強度が大きい場合 (たとえば、(T^+, s^+, a^+) = (100, 90, 5.0) の場合) には、次の $\pi/2$ 周期上でも持続していることが観察できる。このことは、壁面変形 1 周期を通して一つの 2 次渦構造が存在し続けることを意味し、壁面変形半ピッチ当たり、半周期上で 1 つの 2 次渦構造が生成されることを考慮すると、平均して常時 2 つの符号の異なる 2 次渦構造が壁面上に存在していることを意味する。一方、(T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 2.5), (100, 45, 2.5) の場合のように、この位相 0 時においても、壁面上の 2 次渦構造の上方に、この半周期前に生成された 2 次渦が見られない場合もある。この場合は、誘起された 2 次渦構造が弱いケースに相当し、2 次渦の生成期間は半周期ということになる。この場合、壁面上には、平均して常時 1 つの 2 次渦構造が存在していることになる。引き続き、 $\pi/2$ 位相において、壁面上の速度は 0 となり、この壁面上に誘起された 2 次渦構造は壁面より離れて存在する。位相 π においては、壁面上に新たに別符号の渦構造が生成され、続く $3\pi/2$ 位相では、壁面上の速度が 0 となり、この新たに生成された 2 次渦構造は壁面より離脱する。このとき、半周期前に生成された 2 次渦構造の強度が大きい場合には、壁面上の 2 次渦構造とは逆符号の渦構造がこの上方に残留する。

x 方向平均渦度

図 4.133 ~ 4.138 に、アンサンブル平均 x 方向渦度 Ω_x 分布を等高線で示す。

Ω_x 分布には、壁面変形によって誘起されるチャネル断面内 (y, z 方向成分) 2 次流れ成分による剪断効果の強い箇所、およびその 2 次流れの効果あるいは変形壁自体の持つ速度分布によって壁面上に生成される高剪断領域の主に 2 つの効果が示されている。また、変形壁面上のこの 2 つの効果を示す Ω_x の分布の符号が、変形時間周期中に交替していることを確認できる。すなわち、位相 0 のときに壁面上の変形速度分布によって生成された正の高 Ω_x 領域は、位相 $\pi/2$ にかけて壁面上方に押し上げられ、位相 π の後には、新たに壁面上に生成される逆符号の (負の) 高 Ω_x 領域の上方に位置する。ただし、2 次流れが弱い場合には、本時点における 2 次流れ効果による高 Ω_x 領域は消えている。逆に、この 2 次流れ効果が強い場合には、さらに位相が進んでも、すなわち $3\pi/2$ 以降においても、本渦度成分は壁面上方に移動しつつ存在する。なお、位相 $3\pi/2$ において、位相 0 のときに壁面変形の変形速度分布自体によって大きく発達する Ω_x 領域と同符号の小領域を見ることができる。これは、その後発達する Ω_x 領域の種にも相当し、また、位相 $\pi/2$ のときに観測された壁面上における逆位相の Ω_x の発生の、 π 位相遅れた (進んだ) 現

象に相当する。なお、この壁面上の Ω_x の小領域は、壁面上方の2次流れに伴う壁面上の剪断効果を表すものである。領域中の Ω_x の発達、本 Ω_x の発達と、これより π 位相ずれた逆符号の Ω_x の発達により構成される。なお、壁面上における Ω_x の符号の交替は、壁面変形変位の位相 π の交替によって、誘起されるスパン方向の流れ方向が変化することを表している。

Ω_x の大きさには、先述の2次流れの大きさが反映されている。壁面変形の歪速度 a^{+2}/T^+s^+ の大きいケースで、高 Ω_x の誘起を観察できる。

y 方向平均渦度

図 4.139 ~ 4.144 に、アンサンブル平均 y 方向渦度 Ω_y の分布を等高線で示す。

壁面変形一定方向 (x 方向) に対しては一定の平均速度が得られるため、本アンサンブル平均 Ω_y の分布は、スパン方向における x 方向速度の勾配強度を示す。すなわち、 Ω_y の絶対値が大きい場合には、高速領域から低速領域に至る急峻な変化の起こる頻度が高いことが示されている。

壁面変形速度が最大、壁面が平坦になる位相 $0, \pi$ においても、壁面上でアンサンブル平均 Ω_y の分布を見ることができるが、 Ω_y の値が大きくなり、最も典型的な傾向を見ることができるのは、壁面変形速度が0となり、その変位が最大となる位相 $\pi/2$ および $3\pi/2$ においてである。本シミュレーションにおけるいずれのケースにおいても、変形頂上より少し谷部よりの箇所で Ω_y の絶対値が最大となっている。その符号を考慮すると、この傾向は、変形頂上部側で高速、谷部側で低速領域を生じるモードに対応し、本位相においては、本速度変動モードの生成頻度が高いことが示されている。なお、本領域における Ω_y は、変形振幅の大きい場合 $a^+ = 5.0$ と変形ピッチの小さい場合 $s^+ = 45$ で大きくなっており、変形時間周期の効果はほとんど現われていない。本効果には、壁面変形勾配 a/s が主として反映されている。

壁面が平坦になる位相 $0, \pi$ におけるアンサンブル平均 Ω_y 分布においては、変形ピッチ $s^+ = 45$ と90のケースで、異なった傾向が現われている。ピッチ $s^+ = 45$ の場合には、壁面振動変形の節の位置を中心に、変形速度が最大・最小となる位置の間で一定して同符号の Ω_y を生じている。このときの符号は、壁面が降下する位置では高速、上昇する位置では低速となっていることを意味する。本効果では、壁面の昇下によって変形谷部にあった低速の流体が押し上げられる現象と、壁面の降下によって変形頂上部にあった高速の流体が下方に導入される現象が現われている。ピッチ $s^+ = 90$ の場合には、壁面変形の節の位置に対してスパン方向に異なった符号の Ω_y が生じている。本シミュレーションにおける $s^+ = 90$ の2ケース、 $(T^+, s^+, a^+) = (50, 90, 5.0), (100, 90, 5.0)$ のいずれにおいても同様の傾向が観測される。このときの Ω_y の符号より、壁面変形の節付近で低速、壁面速度が最大・最小となる領域付近で高速となる頻度が高いことがわかる。ただし、 Ω_y の大きさにも示されるように、その程度はそれほど大きくない。なお、後述の変形壁面上の乱流準秩序構造に対する考察において、壁面変形変位の最大となる位相においては、その頂上付近で高速領域、谷部付近で低速ストリークの生成される頻度が高いことが示される。ここで検討中の壁面が平坦になる位相は、変形変位が最大となる位相の中間の位相にあたり、壁面変形の頂上部と谷部の位置が交替する中間点にあたる。よって、この観測結果は、壁面変形の空間位相の変化に伴う高速・低速領域の移動の過渡的な状態を表しているとも見ることができる。

z 方向平均渦度

図 4.145 ~ 4.150 に、アンサンブル平均 z 方向渦度 Ω_z 分布を等高線で示す。アンサンブル平均 Ω_z 分布は、x 方向の剪断効果を表す。特に壁面上では、壁面剪断応力の x 方向 (流れ方向) 成分を表す。

壁面変形の位相が0となる位相 $0, \pi$ の場合、アンサンブル平均 Ω_z はスパン方向にはほぼ一定の分布を示す。しかしながら、程度は小さいものの、先の Ω_y で述べたことがこの Ω_z 分布にも反映されている。すなわち、変形ピッチが $s^+ = 45$ となる全てのケースについて、壁面速度が正側に最大となる位置付近では壁近傍の高速流体の影響により Ω_z が大きくなっており、一方の壁面速度が負側に最大となる位置付近

では壁近傍の低速流体の影響により Ω_z は減少している。これは、先の Ω_y に対する考察でも述べたように、壁面上昇によって変形谷部にあった低速の流体が押し上げられる効果と、壁面の降下によって変形頂部にあった高速の流体が押し下げられる効果が現われたものである。また、変形ピッチ $s^+ = 90$ の2ケースについては、壁面変形の節にあたる位置付近で Ω_z の減少が見られる。これは、先の Ω_y の観測時においても確認された、壁面変形の節付近で低速、壁面速度が最大・最小となる領域付近で高速となる効果にも相当する。

壁面の変形変位が最大となる位相 $\pi/2, 3\pi/2$ においては、全てのケースに共通して、壁面変形の頂上で剪断効果が強くなることが表されている。本位相における Ω_z 、すなわち剪断効果は、 Ω_y の場合と同様、変形振幅の大きい場合 ($a^+ = 5.0$) と変形ピッチの小さい場合 ($s^+ = 45$) に大きくなっており、変形時間周期による影響は見られない。すなわち、本効果には壁面変形勾配 a/s が反映されている。

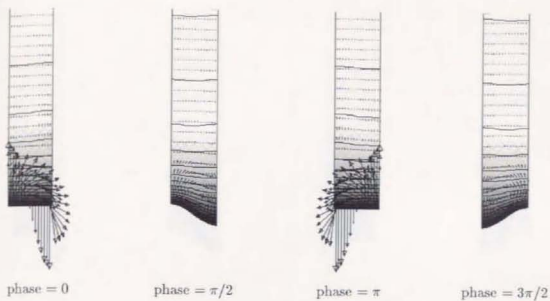


Figure 4.121: アンサンブル平均 x 方向速度分布 ($T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$), black to white: $U^+ = 0$ to 20.

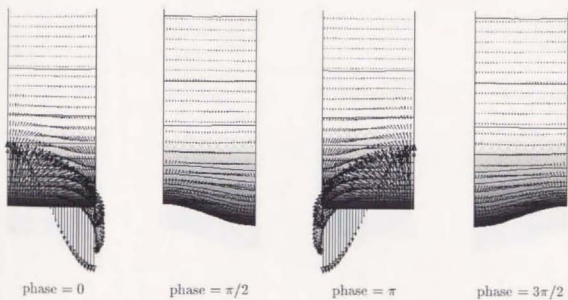


Figure 4.122: アンサンブル平均 x 方向速度分布 ($T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$), black to white: $U^+ = 0$ to 20.

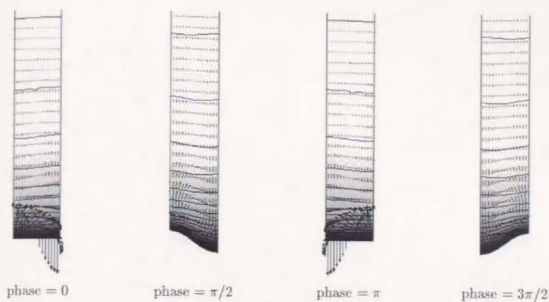


Figure 4.123: アンサンブル平均 x 方向速度分布 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$), black to white: $U^+ = 0$ to 20.

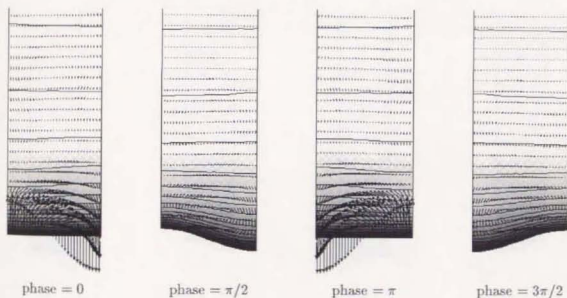


Figure 4.124: アンサンブル平均 x 方向速度分布 ($T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$), black to white: $U^+ = 0$ to 20.

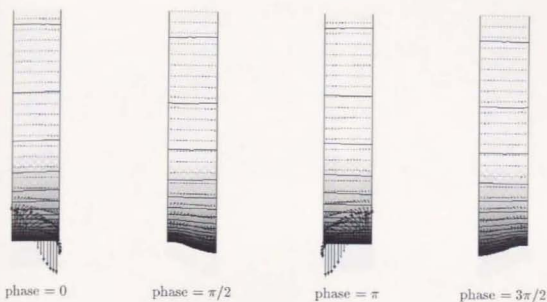


Figure 4.125: アンサンブル平均 x 方向速度分布 ($T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 2.5$), black to white: $U^+ = 0$ to 20.

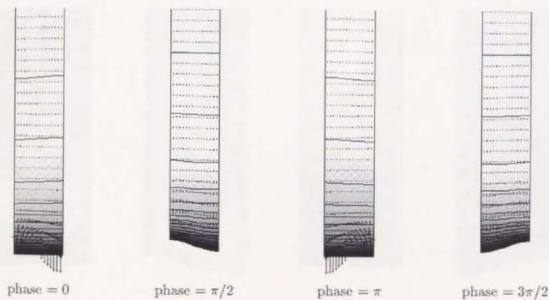


Figure 4.126: アンサンブル平均 x 方向速度分布 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 2.5$), black to white: $U^+ = 0$ to 20.

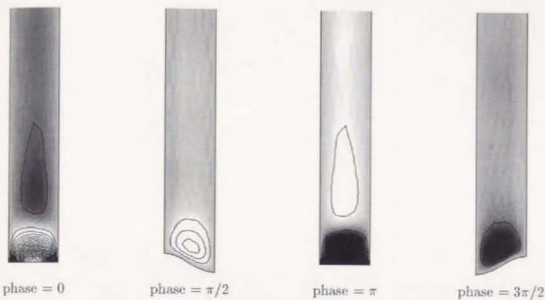


Figure 4.127: アンサンブル平均流線 ($T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$), white to black: $\psi^+ = -0.35$ to 0.35 .

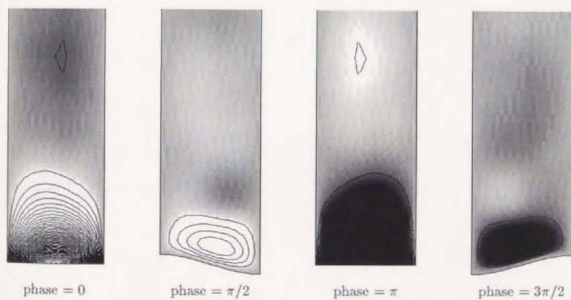


Figure 4.128: アンサンブル平均流線 ($T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$), white to black: $\psi^+ = -0.35$ to 0.35 .

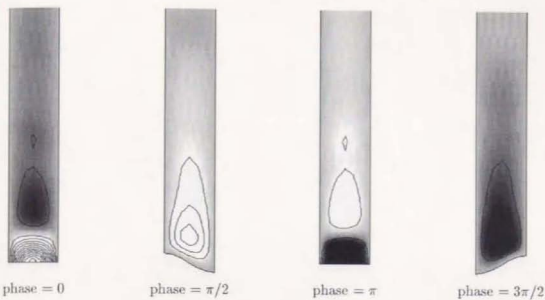


Figure 4.129: アンサンブル平均流線 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$), white to black: $\psi^+ = -0.35$ to 0.35 .

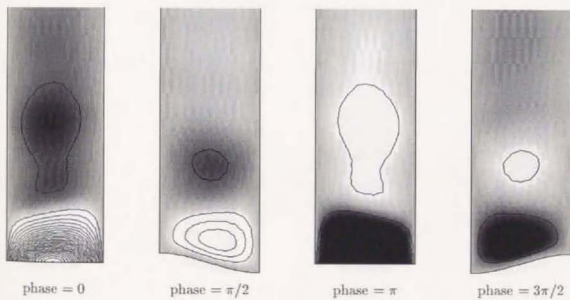


Figure 4.130: アンサンブル平均流線 ($T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$), white to black: $\psi^+ = -0.35$ to 0.35 .

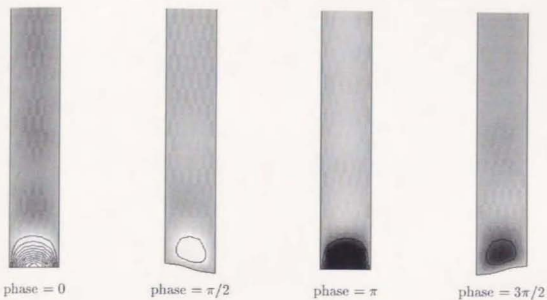


Figure 4.131: アンサンブル平均流線 ($T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 2.5$), white to black: $\psi^+ = -0.35$ to 0.35 .

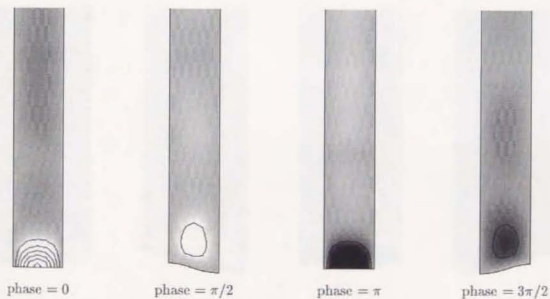


Figure 4.132: アンサンブル平均流線 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 2.5$), white to black: $\psi^+ = -0.35$ to 0.35 .

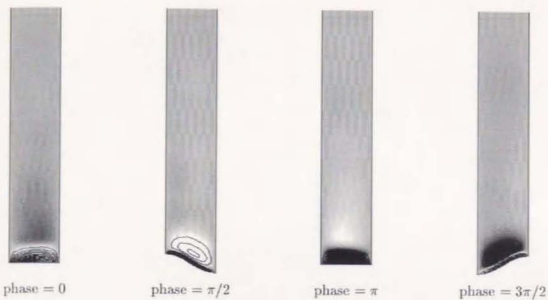


Figure 4.133: アンサンブル平均 x 方向渦度 ($T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$), black to white: $\Omega_x^+ = -0.2$ to 0.2 .

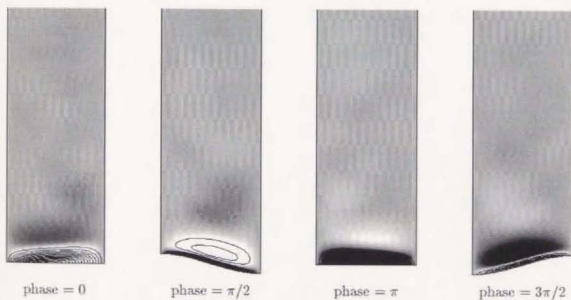


Figure 4.134: アンサンブル平均 x 方向渦度 ($T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$), black to white: $\Omega_x^+ = -0.2$ to 0.2 .

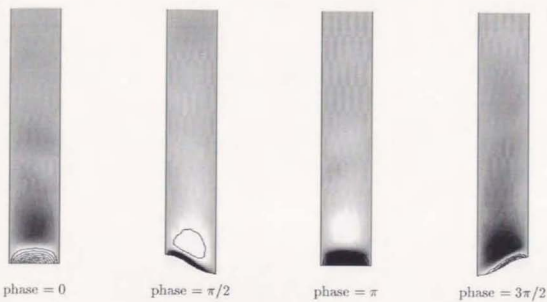


Figure 4.135: アンサンブル平均 x 方向渦度 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$), black to white: $\Omega_x^+ = -0.2$ to 0.2.

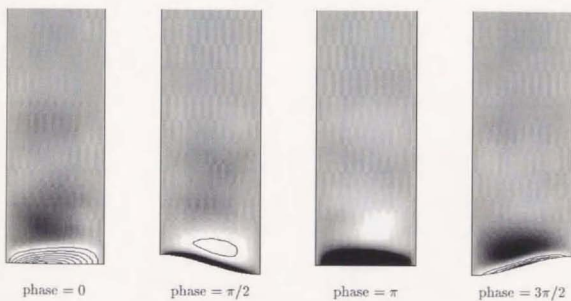


Figure 4.136: アンサンブル平均 x 方向渦度 ($T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$), black to white: $\Omega_x^+ = -0.2$ to 0.2.

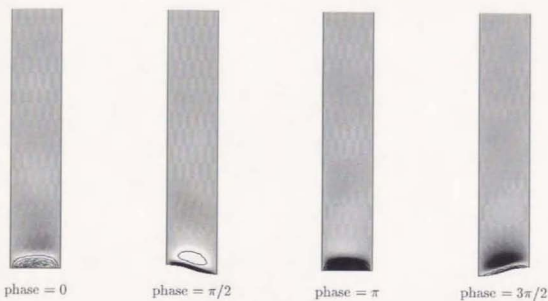


Figure 4.137: アンサンブル平均 x 方向渦度 ($T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 2.5$), black to white: $\Omega_x^+ = -0.2$ to 0.2 .

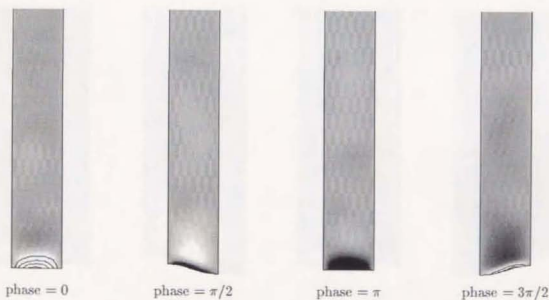


Figure 4.138: アンサンブル平均 x 方向渦度 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 2.5$), black to white: $\Omega_x^+ = -0.2$ to 0.2 .

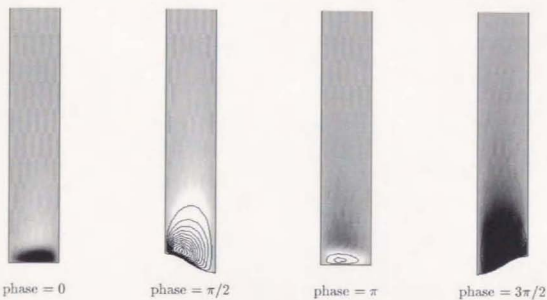


Figure 4.139: アンサンブル平均 y 方向渦度 ($T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$), white to black: $\Omega_y^+ = -4.5$ to 4.5.

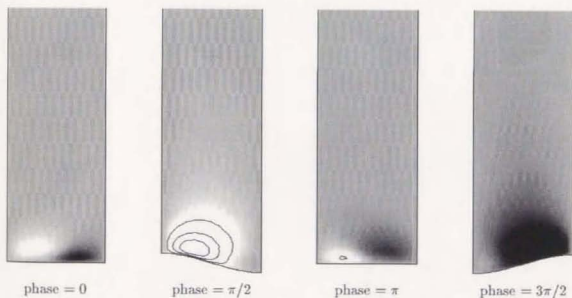


Figure 4.140: アンサンブル平均 y 方向渦度 ($T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$), white to black: $\Omega_y^+ = -4.5$ to 4.5.

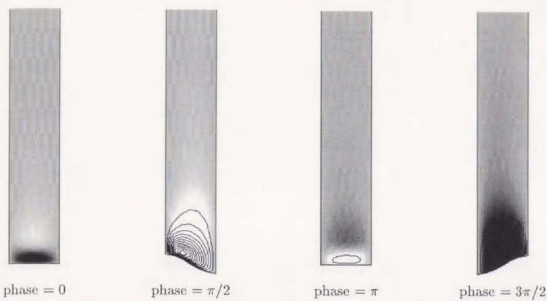


Figure 4.141: アンサンブル平均 y 方向渦度 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $\alpha^+ = 5.0$), white to black: $\Omega_y^+ = -4.5$ to 4.5.

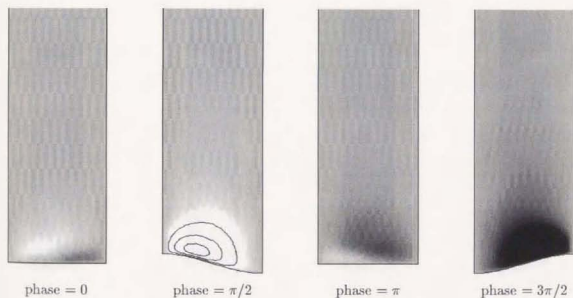


Figure 4.142: アンサンブル平均 y 方向渦度 ($T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $\alpha^+ = 5.0$), white to black: $\Omega_y^+ = -4.5$ to 4.5.

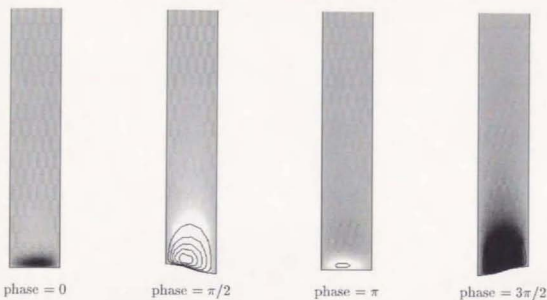


Figure 4.143: アンサンブル平均 y 方向渦度 ($T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 2.5$), white to black: $\Omega_y^+ = -4.5$ to 4.5.

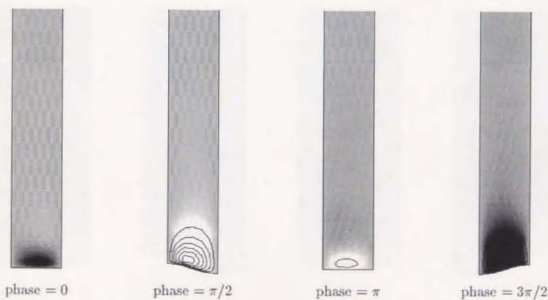


Figure 4.144: アンサンブル平均 y 方向渦度 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 2.5$), white to black: $\Omega_y^+ = -4.5$ to 4.5.

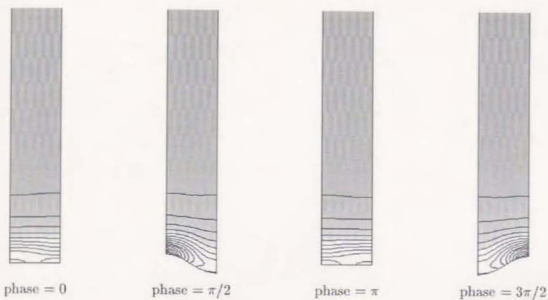


Figure 4.145: アンサンブル平均 z 方向渦度 ($T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$), white to black: $\Omega_z^+ = -45$ to 45.

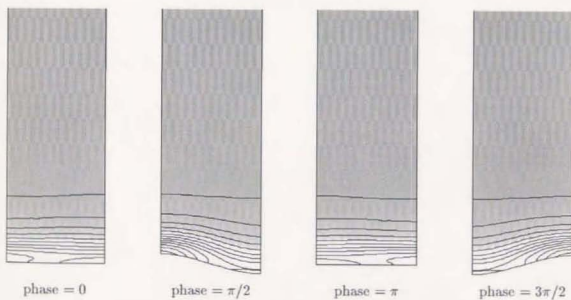


Figure 4.146: アンサンブル平均 z 方向渦度 ($T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$), white to black: $\Omega_z^+ = -45$ to 45.

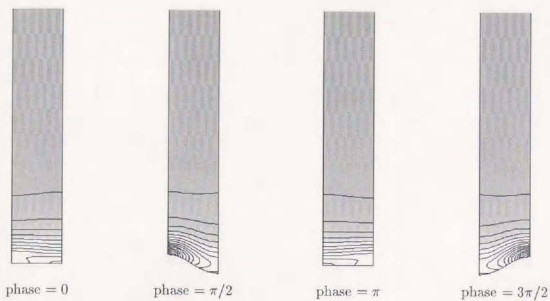


Figure 4.147: アンサンブル平均 z 方向渦度 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$), white to black: $\Omega_z^+ = -45$ to 45.

