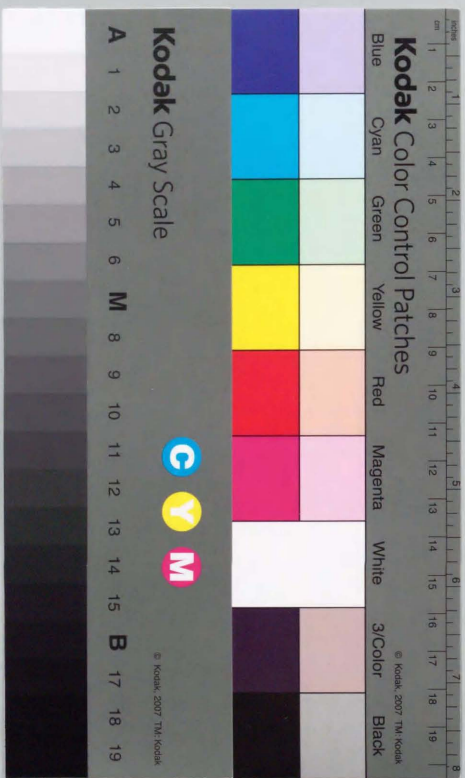


画像陰影からの形状復元に関する研究

岡谷 貴之



# 画像陰影からの形状復元に関する研究

岡 谷 貴 之

## 目 次

1 序 論	1
1.1 はじめに	1
1.2 3次元形状情報としての陰影	2
1.3 本研究の背景と位置付け	2
1.4 論文の構成	5
2 画像の生成過程	7
2.1 はじめに	7
2.1.1 単 位	7
2.2 画像の生成	7
2.3 物体表面での光の反射	9
2.3.1 反射分布関数	10
2.3.2 ランバート面	11
2.3.3 理想鏡面反射	12
2.3.4 解析的反射モデル	13
2.4 反射率分布表現	14
2.4.1 画像照度等式	15
2.5 相互反射	16
2.5.1 Radiosity 等式	16
2.5.2 疑似面素	17
2.5.3 物体自身の作る陰による濃淡の不連続	19
2.5.4 相互反射に対する本論文の立場	19
2.6 ま と め	20

3 陰影からの形状復元のアルゴリズム	21
3.1 はじめに	21
3.2 陰影からの形状復元問題	21
3.3 半局所手法	22
3.3.1 特性曲線による方法	22
3.3.2 等高線の伝播	24
3.3.3 形状の陽な表現	25
3.3.4 最小降下の原理	26
3.4 大域手法	27
3.4.1 初期の方法	27
3.4.2 なめらかさによる問題の正則化	30
3.4.3 積分可能性	31
3.4.4 奥行きを直接的復元	34
3.5 その他の方法	35
3.5.1 局所陰影の解析	35
3.5.2 線形な反射率分布	36
3.5.3 さらにその他	38
3.6 照明方向の推定	38
3.6.1 統計的推定	38
3.6.2 形状が既知の場合	40
3.7 画像照度等式に基づかない形状復元手法	40
3.8 ま と め	41
4 陰影に対する形状の存在と一意性	43
4.1 はじめに	43
4.2 曲率符号と局所形状	45
4.3 特異点まわりの局所形状の一意性	46
4.3.1 特 異 点	46
4.3.2 特異点の種類と局所陰影	48
4.3.3 実 験	50
4.4 等高線による形状の計算	53

4.4.1 非ランバート面に対する等高線の方法	53
4.4.2 特性曲線と等高線の関係	58
4.4.3 実世界での反射特性との対応	59
4.5 大域形状の一意性	60
4.5.1 ランバート面の場合	60
4.5.2 全体形状の決定	61
4.5.3 特異点の種類割り当ての一意性	64
4.6 局所・大域形状の存在について	66
4.6.1 粘性解となめらかでない解	67
4.6.2 なめらかでない等高線の発展	70
4.6.3 反射率分布の妥当さの判断	72
4.7 ま と め	73
5 等濃度線の照明変化に対する不変性質	75
5.1 はじめに	75
5.2 放物的曲線上での濃淡の不変性	76
5.2.1 放物的曲線	76
5.2.2 反射率分布	77
5.2.3 2つの不変性	77
5.2.4 不変性の証明	78
5.3 等濃度線の不変性	79
5.3.1 形状に関する仮定	79
5.3.2 特異点に関する仮定	81
5.3.3 反射率分布図に関する仮定	82
5.3.4 照明変化に不変性質	82
5.3.5 「8」の字等濃度線の存在	83
5.3.6 いくつかの例	83
5.4 濃淡の鞍点からの最急上昇線	86
5.4.1 大域的な形状復元問題との関係	88
5.4.2 いくつかの例	88
5.5 ま と め	90