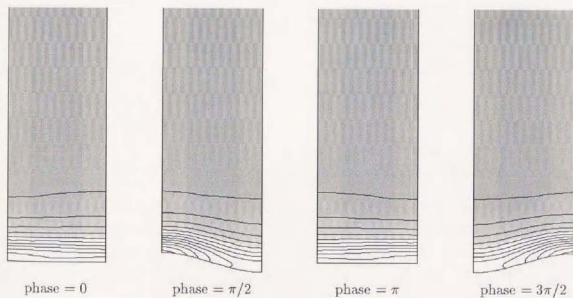


Figure 4.148: アンサンブル平均 z 方向渦度 ($T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$), white to black: $\Omega_z^+ = -45$ to 45.

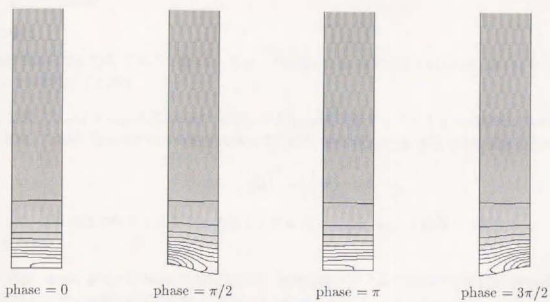


Figure 4.149: アンサンブル平均 z 方向渦度 ($T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 2.5$), white to black: $\Omega_z^+ = -45$ to 45.

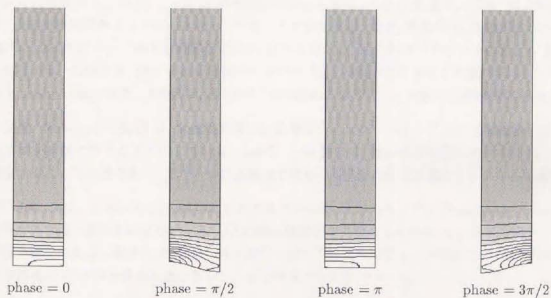


Figure 4.150: アンサンブル平均 z 方向渦度 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 2.5$), white to black: $\Omega_z^+ = -45$ to 45.

4.3.6 乱流構造解析

渦構造の検出

渦構造の検出に対しては、これまで様々なパラメータが提案され、検討がなされている (Jeong & Hussain 1995). 主なものを以下に示す.

1. Δ -定義. Chong, Perry & Cantwell (1990) による, 速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{u}$ の固有値が複素数になる領域. これは, 固有値に関する特性方程式において, 次の判別式 Δ が正となる領域を表す.

$$\Delta = \left(\frac{1}{3}Q\right)^3 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 > 0. \quad (4.20)$$

ここで, Q は速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{u}$ の第2不変量 $Q = -\frac{1}{2}u_{ij,j}u_{ji}$, R は第3不変量 $R = \det(u_{ij})$ に相当する.

2. Q -定義. Hunt, Wray & Moin (1988) による, 速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{u}$ の第2不変量 Q が正, かつ局所低圧となる領域. 第2不変量 Q は次のように表される.

$$Q = \frac{1}{2} (u_{i,i}^2 - u_{ij,j}u_{ji}) = -\frac{1}{2}u_{ij,j}u_{ji} = \frac{1}{2} (\|\boldsymbol{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2), \quad (4.21)$$

ここで, $\|\mathbf{S}\| = [\text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}^T)]^{1/2}$, $\|\boldsymbol{\Omega}\| = [\text{tr}(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^T)]^{1/2}$ であり, $\|\mathbf{S}\|$, $\|\boldsymbol{\Omega}\|$ は, それぞれ速度勾配テンソルの対称成分 $S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij,j} + u_{ji,i})$, 非対称成分 $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij,j} - u_{ji,i})$ を表す. (4.21) 式より, $Q > 0$ は, 渦度が剪断歪みより支配的となっていることを意味する. なお, 本条件は, 圧力ポアソン方程式 ($\nabla^2 p = 2\rho Q$) のソース項とも対応しており, $Q > 0$ 領域は, 圧力のラプラシアン の正となる領域にも相当する. このとき, $Q > 0$ となる領域において, 圧力の極小値が存在する必然性はない (Jeong & Hussain 1995). また, 本条件は, 式 (4.21) に示されるように, Δ -定義の必要条件に相当する.

3. p -定義. Robinson (1991) は, 乱流境界層の直接数値シミュレーションにおける渦構造の検出に低圧領域が有効であることを示している. しかし, 一般的には, 流れ場各位置における圧力レベルを指定することは困難であり, また一つの基準値で種々の渦構造の検知を網羅することも困難である.
4. λ^2 -定義. Jeong & Hussain (1995) は, 圧力の極小領域を, 圧力のヘシアン (Hessian) $p_{,ij}$ が2つの正の固有値を持つ条件から求めている. 圧力の極小領域が渦運動による場合, $p_{,ij}$ は $-(\|\mathbf{S}\|^2 + \|\boldsymbol{\Omega}\|^2)$ に置き換えられる. 渦構造は, テンソル $\|\mathbf{S}\|^2 + \|\boldsymbol{\Omega}\|^2$ の固有値の2つが負となる (= 2番目に大きな固有値 λ^2 が負となる) 点のトレースにより求められる.

三浦・木田 (1996) によって, 一様乱流中においては, 圧力のラプラシアン, すなわち Q -定義によって, 渦構造がより的確に把握できることが示されている. また, チャネル乱流における変動圧力の負の領域 (p -定義) が渦構造によく対応することが, Kasagi, Sumitani, Suzuki & Iida (1996) によって確認されている.

本研究で対象とするような線形でない平均成分の存在する流れ場においては, 上記の渦構造検出の各パラメータには, 平均成分を除いた変動成分を用いる必要がある. 平均成分が存在する場に対して上記の渦構造検出手法をそのまま適用する場合には, その平均成分の大きさ自体 (p -定義の場合), あるいは平均成分の持つ勾配の変化の影響によって (Δ -定義, Q -定義, λ^2 -定義の場合), 渦構造に起因する効果を隠してしまう場合がある. 本研究においても, これらの4つの定義のうち三浦・木田 (1996) によっても推奨されている Q -定義 (ただし一様乱流場に対して, この場合平均成分は0) を平均成分を含む瞬時場に対して試みてみたが, その渦構造予測性能は非常に悪いものであった. また, 平均成分を除去する場合, 平板チャネル乱流のように平板上で一様な平均量が定義される場合には, その平均量の計算は計算時

面で行えるが、本研究で対象とするような壁面に振動変形がある場合には、壁面変形の時空間的位相に基づいてアンサンブル平均値を取る必要があり、先の平板チャネル乱流の場合より空間的にも時間的にもサンプリング機会が減るため、平板チャネル乱流の場合と同等の質の平均値を得るためにはさらに数倍もの時間積分を要することになる。また、この一方で、時空間的に膨大な量の平均量を蓄える必要がある。後に示す本研究において算出したアンサンブル平均は、壁面変形の各位相における流れ場に対する寄与を概観するために示したものであり、十分なサンプリング数の得られたものではない。

本研究では、計算処理の簡略化、およびアンサンブル平均に要する過度の時間積分を避けるために、アンサンブル平均値ではなく、バルク平均値を用いた渦構造の検出を仮定する。さらに、このバルク平均値には、平板チャネル乱流に対するものを用いる。このとき、変動量の算出、すなわち平均量の除去は、スパン方向 (z 方向) 各位位置におけるチャネル高さによって無次元化された高さ $y/(2\delta - y_w)$ に基づいて行っている。ここで、 y_w は、壁面変形の変位を表す。本研究では、渦構造を検知するための各種変動量の算出にこのように簡略化した手法を用いているために、上記の速度勾配に関する諸量を用いる Δ -定義、 Q -定義、 λ^2 -定義を用いることは適切ではない。以上のことから、渦構造の検出に、上記手法により求めた変動圧力成分に対して p -定義を用いることとする。本手法によって検出された渦構造と、速度ベクトルあるいは流線より検出される渦構造は良く対応しており、本基準の有用性が確認されている。しかしながら、Kasagi et al. (1996) によっても指摘されているように、本基準では、弱い渦構造の検出が行えない、あるいは周囲の圧力レベルによって検出されない渦構造が存在するといった問題点が残されており、乱流構造解析時には、この点を配慮して、幾つかの渦構造検出の判定値を用いる等の配慮が必要となる。

平板チャネルにおける乱流準秩序構造の時系列変化

図 4.151 ~ 図 4.156 に、平板チャネル乱流における、壁面摩擦係数 C_f の大きく変化する場合の乱流構造の変化を示す。図 4.157 に、このときの壁面摩擦係数 C_f のタイム・トレースを示す。図中、低圧領域 $p^+ \leq -2.5$ を白色、低速領域 $u^+ \leq -3.5$ を灰色、高速領域 $u^+ \leq 3.5$ を黒色で示す。ここで、低圧領域は渦構造に対応する。

図 4.151 ~ 図 4.156 には、図 4.157 に示される C_f の大きな変動内における乱流構造の変化が示されている。 C_f の大きい場合に、渦構造が大きく誘起され、高速領域が大きく発達し、このために低速ストリークが大きく揺らいで屈曲している様子 (meandering 効果) を観察することができる。一方、 C_f の小さい場合には、渦構造の生成が抑制され、高速領域の壁近傍への侵入が抑えられ、低速ストリークが流れ方向に比較的一定に持続されている様子を観察することができる。また、図 4.157 中の時刻 $t^+ = 390$ 前後以降に示される C_f の増大過程において、図 4.151 ~ 図 4.156 に示される乱流構造上では、壁面近傍における高速領域の発達を観察することができる。この高速領域の発達は、スリーブの長時間の持続に起因している。縦渦構造の発達、低速ストリークの揺らぎ・屈曲は、この壁近傍における高速領域の発達の後に続く。以上のことから、壁面摩擦の増加には、チャネルコア領域の高運動量流体、すなわち高速流体の壁面近傍への侵入と、その効果の持続が中心的役割を担っていると考えられる。

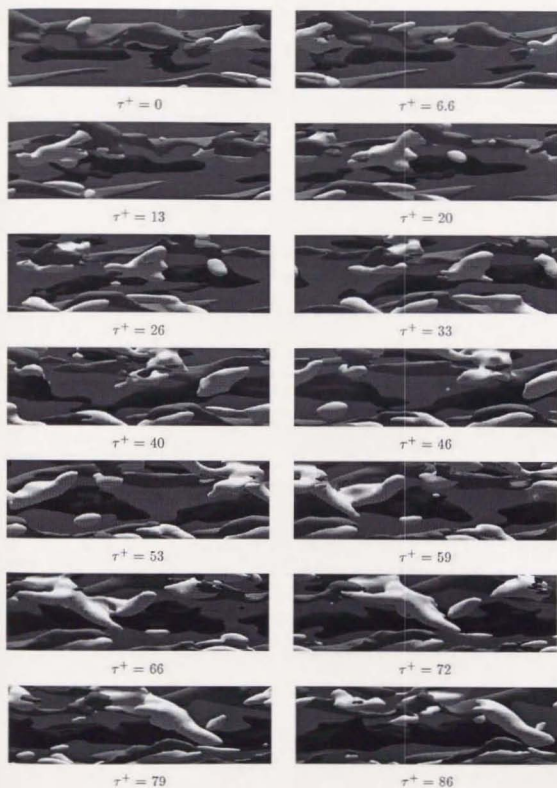


Figure 4.151: 平板チャネル乱流時系列乱流構造の変化 (その1, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $u^+ = -2.5$)

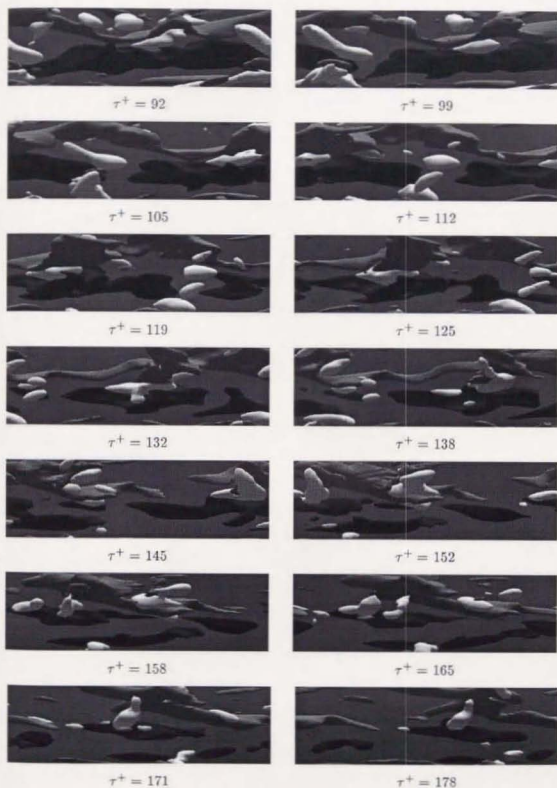


Figure 4.152: 平板チャネル乱流時系列乱流構造の変化 (その2, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$)

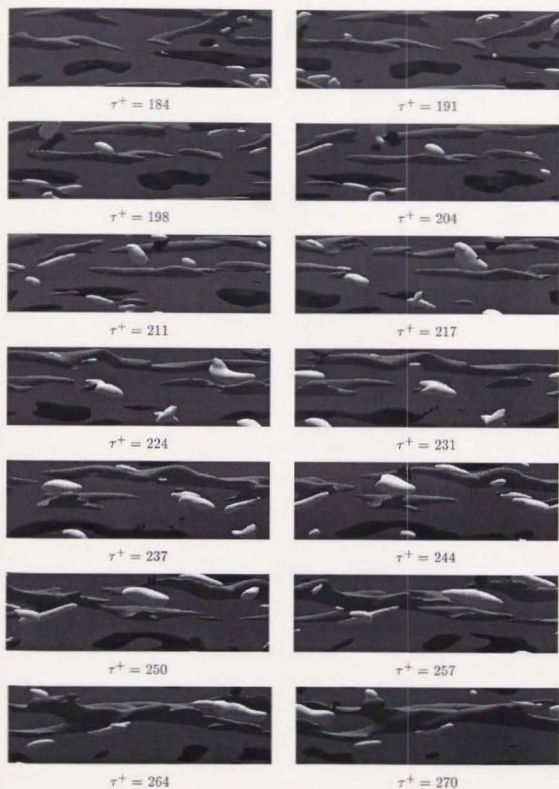


Figure 4.153: 平板チャンネル乱流時系列乱流構造の変化 (その3, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$)

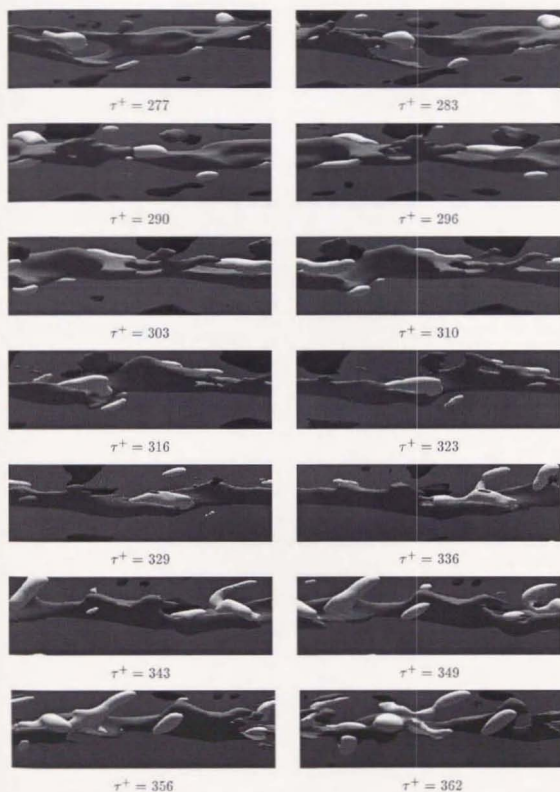


Figure 4.154: 平板チャネル乱流時系列乱流構造の変化 (その4, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$)

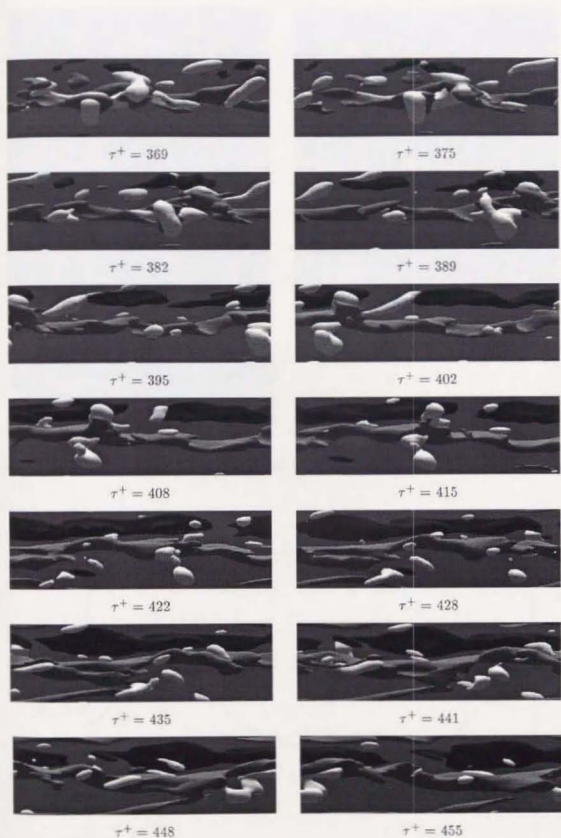


Figure 4.155: 平板チャネル乱流時系列乱流構造の変化 (その 5, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $y^+ = -2.5$)

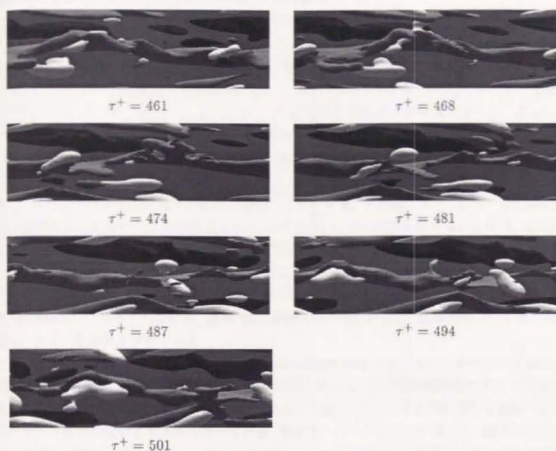


Figure 4.156: 平板チャネル乱流時系列乱流構造の変化 (その6, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$)

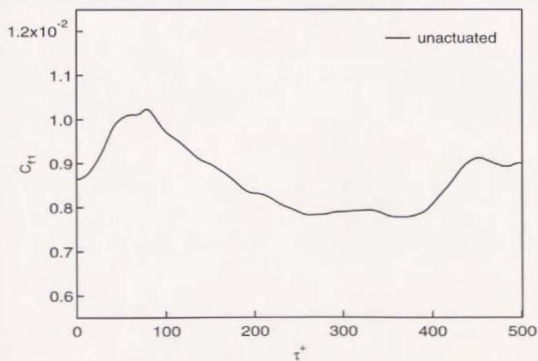


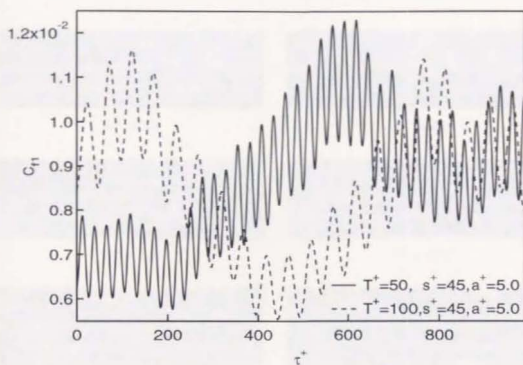
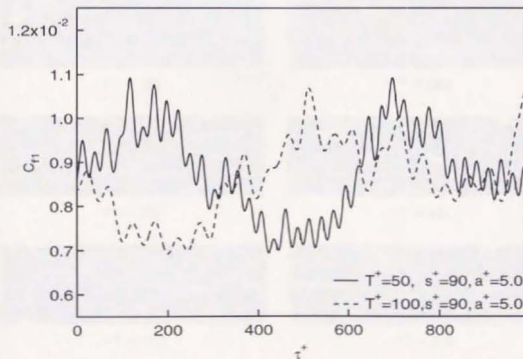
Figure 4.157: 平板チャネル乱流時系列解析時の C_f 変化

壁面変動変形を加えた場合の乱流準秩序構造の時系列変化

ここでは、先に示した変形壁摩擦係数 C_{f1} の長周期振動上における乱流準秩序構造の変化を観察する。図 4.158 に、ここで観察を行う 4 ケースに対する C_{f1} のタイムトレースを示す。なお、ここで示す時刻は、各シミュレーション中より、 C_{f1} 長周期振動 1 周期分を捕らえるように抜き出してきた場であり、図 4.12, 4.13 に示す、同一の初期場より始まった各シミュレーション上に統一の取れた時刻とは異なる。

図 4.159, 4.160 に、 $(T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 5.0)$ の場合の乱流準秩序構造の変化を、図 4.161, 4.162 に、 $(T^+, s^+, a^+) = (50, 90, 5.0)$ の場合の乱流準秩序構造の変化を、図 4.163, 4.164 に、 $(T^+, s^+, a^+) = (100, 45, 5.0)$ の場合の乱流準秩序構造の変化を、図 4.165, 4.166 に、 $(T^+, s^+, a^+) = (100, 90, 5.0)$ の場合の乱流準秩序構造の変化を示す。ここでは、 C_{f1} の長周期上での乱流構造の変化の概略を見ることを目的とし、構造の変化を詳細に追うことは行わないこととする。本前提のもと、各ケースの瞬時場は、乱流構造の変化を追うにはやや大き過ぎるおおよそ $\Delta\tau^+ = 50$ ごとの時間間隔で落とされる。図に示されるように、本時間間隔は、 C_{f1} の長周期上での乱流構造の変化を概観するには十分細かい時間間隔となっている。また、瞬時場を落とす位相については、全てのケースについて、壁面変形の変位が最大となる位相としている。観察対象は、先に示した平板チャネルの場合と同じく、低圧構造、すなわち渦構造、低速ストリーク、高速領域の 3 構造としている。図中、低圧領域 $p^+ \leq -2.5$ を白色、低速領域 $u^+ \leq -3.5$ を灰色、高速領域 $u^+ \leq 3.5$ を黒色で示している。

いずれのケースにおいても、 C_{f1} 増大時には、乱流瞬時構造は一樣に大きく励起されており、一方の C_{f1} 減少時には、渦構造、高速領域は一樣に大きく減衰している。この乱流諸構造の C_{f1} の長周期変化に伴う変化の程度は、 C_{f1} の変化の大きさにも反映されているように、いずれの場合にも励起・減衰の程度は平板チャネル乱流の場合より大きくなっている。低速ストリークについては、 C_{f1} 減少時には比較的安定に流れ方向に伸びている（発達している）のに対し、 C_{f1} 増大時には、壁面上に頻出する渦構造や高速領域の生成の影響によって、揺らぎ・屈曲 (meandering) の程度が非常に大きくなっている様子が観測される。特に、壁面摩擦 C_{f1} が減少から増大に移る場合、渦構造の分布によらず、高速領域の発達がまず観測されることは非常に興味深い。この点のメカニズムについては、後に、さらに詳細に検討することとする。なお、誘起された乱流諸構造の壁面変形パラメータに対する依存性については、次項目で考察する。

(a) $s^+ = 45$ の場合.(b) $s^+ = 90$ の場合.Figure 4.158: 壁面変形モード時系列解析時の C_{f1} 変化

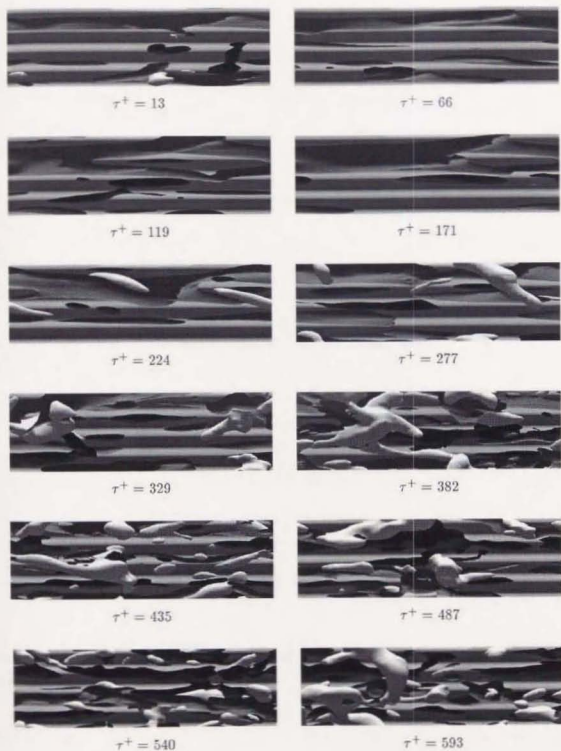


Figure 4.159: 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$, その 1, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$)

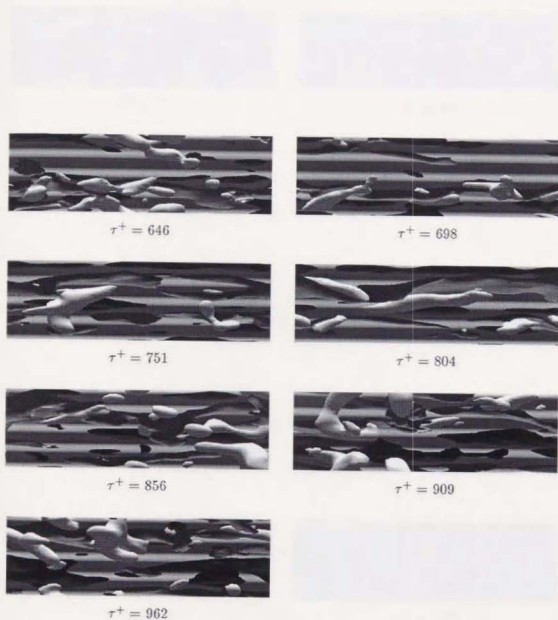


Figure 4.160: 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$, その 2, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$)

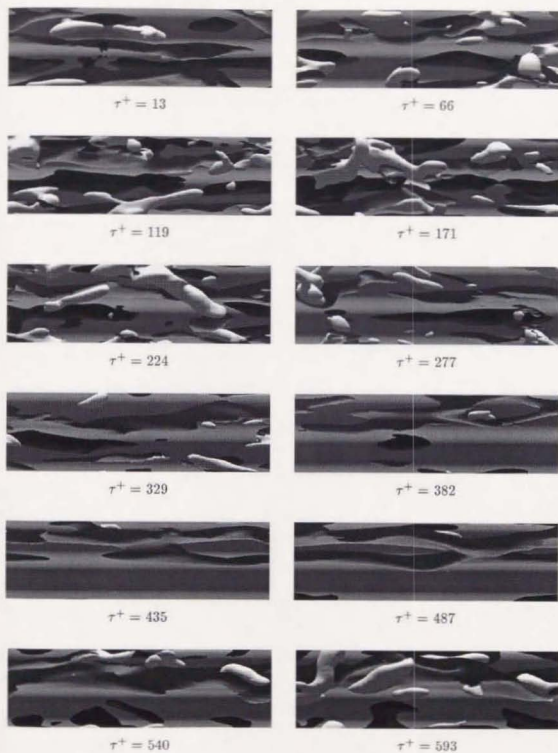


Figure 4.161: 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$, その1, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$)