6	複数の画像間の陰影差を用いた曲率符号の計算	91
6.1	はじめに	91
6.2	物体表面の面の向きと3枚の画像	93
6.3	疑似ガウス像	94
6.3.1	ガウス像とガウス曲率	94
6.3.2	離散的なガウス像とガウス曲率の計算	96
6.3.3	疑似ガウス像	97
6.4	疑似ガウス像による曲率符号計算	98
6.4.1	ランバート反射の場合	98
6.4.2	一般の反射特性の場合	99
6.5	正しく符号が決定されるための条件	101
6.5.1	微分の対称差分近似	102
6.5.2	連続領域における符号の計算式	102
6.5.3	正しく符号が計算される反射率分布	104
6.6	照度差ステレオとの比較	105
6.7	実験結果	107
6.8	まとめ	113
7	近接光源下の陰影からの形状復元	117
7.1	はじめに	117
7.2	透視投影と有限距離にある点光源	118
7.2.1	透視投影の仮定	118
7.2.2	有限距離にある点光源に照射された面	118
7.3	光源からの距離が等しい曲線の発展に基づく形状復元	120
7.3.1	光源からの距離が等しい曲線：等距離曲線	120
7.3.2	等距離曲線上の面の向き	120
7.3.3	画像による面の向きの決定	121
7.3.4	等距離曲線の発展	123
7.3.5	形状復元のアルゴリズム	126
7.3.6	反射特性と面の向きの計算	126
7.4	等高面方法	129

7.4.1	等距離曲線の発展による方法の問題点	130
7.4.2	等高面方程式の導出	131
7.4.3	等高面方法による形状復元のアルゴリズム	136
7.4.4	初期曲線の計算	137
7.4.5	初期曲線の形状と復元誤差との関係について	138
7.5	実験結果	139
7.6	内視鏡画像への応用	140
7.6.1	内視鏡における画像生成の過程	141
7.6.2	実験結果	141
7.7	まとめ	142
8	結 論	153
A	画像面の照度の不均一性	167
A.1	像の歪みによる照度の不均一性	167
A.2	口径食の影響について	167
B	特異点まわりの形状の一意性に関する話題	169
B.1	特異点まわりの局所陰影からの局所形状の決定	169
B.1.1	まとめ	173
B.2	行列のトレースの符号	173
B.3	行列積のトレースと行列式の大小関係	174
C	等高線の方法が利用可能な反射率分布の条件	177
D	その他の陰影からの形状復元の一意性	179
D.1	半球と平面の陰影の一意性	179
D.2	粘性解の存在条件	179
E	画像座標系で見た曲面の漸近方向	181
F	入射角と反射角の関係	183
G	等高面方程式の導出	185

## 1 序 論

### 1.1 はじめに

人間が外界の情報を得る上で、視覚は五感の中でも一番大きな役割を果たしていると言われる。そしてその機能は大変に高度である。例えば、歩いていて障害物をよけるために障害物までの距離を見積もったり、机の上のコップをとるのに手を伸ばすべき方向を見定めたりできる。あるいは1枚の人の顔写真だけからその人の目鼻立ちを知ることができる。このように高度な人間の視覚機能を機械の上で実現するために、これまでに様々な立場から努力がなされてきた。その1つが、計算論的な立場から視覚の計算原理を解明することを目指し、その工学的な応用を考える、コンピュータビジョンと呼ばれる分野である。

画像からそこに写る物体の3次元形状を復元したり3次元形状の部分的な情報を取り出すことは、コンピュータビジョンの中心的な課題であり、手がかりとする画像の特徴が異なる種々の原理に基づく方法が研究されてきた。まず、2枚あるいはそれ以上の枚数の画像を用い、その画像間に発生する視差から奥行き情報を得、形状を復元する立体視 (stereo) や運動視 (structure from motion) がある。これに対し画像1枚から物体形状を復元しようとする方法、例えば、テクスチャ (shape from texture)、輪郭 (shape from contour) や陰影 (shape from shading) から形状の復元を行う方法がある。

本研究では、これらのうちの1つの、画像の陰影から物体の3次元形状の情報を取り出す方法について考える。

画像1枚には2次元の情報しかないものの、立体視や運動視では、複数枚の画像間の幾何学的な関係を利用するから、一般には3次元形状を定めるのに十分な情報が画像 (列) にあって条件の不足はないと考えられる。一方、テクスチャや陰影による画像1枚からの形状の復元では、原理的に条件が不足し、これを補うような拘束条件が必要になる。人間が画像1枚から3次元形状の情報を獲得するときは、無意識のうちに足りない条件を追加していると考えられる。このような拘束条件は、知識や仮定と呼ぶことができる。長年にわたり自然で無理のない知識や仮定はどのようなものか考えられてきた。

ある決まった用途で、それに特化した環境を対象とする応用を考えるときは、一般に強い拘束条件が利用できると考えられる。そして、その整備された環境下で与えられる拘束条件を利用し

て、形状を復元する方法について考えることに意味がある。一方、あまり対象を限定せず汎用性を意識するときは、強い拘束条件は前提にできない。また、応用範囲を広げるためには、事前の知識や仮定はできるだけ少ないほど良いということもできる。この意味で、どれだけの質、量の知識や仮定があれば形状を復元できるのか、あるいは完全な復元はできないとしても、少ない事前の知識や仮定の下でどれだけ価値ある形状情報を取り出せるのかを考えることは意義がある。本研究の目的は、陰影に基づく形状復元の方法について、以上のようなことを考えることにあり。

## 1.2 3次元形状情報としての陰影

ある物体を写した画像の濃淡には、その物体の3次元形状に関する豊富な情報がある。実際人間は1枚の顔写真から人の目鼻立ちを知ることができる。一般に画像の1点の明るさは、3つの要素——照明、物体表面の反射特性、物体の形状という3つの要素——で決まると考えて良い。この3要素は複雑に絡み合って画像の明るさに寄与するから、画像の明るさの分布に対する形状の寄与分だけを独立に考え、そこから形状の情報を取り出すことは一般には難しい。しかし、明るさの分布が形状の変化分だけで決まると考えてよい場合がある。この場合の画像の濃淡を陰影という。

陰影とは、物体表面の面の向き空間的な変化が生み出す画像の明るさの変化を言う。物体表面の各点で、その点近くの照明条件と反射特性が分かれば、画像の明るさは面の向きだけの関数として書ける。この関係を画像照度等式と呼ぶ。この等式を使えば、画像の明るさから面の向きに関する情報を取り出すことができる。この考え方に従った代表的な方法が、1枚の画像の陰影に基づいて形状を復元しようとする陰影からの形状復元や複数枚の画像を用いる照度差ステレオ (photometric stereo) である。

## 1.3 本研究の背景と位置付け

陰影に基づく形状復元のための方法はここ20年以上にわたりコンピュータビジョンの分野で研究されてきた。ここで、これまでの研究の流れを整理しておく。

最初、問題を偏微分方程式として定式化し、これを数値的に解く方法が示された。面の向きが形状の1階微分で表せることから、画像照度等式は形状に関する偏微分方程式と見立てることができる。提案された方法は数値的に不安定であったため、次に、問題を定義域を形状とする汎関数の最小化問題と見て、数値的な反復法により形状を求める方法が提案された。そこでは、与えられた画像の陰影に、画像照度等式に基づいてなるべく近い陰影を与える形状を求めることが

目的とされた。特に問題となったのは、面の向きを経由して形状を表し問題を定式化すること起因する、形状の積分可能性 (integrability) やなめらかさの仮定に基づく問題の正則化、そして数値計算の反復の収束性であった。

このような形状計算のアルゴリズムの研究と並行して、与えられた画像に対して、対応する形状が1つ以上存在し、またそれが1つに決まるのか、といった基礎的な問題も研究された。この解の存在や一意性の問題については、簡単な反射特性の場合に限り、ある程度の成果が得られている。そしてこれと結びつく形で、最初に取りられた方法である偏微分方程式の数値解法の研究にも多くの進展があった。古典的な方法に比べてより数値的に安定な方法がいくつも提案された。その他にも、陰影の微分を解析することで、局所的な陰影から形状の情報を得ようとする研究などがある。ただし、これは形状に関して強い仮定を必要とした。

陰影からの形状復元とは、通常1枚の画像の陰影から形状を復元する問題を言う。画像の1点の明るさだけでは面の向き2自由度分を定めることはできないから、画像の中である程度の広がりを持った陰影を考えないと形状を定めることはできない。