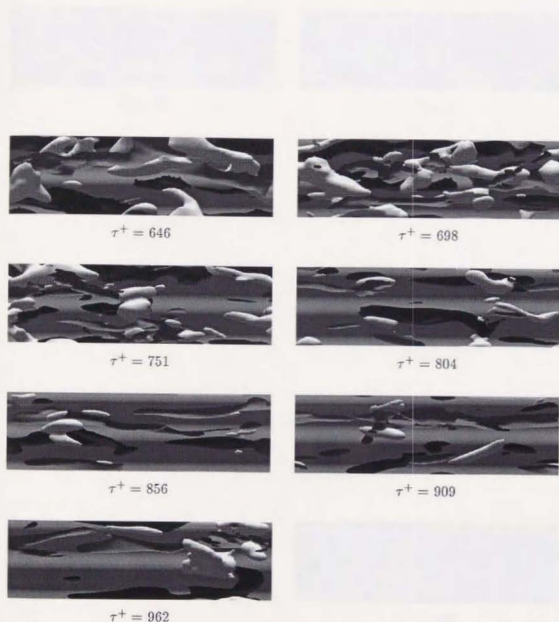


Figure 4.162: 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$, その 2, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$)

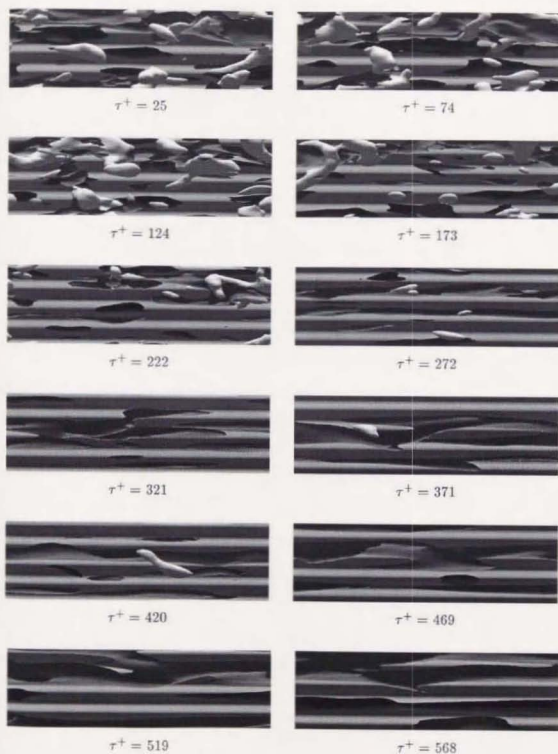


Figure 4.163: 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$, その 1, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$)

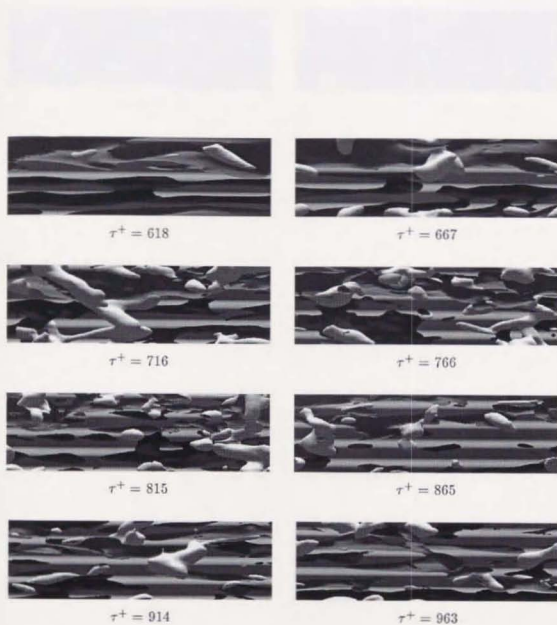


Figure 4.164: 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$, その 2, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$)

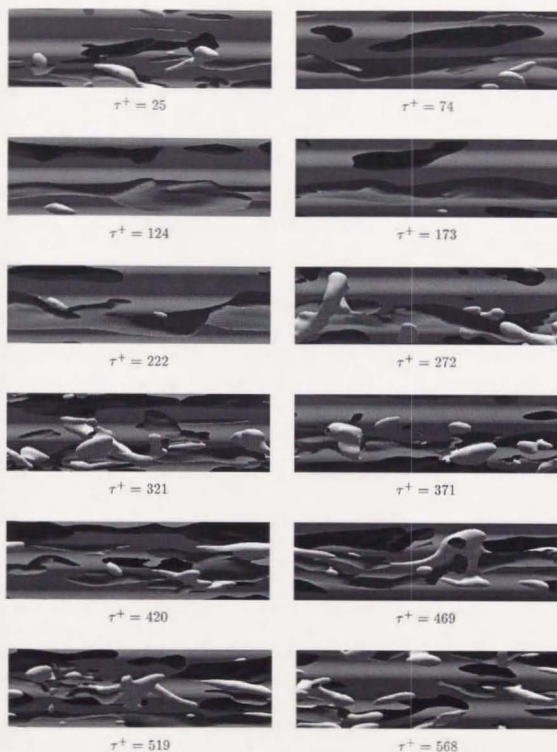


Figure 4.165: 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$, その 1, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$)

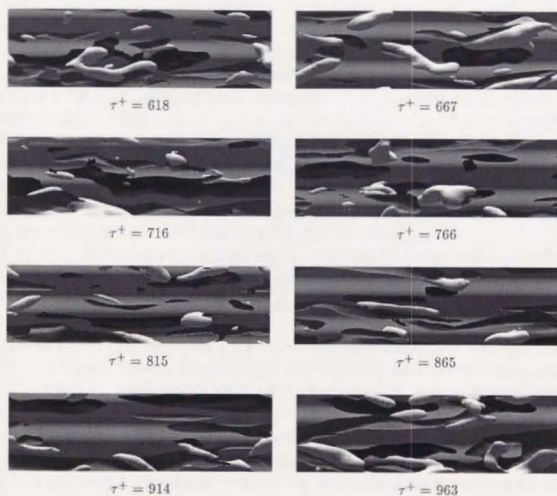


Figure 4.166: 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$, その 2, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$)

乱流準秩序構造の壁面変形パラメータ依存性

ここでは、壁面に振動変形を加えた場合の乱流瞬時構造の変化について検討を加える。観察対象には、平板チャネル乱流および振動変形するチャネル乱流の $(T^+, s^+, a^+) = (50, 45, 5.0), (50, 90, 5.0), (100, 45, 5.0), (100, 90, 5.0)$ の4ケースの計5ケースを選び、それぞれのケースについて、変形壁面摩擦 C_{f1} の増大時と減少時の構造を見ていくことにする。なお、観測は、壁面変形変位が最大となる位相のみに限っている。

図 4.167, 図 4.168 に、上記各ケースにおける高 C_{f1} 時の乱流準秩序構造、すなわち低圧領域に示される渦構造、低速ストリーク、高速領域を示す。いずれの壁面変形モードにおいても、これらの乱流構造が平板チャネル乱流の場合より大きく動起されていることを見ることができる。この乱流構造の動起の程度は、同図に示された C_{f1} のレベルにも表されている。また、平板チャネル ($s^+ = \infty, T^+ = \infty$ に相当) より壁面変形ピッチ s^+ が減少するに従い、各構造の空間スケールが減少していることを観察できる。一方、これら各構造の空間スケール上には、壁面変形の時間周期 T^+ の効果は見い出せない。しかしながら、本文の appendix で示すように、壁面変形に時間変形がない場合 ($s^+ \neq \infty, T^+ = \infty$ に相当) には、この場合とは大きく異なった諸効果が示される。本壁面変形モードにおいて時間項を入れた効果は、壁面変形の空間位相の時間的な移動 (位相 α) という形で流れ場に反映される。よって、ここでの乱流準秩序構造の空間スケール上に壁面変形時間周期 T^+ の影響が現われないという観測結果は、壁面変形の空間位相の移動速度に相当する変形周期 T^+ の効果が、今回取ったパラメータ範囲上では観測されないという可能性も考えられる。

また、乱流構造と壁面変形の空間位相との関係について、いずれのケースにおいても、変形頂上部で高速領域、変形谷部で低速ストリークの生成される頻度が高くなっている。

図 4.167, 図 4.169 に、上記各ケースにおける低 C_{f1} 時の乱流準秩序構造を示す。この場合にも、高 C_{f1} 時と同様、乱流構造の分布に変形ピッチの効果が現われている。また、同図に併記した C_{f1} 値にも現われているが、壁面に変形振動を加えた場合の低 C_{f1} 時の乱流準秩序構造は、平板チャネル乱流の場合より大きく減衰している。

図 4.170, 図 4.172 に、 C_{f1} 増大時のチャネル・スパン方向断面内の速度ベクトルおよび y 方向速度分布を示す。ここで抽出した断面は、図 4.167 ~ 図 4.168 に示した瞬時場のものである。壁面変形を加えることにより、平板チャネル乱流の場合より壁面近傍により小さい渦構造、高速・低速領域が分布することを確認できる。また、変形ピッチの大きいケース ($T^+, s^+, a^+ = (50, 90, 5.0), (100, 90, 5.0)$) において、変形谷部内に渦構造が生成され、この領域にも乱流変動の浸透効果が大きいことが示されている。一方、この場合にも、ピッチを大きく取ったことにより、壁面上にはより大きな低速領域が形成されている。この変形ピッチが大きい場合に見られる2つの傾向のうち、前者は壁面摩擦増大につながるものであり、後者は壁面摩擦低減につながる効果である。本シミュレーションにおける、このピッチの大きい2つのケースは、表 4.5 に示されているようにともに摩擦抵抗低減のケースに相当し、このことから、時空間的には壁面上では後者の傾向の方が強いことが推測できる。

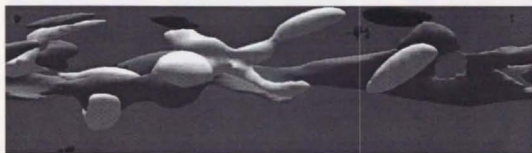
図 4.171, 図 4.173 に、 C_{f1} 増大時の変形壁上の剪断応力分布、図 4.171, 図 4.174 に、 C_{f1} 減少時の変形壁上の剪断応力分布を示す。なお、ここで示した壁面剪断応力分布は、図 4.167 ~ 図 4.169 に示した場に対するものである。壁面剪断応力を表す等高線のうち、破線は、平板チャネル乱流における平均剪断応力以下の領域を表し、実線はそれ以上の領域、すなわち摩擦抵抗増加に寄与する領域を表す。 C_{f1} 増大時に、 C_{f1} 減少時より、壁面剪断応力分布が局所的に大きく増大している様子を見ることができる。また、 C_{f1} 増大時の壁面剪断応力分布には、壁面上に大きく動起された渦構造 (特に高速領域) のスケール、分布の空間的頻度が反映されている。 C_{f1} 減少時の壁面剪断応力分布には、高速領域が大きく抑えられている様子が表されている。

この図において、変形頂上部で高速領域の存在に基づく高剪断領域の生成頻度が高いことが示されて

いる。一方、変形谷部では、一様に壁面摩擦は低くなっている。しかしながら、変形谷部においても、渦運動等による高速流体の侵入によって高剪断領域が生成している場合も観測でき、この傾向は、先のチャネルスパン方向断面内の速度分布の観察時にも触れたように、変形ピッチの大きいケース ($s^+ = 90$) でより高くなっている。以上の結果は、先に示した変形頂上部で高速領域、谷部で低速ストリークの生成される傾度が高いという観測結果に対応している。

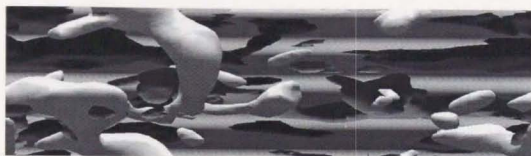


(a) 高 C_{f1} 時, $\tau^+ = 79$, $C_{f1} = 1.023 \times 10^{-2}$.



(b) 低 C_{f1} 時, $\tau^+ = 362$, $C_{f1} = 7.78 \times 10^{-3}$.

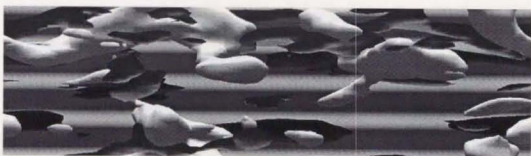
Figure 4.167: 高低 C_{f1} 時における乱流準秩序構造 (unactuated case, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$).



(a) $T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$, $\tau^+ = 1910$, $C_{fl} = 1.228 \times 10^{-2}$.



(b) $T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$, $\tau^+ = 1541$, $C_{fl} = 1.018 \times 10^{-2}$.



(c) $T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$, $\tau^+ = 1326$, $C_{fl} = 1.162 \times 10^{-2}$.



(d) $T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$, $\tau^+ = 1803$, $C_{fl} = 1.069 \times 10^{-2}$.

Figure 4.168: 高 C_{fl} 時における乱流準秩序構造 (gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$).



(a) $T^+ = 50$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$, $\tau^+ = 1488$, $C_{f1} = 7.60 \times 10^{-3}$.



(b) $T^+ = 50$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$, $\tau^+ = 1572$, $C_{f1} = 7.25 \times 10^{-3}$.



(c) $T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$, $\tau^+ = 1705$, $C_{f1} = 6.96 \times 10^{-3}$.



(d) $T^+ = 100$, $s^+ = 90$, $a^+ = 5.0$, $\tau^+ = 1507$, $C_{f1} = 7.28 \times 10^{-3}$.

Figure 4.169: 低 C_{f1} 時における乱流準秩序構造 (gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.5$).

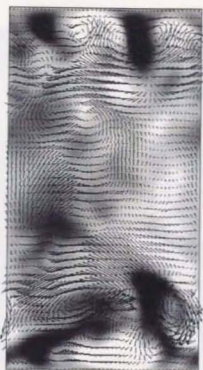
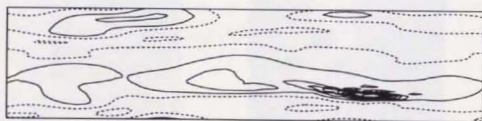
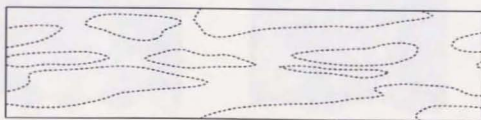


Figure 4.170: 高 C_{f1} 時におけるチャネル断面内の速度ベクトルと u 分布 (unactuated case, black to white: $u^+ = -3.5$ to 3.5)

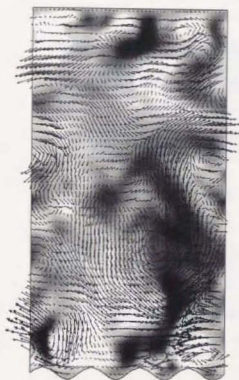
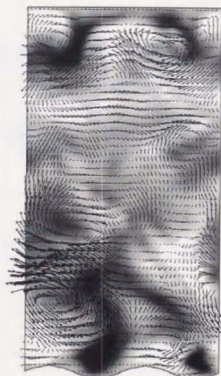
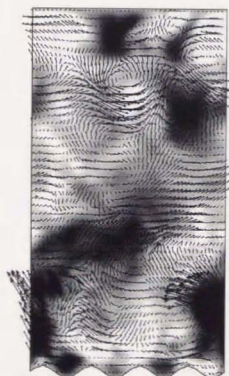
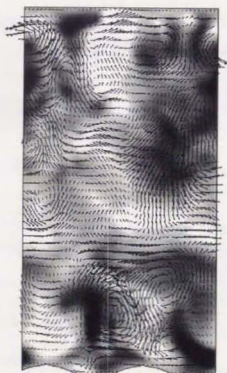


(a) 高 C_{f1} 時.



(b) 低 C_{f1} 時.

Figure 4.171: 壁面剪断応力分布 (unactuated case, 等高線間隔 $\Delta\tau_w^+ = 0.5$, 破線: $\tau_w^+ = 0.5, 1.0$).

(a) $T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 5.0$.(b) $T^+ = 50, s^+ = 90, a^+ = 5.0$.(c) $T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$.(d) $T^+ = 100, s^+ = 90, a^+ = 5.0$.Figure 4.172: 高 C_{f1} 時におけるチャネル断面内の速度ベクトルと u 分布 (black to white: $u^+ = -3.5$ to 3.5)

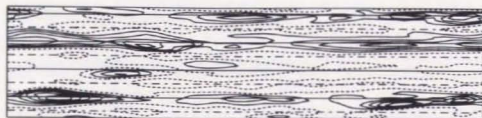
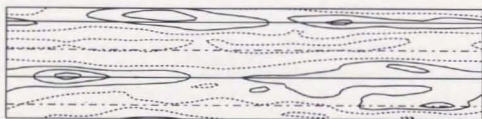
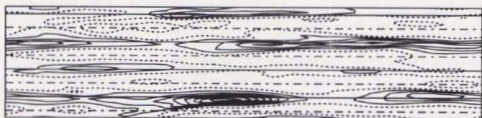
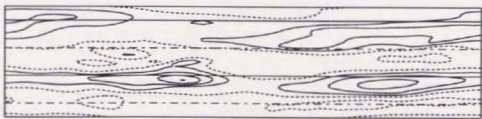
(a) $T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 5.0$.(b) $T^+ = 50, s^+ = 90, a^+ = 5.0$.(c) $T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$.(d) $T^+ = 100, s^+ = 90, a^+ = 5.0$.

Figure 4.173: 高 C_{f1} 時における壁面剪断応力分布 (等高線間隔 $\Delta\tau_w^+ = 0.5$, 破線: $\tau_w^+ = 0.5, 1.0$, 実線: 頂上部, 一点鎖線: 谷部).

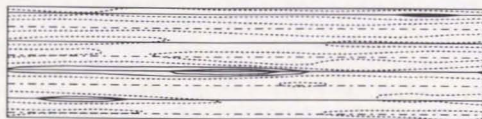
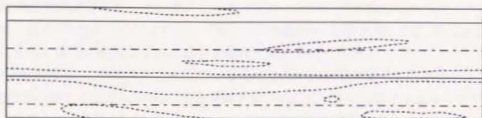
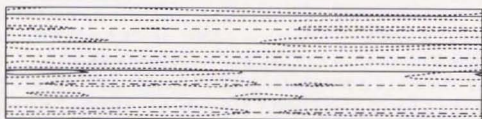
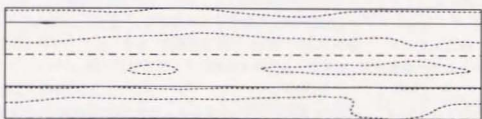
(a) $T^+ = 50, s^+ = 45, a^+ = 5.0$.(b) $T^+ = 50, s^+ = 90, a^+ = 5.0$.(c) $T^+ = 100, s^+ = 45, a^+ = 5.0$.(d) $T^+ = 100, s^+ = 90, a^+ = 5.0$.

Figure 4.174: 低 C_{f1} 時における壁面剪断応力分布 (等高線間隔 $\Delta\tau_w^+ = 0.5$, 破線: $\tau_w^+ = 0.5, 1.0$, 実線: 渠上部, 一点鎖線: 谷部).

壁面摩擦変化のメカニズム

ここでは、先に乱流準秩序構造解析を行った、図 4.159 ~ 4.166 のうち、 $(T^+, s^+, \alpha^+) = (100, 45, 5.0)$ の場合に特に注目して、乱流準秩序構造解析を行う。ここでは、まず先と同様、各瞬時場について、低圧領域、高速領域、低速ストリークの 3 構造を観察する。これを図 4.175 ~ 図 4.176 に示す。今回は、壁面摩擦抵抗が減少から増大に向かう段階にある乱流構造の時系列的な変化に注目するため、瞬時場のデータをおよそ $\Delta\tau^+ = 8$ 毎の十分小さい時間間隔で落としている。また、今回の乱流準秩序構造の観測においては、圧力降下のレベルの低い渦構造にも注目する目的から、また低い C_{f1} にも表れているように全体の圧力レベルも低いこともあって、渦構造検知に用いる圧力 p^+ のしきい値を、図 4.159 ~ 4.166 における -2.5 から -2.0 に変更している。また、本解析において示す時刻は、表 4.158 および図 4.163, 4.164 に示される先の乱流構造解析において用いた時刻に相当する。

C_{f1} が最小となる時刻 $\tau^+ = 400$ 前後 ($\tau^+ = 395 \sim 494$, 表 4.158 参照) では、壁面上の渦構造 (低圧領域) および高速領域が大きく減衰されている様子を見ることができる。ただし、このときも、低圧定義に掛からない微弱な渦構造は多数存在していることをチャネル・スパン方向断面内の速度ベクトル、流量より確認している。また、低速ストリークについては、この摩擦抵抗の低い位相では、壁面変形がある場合にも流れ方向に非常に安定に発達している様子を観察することができる。

この低い C_{f1} の位相の後、 C_{f1} が徐々に上昇していることを表 4.158 上で見ることができる。このとき流れ場には、高速領域が徐々に発達していき、その領域を徐々に拡大していく様子を見ることができる。この高速領域の発達を遡ると、その発生源は、 $\tau^+ = 453$ における小さな渦構造をその上流部に伴った構造 (小スケールのスイープ) に至る。ここで生成したスポット上の高速領域が、時間の経過および C_{f1} の増大とともに徐々に発達する様子を観察することができる。

この C_{f1} 増大時の高速領域の発生をさらに詳しく見るために、図 4.177 ~ 図 4.178 に、図 4.175 ~ 図 4.176 に対応する各時刻におけるスイープ (uv4) およびイジェクション (uv2) の分布を示す。この結果より、時刻 $\tau^+ = 453$ に観測される高速領域が、渦構造を (に) 伴ったスイープ運動に基づくものであることが分かる。また、この後の高速領域の発達が、スイープの持続、すなわちチャネルコア領域の高運動量流体 (高速流体) の壁面近傍への侵入の持続の效果に裏付けられるものであることが分かる。さらに、時刻 $\tau^+ = 453$ における高速領域の発達が、それ以前のスイープ運動に基づくものであることも、本図より見ることができる。すなわち、時刻 $\tau^+ = 428$ において、この高速領域の生成に直接関連すると思われるスイープの発生を観察することができる。また、その少し下流側においてもこれに関連すると思われるスイープ領域を観察することができ、この構造はさらに以前の時刻より続くものであることも観察できる。

渦構造の発達は、壁面上の高速領域が大きく発達し、壁面摩擦がある程度大きくなった後に続くことが分かる (時刻 $\tau^+ = 600$ 以降)。このあと、渦構造と高速領域の両者が発達していくことにより、流れ場の摩擦抵抗はさらに上昇していくことになる。本観測結果は、前項で示した平板チャネル乱流に対する観測結果とも一致し、このことから、壁面近傍における高速流体の侵入・発達が、壁面摩擦の生成に対し大きな要因となっていることが分かる。

以上のことは、壁面摩擦抵抗の制御を目的とする場合、特に壁乱流を低い C_{f1} に抑えることを目的とする場合、渦構造を制御対象とするより、高速流体の壁近傍への侵入、すなわちスイープを制御対象とする方が、より効果的な制御を行えることを意味している。すなわち、スイープ、高速領域を制御対象とする場合には、流れ場の構造が C_{f1} 増加モードに入る前に制御を加えることになる反面、渦構造を制御対象とする場合には、乱流構造が C_{f1} 増加モードに既にある場に制御を加えることになる。

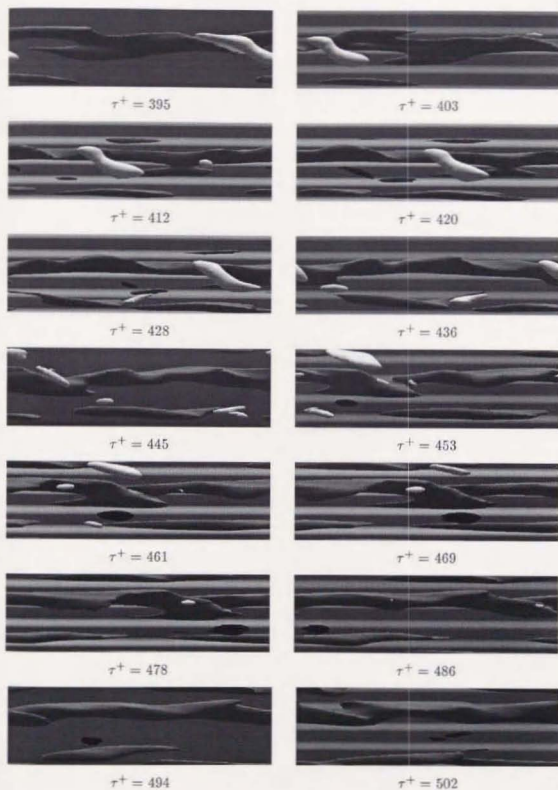


Figure 4.175: 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$, その 1, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.0$)

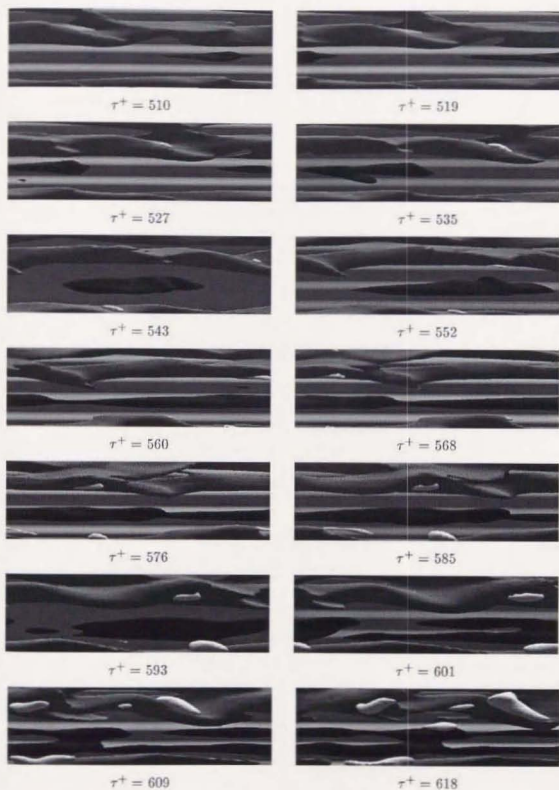


Figure 4.176: 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$, その 2, gray: $u^+ = -3.5$, black: $u^+ = 3.5$, white: $p^+ = -2.0$)