これに対し、視点と物体を固定したまま照明条件だけを変えて複数枚の画像を得、そこから各点ごとに独立に面の向きを定める照度差ステレオと呼ばれる考え方が提案された。照度差ステレオでは、1つの画像の点での画像列にわたる明るさを用いることで、画像面内では局所的に面の向きを定めることが可能になり、形状復元がより確実に行える。この考えにそって様々な照明条件や反射特性に対応するための研究が行われた。

以上の研究は、画像の明るさを決める3要素、すなわち照明、物体表面の反射特性、そして物体形状のうち、形状以外の2要素が既知である場合、すなわち照明と反射特性が与えられている場合に関するものであった。より難しいが興味ある問題として、照明や反射特性が部分的に未知の場合に、画像から3次元形状情報を得る問題がある。この問題に対しても研究が行われており、大きく分けて2つのアプローチが取られた。

1つは、照明条件の知識が不完全なときに、与えられた画像から、形状を推定する前あるいは同時に照明を推定する方法である。陰影からの形状復元の立場からは、形状復元に前もって1枚の画像から照明の方向を推定することが考えられた。ただしこれには形状について面の向きが一樣に分布しているなどの統計的な仮定を必要とした。照度差ステレオの立場からは、簡単な反射特性の仮定の下では、ある程度の不定性を残して、形状と照明を同時に推定できることが示された。同じ原理で、形状復元だけでなく、照明を変えて得た画像列から新たな照明下での画像を合成する方法も考案されている。

もう1つのアプローチは、形状を反映する陰影の特徴量で、照明変化や反射特性によらない

不変量を考えるものである。このような不変量がいくつか存在することが示された。

上でも述べたように画像の濃淡には3つの要素が絡み、明るさの変化を形状の変化だけで説明するのは無理な場合がある。たとえば、物体が照明を遮って陰ができる場合や、照明が場所ごとに変化する場合、また、物体表面上で面どうしが相互に光を反射し合う相互反射の影響が無視できない場合などがある。このような濃淡も考慮した形状復元の方法もいくつか提案されている。しかしこれらは試みの範囲を出ていないものがほとんどである。

以上が現在までの研究を大まかに見たものである。画像の陰影から形状情報を取り出す問題について、多くの方法が提案され、いくつかの重要な知見が得られたが、一般的な場合を対象とする方法は、今のところ実験的な水準にとどまっている。これは、既存の方法の多くが、照明条件や反射特性の正確な事前知識を必要とするのに、実際にはそれらが得られないことが多いからである。

本研究では、照明条件や反射特性などの事前知識が少ないとき、画像から形状に関するどのような情報を得られるかという問題を中心に考える。このような問題を考える動機は次のようなところにある。

まず、照明については次のようなことが挙げられる。われわれ人間は、大抵の場合ある場所を写した画像1枚だけからそこにある物体の形状や配置などを知ることができる。ところがその場所の照明条件についてはそれを正確に言い当てることはできないと言われている。例えば、適当に照明を与えて撮った人の顔写真が1枚与えられたとき、照明がどのようなであったかを正しく当てるのは簡単ではない。人間は、一般に、形状の差には敏感だが、照明の差にはそれほど敏感でないとも言われる。このようなことは、照明の知識が完全でなくとも、画像からある程度の形状の情報を取り出せることを示唆している。

反射特性については次のようなことが言える。前節で述べた陰影からの形状復元や照度差ステレオでは、反射特性は既知であるとされたが、それが誤っている場合には結果は当然誤ったものになる。特に問題なのは、反射特性の誤差が、得られる結果にどのような影響を与えるかを見積もれないことである。多くの方法は反射特性をごく簡単なモデルで近似して、それによって得られる画像照度等式を利用している。反射特性の誤差は、画像照度等式が正しくないことを意味する。陰影からの形状復元の方法では、画像照度等式の誤りによる復元結果の振舞いは一般に予測できない。照度差ステレオでは幾分状況は良くなるが、やはり問題であることには変わりがない。反射特性は、あらかじめ測定しない場合には、一般にはその概形だけが分かっているとするのが自然であろう。概形程度の緩い知識からどのような形状情報が得られるかを考える。

## 1.4 論文の構成

第2章では、画像の明るさがどのようにして決まるかについて述べ、陰影と形状を関係付ける画像照度等式と、照明条件と反射特性の情報をまとめて表す反射率分布について説明する。これは以下の章のすべての議論において基礎となる。また、画像照度等式だけでは完全に濃淡を説明できないことを述べ、その主な要因となる相互反射について説明し、この問題に対する本研究の立場を示す。

第3章ではこれまでに提案されている陰影からの形状復元の研究のうち、特に復元アルゴリズムに関するものを並べ、これらをまとめる。そこでは反射率分布、すなわち照明条件や反射特性は既知とされる。同時に、これまでに若干提案されている照明方向の推定の方法について述べる。また、相互反射などの影響を考慮し、画像照度等式だけでは表せない濃淡をも対象とする形状復元の新たなアプローチについても簡単に述べる。

第4章では、与えられた1枚の画像の陰影に対して、対応する形状が存在し、またそれが1つに決まるかどうかについて述べる。簡単な反射率分布（ランバート反射）を対象とする場合には、この一意性の問題についてこれまでに色々なことが分かっている。ここでは、これをより一般の反射率分布に拡張することを考える。そして、あるクラスの反射率分布に対しては、かなり少ない数しか可能な形状が存在しないことを示す。さらに、任意に与えた濃淡のボタンに対して、何らかの照明条件と反射特性を固定したとき、対応する形状が存在し得るかどうかを議論し、存在しなければ逆にそこから照明条件と反射特性の情報を得られないかを考える。

第4章での議論を踏まえて、第5章では、照明条件や反射特性に依存しない陰影の不変性について述べる。画像の上の陰影のもつ位相的な構造は形状の位相的な構造を反映すると考えられる。これに注目して、濃淡の定量的な解析なしに、画像1枚から凹凸といったおおまかな情報を引き出せることを示す。それは、第4章で議論する問題、すなわち陰影に対して形状を一意に定める問題において、大きな役割を果たす。

第6章では、照明を変化させて得た複数枚の画像から、反射特性がほとんど未知で、変化させた照明条件も未知の場合に、そこから形状情報を取り出すことを考える。具体的には反射率分布がある条件を満たすときに曲率符号が計算できることを示す。そしてこれを照度差ステレオをはじめとする、照明条件を変えて得た複数枚の画像の陰影から形状を復元する手法と比較する。照度差ステレオの方法でも、簡単な反射特性の仮定の下では、照明条件が不明な場合にある程度の任意性を残して形状を定められることがすでに知られているが、本章の手法ではそこで必要とされるような反射特性に対する強い仮定は必要ない。

第7章では、近接光源下の陰影に基づく画像1枚からの形状復元の方法を示す。既存の陰影からの形状復元のアルゴリズムの多くは、画像の投影変換に正射影を、照明に無限遠点光源を、反射特性にランバート面を仮定した場合が多い。ここでは透視投影、近接点光源、非ランバート面を考慮した形状復元の手法を示す。特に投影中心と光源の位置が同じと見なせる場合にいくつかの利点があり、これを利用して内視鏡画像からの胃壁の3次元形状復元の実験を行う。

第8章で第4章から第7章までの研究を要約する。

## 2 画像の生成過程

### 2.1 はじめに

画像の明るさは、照明条件、物体表面の反射特性、そして物体の形状の3つの要素で決まる。照明となる光源から放射された光は、物体表面によって反射された後、カメラのレンズによって画像面に集められて、画像を作る。この章ではこの3要素の関係について簡単にまとめる。一連の過程の逆順、レンズによる集光、物体表面での光の反射の順に述べる。

#### 2.1.1 単 位

光の強さを表すのに、一般に放射照度 (irradiance) と放射輝度 (radiance) という量が使われる。放射照度とはある面に入射する光の強度を表す量で、面積当たりのパワー ( $[W/m^2]$ ) の次元をもつ。一方、放射輝度とは、ある面からある角度に向けて放射される光の強度を表す量で、面積、立体角当たりのパワー ( $[W/(m^2 \cdot sr)]$ ) の次元をもつ。