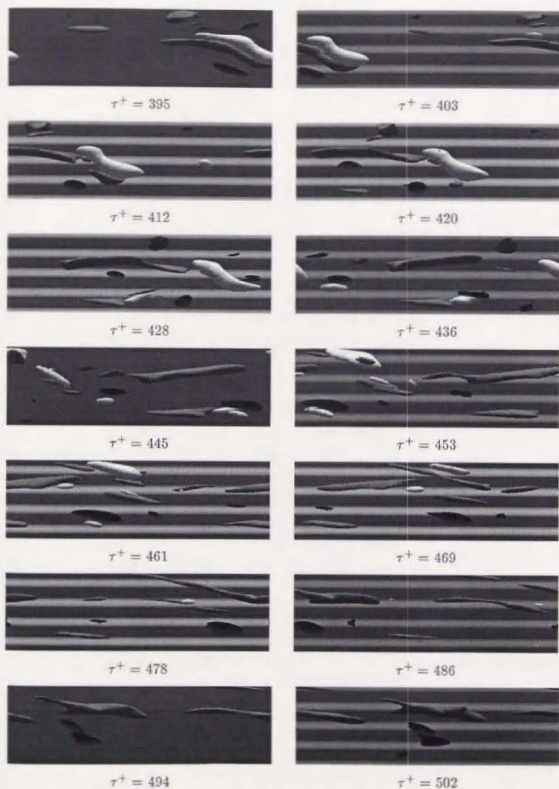


Figure 4.177: 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$, その 1, gray: ejection ($u^+v^+ = -2.0$, black: sweep ($uv^+ = -2.0$, white: $p^+ = -2.0$))

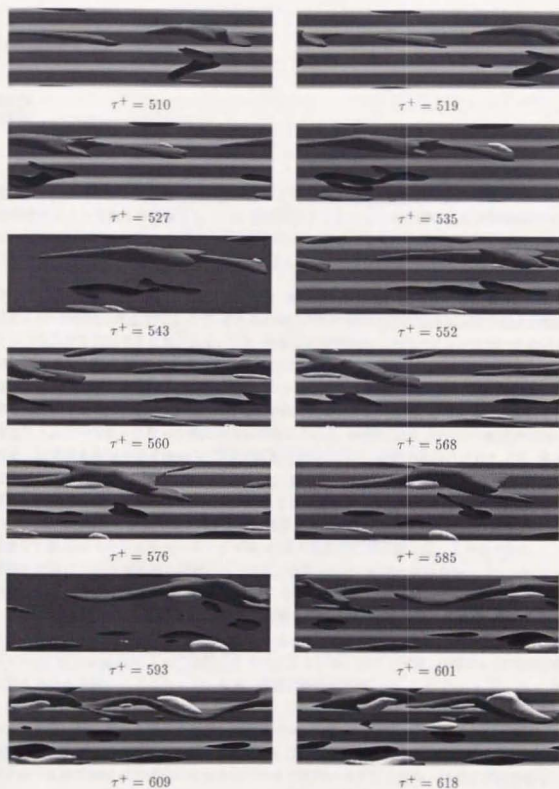


Figure 4.178: 時系列乱流構造の変化 ($T^+ = 100$, $s^+ = 45$, $a^+ = 5.0$, その 2, gray: ejection (uv^2) $u^+v^+ = -2.0$, black: sweep (uv^4) $u^+v^+ = -2.0$, white: $p^+ = -2.0$)

Chapter 5

結論

本論文では、変形移動境界を含む流れ場に対しても適用できる精度の高い直接数値シミュレーション手法を構築することを第1の目標とし、一方、壁面変形アクチュエータを用いた乱流制御手法検討の準備として、上記の計算手法を用いて、単純な壁面変形モードによって誘起されるチャネル乱流の特徴を解析することを第2の目標とした。以下に、本研究で得られた結論を述べる。

非定常流れの数値シミュレーションにおいては、時空間的な流れの変動を十分に捕らえることのできる時間刻み幅、空間格子解像度に加えて、それらの時空間的な離散点上における支配方程式の離散化についても十分な精度を要求する必要がある。また、乱流の直接数値シミュレーションにおいては過大な時間積分が必要とされるため、これに加えて解法のコンパクト性、すなわちより速やかに時間積分を行えることが要求される。従来の乱流の直接数値シミュレーションにおける離散化精度の議論は、空間に対するものが専ら先行しており、時間的な離散化に対して数値的に検討を行った例、あるいはその検討を反映して直接数値シミュレーションを行った例は非常に限られている。本研究では、時空間的な離散化に対し統一的に高精度・収束性を要求する目的から、空間的な離散化のみでなく、時間的な離散化に対しても、陰的な離散化手法を用いている。なお、ここで言う収束性とは、離散化式における時間刻み幅、計算格子間隔を十分に小さくした場合に元の偏微分方程式の解に一致する性質を指すものである。既存の時空間的な離散化手法において、上述の精度と解法のコンパクト性の両者を満足することのできる最良のカップリングは、時間的な離散化に陰的フラクショナル・ステップ法、空間的な離散化に差分法を用いる方法である。

各離散化手法における速度場の精度については、時間的には、乱流の直接数値シミュレーションにおいて通常要求される2次精度、空間的には、速度・圧力解法において最低限要求される2次精度を仮定した。前者の速度場に対する時間的な2次精度は、運動方程式各項（運動量輸送各効果）の時間的な変化を考慮することのできる最低限の精度に対応する。よって、本研究では、時間的な離散化にはその発展方程式部をCrank-Nicolson法によって展開したフラクショナル・ステップ法、空間的には内挿形式を保つ2次精度差分法を用いることとした。なお、時間的な離散化手法には、このCrank-Nicolson型フラクショナル・ステップ法のほかに、フラクショナル・ステップ法における射影誤差（近似化誤差）を抑えるために圧力項に対しデルタ形式を適用した修正Crank-Nicolson型フラクショナル・ステップ法（4段階時間進行法）、速度場の解法を線形計算に帰することのできる便宜性から乱流の直接数値シミュレーションにおける適用頻度が圧倒的に高くなっている半陰的フラクショナル・ステップ法を仮定した。この修正Crank-Nicolson型フラクショナル・ステップ法の時間的な離散化精度も2次に相当する。半陰的フラクショナル・ステップ法には、発展方程式部の非線形項にAdams-Bashforth法、その他の項に対しCrank-Nicolson法を用いた時間的な2次精度の代表的な手法を取った。速度場、圧力場の空間分布には C^2 級を仮定し、それらの空間離散化には、微分、補間、積分の全ての演算に対し内挿形式を保つ2次精度以上の差分を用いた。特に、本研究で用いた2次精度差分は、従来の速度場非線形移流項の離散化に対し線

形(1次精度)補間を用いた多くの2次精度差分と異なる。本研究における忠実な2次精度化によって、移流効果による乱流速度変動の高波数成分の生成を表現できるようになる。なお、速度成分・圧力の格子点配置には、速度・圧力解法に要求される関数クラスを部分的に満足させるスタガード格子系を用いている。本格子系は、速度・圧力解法に要求される関数クラスを部分的にでも満足させるという点でコケート格子系より優れ、計算負担を軽減するという点で完全スタガード格子系より優れる。

本研究では、壁面の変形するチャネル内乱流を計算対象とする。このため、本シミュレーションでは、乱流中における壁面の変形効果を精度よく予測する必要がある。壁面の時空間的変形は境界適合座標系によって表される。座標系の時間的離散化については、本研究では壁面形状が陽的に与えられるケースのみを計算対象とすることから2次精度のCrank-Nicolson法を用いることができ、一方の空間的離散化については、流れ場と同様、内挿形式の2次精度差分を用いている。

先述の3種類のフラクショナル・ステップ法によって、チャネル層流の数値シミュレーションを行い、それぞれの空間的収束性について検討を加えた。この3種類の時間的離散化手法の影響は、壁面上の速度の1回、2回微分値に現われる。速度場(の0回微分)および壁面より離れた位置における速度の各階微係数は、いずれの手法においても厳密値にほとんど一致している。修正Crank-Nicolson型フラクショナル・ステップ法においては、計算格子数が極端に少ない場合を除いて、壁面上の速度の2階の微係数以外はほぼ厳密値を示す。その他の手法、すなわちCrank-Nicolson型フラクショナル・ステップ法および半陰的フラクショナル・ステップ法においては、格子点数を多く取った場合にも壁面上での速度場の1階、2階の微係数の予測誤差を小さく抑えることができない。修正Crank-Nicolson型フラクショナル・ステップ法における壁面上の速度2回微分値の予測誤差には、壁面上で格子点分布のストレッチングを大きく取ったために片側差分によるメトリクス評価が適切に行えていないことが現われている。この点については、本計算手法にも改良の余地が残されている。本研究では、計算手法のより一般的な場に対する適用性を重視し、この点については片側差分を保った。

先述の3種類のフラクショナル・ステップ法を移動座標系に拡張し、それらの時空間的収束性に対する検討を蠕動チャネル層流の数値シミュレーションによって行った。特に、その蠕動壁側の壁面温度分布より、上記3手法の時間的収束性に対する以下の結論を得た。修正Crank-Nicolson型フラクショナル・ステップ法と半陰的フラクショナル・ステップ法においては時間的収束が容易に得られるのに対し、Crank-Nicolson型フラクショナル・ステップ法においては、時間的収束に過度に細かい時間刻み幅を要する。また、その収束値についても、他の2法による収束値と若干異なる値を示す。一方、半陰的フラクショナル・ステップ法は、Crank-Nicolson型フラクショナル・ステップ法に一致することを前提として構成された簡略化解法である。ここで示されたこの2法間の解の差は、半陰的フラクショナル・ステップ法における陰解法部と陽解法部の予測(離散化)の不一致、すなわち時間的離散化手法間の位相誤差を意味するものである。以上のことを考慮すると、修正Crank-Nicolson型フラクショナル・ステップ法がこの3法の中では最も優れた解法であることが分かる。ただし、本手法は陰的解法であるため、非定常流れのシミュレーション時には、各タイムステップごとに非線形解法を繰り返さなければならない。この負担は、3次元の場を解かなければならない乱流のシミュレーション時にはさらに大きくなる。

収束性、安定性に優れた修正Crank-Nicolson型フラクショナル・ステップ法、およびスタガード格子系2次精度差分により、壁面変形のあるチャネル内乱流の直接数値シミュレーションを行った。本シミュレーションは、壁面変形をアクチュエータとするアクティブ・フィードバック制御機構の準備として位置付けされる。壁乱流においては、低速ストリークや縦渦構造のように、流れ方向に長く伸びた構造や、流れ方向に長く持続する構造が、壁近傍における乱流輸送機構の中心的役割を担っており、本研究ではこれらの構造と干渉し合う基本モードとして流れ方向に一定、チャネル・スパン方向に変形を生じる壁面

変形モードを仮定した。この場合、壁面変形は、時間周期、スパン方向周期（ピッチ）、変形振幅の3変数によって整理される。本研究ではこれらのパラメータに対して、渦構造の平均周期、平均直径、低速ストリークの平均間隔等の乱流準秩序構造に特徴的な値を設定した。変形振幅は、粘性底層内での制御を仮定して設定した。

本壁面変形モードは、そのパラメータの取り方によって、壁面摩擦抵抗の増大モードとしても低減モードとしてもはたらく。本研究におけるパラメータ範囲では、壁面摩擦抵抗の変化には壁面変形時間周期より変形ピッチの変化の方が効果的であった。このとき、渦構造や、高速・低速領域等の乱流準秩序構造の分布スケールについても、変形時間周期より変形ピッチとの相関の方が高くなっている。壁面変形の時間周期の効果は本研究では確認できなかったが、壁面変形が時間的に固定されている場合には壁面摩擦抵抗が一律に増加することから、本壁面変形モードにおける抵抗低減機構には、壁面変形の空間位相の時間的移動効果が関連しているものと考えられる。

本壁面変形モードを加えた際の壁面摩擦係数の振動は、壁面変形に基づく短時間周期の振動と、流れ場の構造の変化（励起・減衰状態）に基づく長時間周期の2成分より成る。本壁面変形モードを加えることにより、壁面摩擦と乱流構造の時系列挙動は大きく変化する。特に、本壁面変形モードを加えた場合の、壁面摩擦の増加・減少時における乱流構造の差異は、本操作を行わない場合よりも遥かに大きくなる。本観察結果より、本アクチュエーションの on-demand 化、フィードバック化によって、さらに高効率な摩擦抵抗低減制御の実現が期待できる。なお、抵抗増大の目的に対しては、本変数範囲では変形固定の場合に最大となる結果を得ており、壁面を振動変形させることの有用性は見い出せない。

壁面摩擦増大時には、渦構造、高速領域の時空間的な生成頻度が非常に高くなっており、この影響により低速ストリークにも揺らぎや屈曲 (meandering) の効果が至るところで観測される。一方、壁面摩擦減少時には、壁面上では渦構造、高速領域は大きく抑えられ、低速ストリークは比較的安定に流れ方向に発達している。この乱流の諸構造が減衰した抵抗低減状態から壁面摩擦が上昇していく際には、壁面上においてスイープに伴う高速領域の発達が見られる。渦構造の励起・発達は、この後の壁面摩擦がある程度大きくなった時点より始まる。本観察結果より、壁面摩擦の低減を目的とする場合には、渦構造を制御対象とするより、壁面近傍への高速流体の侵入を抑える制御を加えることの方が、制御目的に対する時間的位相ずれもなく、摩擦抵抗をより低く保ち続けることが可能になると予想される。

Chapter 6

展望

6.1 壁面変形パラメータレンジの拡大

本研究では、単純化された壁面変形モードのチャネル乱流に及ぼす影響を考察することを目的とした。よって、様々なパラメータ効果を調べるために、変形に2次元、その具体的な時空間的変形を正弦関数で与え、パラメータ数を時間周期、ピッチ、振幅の3つにまで落としたが、それでも直接数値シミュレーションを行い、乱流構造に対する壁面変形パラメータの依存性を検討するには過大な問題となった。本研究で仮定した壁面変形パラメータは、いずれも縦渦構造の諸スケールを参照したものであったが、これより外れたパラメータ域においても、乱流構造の分布が大きく変化する可能性がある。よって、本検討をさらに広いパラメータレンジに拡大し、乱流構造の変化の有無および壁面変形パラメータの壁面摩擦抵抗に対する勾配（感度）、特に極大・極小値の有無を確認する必要がある。なお、この際には、本研究において一貫して用いた陰的な時間的離散手法ではなく、計算負担を大きく軽減することのできる半陰の手法の適用も検討する必要がある。

6.2 3次元壁面変形

壁面変形をアクチュエータとするフィードバック制御の実用化を考える場合、壁面上に分布する乱流構造に個別にはたらくことができるように、壁面変形には3次元性を要求する必要がある。3次元の壁面変形の乱流場にはたらく効果を検討するアプローチ手法としては、本研究におけるように変形を単純化してそのパラメータ効果を検討する場合と、最初から実際の応用と制御則の考案を目的として、一定の制御則に基づいて変形変位を与える場合の2ケースがある。前者のアプローチ例としては、Gaster, Grosch & Jackson (1994) による実験例があり、後者の例としては、Carlson & Lumley (1996) による直接数値シミュレーション例がある。いずれのケースについても、研究は始められたばかりであり、依然多くの課題を残している。特に、制御を加えた際の乱流構造の変化に対する理解は依然ごく限られたものでしかなく、壁面変形をアクチュエータとする制御手法の高効率化を実現するうえでも、この分野のさらなる推進が期待される。

また、近年では、マイクロマシン（Micro-Electro-Mechanical-Systems; MEMS）の発達とその具体的な適用性を示す報告も増えてきており、その流れ場に対する制御アクチュエータとしての汎化も、近い将来に期待できそうである。こうした技術的發展も、この分野の研究を加速させる一因となっている。

6.3 壁面変形の最適化（最適形状設計の適用）

壁面変形をアクチュエータとする制御において、前節の方法は、壁乱流に対する従来の理解に基づいた直感と経験に基づく手法に位置付けされる。ただし、この場合、変形モードを変えることによってさらに良好な結果が得られることが期待でき、こうした研究の無駄を省くため、一定の条件のもとでは不変的に最良の解（制御）を得ることのできる制御アルゴリズムが望まれる。

最適形状設計は、一定の拘束条件のもと、最適形状を計算するアルゴリズムであり、具体的アルゴリズムとしては種々の手法が存在する。代表的手法としては、感度解析に速度法 (speed method, Hadamard 1968, Sokolowski & Zolésio 1991)、最適化解法に勾配法 (Cea 1980) を用いる方法 (traction method, 畔上 1994) や、構造物が最も剛となるように許容設計領域内に一定量の物質を分布させる均質化法 (Bendsøpe & Kikuchi 1988) 等がある。

また、最適化手法に対するアプローチには、離散変数に対して最適化プログラムを利用する簡易手法（離散系の最適化）と、分布系に対して感度解析を行った後に最適化を図る手法（分布系の最適化）がある。先述の力法 (Cea 1980, 畔上 1994) は、後者の分布系の最適化手法に相当する。また、Pironneau (1984) のように、分布系の理論と、離散系の最適化の両者を用いている場合もある。

これらの形状最適化手法の流れ場に対する適用例は、Stokes 流 (Pironneau 1973, 片峯・畔上 1994) や、2次元層流 (定常流, Pironneau 1974, 片峯・畔上 1994) に限られている。乱流場に対し、分布系の形状最適化手法を適用する場合には、通常の最適制御の場合と同様、空間3次元に加えて、時間的な変動も考慮しうるように、時空間上に格子点を配置する必要がある。壁乱流に対する最適化手法の適用例は、Bewley, Choi, Temam & Moin (1993) による時空間的離散系の最適化解析が報告されるにとどまっている。一方、形状最適化の壁乱流に対する適用は、離散系、分布系のいずれのケースに対しても報告されていない。

壁乱流に対して、時空間的に完全に分布系を保った最適化解析を行うことは、計算機的な負担の面から非現実的である。よって、本研究の延長として、たとえば摩擦抵抗低減といった制御目的に対し、最適な壁面変形アクチュエーションモードを計算する場合には、当初は、時空間的に全て離散的に、あるいは時間上では離散的に、空間的には分布的に解析を行う等の簡略化が必要になる。ただし、このように離散系で最適化プログラムを適用する場合には、必ずしも良好な結果、すなわち制御目的に向かう結果が得られるとは限らない危険性を含んでいる。しかしながら、形状最適化を目的としたものではないが、Bewley et al. (1993) による離散系最適化制御の成功は、本アプローチの成功を十分に期待させる。

謝辞

本論文は、著者が東京大学大学院工学研究科機械工学専攻熱流体工学研究室に在籍中に行った研究をまとめたものであります。この間、東京大学研究生時代も含めれば5年間もの長きにわたり、常に忍耐強く御指導を下された東京大学工学部笠木伸英教授に心より感謝致します。また、笠木先生には、非常に優れた研究機会と研究環境を与えて頂いたばかりでなく、研究活動以外のことについてもいろいろとお骨折りを頂き、感謝の言葉は尽きません。

東京大学工学部庄司正弘教授、松本洋一郎教授、荒川忠一教授、東京大学生産技術研究所谷口伸行助教授には、本論文の審査を通じて多くの有益な御教示を頂きました。謹んで感謝致します。

東京大学工学部鈴木雄二講師には、東京大学研究生時代より、乱流研究全校にわたる様々な御教示を頂き、また常に暖かい励ましを頂きました。また、論文構成にあたって、貴重な御助言を頂きました。東京大学流体科学研究所花崎秀史助教授には、論文構成にあたって貴重な御助言を頂きました。

東京大学工学部宮下秀三助手、古田和史助手、浜名芳晴技官には、研究室のことや、計算機環境の面で大変お世話になりました。研究室のスタッフの方々御尽力による素晴らしい整備されたコンピュータ環境なしでは、計算主体の本論文の完成は到底見込めないものでした。

(株)佐田豊氏、(株)日立製作所鹿園直毅氏、(株)流体コンサルタントベナリル・モクトル氏、名古屋工業大学飯田雄章助手、工学院大学佐竹信一講師、東京大学学術振興会研究員黄于寧氏には、本研究を進めるうえで、様々な貴重な御助言を頂きました。通商産業省住谷安史氏には、可視化ソフト AVS の使い方をいろいろと教えて頂きました。

(株)カルソニック佐藤一徳氏には、研究を進めるうえで幾多の貴重な御討論を頂きました。また、本論文をまとめるにあたり、絶えず暖かい激励を頂きました。

東京大学大学院水矢亨氏には、不案内な数学的な記述について幾度となく御教示を頂きました。東京大学大学院遠藤英氏、小木貴宏氏、池谷基史氏、鈴木宏明氏、寺尾忠久氏を始め研究室のメンバーの方々には、研究室運営の面でいろいろとサポートして頂きました。

本論文を閉じるにあたり、これまでになさざまな形で世話になった全ての方々に対して、心よりお礼を述べたいと思います。

Bibliography

- [1] Adam, Y. 1977 High accurate compact implicit methods and boundary conditions. *J. Comput. Phys.* **24**, 10.
- [2] 荒川 1994 数値流体工学. 東京大学出版会, 171.
- [3] ASME 1993 Statement on the control of numerical accuracy. *Trans. ASME, J. Fluids Engng.*, 340.
- [4] 畔上 1994 領域最適化問題の一解法. 日本機械学会論文集 (A 編) **60**, 1479.
- [5] 片峯, 畔上 1994 粘性流れ場領域最適化問題の解法 (力法によるアプローチ). 日本機械学会論文集 (B 編) **60**, 3859.
- [6] 片峯, 畔上 1995 粘性流れ場の領域最適化解析 (対流項を考慮した場合). 日本機械学会論文集 (B 編) **61**, 1646.
- [7] Batchelor, G. K. 1967 An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press, London, 535.
- [8] Beam, R. M. and Warming, R. F. 1976 An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form. *J. Comput. Phys.* **22**, 87.
- [9] Bechert, D. W. and Baetenwerfer 1989 The viscous flow on surfaces with longitudinal ribs. *J. Fluid Mech.* **206**, 105.
- [10] Belcher, S. E., Newley, T. M. J. and Hunt, J. C. R. 1993 The drag on an undulating surface induced by the flow of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **249**, 557.
- [11] Belcher, S. E. and Hunt, J. C. R. 1993 Turbulent shear flow over slowly moving waves. *J. Fluid Mech.* **251**, 109.
- [12] Berkovsky, B. M., Medvedev, V. F. and Krakov, M. S. 1993 *Magnetic fluids, Engineering applications*, Oxford University Press, New York, 176.
- [13] Bondsøe, M. P. and Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **71**, 197.
- [14] Bewley, T., Choi, H., Temam, R. and Moin, P. 1993 Optimal feedback control of turbulent channel flow. *Annual Research Briefs 1993*, Center for Turbulence Research, Stanford U./NASA Ames, 3.
- [15] Burns, J. C. and Parkes, T. 1967 Peristaltic motion. *J. Fluid Mech.* **29**, 731.

- [16] Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quanteoni, Q. and Zang, T. A. 1988 Spectral methods in fluid dynamics, Springer-Verlag, New York.
- [17] Carlson, H. A., Berkooz, G. and Lumley, J. L. 1995 Direct numerical simulation of flow in a channel with complex, time-dependent wall geometries: a pseudospectral method. *J. Comput. Phys.* **121**, 155.
- [18] Carlson, H. A. and Lumley, J. L. 1996 Active control in the turbulent wall layer of a minimal flow unit. *J. Fluid Mech.* **329**, 341.
- [19] Cea, J. 1981 Numerical methods of shape optimal design. *Optimization of distributed parameter structures* (Eds. E. J. Haug and J. Cea). Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands.
- [20] Choi, H., Moin, P. and Kim, J. 1992 Turbulent drag reduction: studies of feedback control and flow over riblets. Rep. TF-55. Department of Mechanical Engineering, Stanford University.
- [21] Choi, H., Temam, R., Moin, P. and Kim, J. 1993 Feedback control for unsteady flow and its application to the stochastic Burgers equation. *J. Fluid Mech.* **253**, 509.
- [22] Choi, H., Moin, P. and Kim, J. 1993 Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. *J. Fluid Mech.* **255**, 503.
- [23] Choi, H. and Moin, P. 1994 Effects of the computational time step on numerical solutions of turbulent flow. *J. Comput. Phys.* **113**, 1.
- [24] Choi, H., Moin, P. and Kim, J. 1994 Active turbulence control for drag reduction in wall-bounded flows. *J. Fluid Mech.* **262**, 75.
- [25] Chong, M. S., Perry, A. E. and Cantwell, B. J. 1990 A general classification of three-dimensional flow field. *Phys. Fluids A* **2**, 765.
- [26] Chorin, A. J. 1969 On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations. *Math. Comput.* **23**, 341.
- [27] Chow, J. C. F. and Soda, K. 1972 Laminar flow in tubes with constriction. *Phys. Fluids* **15**, 1700.
- [28] Chow, J. C. F. and Soda, K. 1973 Laminar flow and blood oxygenation in channels with boundary irregularities. *Trans. ASME, J. Fluids Engng.*, 843.
- [29] Chu, D. C. and Karniadakis, G. E. 1993 A direct numerical simulation of laminar and turbulent flow over riblet-mounted surfaces. *J. Fluid Mech.* **250**, 1.
- [30] Compton, D. A. and Johnston, J. P. 1992 Streamwise vortex production by pitched and skewed jets in a turbulent boundary layer. *AIAA J.* **30**, 640.
- [31] De Angeles, V. and Banerjee, S. 1996 *Phys. Fluids*, submitted.
- [32] Duin, C. A. and Janssen, P. A. E. M. 1992 An analytic model of the generation of surface gravity waves by turbulent air flow. *J. Fluid Mech.* **236**, 197.

- [33] Dukowicz, J. K. and Dvinsky, A. S. 1992 Approximate factorization as a high order splitting for the implicit incompressible flow equations. *J. Comput. Phys.* **102**, 336.
- [34] Duraiswami, R. and Prosperetti, A. 1992 Orthogonal Mapping in two dimensions. *J. Comput. Phys.* **98**, 254.
- [35] Eriksson, L. E. 1982 Generation of boundary-conforming grids around wing-body configurations using transfinite interpolation. *AIAA J.* **20**, 1313.
- [36] Estorff, O. 1992 Coupling of BEM and FEM in the time domain: some remarks on its applicability and efficiency. *Comput. Struct.* **44**, 325.
- [37] Farrashkhalvat, M. and Miles, J. P. 1990 *Tensor Methods for Engineers*. Ellis Horwood, New York.
- [38] Fujita, H. and Kato, T. 1964 On the Navier-Stokes initial value problem. I. *Arch. Rational Mech. Anal.* **16**, 269.
- [39] Gaster, M., Grosch, C. E. and Jackson, T. L. 1994 The velocity field created by a shallow bump in a boundary layer. *Phys. Fluids* **6**, 3079.
- [40] Gavrilakis, S. 1992 Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct. *J. Fluid Mech.* **244**, 101.
- [41] Gad-el-Hak, M. and Bushnell, D. M. 1991 Separation control: review *J. Fluid Engng., Trans. ASME* **113**, 5.
- [42] Ghaddar, N. K., Korczak, K. Z., Mikik, B. B. and Patera, A. T. 1986 Numerical investigation of incompressible flow in grooved channels. Part 1. Stability and self-sustained oscillations. *J. Fluid Mech.* **163**, 99.
- [43] Goldstein, D., Handler, R. and Sirovich, L. 1995 Direct numerical simulation of turbulent flow over a modelled riblet covered surface. *J. Fluid Mech.* **302**, 333.
- [44] Guzmán, A. M. and Amon, C. H. 1994 Transition to chaos in converging-diverging channel flows: Ruelle-Takens-Newhouse scenario. *Phys. Fluids* **6**, 1994.
- [45] Hadamard, J. 1968 Mémoire sur un problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrees, Mémoires des savants étrangers, Oeuvres de J. Hadamard, CNRS, Paris.
- [46] Handler, R. A., Levich, E. and Sirovich, L. 1993 Drag reduction in turbulent channel flow by phase randomization. *Phys. Fluids A* **5**, 686.
- [47] Hansbo, P. 1992 The characteristic streamline diffusion method for the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **99**, 171.
- [48] Harris, J. A. and Street, R. L. 1994 Numerical simulation of turbulent flow over a moving wavy boundary: Norris and Reynolds extended. *Phys. Fluids A* **6**, 924.
- [49] Heno, C. and Stace, J. 1995 Experimental investigation of a salt water turbulent boundary layer modified by an applied streamwise magnetohydrodynamic body force. *Phys. Fluids* **7**, 1371.

- [50] Hinze, J. O. 1975 *Turbulence*, 2nd edn. McGraw-Hill, New York.
- [51] Hirsh, R. S. 1977 High order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique. *J. Comput. Phys.* **19**, 90.
- [52] Ho, C. M. and Tai, Y. C. 1996 Review: MEMS and its application for flow control. *J. Fluids Engng., Trans. ASME* **118**, 437.
- [53] Hsu, K. and Lee, S. L. 1991 A numerical technique for two-dimensional grid generation with grid control at all of the boundaries. *J. Comput. Phys.* **96**, 451.
- [54] Hunt, J. C. R., Wray, A. A. and Moin, P. 1988 Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows. *Center for Turbulence Research Report CTR-S88*, 193.
- [55] Izumi, H., Kawata, Y., Taniguchi, N. and Kobayashi, T. 1993 A numerical investigation of the unsteady fluid force induced in the annular diffuser by the oscillating inner cylinder. *J. Wind Engng. Indust. Aerodyn.* **46 & 47**, 577.
- [56] Jacobson, S. A. and Reynolds, W. C. 1995 An experimental investigation towards the active control of turbulent boundary layers. *Rep. TF-64*. Department of Mechanical Engineering, Stanford University.
- [57] Jeng, Y. N. and Liou, Y. C. 1992 Two modified versions of Hsu-Lee's elliptic solver of grid generation. *Numer. Heat Transfer B* **22**, 125.
- [58] Jeong, J. and Hussain, F. 1995 On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.* **285**, 69.
- [59] Jiménez, J. and Moin, P. 1991 Minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* **225**, 213.
- [60] Jung, W. J., Mangiavacchi, N. and Akhavan, R. 1992 Suppression of turbulence in wall-bounded flows by high-frequency spanwise oscillations. *Phys. Fluids A* **4**, 1605.
- [61] 梶島 1994 対流項の差分形式とその保存性. 日本機械学会論文集 (B 編) **60**, 2058.
- [62] Kane, R. S. 1990 Drag reduction by particle addition. *Viscous drag reduction in boundary layers*. Edited by Bushnell, D. M. and Hefner, J. N. AIAA, 433.
- [63] Karniadakis, G. E. 1990 Spectral element-Fourier methods for incompressible turbulent flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* **80**, 367.
- [64] Karniadakis, G. E., Israeli, M. and Orszag, S. A. 1991 High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* **97**, 414. **80**, 367.
- [65] 笠木 1992 乱流現象の制御: その展望. 乱流の制御とその応用, 日本機械学会 920-75.
- [66] Kasagi, N., Sumitani, Y., Suzuki, Y. and Iida, O. 1995 Kinematics of the quasi-coherent vortical structure in near-wall turbulence. *Int. J. Heat and Fluid Flow* **16**, 2.
- [67] Kato, M. and Launder, B. E. 1993 The modelling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders. Ninth symposium on turbulent shear flows, Kyoto, Japan, 10-4.

- [68] Kim, J. and Moin, P. 1985 Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* **59**, 308.
- [69] Kim, J., Moin, P. and Moser, R. 1987 Treatment of incompressibility and boundary Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **177**, 133.
- [70] Kleiser, L. and Schumann, U. 1980 Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-D numerical spectral simulations of plane channel flows. Notes on numerical fluid mechanics, edited by Hirschel, E. H., Vieweg, Braunschweig, 165.
- [71] Komori, S., Nagaosa, R., Murakami, Y., Chiba, S., Ishii, K. and Kuwahara, K. 1993 Direct numerical simulation of three-dimensional open-channel flow with zero-shear gas-liquid interface. *Phys. Fluids A* **5**, 115.
- [72] Kreprin, H. and Eckelmann, H. 1979 Behavior of the three fluctuating velocity components in the wall region of a turbulent channel flow. *Phys. Fluids* **22**, 1233.
- [73] Krettenauer, K. and Schumann, U. 1992 Numerical simulation of turbulent convection over wavy terrain. *J. Fluid Mech.* **237**, 261.
- [74] Laadhari, F., Skandaji, L. and Morel, R. 1994 Turbulence reduction in a boundary layer by a local spanwise oscillating surface. *Phys. Fluids* **6**, 3218.
- [75] Ladyzhenskaya, O. A. 1961 Mathematical Problems in the Dynamics of a Viscous Incompressible Flow. Fizmatgiz, Moscow; 日本語訳, 藤田, 竹下 1989 産業図書.
- [76] Launder, B. E. and Spalding, D. B. 1974 The numerical computation of turbulent flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **3**, 269.
- [77] Launder, B. E. and Sharma, B. I. 1974 Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of a flow near a spinning disk. *Lett. Heat Mass Transfer* **1**, 131.
- [78] Le, H. L. and Moin, P. 1991 An improvement of fractional step methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* **92**, 369.
- [79] Lele, S. K. 1992 Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.* **103**, 16.
- [80] Lucey, A. D. and Carpenter, P. W. 1995 Boundary layer instability over compliant walls: comparison between theory and experiment. *Phys. Fluids* **7**, 2355.
- [81] Lynn, T. B., Bechert, D. W. and Gerich, D. A. 1995 Direct drag measurements in a turbulent flat-plate boundary layer with turbulence manipulators. *Experiments Fluids* **19**, 405.
- [82] Madabhushi, R. K., Balachandar, S. and Vanka S. P. 1993 A divergence-free Chebyshev collocation procedure for incompressible flows with two non-periodic directions. *J. Comput. Phys.* **105**, 199.
- [83] Mansour, N. N., Kim, J. and Moin, P. 1988 Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **194**, 15.

- [84] 三戸, 笠木 1994 BFC を用いた波状チャネル層流の数値シミュレーション. 第 8 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 293.
- [85] 三戸, 笠木 1996a フレキシブル・チャネル流の数値シミュレーション. 第 73 期通常総会講演会講演論文集, 349.
- [86] 三戸, 笠木 1996b 壁面変形による渦対と熱伝達のアクティブ制御. 第 33 回日本伝熱シンポジウム講演論文集, 393.
- [87] 三戸, 笠木 1996c フレキシブル・チャネル乱流の直接数値シミュレーション. 第 10 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 188.
- [88] 三戸, 笠木 1997 チャネル乱流に対する壁面の正弦振動変形の影響. 第 34 回日本伝熱シンポジウム講演論文集, 59.
- [89] 三戸, 古田, 笠木 1997 振動変形する 2 次元チャネル内の乱流準秩序構造. 第 29 回乱流シンポジウム講演論文集.
- [90] Mito, Y. and Kasagi, N. 1997 Turbulence modification with streamwise-uniform sinusoidal wall-deformation. *Proc. 11th Symp. on Turbulent Shear Flows*. Grenoble, France. September 8-10.
- [91] 三浦, 木田 1996 一様乱流における渦芯の同定. 第 10 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 146.
- [92] 森西 1996 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性. 日本機学会論文集 (B 編) **62**, 4090.
- [93] 村井, 松本 1994 移流項に CIP 法を用いた気泡流の 3 次元数値解析. 第 8 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 587.
- [94] Neves, J. C., Moin, P. and Moser, R. D. 1994 Effects of convex transverse curvature on wall-bounded turbulence. Part 1. The velocity and vorticity. *J. Fluid Mech.* **272**, 349.
- [95] Nishimura, T., Ohori, Y. and Kawamura, Y. 1984 Flow characteristics in a channel with symmetric wavy wall for steady flow. *J. Chem. Engng. Japan* **17**, 466.
- [96] Nomura, T. and Hughes, T. J. R. 1992 An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **95**, 115.
- [97] Norris, H. L. and Reynolds, W. C. 1975 Turbulent channel flow with a moving wavy boundary. Rep. TF-7. Department of Mechanical Engineering, Stanford University.
- [98] 岡島, 小垣, 易 1994 LES による静止及び振動角柱周りの流れの解析. 第 8 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 237.
- [99] 小国 (編) 1993 行列計算ソフトウェア. 丸善, 194.
- [100] Olson, L. and Vandini, T. 1989 Eigenproblems from finite element analysis of fluid-structure interactions. *Comput. Struct.* **33**, 679.
- [101] Orlandi, P. 1990 Vortex dipole rebound from a wall. *Phys. Fluids A* **2**, 1429.

- [102] Orszag, S. A. 1980 Spectral methods for problems in complex geometries. *J. Comput. Phys.* **37**, 70.
- [103] Patankar, S. V. 1980 Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere, Washington.
- [104] Peyret, R. and Taylor, T. D. 1983 Computational methods for fluid flow. Springer-Verlag, New York.
- [105] Patera, A. T. 1984 A spectral element method for fluid dynamics; laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.* **54**, 468.
- [106] Piliotis, S. and Beris, A. N. 1992 Pseudospectral calculations of viscoelastic flow in a periodically constricted tube. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **98**, 307.
- [107] Pironneau, O. 1973 On optimum profiles in Stokes flow. *J. Fluid Mech.* **59**, 117.
- [108] Pironneau, O. 1974 On optimum design in fluid mechanics. *J. Fluid Mech.* **64**, 97.
- [109] Pironneau, O. 1984 *Optimal shape design for elliptic systems*. Springer-Verlag, New York.
- [110] Rai, M. M. and Moin, P. 1991 Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes. *J. Comput. Phys.* **96**, 15.
- [111] Rai, M. M. and Moin, P. 1993 Direct numerical simulation of transition and turbulence in a spatially evolving boundary layer. *J. Comput. Phys.* **109**, 169.
- [112] Ralph, M. E. and Pedley, T. J. 1988 Flow in a channel with a moving indentation. *J. Fluid Mech.* **190**, 87.
- [113] Robinson, S. K. 1991 The kinematics of turbulent boundary layer structure. NASA TM-103859.
- [114] Rosenfeld, M., Kwak, D. and Vinokur, M. 1991 A fractional step solution method for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations in generalized coordinate systems. *J. Comput. Phys.* **94**, 102.
- [115] Rosenfeld, M. and Kwak, D. 1991 Time-dependent solutions of viscous incompressible flows in moving co-ordinates. *Int. J. Numer. Methods Fluids* **13**, 1311.
- [116] Ryskin, G. and Leal, L. G. 1983 Orthogonal Mapping. *J. Comput Phys.* **50**, 71.
- [117] Saddoughi, S. G. 1995 Preliminary results of the "on-demand" vortex-generator experiments 1995 *Annual Research Briefs 1995*, Center for Turbulence Research, Stanford U./NASA Ames, 227.
- [118] 佐竹 1995 東京大学博士論文.
- [119] Schulkens, R. M. S. M. 1992 Interactions of an elastic solid with a viscous fluid: eigenmode analysis. *J. Comput Phys.* **100**, 270.
- [120] Sethian, J. A., Brunet, J. P., Greenberg, A. and Mesirov, J. P. 1992 Two-dimensional, viscous, incompressible flow in complex geometries on a massively parallel processor. *J. Comput. Phys.* **101**, 185.

- [121] 清水 1994 最適制御の理論と計算法. コロナ社, 294.
- [122] Singh, R. K., Kant, T. and Kakodkar, A. 1991 Coupled shell-fluid interaction problems with degenerate shell and three-dimensional fluid elements. *Comput. Struct.* **38**, 515.
- [123] Smith, F. T. 1974 Boundary layer flow near a discontinuity in wall conditions. *J. Inst. Maths Applics* **13**, 127.
- [124] Smith, F. T. 1976 Flow through constricted or dilated pipes and channels: Part 1. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **29**, 343.
- [125] Smith, F. T., Brighton, P. W. M., Jackson, P. S. and Hunt, J. C. R. 1981 On boundary-layer flow past two-dimensional obstacles. *J. Fluid Mech.* **113**, 123.
- [126] Sobey, I. J. 1980 On flow through furrowed channels. Part1. Calculated flow patterns. *J. Fluid Mech.* **96**, 1.
- [127] Sokolowski, J. and Zolésio, J. P. 1991 *Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis*. Springer-Verlag, New York.
- [128] Spalart, P. R. and Leonard, A. 1985 Direct numerical simulation of equilibrium turbulent boundary layers. *Proc. 5th Symp. on Turbulent Shear Flows*. Ithaca, NY, August 7-9, 1985 (bound volume, 234).
- [129] Spalart, P. R., Moser, R. D. and Rogers, M. M. 1991 Spectral methods for the Navier-Stokes equations with one infinite and two periodic directions. *J. Comput. Phys.* **96**, 297.
- [130] Steger, J. L. and Sorenson, R. L. 1979 Automatic mesh-point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equations. *J. Comput. Phys.* **33**, 405.
- [131] Suzuki, Y. and Kasagi, N. 1994 Turbulent drag reduction mechanism above a riblet surface, *AIAA J.* **32**, 1787.
- [132] 鈴木・河村 1994 乱流の直接数値シミュレーションにおける差分式の整合性. 日本機械学会論文集 (B 編) **60**, 3280.
- [133] Takabatake, S. and Ayukawa, K. 1982 Numerical study of two-dimensional peristaltic flows. *J. Fluid Mech.* **122**, 439.
- [134] Takabatake, S., Ayukawa, K. and Mori, A. 1988 Peristaltic pumping in circular cylindrical tubes: a numerical study of fluid transport and its efficiency. *J. Fluid Mech.* **193**, 267.
- [135] 高木, 松本 1993 反変速度による 3 次元自由表面流れの数値解析手法 (液体中を上昇する気泡の場合). 第 7 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 641.
- [136] Témam, R. 1969 Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (I). *Arch. Rational Mech. Anal.* **32**, 135.
- [137] Témam, R. 1969 Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (II). *Arch. Rational Mech. Anal.* **33**, 377.

- [138] Témam, R. 1984 Navier-Stokes equations, 3rd edn. North-Holland, New York.
- [139] Tezduyar, T. E., Behr, M. and Liou, J. 1992 A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces-The deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **94**, 339.
- [140] Tezduyar, T. E., Behr, M., Mittal, S. and Liou, J. 1992 A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces-The deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **94**, 353.
- [141] Thomas, P. D. and Lombard, C. K. 1979 Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids. *AIAA J.* **17**, 1030.
- [142] Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastin, C. W. 1985 Numerical grid generation. Elsevier Science, New York.
- [143] Tsangaris, S. and Leiter, E. 1984 On laminar steady flow in sinusoidal channels. *J. Engng. Math.* **18**, 89.
- [144] Tuckerman, L. S. 1989 Divergence-free velocity fields in nonperiodic geometries. *J. Comput. Phys.* **80**, 403.
- [145] Tworzydło, W. W., Huang, C. Y. and Oden, J. T. 1992 Adaptive implicit/explicit finite element methods for axisymmetric viscous turbulent flows with moving boundaries. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **97**, 245.
- [146] Venkat, N. K. and Spalding, M. 1991 A numerical model to predict the nonlinear response of external flow over vibrating bodies (planar flow). *Trans. ASME, J. Fluids Engng.* **113**, 544.
- [147] Vinokur, M. 1983 On one-dimensional stretching functions for finite-difference calculations. *J. Comput. Phys.* **50**, 235.
- [148] Webb, R. L. 1987 Enhancement of single-phase heat transfer. *Handbook of single-phase convective heat transfer* Edited by Kakac, S., Shah, R. and Aung, W. John Wiley & Sons, New York, 17-1.
- [149] 矢部 1992a 面倒臭がり屋の数値流体入門. 日本物理学会誌 **47**, 18.
- [150] 矢部 1992b 固体から気体までを連続的に解く数値手法. 第6回数値流体力学シンポジウム講演文集, 139.
- [151] Yabe, T., Mochizuki, T. and Hara, H. 1992 Multi-dimensional hydrodynamic simulation of laser-induced evaporation dynamics. *Proc. of Laser Advanced Materials Processing*, 387 (1992c).
- [152] Yan, B., Ingham, D. B. and Morton, B. R. 1993 Streaming flow induced by an oscillating cascade of circular cylinders. *J. Fluid Mech.* **252**, 147.
- [153] 保原, 大宮司 (編) 1992 数値流体力学. 東京大学出版会, 172.

- [154] Zang, Y., Street, R. L. and Koseff, J. R. 1994 A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates. *J. Comput. Phys.* **114**, 18.

Appendix A

離散化方程式の数値解法

A.1 概論

本研究で用いる数値手法は、速度場の解法は非線形、圧力場の解法は線形ではあるが Neumann 境界条件の Poisson 方程式となり、いずれも数値負担の非常に重い計算となっている。

(2.44) 式に示される速度場 q^* の非線形解法には、ニュートン法を用いる。ニュートン法は、勾配法の1種で、収束計算に対し目的関数の勾配を用いる手法である (清水 1994)。このため、2次の収束性を持ち、非線形解法の中でも収束の早い1手法である。他の非線形解法としては SOR (successive overrelaxation) 法があるが、これは1次の収束性しか持たず、収束点付近における収束速度が非常に悪くなるという欠点を持つ。なお、ニュートン法においては、その勾配計算の負担が重く、このためこの勾配計算を単純化した準ニュートン法や、同じ勾配法の一種であり、計算負担も軽い共役勾配法の適用も考えることができる (清水 1994)。本計算では、ニュートン法にさらに近似因数分解法 (approximate factorization technique) を用いることによって、計算を高速化している (Choi, Moin & Kim 1992)。近似因数分解は、ADI 法 (alternating direction implicit method) と呼ばれ、点緩和のニュートン法を計算領域一括の線緩和に用いる手法であり、これにより計算領域中の誤差伝播を早め、収束を早めることができる。

計算圧力場 p^{n+1} は、ノイマン境界条件 (2.48) のポアソン方程式 (2.47) を構成する。壁面変形に2次元性を仮定する本計算対象においては、(2.47) 式は、変形一定方向を離散フーリエ変換 (Canuto, Hussaini, Quarteroni & Zang 1988) し FFT (高速フーリエ変換) を用いて解き、それに直交する変形断面内を ILUCGS 法 (不完全 LU 分解共役勾配自乗法, 小国 1993) を用いて解く。ILUCGS 法は勾配法の一種、さらには前処理つき共役勾配法の一種で、ニュートン法と並び早い収束を期待できる解法である。一回あたりの計算量も小さく、特に線形系に対しては、 n 次元問題に対し n 回の iteration 以内で収束解を得ることができるという解法である。ここで、 n は解・変数の個数を表す。特に、本手法には不完全 LU 分解という前処理が含まれるが、これを適切に行っておけば、一般に n 回より遙かに少ない繰り返し回数で収束解を得ることができる。本計算対象のような壁面一定方向が含まれるケースについては、FFT を用いることによる計算の高速化が可能になるが、壁面が3次元的に変形するようなさらに一般的な3次元のケースにおいては、このような処置が行えなくなる。ILUCGS 法単独でのこの系の3次元計算には膨大な時間が掛かるため、この場合には、他の手法、例えばマルチグリッド法 (荒川 1994) 等による解法の高速化が必要となる。

A.2 速度場の数値解法

A.2.1 ニュートン法

修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法 (2.44) ~ (2.46) 式における中間速度場 q^* は, (2.44) 式より求められる. 本研究では, (2.44) 式の解法に, ニュートン法と近似因数分解を用いている (Choi, Moin & Kim 1992). ここでは, そのうちのニュートン法の解説を行う.

(2.44) 式より,

$$\begin{aligned} q^{*i} + \frac{1}{2}\Delta t \left(T^{n+1}(q^*) + N^{n+1}(q^*) - L^{n+1}(q^*) \right) \\ = q^{in} - \Delta t \left\{ \frac{1}{2} \left(T^{in}(q^n) + N^{in}(q^n) - L^{in}(q^n) \right) - G^{in}(\phi^n) \right\} \\ \equiv R^{in}, \end{aligned} \quad (A.1)$$

ここで, R^{in} は, 中間速度場 q^{*i} 計算時の (2.44) 式中の既知の項を表す. また, 式変数の肩に付いている $n, n+1$ は, 座標基底参照時刻 τ^n, τ^{n+1} を表す. このとき, 次の関数 $F^i(q^*)$ を定義する.

$$F^i(q^*) = q^{*i} + \frac{1}{2}\Delta t \left(T^{n+1}(q^*) + N^{n+1}(q^*) - L^{n+1}(q^*) \right) - R^{in}. \quad (A.2)$$

中間速度場 q^{*i} は,

$$F^i(q^*) = 0, \quad (A.3)$$

より求められる. (A.3) 式に対しニュートン法を適用すると,

$$\left\{ \frac{\partial F^i(q^*)}{\partial q^{*j}} \right\}^r \delta q^{*jr+1} = -F^i(q^{*r}). \quad (A.4)$$

ここで,

$$\frac{\partial F^i(q^*)}{\partial q^{*j}} = \delta_{ij} + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial}{\partial q^{*j}} \left(T^{n+1}(q^*) + N^{n+1}(q^*) - L^{n+1}(q^*) \right), \quad (A.5)$$

$$\delta q^{*jr+1} = q^{*jr+1} - q^{*jr}, \quad (A.6)$$

$$F^i(q^{*r}) = q^{*ir} + \frac{1}{2}\Delta t \left(T^{n+1}(q^{*r}) + N^{n+1}(q^{*r}) - L^{n+1}(q^{*r}) \right) - R^{in}. \quad (A.7)$$

なお, r はニュートン法の繰り返しインデックスを表す.

ニュートン法のみによって, 中間速度場 q^{*i} を求める場合には, (A.5) 式の逆行列を求めればよいことになる. この場合解法は点線になるため, 数値誤差の伝播が遅れ, 収束が遅くなるという欠点がある. よって, 本研究では, (A.4) 式に対し, 領域一括に線線化を行う近似因数分解法 (Beam & Warming 1976) を用いる (Choi, Moin & Kim 1992). このことにより, 誤差伝播を早めることができ, よって計算収束も早くなる. 次節において, 近似因数分解法のニュートン法への適用方法を示す.

A.2.2 近似因数分解法

ニュートン法 (A.4) ~ (A.7) は次式で表される.

$$\left\{ \delta_{ij} + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial}{\partial q^{*j}} \left(T^{n+1}(q^*) + N^{n+1}(q^*) - L^{n+1}(q^*) \right) \right\}^r \delta q^{*jr+1} = -F^i(q^{*r}). \quad (A.8)$$

{ } は, 通常のニュートン法では係数マトリクスとして扱われるが, 近似因数分解法を用いる場合にはこれを δq^{*jr+1} に掛かるオペレータとみなす. すなわち, { } 内の微分の結果出てきた計算空間微分オ

ベレタ ($\partial/\partial\eta^i$) に δq^{*r+1} を作用させることによって、解法における計算空間内格子点間の連結をとる。このような数値的な操作も、結果として $\delta q^{*r+1} = 0$ 、すなわち、 q^j の修正量が 0 となった場合に、 $F(q^*) = 0$ となることによって補償される。また、この操作により、運動方程式 1 成分のみによってボリューム・フラックス (速度) 1 成分を計算することができ、計算負担を軽減することにもなる。なお、計算空間微分オペレータ ($\partial/\partial\eta^i$) の表れない項 (格子変形に伴う非定常項内)、および一項内に 2 方向の空間微分オペレータの共存する項 (粘性項クロス微分項) については、近似因数分解化の対象より外すこととする。近似因数分解法適用の問題点は、(A.8) 式中の $\{ \}$ を微分オペレータとみなすことに伴い、ボリューム・フラックス各成分の収束計算を 1 成分の運動方程式のみによって行っている点と、この移項操作の妥当性、すなわち、線形近似因数分解法化によって得た勾配が収束解の方向と一致しているかという点にある。よって、ニュートン法に対する近似因数分解の適用が効果的となるのは、これらの操作の悪影響の小さい場合に限られることになるが、一般的には、点緩和のニュートン法よりも、先に示した長所を持つ近似因数分解法化したニュートン法の方がよりロバストな解法となる。

(A.8) 式の近似因数分解化にあたり、次の 2 つの関数 M_{ij}, Q_{ij} を定義する。

$$(M_{ij})^r \delta q^{*r+1} = \left\{ \frac{\partial}{\partial q^{*j}} \left(T_1^{*r+1}(q^*) + N^{*r+1}(q^*) - L_1^{*r+1}(q^*) \right) \right\}^r \delta q^{*r+1}, \quad (A.9)$$

$$(Q_{ij})^r \delta q^{*r+1} = \left\{ \frac{\partial}{\partial q^{*j}} \left(T_2^{*r+1}(q^*) - L_2^{*r+1}(q^*) \right) \right\}^r \delta q^{*r+1}. \quad (A.10)$$

(A.9), (A.10) 式は、(A.8) 式右辺の一部であり、先に述べたように、 δq^{*r+1} は、 $\{ \}$ 内の微分対象として捕らえられている。ここで、 $T_1^{*r+1}(q^*)$, $T_2^{*r+1}(q^*)$ ($T_1^{*r+1}(q^*) + T_2^{*r+1}(q^*) = T^{*r+1}(q^*)$), $L_1^{*r+1}(q^*)$, $L_2^{*r+1}(q^*)$ ($L_1^{*r+1}(q^*) + L_2^{*r+1}(q^*) = L^{*r+1}(q^*)$) は先に述べた分類に基づく項であり、それぞれ、空間微分を含む項、含まない項、クロス微分を含まない項、含む項を表す。

本研究では、壁面変形に 2 次元性を仮定する。この場合には、(2.16) ~ (2.23) 式を用いて、(A.9), (A.10) 式的具体形は次のように表される。

$i=1$ のとき、

$$\begin{aligned} (M_{11})^r \delta q^{*r+1} &= -v_g^j \frac{\partial}{\partial \eta^j} \delta q^{*r+1} + 2 \frac{\partial}{\partial \eta^1} q^{*r} \delta q^{*r+1} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta^j} q^{*r} \delta q^{*r+1} \\ &\quad - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial \eta^1} \frac{\partial}{\partial \eta^1} \delta q^{*r+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial \alpha^{kl}}{\partial \eta^k} \frac{\partial}{\partial \eta^l} \delta q^{*r+1} + \alpha^{km} \frac{\partial}{\partial \eta^k} \frac{\partial}{\partial \eta^m} \delta q^{*r+1} \right\} \right), \quad (k=m) \end{aligned} \quad (A.11)$$

$$(Q_{11})^r \delta q^{*r+1} = -\frac{1}{Re} \frac{1}{J} \alpha^{km} \frac{\partial}{\partial \eta^k} \frac{\partial}{\partial \eta^m} \delta q^{*r+1}, \quad (k \neq m) \quad (A.12)$$

$$(M_{1j})^r \delta q^{*r+1} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta^j} q^{*r} \delta q^{*r+1}, \quad (A.13)$$

$$(Q_{1j})^r \delta q^{*r+1} = 0, \quad (A.14)$$

$i=2, 3$ のとき、

$$(M_{i1})^r \delta q^{*r+1} = \frac{\partial}{\partial \eta^1} q^{*r} \delta q^{*r+1}, \quad (A.15)$$

$$(Q_{i1})^r \delta q^{*r+1} = 0, \quad (A.16)$$

$$\begin{aligned} (M_{ij})^r \delta q^{*r+1} &= v_g^m \frac{\partial}{\partial \eta^m} \delta q^{*r+1} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \eta^1} q^{*r} \delta q^{*r+1} + \frac{1}{J} \gamma_m^i \frac{\partial}{\partial \eta^j} \frac{1}{J} c_j^m q^{*r} \delta q^{*r+1} + \frac{1}{J} \gamma_m^i \frac{\partial}{\partial \eta^k} \frac{1}{J} c_j^m q^{*r} \delta q^{*r+1} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial \eta^1} \frac{\partial}{\partial \eta^1} \delta q^{*r+1} + \frac{1}{J} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \alpha^{ki}}{\partial \eta^k} \frac{\partial}{\partial \eta^i} \frac{1}{J} c_j^m \delta q^{*r+1} + \alpha^{kn} \frac{\partial}{\partial \eta^k} \frac{\partial}{\partial \eta^n} \frac{1}{J} c_j^m \delta q^{*r+1} \right\} \right), \quad (k=n) \quad (A.17)$$

$$(Q_{ij})^r \delta q^{*r+1} = \frac{1}{J} v_g^m c_j^k \frac{\partial}{\partial \eta^m} \eta^i \delta q^{*r+1} - \frac{1}{J} c_j^k \frac{\partial \eta^i}{\partial \tau} \delta q^{*r+1} - \frac{1}{Re} \frac{1}{J} \sum_{i=1}^n \alpha^{kn} \frac{\partial}{\partial \eta^k} \frac{\partial}{\partial \eta^n} \frac{1}{J} c_j^m \delta q^{*r+1}, \quad (k \neq n) \quad (A.18)$$

ここで, $i, j, k, l, m, n = 2, 3$. (A.11) ~ (A.18) 式を用いて, (A.8) 式は次のように表される.

$$\left\{ \delta_{ij} + \frac{1}{2} \Delta t (M_{ij}^1 + M_{ij}^2 + M_{ij}^3) + \frac{1}{2} \Delta t Q_{ij} \right\}^r \delta q^{*r+1} = -F^i(q^*). \quad (A.19)$$

ここで, $M_{ij} (= M_{ij}^1 + M_{ij}^2 + M_{ij}^3)$ は, η^1, η^2, η^3 の各微分方向に対して, それぞれ, $M_{ij}^1, M_{ij}^2, M_{ij}^3$ に分けられている ($i, j = 1, 2, 3$).