物体表面のある点において、図2.1のような局所的な座標系を考える。表面の微小領域  $dA_s$  に  $(\theta_i, \phi_i)$  方向から入射した光のパワーを  $d\Phi_i$  とすると、この方向からの光に対する面の放射照度は

$$E = \frac{d\Phi_i}{dA_s}$$

と定義される。また、この面が  $(\theta_r, \phi_r)$  方向の立体角  $d\omega_r$  の空間へ向けて放射する光のパワーを  $d^2\Phi_r$  とすると、この方向  $(\theta_r, \phi_r)$  への面の放射輝度は

$$L = \frac{d^2\Phi_r}{dA_s \cos \theta_r d\omega_r}$$

と定義される。分母の  $\cos \theta_r$  は、放射方向から見た面の投影ひずみを意味する。

### 2.2 画像の生成

この節では、理想的なレンズをもつカメラについて、画像の明るさがどのように決まるかについて述べる。理想的なレンズとは、物空間の点と像空間の点の対応が中心投影の関係にあり、厚みのない1枚のレンズをいう。

考えるべきは、物体表面から放射された光が、カメラのレンズによって集光され、画像面上に

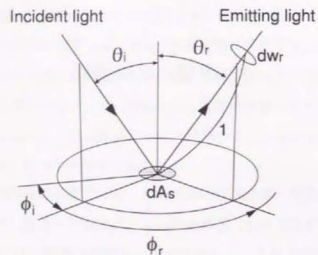


図 2.1. Surface local coordinate system to describe the relation between incident and emitting light.

投影される過程である。画像の明るさとして、画像の放射照度を考える。これは、画像面に入射する光の単位面積当たりのパワーであるから、1 画素に相当するセンサが受け取る光のパワーに比例する量である。画素の大きさがすべて等しいとすれば、この量は画像の濃淡値と同一視できる。一方、物体表面の明るさは、カメラ方向から見たその面の明るさである。これは面の放射輝度を考えればよい。以下では、物体表面の明るさと画像の明るさの関係、すなわち表面の放射輝度と画像の放射照度との関係について、簡単にまとめる [1]。

さて、物体表面のカメラ方向への放射輝度を  $L_s$  とし、画像の放射照度を  $E_i$  とする。図 2.2 において、画像面上の微小な領域の面積  $dA_i$  は、物体上の面素  $dA_s$  と対応する。つまり画像の  $dA_i$  の領域に、物体表面の  $dA_s$  からの光が集光されている。このとき、レンズを中心とする互いの立体角が等しいと解釈すれば、次の式が成り立つ。

$$\frac{dA_i \cos \alpha}{\left(\frac{f}{\cos \alpha}\right)^2} = \frac{dA_s \cos \theta}{\left(\frac{z}{\cos \theta}\right)^2} \quad (2.1)$$

$dA_s$  からの光は、カメラのレンズによって集められ、画像面に到達する。そこで、 $dA_s$  から直径  $d$  のレンズを見込む立体角  $\Omega$  を考えると、これは

$$\Omega = \frac{\pi (d/2)^2 \cos \alpha}{\left(\frac{z}{\cos \theta}\right)^2} \quad (2.2)$$

となる。この立体角  $\Omega$  が十分に小さいとし、画像面上の領域  $dA_i$  に届く光は、物体表面上の領域  $dA_s$  からレンズの方向へ放射され、レンズによって集光されたものがすべてであるとする。画像面の  $dA_i$  に届く光がそれ以外にないとすれば、画像の放射照度  $E_i$  は、レンズ方向への表面

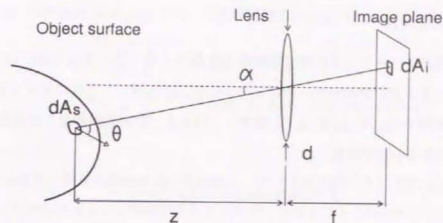


図 2.2. A surface patch of area  $dA_s$  is projected to an image region with area  $dA_i$ .

の放射輝度  $L_s$  を用いて

$$E_i = \frac{L_s dA_s \Omega \cos \theta}{dA_i} \quad (2.3)$$

と表すことができる。上の 3 式から  $dA_s/dA_i$  と  $\Omega$  を消去すると、次の関係が得られる。

$$E_i = L_s \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{f}\right)^2 \cos^4 \alpha \quad (2.4)$$

この結果から、画像の放射照度すなわち画像の明るさは、物体表面とカメラとの距離に依存しないこと、そして物体表面の放射輝度と比例関係にあることがわかる。

(2.4) 式には、視線方向と光軸方向の角度  $\alpha$  の余弦  $\cos^4 \alpha$  の項があり、一定の明るさの物体でも、その画像は画像の周辺部に行くほど明るさが低下することになる。この傾向はコサイン則と呼ばれる。理想レンズでは、このように光量が不均一になる要因はこれだけであり、 $\cos^4 \alpha$  は像高と（実効）焦点距離  $f$  から計算できるから補正はたやすい。しかし現実のレンズ系では、この他にも画像面の光量の不均一を招くいくつかの要因がある（付録 A 参照）。一般には、レンズの設計段階である程度補正されているが、完全に校正された画像を得るためには、あらかじめレンズの画像面での光量分布を測定する必要がある。これ以降は、そのような補正が完全になされて、画像の位置に関係なく画像の明るさと物体表面のカメラ方向への放射輝度は同じ比例係数をもつ比例関係にあるとする。

## 2.3 物体表面での光の反射

前節で、物体表面の明るさ（放射輝度）と画像の明るさとの関係をまとめた。この節では、物体表面の放射輝度についてまとめる。

### 2.3.1 反射分布関数

再び、物体表面上のある点での局所座標系 (図 2.1) を考える。ここでは、 $(\theta_i, \phi_i)$  の方向から入射した光による面の放射照度への寄与を  $\delta E_s(\theta_i, \phi_i)$  とし、これに対する  $(\theta_r, \phi_r)$  の方向への面の放射輝度を  $\delta L_s(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r)$  と表す。このとき、面の放射照度と放射輝度によって、物体表面の反射特性を表す関数

$$F(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = \frac{\delta L_s(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r)}{\delta E_s(\theta_i, \phi_i)} \quad (2.5)$$

が定義される。この関数  $F(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r)$  は、双方向性反射分布関数 (bidirectional reflectance distribution function, 以下 BRDF) と呼ばれ [1], 物体表面での反射特性を表現する関数である。この関数によって、微視的には複雑な光の反射現象を巨視的な立場で簡単に表現できる。

BRDF は、 $(\theta_i, \phi_i)$  方向からの入射光に対する、各反射方向  $(\theta_r, \phi_r)$  への光の反射率の分布を表す。この BRDF を用いると、光源の分布が与えられたとき、物体表面での明るさ、つまり視線方向への放射輝度を計算できる。

まず、 $(\theta, \phi)$  方向の微小な立体角  $d\omega$  を考える。これは、微小な角度  $d\theta, d\phi$  を用いて

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

と表せる。この微小な立体角からの放射輝度を  $L_i(\theta, \phi)$  とする。これは、いま考えている物体表面の点を中心とする半径 1 の球面上の  $(\theta, \phi)$  の点における放射輝度と考えて良い。つまり  $L_i(\theta, \phi)$  は光源の分布を与える。このように考えて、 $(\theta, \phi)$  方向から微小領域  $dA_s$  を見たときに、この領域の相当する立体角は  $dA_s \cos \theta$  である。また立体角  $d\omega$  は球面上において面積  $d\omega$  を持つ。したがって、微小領域  $dA_s$  がうける光のパワーは

$$\begin{aligned} d\Phi_i^s &= L_i(\theta, \phi) dA_s \cos \theta d\omega \\ &= L_i(\theta, \phi) dA_s \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

と表せる。このことから、微小な立体角  $d\omega$  から入射する光による、この表面の放射照度への寄与分  $\delta E_i$  は

$$\begin{aligned} \delta E_i &= \frac{d\Phi_i^s}{dA_s} \\ &= L_i(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

とできる。したがってこの表面の総放射照度  $E_i$  は

$$E_i = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} L_i(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.6)$$

となる。さらに、この表面の  $(\theta_r, \phi_r)$  方向への放射輝度  $L_r(\theta_r, \phi_r)$  は、(2.5) 式から

$$L_r(\theta_r, \phi_r) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} F(\theta, \phi, \theta_r, \phi_r) dE_i \quad (2.7)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} F(\theta, \phi, \theta_r, \phi_r) L_i(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.8)$$

となる。

BRDF は面の材質や微視的構造によって決まる。面の反射特性ごとにそれを計測するほか、ある程度の誤差を許して大まかな特徴をとらえたモデルを作ることも行われている。次にそれについて述べる。

### 2.3.2 ランバート面

ランバート面とは、どの方向から見てもその明るさが等しく見える面のことであり、完全拡散面とも言われる。明るさが等しいとは、反射方向  $(\theta_r, \phi_r)$  への放射輝度がすべて等しいという意味である。したがってランバート面の BRDF は定数となる。理想ランバート面というときは、表面が入射光を全く吸収せず、すべてを反射する面をさすことが多い。このとき

$$\int F(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) d\Omega_r = 1$$

となる。つまり、光が面に入射して反射するまでの間にエネルギーの損失がない。天空の全立体角が  $2\pi$  であることから BRDF は

$$F(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = \frac{1}{\pi} \quad (2.9)$$