近似因数分解法は, (A.19) 式左辺のように各座標方向に因数分解し, 座標数存在する三重対角行列 (2次精度の場合) を反転することにより, ニュートン法 ($r+1$) 回目修正量 δq^{*r+1} を得る手法である (α については総和を取らない).

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2} \Delta t M_{\alpha\alpha}^1 \right)^r \left(1 + \frac{1}{2} \Delta t M_{\alpha\alpha}^2 \right)^r \left(1 + \frac{1}{2} \Delta t M_{\alpha\alpha}^3 \right)^r \delta q^{*r+1} \\ &= -F^{\alpha}(q^*) - \frac{1}{2} \Delta t \kappa \sum_{i=1}^3 (M_{\alpha j}^i)^r \delta q^{*i\#} - \frac{1}{2} \Delta t (Q_{\alpha j})^r \delta q^{*i\#}. \end{aligned} \quad (A.20)$$

ここで κ は, $j \neq \alpha$ のとき $\kappa = 1$, $j = \alpha$ のとき $\kappa = 0$ となる変数である. また $\delta q^{*i\#}$ は, δq^{*i} の計算上の最新値を表す. この数値的処置は, 計算収束時に (A.19) 式左辺が十分小さくなる (≈ 0) ことによって補償される. これらの操作により, ニュートン法を各座標軸方向に連結をとって解くことが可能となる (2次元では2方向, 3次元では3方向). 近似因数分解をニュートン法に適用した場合の4段階フラクショナル・ステップ法のアルゴリズムは次のように表される (Choi, Moin & Kim 1992).

($n+1$) 時刻の速度場 q^{n+1} を求めるにあたり,

1. 初期速度場 q^0 あるいは前時刻の速度場 q^r より計算開始.
2. 中間速度場 q^{*n+1} の壁面上境界条件を更新 ($q^{*n+1} = q^{n+1}$).
3. ニュートン法 (A.20) 式により中間速度場 q^{*n+1} を計算.

(a) ニュートン法初期値 (中間速度場とその修正幅) を, $q^{*r} = q^{*n}$, $\delta q^{*r} = \delta q^{*n}$ と与える. なお, 計算開始時には, $q^{*r} = q^0$, $\delta q^{*r} = 0$ と与える.

(b) (A.20) 式の $\alpha = 1$ の場合を計算. このとき, $\delta q^{*2\#} = \delta q^{*2r}$, $\delta q^{*3\#} = \delta q^{*3r}$ とする.

(c) (A.20) 式の $\alpha = 2$ の場合を計算. このとき, $\delta q^{*1\#} = \delta q^{*1r+1}$, $\delta q^{*3\#} = \delta q^{*3r}$ とする.

(d) (A.20) 式の $\alpha = 3$ の場合を計算. このとき, $\delta q^{*1\#} = \delta q^{*1r+1}$, $\delta q^{*2\#} = \delta q^{*2r+1}$ とする.

(e) q^{*n+1} の更新.

(f) q^{*n+1} が収束するまで ($\delta q^{*r+1} \leq$ 収束判定値 となるまで), 上記4ステップの計算 ((b) to (e), $\alpha = 1, 2, 3$ & 更新) を繰り返す.

(g) 収束時, $q^{*n+1} = q^{*r+1}$ とする.

4. (2.45) 式により (第2) 中間速度場 \bar{q}^{n+1} を計算する.

5. 圧力ポアソン方程式 (2.47) を解いて ϕ^{n+1} を求める.

6. (2.46) 式を用いて q^{n+1} を更新する.

A.3 圧力場の数値解法

A.3.1 離散フーリエ展開の適用

ILUCGS 法は、楕円型線形偏微分方程式を高効率に解くことのできる手法である。しかしながら、3次元問題等の場合で多大な計算点を必要とする場合、すなわち、行列の規模が非常に大きくなる場合には、この手法単独で解を得ることは非常に困難になる。本計算では、壁面変形をチャネル方向断面内に限定することにより、壁面変形一定方向に離散フーリエ展開 (DFT) を適用している。このことにより、3次元 ILUCGS 解法を、変形断面内の2次元 ILUCGS 法と、壁面変形一定方向の高速フーリエ変換 (FFT) の解法に縮小させることが可能となる。この FFT の適用が、ILUCGS 法の低次元化にもよって、計算を大幅に高速化させることになる。この効果は、一般的に計算負荷の高くなるノイマン型境界条件の3次元ポアソン方程式解法、すなわち圧力計算において顕著に現われる。

修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法における圧力方程式、すなわち射影スカラー方程式 (2.47) は、現座標系 (第1方向に壁面変形一定、第2-第3方向断面内でチャネル断面変形) において、次のように表される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^1 \partial \eta^1} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta^1} \alpha^{ij} \frac{\partial}{\partial \eta^j} \phi = \frac{1}{\Delta \tau} \left(\frac{\partial q^1}{\partial \eta^1} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta^1} q^1 \right). \quad (i, j = 2, 3) \quad (A.21)$$

その壁面上境界条件は、(2.48) 式より、

$$\alpha^{2j} \frac{\partial \phi}{\partial \eta^j} = 0, \quad (j = 2, 3) \quad (A.22)$$

となっている。

第1方向の離散フーリエ展開 (DFT) および逆離散フーリエ展開 (IDFT) は次式で表される。

$$\tilde{\phi}_{m,j,k} = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \phi_{l,j,k} e^{-\frac{2\pi i j l m}{L}}. \quad \dots \text{DFT} \quad (A.23)$$

$$\phi_{l,j,k} = \sum_{m=-L/2}^{L/2-1} \tilde{\phi}_{m,j,k} e^{\frac{2\pi i j l m}{L}}. \quad \dots \text{IDFT} \quad (A.24)$$

(A.21) 式左辺第1項の第1方向微分は、(A.24) 式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^1 \partial \eta^1} &= \frac{\phi_{l-1,j,k} - 2\phi_{l,j,k} + \phi_{l+1,j,k}}{(\Delta \eta^1)^2} \\ &= \frac{2}{(\Delta \eta^1)^2} \sum_{m=-L/2}^{L/2-1} \tilde{\phi}_{m,j,k} \left(\cos \frac{2\pi m}{L} - 1 \right) e^{\frac{2\pi i j l m}{L}}, \end{aligned} \quad (A.25)$$

と表される。なお、ここでの圧力 ϕ は、平均勾配成分を取り除いた変動量に相当する。本微分係数については、他方向の2次精度差分と整合させるために、あらかじめ2次精度で離散化した式に対して、本逆離散フーリエ展開を施すものとする。(A.21) 式左辺は、2次精度差分により次のように表される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^1 \partial \eta^1} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta^1} \alpha^{ij} \frac{\partial}{\partial \eta^j} \phi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^1 \partial \eta^1} + \frac{1}{J} \left\{ \alpha^{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2 \partial \eta^2} + 2\alpha^{23} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2 \partial \eta^3} + \alpha^{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^3 \partial \eta^3} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial \alpha^{22}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{23}}{\partial \eta^3} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial \alpha^{23}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{33}}{\partial \eta^3} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta^3} \right\} \\
&= \sum_{m=-L/2}^{L/2-1} \left[\frac{2}{(\Delta \eta^1)^2} \left(\cos \frac{2\pi m}{L} - 1 \right) \tilde{\phi}_{m,j,k} + \frac{1}{J} \left\{ \alpha^{22} \frac{\tilde{\phi}_{l,j+1,k} - 2\tilde{\phi}_{l,j,k} + \tilde{\phi}_{l,j-1,k}}{(\Delta \eta^2)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\alpha^{23} \frac{\tilde{\phi}_{l,j-1,k-1} - \tilde{\phi}_{l,j-1,k+1} - \tilde{\phi}_{l,j+1,k-1} + \tilde{\phi}_{l,j+1,k+1}}{4\Delta \eta^2 \Delta \eta^3} + \alpha^{33} \frac{\tilde{\phi}_{l,j,k+1} - 2\tilde{\phi}_{l,j,k} + \tilde{\phi}_{l,j,k-1}}{(\Delta \eta^3)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial \alpha^{22}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{23}}{\partial \eta^3} \right) \frac{\tilde{\phi}_{l,j+1,k} - \tilde{\phi}_{l,j-1,k}}{2\Delta \eta^2} + \left(\frac{\partial \alpha^{23}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{33}}{\partial \eta^3} \right) \frac{\tilde{\phi}_{l,j,k+1} - \tilde{\phi}_{l,j,k-1}}{2\Delta \eta^3} \right\} \right] e^{\frac{2\pi i j m}{L}} \\
&= \sum_{m=-L/2}^{L/2-1} \left[\frac{\alpha^{23}}{2J\Delta \eta^2 \Delta \eta^3} \tilde{\phi}_{m,j-1,k-1} + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\alpha^{22}}{(\Delta \eta^2)^2} - \frac{1}{2\Delta \eta^2} \left(\frac{\partial \alpha^{22}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{23}}{\partial \eta^3} \right) \right\} \tilde{\phi}_{m,j-1,k} \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{\alpha^{23}}{2J\Delta \eta^2 \Delta \eta^3} \right) \tilde{\phi}_{m,j-1,k+1} + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\alpha^{33}}{(\Delta \eta^3)^2} - \frac{1}{2\Delta \eta^3} \left(\frac{\partial \alpha^{23}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{33}}{\partial \eta^3} \right) \right\} \tilde{\phi}_{m,j,k-1} \right. \\
&\quad \left. + 2 \left\{ \frac{1}{(\Delta \eta^1)^2} \left(\cos \frac{2\pi m}{L} - 1 \right) - \frac{1}{J} \left(\frac{\alpha^{22}}{(\Delta \eta^2)^2} + \frac{\alpha^{33}}{(\Delta \eta^3)^2} \right) \right\} \tilde{\phi}_{m,j,k} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\alpha^{33}}{(\Delta \eta^3)^2} + \frac{1}{2\Delta \eta^3} \left(\frac{\partial \alpha^{23}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{33}}{\partial \eta^3} \right) \right\} \tilde{\phi}_{m,j,k+1} + \left(-\frac{\alpha^{23}}{2J\Delta \eta^2 \Delta \eta^3} \right) \tilde{\phi}_{m,j+1,k-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\alpha^{22}}{(\Delta \eta^2)^2} + \frac{1}{2\Delta \eta^2} \left(\frac{\partial \alpha^{22}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{23}}{\partial \eta^3} \right) \right\} \tilde{\phi}_{m,j+1,k} + \frac{\alpha^{23}}{2J\Delta \eta^2 \Delta \eta^3} \tilde{\phi}_{m,j+1,k+1} \right] e^{\frac{2\pi i j m}{L}}. \quad (A.26)
\end{aligned}$$

同様に, (A.22) 式左辺についても, 2次精度差分により次のように表される.

$$\begin{aligned}
&\alpha^{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta^2} + \alpha^{23} \frac{\partial \phi}{\partial \eta^3} \\
&= \sum_{m=-L/2}^{L/2-1} \left\{ \alpha^{22} \frac{\tilde{\phi}_{l,j+1,k} - \tilde{\phi}_{l,j-1,k}}{2\Delta \eta^2} + \alpha^{23} \frac{\tilde{\phi}_{l,j,k+1} - \tilde{\phi}_{l,j,k-1}}{2\Delta \eta^3} \right\} e^{\frac{2\pi i j m}{L}}. \quad (A.27)
\end{aligned}$$

(A.21), (A.22) 式右辺 ($\equiv Q_{l,j,k}$) についても逆離散フーリエ展開を行う.

$$Q_{l,j,k} = \sum_{m=-L/2}^{L/2-1} \tilde{Q}_{m,j,k} e^{\frac{2\pi i j m}{L}}. \quad (A.28)$$

以上より, フーリエ係数に対する離散化式を得る.

チャネル・コア領域における離散化式は, (A.26), (A.28) 式より,

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^{23}}{2J\Delta \eta^2 \Delta \eta^3} \tilde{\phi}_{m,j-1,k-1} + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\alpha^{22}}{(\Delta \eta^2)^2} - \frac{1}{2\Delta \eta^2} \left(\frac{\partial \alpha^{22}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{23}}{\partial \eta^3} \right) \right\} \tilde{\phi}_{m,j-1,k} \\
&\quad + \left(-\frac{\alpha^{23}}{2J\Delta \eta^2 \Delta \eta^3} \right) \tilde{\phi}_{m,j-1,k+1} + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\alpha^{33}}{(\Delta \eta^3)^2} - \frac{1}{2\Delta \eta^3} \left(\frac{\partial \alpha^{23}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{33}}{\partial \eta^3} \right) \right\} \tilde{\phi}_{m,j,k-1} \\
&\quad + 2 \left\{ \frac{1}{(\Delta \eta^1)^2} \left(\cos \frac{2\pi m}{L} - 1 \right) - \frac{1}{J} \left(\frac{\alpha^{22}}{(\Delta \eta^2)^2} + \frac{\alpha^{33}}{(\Delta \eta^3)^2} \right) \right\} \tilde{\phi}_{m,j,k} \\
&\quad + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\alpha^{33}}{(\Delta \eta^3)^2} + \frac{1}{2\Delta \eta^3} \left(\frac{\partial \alpha^{23}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{33}}{\partial \eta^3} \right) \right\} \tilde{\phi}_{m,j,k+1} + \left(-\frac{\alpha^{23}}{2J\Delta \eta^2 \Delta \eta^3} \right) \tilde{\phi}_{m,j+1,k-1} \\
&\quad + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\alpha^{22}}{(\Delta \eta^2)^2} + \frac{1}{2\Delta \eta^2} \left(\frac{\partial \alpha^{22}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \alpha^{23}}{\partial \eta^3} \right) \right\} \tilde{\phi}_{m,j+1,k} + \frac{\alpha^{23}}{2J\Delta \eta^2 \Delta \eta^3} \tilde{\phi}_{m,j+1,k+1} \\
&= \tilde{Q}_{m,j,k}. \quad (A.29)
\end{aligned}$$

一方、壁面上境界条件の離散化式は、(A.27), (A.28) 式より、

$$\alpha \frac{23}{2\Delta\eta^2} \frac{\bar{\phi}_{l,j+1,k} - \bar{\phi}_{l,j-1,k}}{2\Delta\eta^2} + \alpha \frac{23}{2\Delta\eta^3} \frac{\bar{\phi}_{l,j,k+1} - \bar{\phi}_{l,j,k-1}}{2\Delta\eta^3} = \bar{Q}_{m,j,k}, \quad (\text{A.30})$$

となる ($m = -L/2 \sim L/2 - 1$)。ここで得られた (A.29), (A.30) 式を、ILUGS 法により解くことになる。

さらに、変動圧力 ϕ に関しては、第 1 方向均一を仮定することにより、その流路断面内の総和を 0 とする。すなわち、(A.24) 式より、

$$\sum_j \sum_k \phi_{l,j,k} \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 = \sum_j \sum_k \sum_{m=-L/2}^{L/2-1} \bar{\phi}_{m,j,k} e^{\frac{2\pi i j m}{L}} \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 = 0. \quad (\text{A.31})$$

ここで、 $\sum_j \sum_k$ は x 方向断面 $i = l$ 内の積分を表す。このとき、各フーリエ係数成分について次の関係が成り立つ。

$$\sum_j \sum_k \bar{\phi}_{m,j,k} \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 = 0. \quad (\text{A.32})$$

なお、(A.31), (A.32) 式の離散化において、0 次精度積分を用いている。積分スキームの精度改善により、本スキームの精度向上を図ることもできる。

本シミュレーションにおける圧力方程式の解法手順は以下のように示される。

1. (A.21), (A.22) 式右辺のフーリエ係数 $\bar{Q}_{m,j,k}$ を高速フーリエ変換 (FFT) により計算する。
2. フーリエ係数 $\bar{\phi}_{m,j,k}$ ($m = -L/2 \sim L/2 - 1$) の解法。
 - (a) 離散化式 (A.29), (A.30) を ILUGS 法により解く。
 - (b) (A.32) 式を用いてフーリエ係数間 (m 成分間) の連結をとる。
3. $\phi_{l,j,k}$ を逆高速フーリエ変換 (IFFT) により求める。

本シミュレーションにおける離散フーリエ展開、逆離散フーリエ展開には、2 セットのデータ u_j^1, u_j^2 ($j = 0, 1, \dots, N-1$) を同時に高速フーリエ変換できるアルゴリズムを用いている (Canuto, Hussaini, Quarteoni & Zang 1988)。本シミュレーションのように、変換対象となるデータが実数である場合には、本アルゴリズムにより、複素数高速フーリエ変換を用いる場合より、計算量、配列上の負担を大きく節約することができる。本アルゴリズムでは、次のような複素変数 v_j を定義する。

$$v_j = u_j^1 + iu_j^2. \quad (j = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{A.33})$$

v_j は高速フーリエ変換後、 \bar{v}_k を生成する。

$$\bar{v}_k = \bar{v}_k^1 + i\bar{v}_k^2. \quad (k = 0, 1, \dots, N/2-1, -N/2, -N/2+1, \dots, -1) \quad (\text{A.34})$$

このとき、 u_j^1, u_j^2 のフーリエ係数 \bar{v}_k^1, \bar{v}_k^2 はそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{v}_k^1 &= \frac{1}{2}(\bar{v}_k + \bar{v}_{-k}) \\ &= \frac{1}{2}\{(\bar{v}_k^1 + \bar{v}_{-k}^1) + i(\bar{v}_k^2 - \bar{v}_{-k}^2)\}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_k^2 &= -\frac{i}{2}(\bar{v}_k - \bar{v}_{-k}) \\ &= \frac{1}{2}\{(\bar{v}_k^2 + \bar{v}_{-k}^2) + i(-\bar{v}_k^1 + \bar{v}_{-k}^1)\}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$k = 0, 1, \dots, N/2 - 1, -N/2, -N/2 + 1, \dots, -1$.

$k = 0$ のとき,

$$\bar{u}_0^i = \bar{v}_0^i, \quad (i = 1, 2) \quad (\text{A.37})$$

また, (A.23) 式より,

$$\bar{v}_{k+pN}^i = \bar{v}_k^i, \quad (i = 1, 2) \quad (\text{A.38})$$

が任意の整数 ϕ について成り立つため, $k = N/2$ のとき, (A.35), (A.36) 式は,

$$\bar{u}_{-N/2}^i = \bar{v}_{-N/2}^i, \quad (i = 1, 2) \quad (\text{A.39})$$

となる。(A.35), (A.36), (A.37), (A.39) 式よりフーリエ係数を求め, 実部, 虚部, それぞれについて, ILUCGS 解法を構成する。解かれたフーリエ係数 \bar{u}_k^i ($i = 1, 2$) は, (A.35), (A.36) 式と同様, 次の関係,

$$\begin{aligned} \bar{v}_k &= \bar{u}_k^1 + i\bar{u}_k^2 \\ &= \text{Re}(\bar{u}_k^1) + i\text{Im}(\bar{u}_k^1) + i(\text{Re}(\bar{u}_k^2) + i\text{Im}(\bar{u}_k^2)) \\ &= \text{Re}(\bar{u}_k^1) - \text{Im}(\bar{u}_k^2) + i(\text{Im}(\bar{u}_k^1) + \text{Re}(\bar{u}_k^2)) \\ &\equiv \bar{v}_k^1 + i\bar{v}_k^2, \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

すなわち,

$$\bar{v}_k^1 = \text{Re}(\bar{u}_k^1) - \text{Im}(\bar{u}_k^2) \quad (\text{A.41})$$

$$\bar{v}_k^2 = \text{Im}(\bar{u}_k^1) + \text{Re}(\bar{u}_k^2) \quad (\text{A.42})$$

により本高速フーリエ変換係数 \bar{v}_k^i ($i = 1, 2$) に帰せられ, その後, この係数列に逆高速フーリエ変換を施すことにより解 (A.33) 式を得る。

A.3.2 不完全 LU 分解共役勾配自乗法

本シミュレーションでは, 修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法における圧力 (射影スカラー) 方程式 (2.47) およびその境界条件 (2.48) 式のフーリエ係数に対する 2 次元 2 次精度の離散化方程式 (A.29), (A.30) の解法に ILUCGS 法 (不完全 LU 分解自乗共役勾配法) を用いる。

フラクショナル・ステップ法圧力 ϕ のフーリエ級数 $\bar{\phi}$ に対する 2 次精度離散化方程式 (A.29) は, 次のように (j, k) 点まわりの 9 点および z 方向の周期境界を補償する 2 点を加えた計 11 点で表すことができる (図 A.1 参照)。

$$\begin{aligned} &a_1 \bar{\phi}_{j-1, k-1} + b_1 \bar{\phi}_{j-1, k} + c_1 \bar{\phi}_{j-1, k+1} + d_1 \bar{\phi}_{j, k-nzp} + e_1 \bar{\phi}_{j, k-1} + f_1 \bar{\phi}_{j, k} \\ &+ g_1 \bar{\phi}_{j, k+1} + h_1 \bar{\phi}_{j, k+nzp} + i_1 \bar{\phi}_{j+1, k-1} + j_1 \bar{\phi}_{j+1, k} + k_1 \bar{\phi}_{j+1, k+1} \\ &= \bar{Q}_{j, k}. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

ここで, $nzp (= NZ)$ は, z 方向周期境界の参照インデックス, すなわち, z 方向境界上あるいはその前後にまたぐ格子点における, 周期境界対象点となる反対側境界まで至る格子点数を表す。(A.43) 式右辺は, 中間速度場 \bar{q} より計算される既知量の逆フーリエ変換によって求められる値である。係数インデックス i は, ILUCGS 解法における行列インデックスに対応し, $i = (NZ + 2) \times j + k + 1$, ($0 \leq j \leq NY$, $0 \leq k \leq NZ + 1$, $1 \leq i \leq (NY + 1) \times (NZ + 2)$) であり, $NY + 1$, $NZ + 2$ がそれぞれ η^2 方向, η^3 方向の圧力 ϕ の計算格子点数を表す。また, (A.43) 式では, 波数インデックス m が省かれて表示されて

ILDU 分解では、この左辺の係数行列 A をできるだけ原形に近い形で LDU 分解することが望まれるが、実際には、その分解に要する計算上の負担をできるだけ軽減するという理由から、以下に示すように各行列の対角成分のみを計算し、他は全て元の係数行列の値をそのまま代入するという方法を取る。

$$A \approx LDU \equiv C. \quad (\text{A.45})$$

このときの、下三角行列 L 、対角行列 D 、上三角行列 U には、次の形を仮定する。このときの (A.45) 式によって定義される C が前処理行列に相当する。また、 \sim の付いた項は、ILDU 分解計算上の変数であることを意味する。

$$L = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 & & & & & & 0 \\ d_2 & \bar{f}_2 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a_i & b_i & c_i & d_i & e_i & \bar{f}_i \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & \bar{f}_n \end{pmatrix}, \quad (\text{A.46})$$

$$D = \begin{pmatrix} \bar{l}_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \bar{l}_i & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \bar{l}_n \end{pmatrix}, \quad (\text{A.47})$$

$$U = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 & g_1 & & h_1 & i_1 & j_1 & k_1 & & 0 \\ & \bar{f}_i & g_i & & h_i & i_i & j_i & k_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & & & \bar{f}_{n-1} & g_{n-1} & & \bar{f}_n \end{pmatrix}. \quad (\text{A.48})$$

このように ILU 分解行った場合、前処理行列 C において、 A 行列における非零 11 点以外においても非零点を生じる。しかしながら、この ILU 分解によって生じた付加的な非零点に対する考慮は、計算負荷の軽減のため本アルゴリズムでは避ける。

このとき、 A 行列の対角成分 f_i は、(A.45) ~ (A.48) 式より、次のように表される。

$$f_i = a_i \bar{l}_{i-m-1} k_{i-m-1} + b_i \bar{l}_{i-m} j_{i-m} + c_i \bar{l}_{i-m+1} i_{i-m+1} + d_i \bar{l}_{i-nzp} h_{i-nzp} + e_i \bar{l}_{i-1} g_{i-1} + \bar{f}_i^2 \bar{l}_{i-1}, \quad (\text{A.49})$$

ここで, $m = NZ + 2$ であり, これは $\bar{\phi}$ の η^3 方向格子点数, すなわち i 並びに 1 次元配列における η^2 方向の格子点に対するインデックスの飛び数を表す. (A.49) 式における対角成分 (i 成分) の優位性, すなわち, LDU 分解後の \bar{f}_i と 分解前行列 A の f_i がほぼ一致することを仮定し, 次式を導く.

$$\bar{f}_i \bar{f}_i = 1, \quad \text{or} \quad \bar{f}_i = \bar{f}_i^{-1}. \quad (\text{A.50})$$

(A.50) 式に相当する仮定を適切に行うことによって, 計算および配列の節約に加えて, CGS 法の特長としての高速な収束を見込むこともできる. (A.50) 式以外の仮定も考えられるが, 試してみた種々の手法の中では, 本方法が最も簡潔で, かつどのような離散点分布に対しても一貫して収束を得ることのできる仮定であった.

(A.49), (A.50) 式より, 対角行列成分 \bar{f}_i を求めることができる ($i = 1 \rightarrow n$ まで順次求める).

$$\bar{f}_i^{-1} = e_i - a_i \bar{f}_{i-m-1} \bar{f}_{i-m-1} - b_i \bar{f}_{i-m} \bar{f}_{i-m} - c_i \bar{f}_{i-m+1} \bar{f}_{i-m+1} - d_i \bar{f}_{i-1} \bar{f}_{i-1}. \quad (\text{A.51})$$

このとき, (A.50) 式より, L, U 行列の対角成分 \bar{f}_i についても求めることができる. 以上により, ILDU 分解の各行列を特定できる.

ILU 分解は, ILUCGS 法上では, (A.44) 式両辺に C^{-1} を掛ける箇所, すなわち前処理行列 C の反転で用いられる, LDU 行列 ($= C$ 行列) の反転は以下の要領で行う.

$$LDU \bar{\phi} = \bar{Q} \implies \begin{cases} Ly = \bar{Q}, & \text{step 1} \\ DU \bar{\phi} = y. & \text{step 2} \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

すなわち, 第1段階では, $Ly = \bar{Q}$ より y が求められる.

$$\begin{aligned} y_i &= \bar{e}_i^{-1} (r_i - a_i y_{i-m-1} - b_i y_{i-m} - c_i y_{i-m+1} - d_i y_{i-1}) \\ &= \bar{f}_i (r_i - a_i y_{i-m-1} - b_i y_{i-m} - c_i y_{i-m+1} - d_i y_{i-1}), \quad (i = 1 \rightarrow n) \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

第2段階では, $DU \bar{\phi} = y$ より $\bar{\phi}$ が求められる.

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i &= \bar{f}_i (y_i \bar{f}_i^{-1} - f_i \bar{\phi}_{i+1} - g_i \bar{\phi}_{i+m-1} - h_i \bar{\phi}_{i+m} - i_i \bar{\phi}_{i+m+1}) \\ &= y_i - \bar{f}_i (f_i \bar{\phi}_{i+1} + g_i \bar{\phi}_{i+m-1} + h_i \bar{\phi}_{i+m} + i_i \bar{\phi}_{i+m+1}), \quad (i = n \rightarrow 1) \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

次に, CGS 法等の CG 法関連の解法における前処理の必要性およびその効果について解説する. 共役勾配 (CG) 法は, A -共役 (A -直交) な探索ベクトルを空間内に逐次生成していくことにより解を得る手法である. CG 法における前処理は, 係数行列 A に近い前処理行列 C の逆行列 C^{-1} を元の方程式 $Ax = b$ に作用させることにより, 固有値の密集した, すなわち探索ベクトルの生じる次元・範囲の縮小した係数行列 $C^{-1}A$ を持つ方程式系を新しく生成することに対応する.

$$C^{-1}Ax = C^{-1}b, \quad (\text{A.55})$$

この新しい方程式系を解くことにより, CG 法の収束を早めることができる. CG 法では, 一般に, 係数行列 A の固有値が重複していたり, 密集している場合に早い収束を得ることが期待できる. このためには, 前処理が適切に行われていること, すなわち前処理行列 C が係数行列 A に十分近い形になっていることに加え (このことが保証されないと前処理の効果が望めない), ILU 分解の計算負担が小さいこと, および前処理行列 C の非零要素数が A と同程度に疎であることが要求される.

ILUCGS 法のアルゴリズムは次のように示される (小国 1993).

$$\alpha_k = \frac{(\bar{r}_0, \bar{r}_k)}{(\bar{r}_0, C^{-1}A \bar{p}_k)}, \quad (\text{A.56})$$

$$h_{k+1} = e_k - \alpha_k C^{-1} A \hat{p}_k, \quad (\text{A.57})$$

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \alpha_k (e_k + h_{k+1}), \quad (\text{A.58})$$

$$\hat{r}_{k+1} = \hat{r}_k - \alpha_k C^{-1} A (e_k + h_{k+1}), \quad (\text{A.59})$$

$$\beta_k = \frac{(\hat{r}_0, \hat{r}_{k+1})}{(\hat{r}_0, \hat{r}_k)}, \quad (\text{A.60})$$

$$e_{k+1} = \hat{r}_{k+1} + \beta_k h_{k+1}, \quad (\text{A.61})$$

$$\hat{p}_{k+1} = e_{k+1} + \beta_k (h_{k+1} + \beta_k \hat{p}_k). \quad (\text{A.62})$$

なお、各初期ベクトルには、初期残差ベクトル、

$$\hat{r}_0 = C^{-1}(b - A\hat{x}_0), \quad (\text{A.63})$$

を用いて、

$$\hat{p}_0 = e_0 = \hat{r}_0, \quad (\text{A.64})$$

を与える。

A.4 流量一定条件

流れの数値時間積分を行う場合、シミュレーションを通して計算領域各座標方向に一定の圧力差を掛ける圧力差一定条件、あるいは、各座標方向に一定の流量を掛ける流量一定条件のいずれかを課すことになる。前者が圧力差（ヘッド）駆動型のチャネルであるのに対して、後者は流量駆動型のチャネルに相当する。本研究では、全てのシミュレーションに流量一定条件を用いている。

本研究では、流れ場の数値積分に修正 Crank-Nicolson 型フラクショナル・ステップ法を用いている。流量一定条件は、このうちの圧力ポアソン方程式 (2.47) および速度場更新式 (2.46) より、各座標方向に一定の流量を課す圧力差 $(\Delta\phi^{n+1})^i$ ($i = 1, 3$) を計算することによって得ている。本節では、各時刻において一定の流量を実現するための圧力差 $(\Delta\phi^{n+1})^i$ の計算法を示す。なお、以下において、 $i = 2$ 方向を（平均）壁面垂直方向としている。

フラクショナル・ステップ法 (2.46) 式の変換第 i 成分は次式により表される。

$$u^{i,n+1} = \hat{u}^i - \Delta\tau (g^{i,n+1} \cdot \nabla^{n+1}) \phi^{n+1}, \quad (i = 1, 3) \quad (\text{A.65})$$

以降、簡単のため、基底ベクトル、速度場、圧力場の時刻 τ^{n+1} のインデックス $n+1$ は省略する。このとき、(A.65) 式は、

$$u^i = \hat{u}^i - \Delta\tau (g^i \cdot \nabla) \phi, \quad (\text{A.66})$$

(A.66) 式を計算領域 V 上で体積積分すると、

$$\int_V u^i dV = \int_V \hat{u}^i dV - \Delta\tau \int_V (g^i \cdot \nabla) \phi dV. \quad (\text{A.67})$$

ここで、

$$\text{左辺} = \sum_V J u^i \Delta\eta^1 \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 = \sum_V g^i \Delta\eta^1 \Delta\eta^2 \Delta\eta^3, \quad (\text{A.68})$$

$$\text{右辺第1項} = \sum_V J \hat{u}^i \Delta\eta^1 \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 = \sum_V \hat{g}^i \Delta\eta^1 \Delta\eta^2 \Delta\eta^3, \quad (\text{A.69})$$

$$\text{右辺第2項} = -\Delta\tau \int_{\partial V} \phi g^i \cdot d(\partial V) + \Delta\tau \int_V \phi \operatorname{div} g^i dV. \quad (\text{A.70})$$

なお, (A.68), (A.69) 式の離散化には, 0 次精度積分スキームを用いている。また, (A.70) 式では, 次の関係を用いている。

$$\operatorname{div}(g^i \phi) = \phi \operatorname{div} g^i + (g^i \cdot \nabla) \phi. \quad (\text{A.71})$$

(A.70) 式の 2 項はさらに次のように変形される。ここで, 各座標方向の計算領域境界面を, Γ_i^+ , Γ_i^- ($i = 1, 2, 3$) と表している。なお, $+$, $-$ は, それぞれインデックスの大きい方, 小さい方, すなわち計算領域外側に対して垂直に立つ (単位) ベクトルの符号を表している。本研究では, 流れ方向, スパン方向に, ともに周期境界条件を用いているため, 両方向において, 出入口, すなわち先の $+$, $-$ 断面における計算格子メトリクスは一致する。よって, 次式において, これらをまとめて Γ_i ($i = 1, 3$) と表す。

$$\begin{aligned} (\text{A.70}) \text{ 式第 1 項} &= -\Delta \tau \left\{ \sum_{\Gamma_1^+} \phi g^{i1} \frac{|g_2 \times g_3|}{|g^1|} \Delta \eta^2 \Delta \eta^3 - \sum_{\Gamma_1^-} \phi g^{i1} \frac{|g_2 \times g_3|}{|g^1|} \Delta \eta^2 \Delta \eta^3 \right. \\ &\quad + \sum_{\Gamma_2^+} \phi g^{i2} \frac{|g_1 \times g_3|}{|g^2|} \Delta \eta^1 \Delta \eta^3 - \sum_{\Gamma_2^-} \phi g^{i2} \frac{|g_1 \times g_3|}{|g^2|} \Delta \eta^1 \Delta \eta^3 \\ &\quad \left. + \sum_{\Gamma_3^+} \phi g^{i3} \frac{|g_1 \times g_2|}{|g^3|} \Delta \eta^1 \Delta \eta^2 - \sum_{\Gamma_3^-} \phi g^{i3} \frac{|g_1 \times g_2|}{|g^3|} \Delta \eta^1 \Delta \eta^2 \right\} \\ &= -\Delta \tau \left\{ \Delta \phi^1 \sum_{\Gamma_1} g^{i1} \frac{|g_2 \times g_3|}{|g^1|} \Delta \eta^2 \Delta \eta^3 + \sum_{\Gamma_2^+} \phi g^{i2} \frac{|g_1 \times g_3|}{|g^2|} \Delta \eta^1 \Delta \eta^3 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\Gamma_2^-} \phi g^{i2} \frac{|g_1 \times g_3|}{|g^2|} \Delta \eta^1 \Delta \eta^3 + \Delta \phi^3 \sum_{\Gamma_3} g^{i3} \frac{|g_1 \times g_2|}{|g^3|} \Delta \eta^1 \Delta \eta^2 \right\}, \quad (\text{A.72}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{A.70}) \text{ 式第 2 項} &= \Delta \tau \int_V \phi \frac{1}{J} \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial \eta^j} dV \\ &= \Delta \tau \sum_V \phi \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial \eta^j} \Delta \eta^1 \Delta \eta^2 \Delta \eta^3. \quad (\text{A.73}) \end{aligned}$$

ここでも, 0 次精度積分スキームを用いている。本流量一定スキームの精度は, これらの積分スキームの精度を向上させることにより改善されるが, 要求される範囲内で流量が一定に保たれている限り, 先に示した積分スキームは 0 次精度で差し支えない。なお, 本アルゴリズム中の積分スキームの精度により速度場の精度が左右されることはない。このとき, (A.67) 式は, (A.68)~(A.73) 式より,

$$\begin{aligned} \sum_V g^i \Delta \eta^1 \Delta \eta^2 \Delta \eta^3 &= \sum_V \tilde{g}^i \Delta \eta^1 \Delta \eta^2 \Delta \eta^3 \\ &\quad - \Delta \tau \left\{ \Delta \phi^1 \sum_{\Gamma_1} g^{i1} \frac{|g_2 \times g_3|}{|g^1|} \Delta \eta^2 \Delta \eta^3 + \sum_{\Gamma_2^+} \phi g^{i2} \frac{|g_1 \times g_3|}{|g^2|} \Delta \eta^1 \Delta \eta^3 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\Gamma_2^-} \phi g^{i2} \frac{|g_1 \times g_3|}{|g^2|} \Delta \eta^1 \Delta \eta^3 + \Delta \phi^3 \sum_{\Gamma_3} g^{i3} \frac{|g_1 \times g_2|}{|g^3|} \Delta \eta^1 \Delta \eta^2 \right\} \\ &\quad + \Delta \tau \sum_V \phi \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial \eta^j} \Delta \eta^1 \Delta \eta^2 \Delta \eta^3. \quad (\text{A.74}) \end{aligned}$$

ここで, 本計算対象の圧力差 $(\Delta \phi^{n+1})^i$ ($i = 1, 3$) の導出を試みる。本研究では, 壁面変形に 2 次元を仮定しており, 各座標インデックスを次のようにとる。

1	...	カーチン座標	→	平均流れ方向
2	...	一般座標	→	(平均) 壁面垂直方向
3	...	一般座標	→	スパン方向

このとき,

$$g_i = g^i = i_1, \quad q^i = v_1, \quad q^i = Ju^i, \quad (i = 2, 3) \quad (A.75)$$

とすると,

$$|g_1 \times g_2| = |g_2|, \quad |g_1 \times g_3| = |g_3|, \quad g^{12} = g^{13} = 0, \quad (A.76)$$

各基底ベクトルの大きさは,

$$|g_2| = \sqrt{(C_2^2)^2 + (C_3^2)^2}, \quad |g_3| = \sqrt{(C_2^2)^2 + (C_3^2)^2}, \quad (A.77)$$

$$|g^2| = \frac{1}{J} \sqrt{(\gamma_2^2)^2 + (\gamma_3^2)^2}, \quad |g^3| = \frac{1}{J} \sqrt{(\gamma_2^2)^2 + (\gamma_3^2)^2}, \quad (A.78)$$

と表される。また, (A.74) 式右辺最終項は, $i = 1$ のとき 0 , $i = 2, 3$ のとき, $j = 2, 3$.

流れ方向 ($i = 1$) 圧力差 $\Delta\phi^1$ は, (A.74) 式より,

$$\Delta x_1 \sum_V J q^1 \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 = \Delta x_1 \sum_V J q^1 \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 - \Delta\tau \Delta\phi^1 \sum_{\Gamma_1} |g_2 \times g_3| \Delta\eta^2 \Delta\eta^3. \quad (A.79)$$

ここで, $i = 1$ 方向チャネル断面積を A_1 , 同方向流量を Q_1 , 同方向チャネル計算断面数 (格子数) を N_x とすると, $i = 1$ 方向圧力差 $\Delta\phi^1$ は次式により表される。

$$\Delta\phi^1 = \frac{\Delta x_1}{A_1 \Delta\tau} \left(\sum_V J q^1 \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 - Q_1 N_x \right). \quad (A.80)$$

スパン方向 ($i = 3$) 圧力差 $\Delta\phi^3$ は, (A.74) 式より,

$$\begin{aligned} \Delta x_1 \sum_V q^3 \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 &= \Delta x_1 \sum_V q^3 \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 \\ &\quad - \Delta\tau \Delta x_1 \left\{ \sum_{\Gamma_2^+} \phi g^{32} \frac{|g_3|}{|g^2|} \Delta\eta^3 - \sum_{\Gamma_2^-} \phi g^{32} \frac{|g_3|}{|g^2|} \Delta\eta^3 \right. \\ &\quad \left. + \Delta\phi^3 \sum_{\Gamma_3} g^{33} \frac{|g_2|}{|g^3|} \Delta\eta^2 \right\} + \Delta\tau \Delta x_1 \sum_V \phi \frac{\partial \alpha^{3j}}{\partial \eta^j} \Delta\eta^2 \Delta\eta^3. \end{aligned} \quad (A.81)$$

ここで, $i = 3$ 方向出入口断面積を A_3 , 同方向流量を Q_3 , 同方向チャネル計算断面数 (格子数) を N_z とすると, (A.81) 式より, $i = 3$ 方向圧力差 $\Delta\phi^3$ が求められる。

$$\begin{aligned} \Delta\phi^3 &= \left\{ \frac{1}{\Delta\tau} \left(\sum_V q^3 \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 - \sum_V q^3 \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 \right) + \sum_V \phi \frac{\partial \alpha^{3j}}{\partial \eta^j} \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\Gamma_2^+} \phi g^{32} \frac{|g_3|}{|g^2|} \Delta\eta^3 + \sum_{\Gamma_2^-} \phi g^{32} \frac{|g_3|}{|g^2|} \Delta\eta^3 \right\} / \sum_{\Gamma_3} g^{33} \frac{|g_2|}{|g^3|} \Delta\eta^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{\Delta\tau} \left(\sum_V q^3 \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 - Q_3 N_z \right) + \sum_V \phi \frac{\partial \alpha^{3j}}{\partial \eta^j} \Delta\eta^2 \Delta\eta^3 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\Gamma_2^+} \phi g^{32} \frac{|g_3|}{|g^2|} \Delta\eta^3 + \sum_{\Gamma_2^-} \phi g^{32} \frac{|g_3|}{|g^2|} \Delta\eta^3 \right\} / \sum_{\Gamma_3} g^{33} \frac{|g_2|}{|g^3|} \Delta\eta^2. \end{aligned} \quad (A.82)$$

(A.82) 式右辺第3項の体積分項, および第4, 第5項の壁面積分項は, 計算領域全体, あるいは壁面 Γ_2^+ , Γ_2^- 上で計算格子を直交させることによって省くことができるが, 一般座標ではこれらの項を省くことはできない。このとき, これらの項に含まれている ϕ^{n+1} には, n 時刻における既知の値 ϕ^n を0次近似として代入する。一般に, 壁面 (計算境界) の変形がある方向に対しては, このように流量一定アルゴリズムの時間的精度を落とし, 近似的に流量一定を満たす圧力差 $(\Delta\phi^{n+1})^3$ を計算する。

Appendix B

壁面変形による渦対のアクティブ制御

B.1 概論

乱流輸送現象に対する制御手法は、大きく、パッシブ制御とアクティブ制御に分類される。アクティブ制御は、制御投入に対し仕事を要する系に対応し、フラップ、吹き出し、吸い込み等をアクチュエータとする制御がこれに当たる。一方のパッシブ制御は、制御投入に対し仕事を要しない系に対応し、リブレット、LEBU (large eddy break-up device) 等がこれに当たる。アクティブ制御の中でも、流れ場に応じてはたらくことのできるフィードバック制御は、さらに飛躍的な効果が得られるものとして期待されている。

壁乱流の摩擦抵抗低減は、縦渦等の乱流準秩序構造を減衰させ、レイノルズ応力を抑えることによって可能となる。本研究では、壁乱流における諸輸送機構の中心的役割を担う縦渦、スweepを渦対モデルに置き換え、この渦対モデルを含むせん断流の抵抗・熱伝達のアクティブ制御を考える。制御アクチュエータを壁面変形とし、速度場の情報を得てその形状を時々刻々変化させることとする。制御側には、壁面近傍の速度をセンシングし、その数倍 (同符号と異符号の両ケースを考慮) の速度・変位を壁面に与える、ごく簡単なものを仮定する。本制御は、流れ場の情報を用いるという点で、フィードバック制御に相当する。なお、本章では、流れ方向に一様な場を仮定することにより、2次元に簡略化された問題を扱う。この流れ場では、渦構造の3次元性にに基づくテイルティングやストレッチングの効果が現れないため、実際の乱流場とは異なるが、本制御手法の縦渦構造や摩擦係数に対する影響を測るには、現象を複雑化する成分を取り除いた本対象場の方が適する面もある。Choi, Moin & Kim (1994) は、吹き出し・吸い込みをアクチュエータとしたアクティブ制御の有用性を、本渦対モデルの剪断流のないケース、すなわち静止流体中の渦対のリバウンド過程より検討している。

また、本計算は、壁面変形をアクチュエータとした制御、特にそのフィードバック化の有用性を具体的流れ場モデルに対して示した例でもある。本研究では、壁面変形をアクチュエータとする具体的な乱流制御は行っていないが、本例に示されるように、壁面変形モードの取り方によっては、壁乱流における摩擦抵抗低減等の実現も期待できる。

B.2 2次元渦対制御モデル

作動流体は非圧縮、温度場はパッシブ・スカラーとする。流れ場および制御即ち壁面変形は平均流れ方向に一定とし、従って諸量はチャネル断面内のみ分布を持つ。このときの支配方程式は、速度3成分に対するNavier-Stokes方程式、連続の式およびエネルギー方程式である。

流れ場の概略を図B.1に示す。初期流れ場の y 方向にはクエット流を仮定し、上壁は一定速度 U_m で駆動される。チャネルスパン方向には周期境界条件を用いる。時刻 $\tau=0$ においてこの速度分布上に瞬時的に渦対の速度分布を与える。渦対には、次式の流れ関数で与えられる速度分布を与える (Batchelor

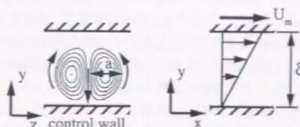


Figure B.1: 渦対制御モデル初期場

1967).

$$\psi = U^* a J_1(kr/a) \sin \theta, \quad (r < a), \quad (\text{B.1})$$

ここで, (r, θ) は渦対中心を原点とする円筒座標, a は渦対半径すなわち渦径を表す. $k = 3.83$ とし, このとき渦対半径上では渦度および流れ関数はともに 0 となる. この渦対内速度分布は, 非粘性一樣流 $V = U^* k J_0(k)$ 中に置かれた円柱内の速度分布に対応する. この渦対の渦 1 つ当たりの循環は $\Gamma = 5.3 U^* a$ となっている. 渦対の外側領域においては, 渦対半径方向に対し自由渦の分布を仮定し, 壁面上および周期境界上では減衰関数に \tanh 関数を用いている. 時間積分は, 平均流れ方向に流量 Q 一定で行われる.

計算条件は, 乱流境界層およびチャネル乱流の直接数値シミュレーションにおいて見積もられている縦渦構造に関する諸データをもとに決める (Robinson 1991, Kim, Moin & Moser 1987). 全てのデータは初期場クエット流の wall unit によって整理される. 渦径 $a^+ = 25$, 渦対中心位置 $y_0^+ = 30$ とし, 渦循環 $\Gamma^+ (= \Gamma/\nu = Re_\tau)$ には縦渦最頻値の 60 と最大レンジに相当する 500 の 2 通りを考える. 計算は, 壁面間隔距離 $L_y^+ = \delta^+ = 100$, および周期境界条件を課す $L_z^+ = 500$ の領域で行う. 計算格子数は y, z 方向にそれぞれ 79, 160 であり, 本格子系で Choi, Moin & Kim (1994) の $Re_\tau = 1800$ の渦挙動を同レイノルズ数に設定した際に得ることを確認している. タイムステップ $\Delta\tau$ は $Re_\tau = 63$ のとき $0.52\nu/u_\tau^2$, $Re_\tau = 500$ のとき $0.066\nu/u_\tau^2$ とする. 全てのシミュレーションを通して CFL 数 $(= \max((q^2/\Delta\eta^2 + q^3/\Delta\eta^3)\Delta\tau/J))$, Courant-Friedrichs-Lewy 数) は 0.5 より小さく抑えられている. ここで q^2, q^3 はボリュウム・フラックスのチャネル断面内成分, $\Delta\eta^2, \Delta\eta^3$ は計算格子幅を表す.

温度場に関する境界条件は, 上下壁それぞれについて T_u, T_l ($T_u \neq T_l$) の等温条件とする. 初期条件には渦がない場合の定常解となる線形分布を与える. プラントル数は 1 とする.

速度場の計算には, 本研究で開発した手法を用いている. エネルギ-方程式の離散化には, 時間的には Crank-Nicolson 法, 空間的には 2 次精度差分を用いる.

B.3 制御則

本章では, 壁面に y 方向変位を与える変形アクチュエーションによる, 本渦対制御モデルに対する壁面摩擦抵抗低減の可能性を検討する. この場合, 壁面は y 方向にのみ速度成分 v_w を持つ. 壁面変形の制御則には, 制御壁より一定の高さ y_s における y 方向速度成分 v_s あるいは z 方向速度成分 w_s をセンシングすることにより壁面速度 v_w を与える次の 2 通りを試みた. なお, 制御拘束条件として, チャネル断面積一定を仮定している.

$$v_w^{n+1} = C_v v_s^n, \quad (\text{B.2})$$

$$v_w^{n+1} = C_w (|w_s^n| - |w_s^n|), \quad (\text{B.3})$$

ここで, $C_v, C_w = \text{const.}$ とする. 本制御則 (B.2), (B.3) 式は, センシングする速度成分, そのセンシング位置 (高さ), およびそのセンシング速度に掛かる定数 C_v, C_w という 3 つのパラメータを持つ. 単純に

考えれば, 前者の v -sensing アルゴリズムは, $C_v < 0$ のとき, 壁垂直方向の運動を抑制する制御, $C_v > 0$ のときは逆に促進する制御となる。後者の w -sensing アルゴリズムは, $C_w > 0$ として, センシング位置を低くとることにより, 壁面せん断応力スパン方向成分の大きさが平均より大きいところで正変位, 小さいところで負変位を生じる制御となる。また, (B.2), (B.3) 式において, $n, n+1$ はタイムステップを表す。すなわち, 本制御では, 1 タイムステップ遅れの制御を仮定する。しかしながら, $\Delta\tau$ は非常に小さく, 制御の位相遅れは無視できる。なお, センシング高さ y_s^+ には, 壁面ごく近くの 2.5 および粘性 (底) 層高さにも相当する 10 の 2 通りを用いている。表 B.1 に, 本渦対モデルに用いた制御条件を示す。

Table B.1: 渦対制御条件

Re_Γ	60		500	
	v -sensing	w -sensing	v -sensing	w -sensing
C_v, C_w	$\pm 0.1, \pm 0.5$	0.01, 0.05	$\pm 0.01, \pm 0.1$	0.01, 0.05
y_s^+	2.5, 10			

B.4 壁面変形による抵抗低減機構

図 B.2 ~ B.5 に, $Re_\Gamma = 60$ と 500 の場合の制御壁側摩擦係数 C_{f1} の時間変化を示す。なお, 図中縦軸には $\Delta C_{f1}/C_{f1_uncontrolled} (= (C_{f1} - C_{f1_uncontrolled})/C_{f1_uncontrolled})$ を取っている。ここで, 下添字 $uncontrolled$ は制御がない場合の値を示す。また, 制御壁側摩擦係数 C_{f1} は, 次式によって与えられる。

$$C_{f1} = \left(\int_{S_{wall}} \tau_{wx} dS \right) / \left(\frac{1}{2} \rho U_m^2 S_{top} \right). \quad (B.4)$$

ここで S_{top} は制御がない場合の壁面積, S_{wall} は変形壁面積, τ_{wx} は壁面剪断応力の x 方向成分を表す。壁面摩擦係数 C_{f1} は, 渦対の壁面への接近に伴い上昇し, 壁面衝突時に最大となる。その後, 渦対が壁面より離れるにしたがって C_{f1} は減少するが, 上昇した渦対には再度壁面方向への誘導速度が生じ, C_{f1} も再度上昇する。

今回のシミュレーションのうち, レイノルズ数 $Re_\Gamma = 60$ の場合には, 渦対の最初の壁面衝突の後の 2 回目の衝突は見られなかった。一方, $Re_\Gamma = 500$ の場合には, 2 回目の渦対のリバウンド過程まで観測される。図 B.6 ~ B.12 に, レイノルズ数 $Re_\Gamma = 60, 500$ の場合の, 制御がない場合と, v -sensing, w -sensing 各制御アルゴリズムのセンシング位置を $y_s^+ = 2.5, 10$ とする各ケースにおける係数 C_v, C_w の大きい場合の, 渦対の壁面衝突前後の時系列変化を示す。図中, 渦構造を渦度等高線で, 壁面情報の高運動流体の壁面近傍への侵入を白黒のグラデーションで表している。なお, 対になっている渦構造, および渦構造と隣合って壁面上に形成されている剪断領域は, 互いに逆符号の渦度を持つ。本結果より, 壁面変形によって渦構造をより壁面上方に保った場合に, 壁面摩擦抵抗がより減少することが示されている。なお, レイノルズ数 Re_Γ すなわち渦の循環強さ Γ^+ を上昇させることによって, さらに多いリバウンド回数を観測することができる。本シミュレーションよりさらにレイノルズ数 Re_Γ の高い渦対に対する, 静止流体中のさらに複雑なリバウンド過程が, Orlandi (1990) によって報告されている。

各制御に対する評価は, 次式によって示されるゲイン G によって行う。

$$G = \int_0^T Q \left\{ \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{uncontrolled} - \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right\} dt. \quad (B.5)$$

積分時間 T には, $Re_\Gamma = 60$ のとき $1500 \nu/u_\tau^2$, $Re_\Gamma = 500$ のとき $150 \nu/u_\tau^2$ を取る。各ケースにおいて, この時刻 T においては, 渦対は壁面より離れ減衰過程に移行している。表 B.2 に, 今回シミュレーション

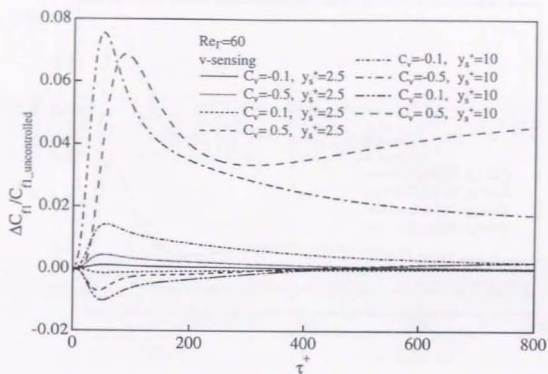
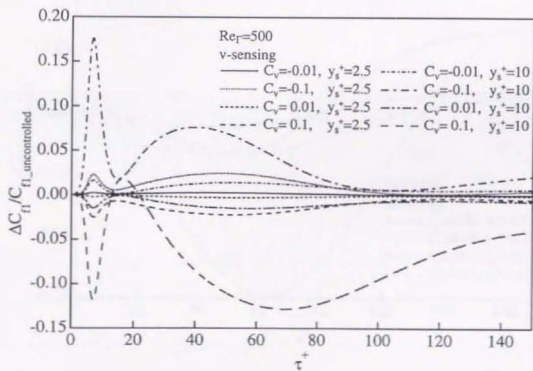
ンを行った各ケース (表 B.1 参照) における制御利得 G を示す。表中において、ゲイン G が正の場合が摩擦抵抗低減のケースに相当する。

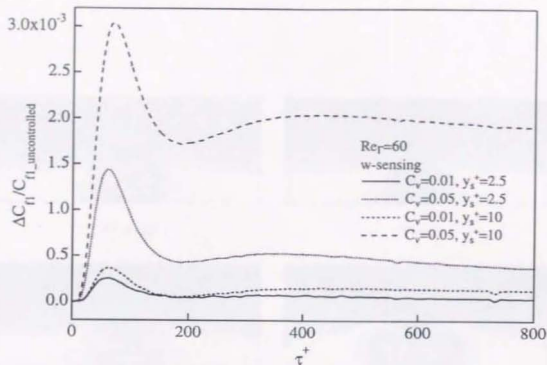
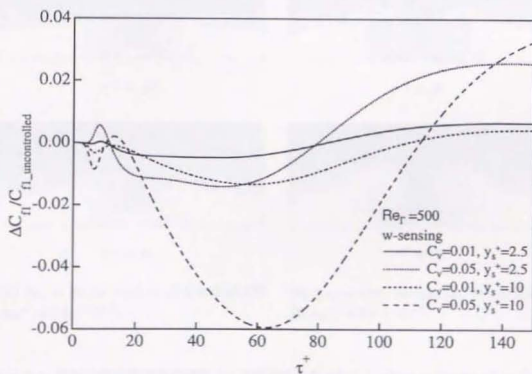
制御利得 G 即ち抵抗低減量は、制御アルゴリズムの性能を測る重要なパラメータである。最も大きなゲインを示すのは、 $Re_{\Gamma} = 500$, v -sensing, $(y_s^+, C_v) = (10, 0.1)$ の場合であり、 $Re_{\Gamma} = 500$, w -sensing, $(y_s^+, C_w) = (10, 0.05)$ の場合にもこれに匹敵する抵抗低減を実現する。全体的には、壁面変形を用いた渦対制御に対しては、 v -sensing の $C_v > 0$ とする制御が、幅広い循環 Γ^+ (= レイノルズ数 Re_{Γ}) の渦対に対して有効であることが示されている。高循環 ($Re_{\Gamma} = 500$) の渦対に対しては w -sensing の制御アルゴリズムも有効となる。 $C_v > 0$ のモードは渦対を壁面近傍に導くモードに対応するが、このとき図 B.7, B.8, B.10, B.11 に示されるように、壁面剪断の強い領域を誘起された変形壁面の山部の一部に限ることになり、このことが抵抗低減の要因となっていると考えられる。また、 w -sensing の制御モードにおいても、 $C_v > 0$ のモード時と同様の渦対中心で凹となる壁面変形を生じており (図 B.9, B.17)、この壁面変形が摩擦抵抗低減に対し有効となっていることが推測できる。一方、Choi et al. (1994) が静止流体中の渦対制御において用いた吹き出し・吸い込みのモード (active cancellation mode) の一つにも対応する v -sensing, $C_v < 0$ の場合には、抵抗低減はごく限られたケースでしか得られておらず、しかもあまり大きなゲイン (抵抗低減率) は得られてない。

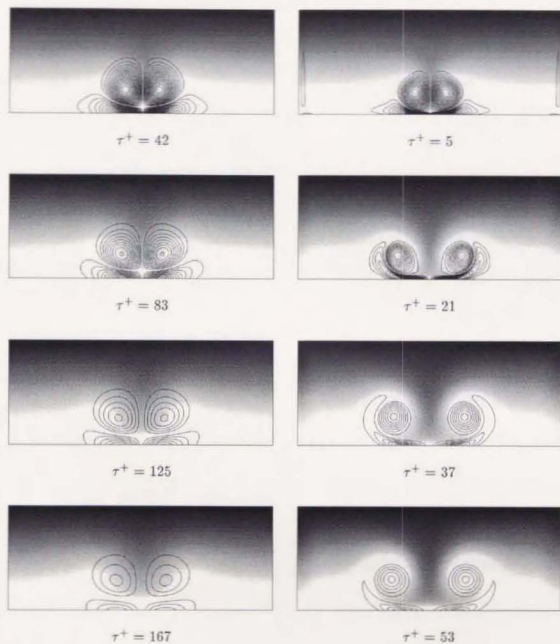
本制御アルゴリズムには、渦が消えた後も壁面変形が残るという欠点がある。よって、本制御モードの乱流制御に対する適用を考えるうえでも、この点に対する改良が必要である。

Table B.2: 渦対モデル制御ゲイン

Re $_{\Gamma}$	60											
Sensing Mode	v -sensing								w -sensing			
y_s^+	2.5				10				2.5		10	
C_v, C_w	-0.1	-0.5	0.1	0.5	-0.1	-0.5	0.1	0.5	0.01	0.05	0.01	0.05
G^+	-3.9	-17	3.5	-46	-84	-560	-45	-1400	-1.6	-13	-4.8	-58
Re $_{\Gamma}$	500											
Sensing Mode	v -sensing								w -sensing			
y_s^+	2.5				10				2.5		10	
C_v, C_w	-0.01	-0.1	0.01	0.1	-0.01	-0.1	0.01	0.1	0.01	0.05	0.01	0.05
$G^+ \times 10^4$	-0.56	-4.4	0.57	4.6	-0.56	3.6	2.8	34	0.88	0.66	3.5	19

Figure B.2: 壁面摩擦係数 (v -control, $Re_\tau = 60$)Figure B.3: 壁面摩擦係数 (v -control, $Re_\tau = 500$)

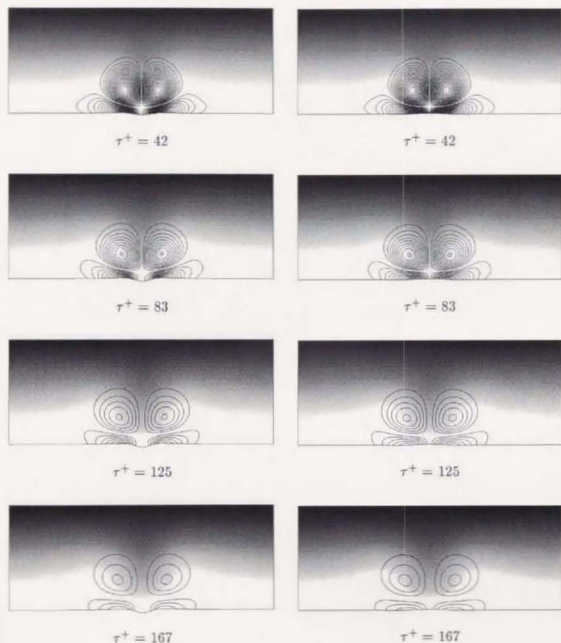
Figure B.4: 壁面摩擦係数 (w -control, $Re_\tau = 60$)Figure B.5: 壁面摩擦係数 (w -control, $Re_\tau = 500$)



(a) $Re_\Gamma = 60$, no control, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 3.8 \times 10^{-3}$.

(b) $Re_\Gamma = 500$, no control, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 7.6 \times 10^{-2}$.

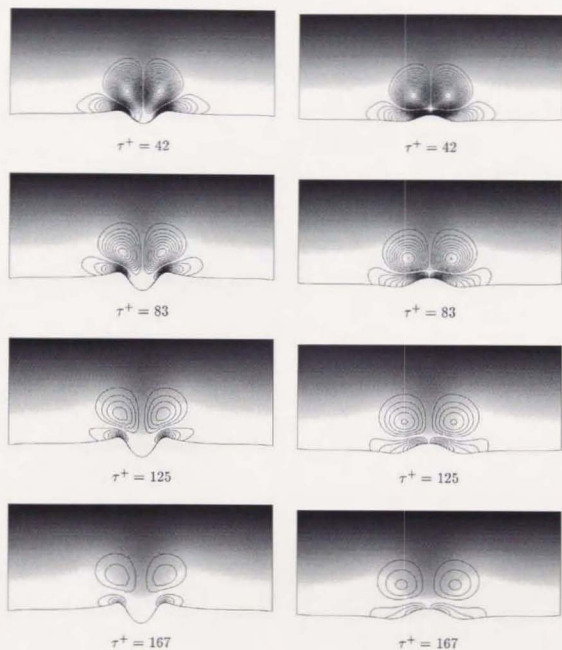
Figure B.6: 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その 1, white to black: $u^+ = 0$ to 100)



(a) $Re_\tau = 60$, v -sensing, $y_s^+ = 2.5$, $C_v = 0.5$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 3.8 \times 10^{-3}$.

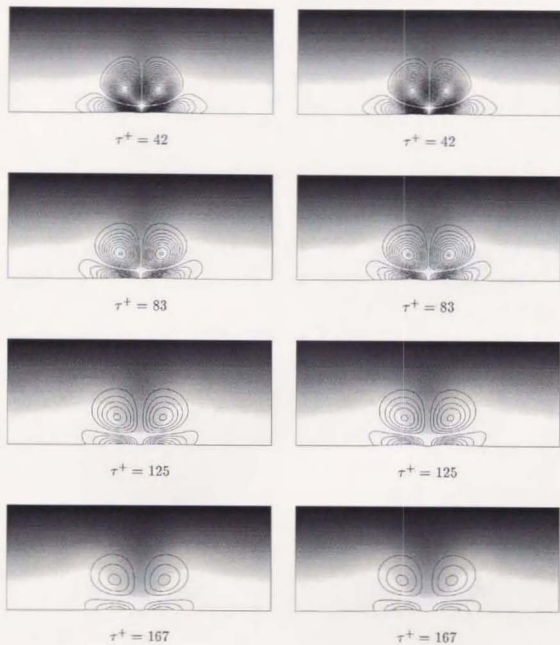
(b) $Re_\tau = 60$, v -sensing, $y_s^+ = 2.5$, $C_v = -0.5$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 3.8 \times 10^{-3}$.

Figure B.7: 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その 2, white to black: $u^+ = 0$ to 100)



(a) $Re_\tau = 60$, v -sensing, $y_s^+ = 10$, $C_v = 0.5$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 3.8 \times 10^{-3}$. (b) $Re_\tau = 60$, v -sensing, $y_s^+ = 10$, $C_v = -0.5$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 3.8 \times 10^{-3}$.

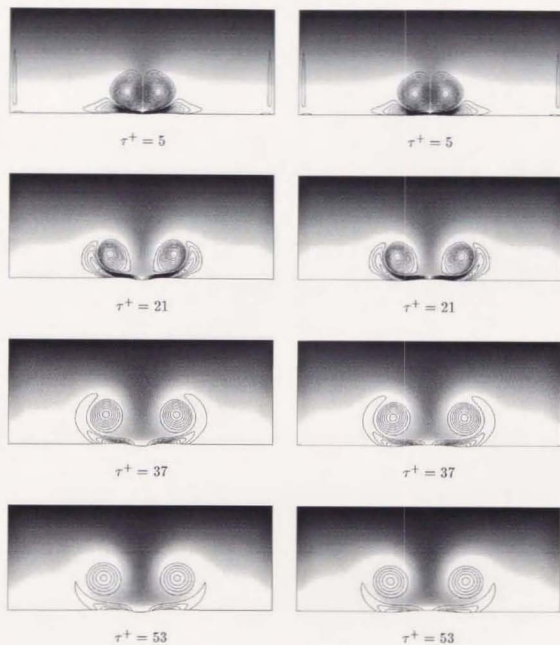
Figure B.8: 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その3, white to black: $u^+ = 0$ to 100)



(a) $Re_\tau = 60$, w -sensing, $y_s^+ = 2.5$, $C_w = 0.05$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 3.8 \times 10^{-3}$.

(b) $Re_\tau = 60$, w -sensing, $y_s^+ = 10$, $C_w = 0.05$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 3.8 \times 10^{-3}$.

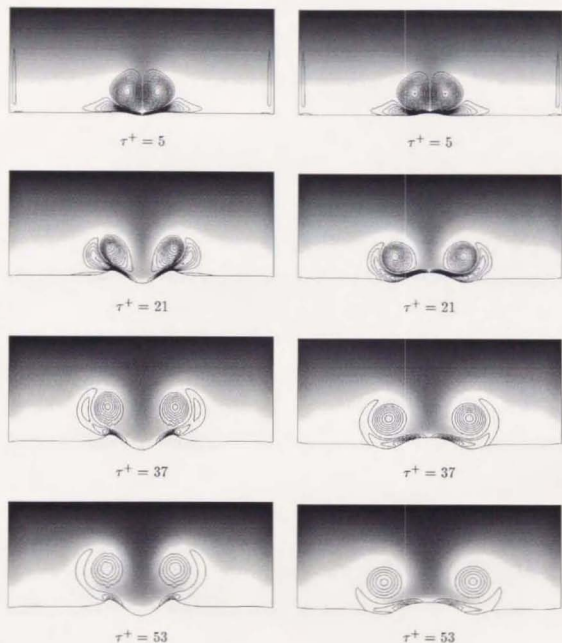
Figure B.9: 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その4, white to black: $u^+ = 0$ to 100)



(a) $Re_\tau = 500$, v -sensing, $y_s^+ = 2.5$, $C_v = 0.1$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 7.6 \times 10^{-2}$.

(b) $Re_\tau = 500$, v -sensing, $y_s^+ = 2.5$, $C_v = -0.1$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 7.6 \times 10^{-2}$.

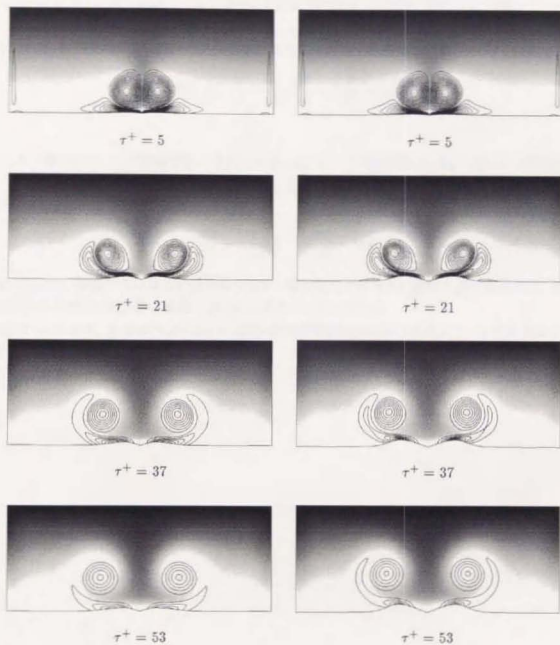
Figure B.10: 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その5, white to black: $u^+ = 0$ to 100)



(a) $Re_\Gamma = 500$, v -sensing, $y_s^+ = 10$, $C_v = 0.1$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 7.6 \times 10^{-2}$.

(b) $Re_\Gamma = 500$, v -sensing, $y_s^+ = 10$, $C_v = -0.1$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 7.6 \times 10^{-2}$.

Figure B.11: 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その6, white to black: $u^+ = 0$ to 100)



(a) $Re_\Gamma = 500$, w -sensing, $y_s^+ = 2.5$, $C_w = 0.05$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 7.6 \times 10^{-2}$.

(b) $Re_\Gamma = 500$, w -sensing, $y_s^+ = 10$, $C_w = 0.05$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 7.6 \times 10^{-2}$.

Figure B.12: 渦対の壁面衝突時の渦度・ x 方向速度分布 (その7, white to black: $u^+ = 0$ to 100)

B.5 壁面変形による熱伝達の変化

本シミュレーションにおいては (プラントル数 $Pr = 1$), 熱伝達挙動は壁面摩擦係数 C_{f1} の場合とほとんど等しくなり, 温度分布は x 方向速度分布とほぼ等しくなる. よって, ここでは, 結果の概略のみ示すことにする.

図 B.13 ~ B.16 に, 壁面側ヌッセルト数 Nu の時間変化を示す. なお, 縦軸には, 制御がない場合 (下添字 *uncontrolled*) との比較の形で, $\Delta Nu / Nu_{uncontrolled} (= (Nu - Nu_{uncontrolled}) / Nu_{uncontrolled})$ を取っている. また, ヌッセルト数 (無次元熱伝達率) は次式によって定義している.

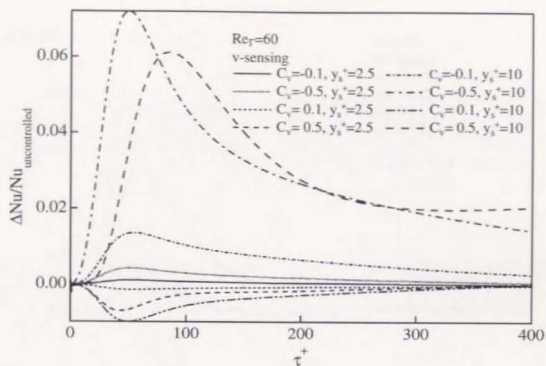
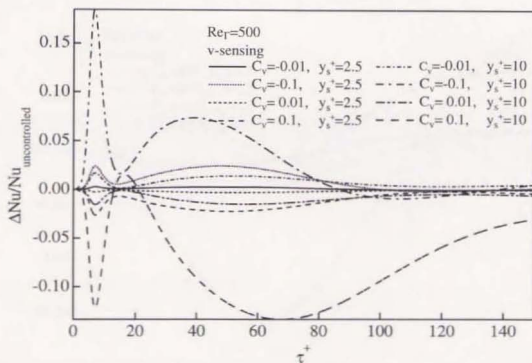
$$\begin{aligned} Nu &= \frac{hl}{\lambda} = \frac{\delta}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial n} = \delta \frac{\partial (T - T_l)}{\partial n} \\ &= \delta \frac{\partial \theta}{\partial n}. \end{aligned} \quad (B.6)$$

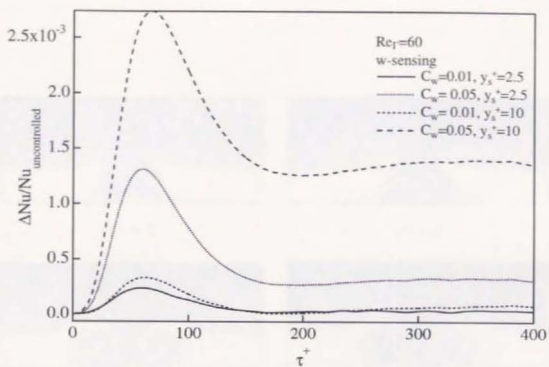
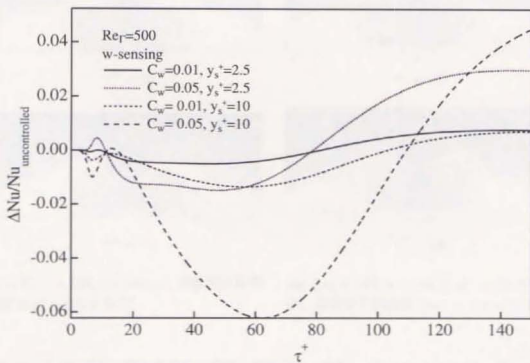
ここで, h は熱伝達率, λ は熱伝導率, l は代表長さ, ΔT は上下壁温度差 ($= T_u - T_l$), n は壁面垂直方向を表し, θ は無次元温度 ($= (T - T_l) / \Delta T$) を表す. また, $\partial \theta / \partial n$ は, 摩擦係数 C_{f1} と同様, 次式で示される変形壁面 S_{wall} 上の平均値を表す.

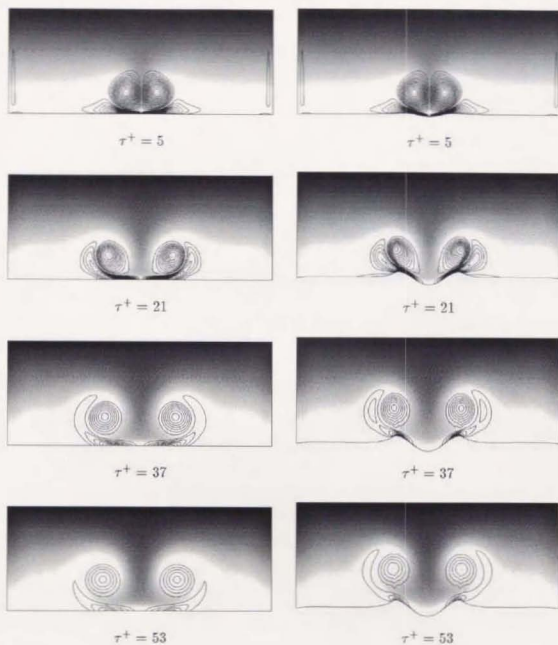
$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{1}{S_{stop}} \int_{S_{wall}} \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{local} dS. \quad (B.7)$$

ここで, S_{stop} は, 制御がない場合の壁面積を表す. 図中に示される熱伝達率に関する結果は, 図 B.2 ~ B.5 に示される壁面摩擦係数の結果に見られる傾向と一致している.

図 B.17 ~ B.18 に, 高循環渦対 ($Re_F = 500$) の制御壁衝突時における温度分布の時系列変化を示す. 先に示した壁面摩擦係数 C_{f1} と熱伝達率 Nu_1 の一致については, 本図に示される温度分布と x 方向速度分布 (図 B.6 ~ B.12) が一致していることによって理解できる.

Figure B.13: 熱伝達率 (v -control, $Re_T = 60$)Figure B.14: 熱伝達率 (v -control, $Re_T = 500$)

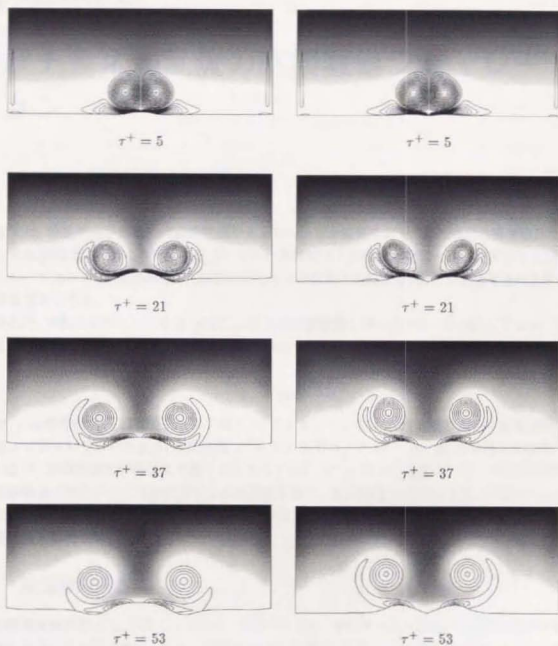
Figure B.15: 熱伝達率 (w -control, $Re_\tau = 60$)Figure B.16: 熱伝達率 (w -control, $Re_\tau = 500$)



(a) $Re_T = 500$, no-control, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 7.6 \times 10^{-2}$.

(b) $Re_T = 500$, v -sensing, $y_s^+ = 10$, $C_v = 0.1$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 7.6 \times 10^{-2}$.

Figure B.17: 渦対の壁面衝突時の渦度・温度分布 (その1, white to black: $T = T_l$ to T_u)



(a) $Re_T = 500$, v -sensing, $y_s^+ = 10$, $C_v = -0.1$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 7.6 \times 10^{-2}$.

(b) $Re_T = 500$, w -sensing, $y_s^+ = 10$, $C_w = 0.05$, 渦度等高線間隔 $\Delta\omega^+ = 7.6 \times 10^{-2}$.

Figure B.18: 渦対の壁面衝突時の渦度・温度分布 (その2, white to black: $T = T_l$ to T_u)