となる。

ここで、照明がただ 1 つの点光源であるとき、ランバート面の画像上の明るさを (2.8) 式によって計算してみる。

点光源はいま注目している物体の点に対し  $(\theta_i, \phi_i)$  の方向に距離  $r$  だけ離れたところにおいて、そのパワーは  $I_0$  であるとする。このとき、 $(\theta, \phi)$  方向の放射輝度、すなわち光源の分布を与える関数  $L_i(\theta, \phi)$  は

$$L_i(\theta, \phi) = \frac{I_0}{4\pi r^2} \frac{\delta(\theta - \theta_i) \delta(\phi - \phi_i)}{\sin \theta_i} \quad (2.10)$$

と表せる。(2.9) 式と (2.10) 式を (2.8) 式に代入すると、表面の放射輝度

$$L_r(\theta_r, \phi_r) = \frac{I_0}{4\pi r^2} \cos \theta_i$$

を得る。前節で導いた、画像の明るさと物体表面の放射輝度との関係から、表面上のある点の画像での明るさは

$$E = \frac{I_0}{16} \left( \frac{d}{f} \right)^2 \frac{\cos \theta_i}{r^2}$$

となり、 $\cos \theta_i$  に比例し、この点から光源までの距離  $r$  の二乗に反比例することがわかる。点光源以外の分布光源を照明とする場合も、光源分布  $L_i(\theta, \phi)$  が与えられれば、同様に画像の明るさと周囲環境の関係を導くことができる。

### 2.3.3 理想鏡面反射

前節のランバート面は、放射輝度が反射の方向によらず一定となる面であった。これと対照的な面が鏡面反射面である。これは、面に入射した光を、入射方向に対して方位角  $\phi$  を  $\pi$  だけ変えた方向へ反射する。すなわち吸収のない鏡面反射面の BRDF はデルタ関数を用いて

$$F(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) = \frac{1}{\sin \theta_i \cos \theta_i} \delta(\theta_r - \theta_i) \delta(\phi_r - \phi_i - \pi)$$

とかける。分母の  $\sin \theta_i \cos \theta_i$  は、反射する光のパワーが入射した光のパワーと全く等しくなることを保証している。

ここで、点光源によって鏡面反射面を照らしたとき、これがどのような明るさに見えるかを考えてみる (図 2.3)。

例えば、表面から  $(\theta_s, \phi_s)$  の方向の距離  $r$  にある点光源を考えると、その光源分布  $L_i(\theta_i, \phi_i)$  は

$$L_i(\theta, \phi) = \frac{I_0}{4\pi r^2} \frac{\delta(\theta - \theta_s) \delta(\phi - \phi_s)}{\sin \theta_i}$$

で与えられる。したがって  $(\theta_r, \phi_r)$  の方向への面の放射輝度は、(2.8) 式から

$$\begin{aligned} L_r(\theta_r, \phi_r) &= \iint F(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) L_i(\theta_i, \phi_i) \sin \theta_i d\theta_i d\phi_i \\ &= \frac{I_0}{4\pi r^2} F(\theta_s, \phi_s, \theta_r, \phi_r) \end{aligned}$$

と計算できる。また、画像の明るさはこれに比例する。上の結果は、レンズの焦点を、面の注目している点が画像面に像を結ぶように調節したときに得られる。鏡面に反射する点光源 (つまり鏡像、図 2.3) に焦点を合わせたときは結果が

$$\frac{I_0 S}{4\pi(r+r')^2}$$

となって分母が面から光源までの距離  $r$  だけ異なることに注意する。

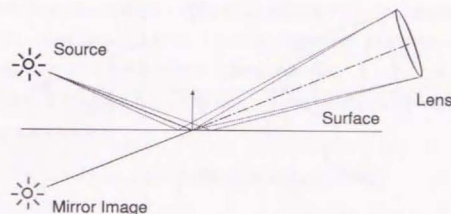


図 2.3. Reflection on a specular (or mirror like) surface.

### 2.3.4 解析的反射モデル

上で述べたようなランバート反射と鏡面反射は単純すぎて実際の反射特性を正確に表すことはできない。表面付近での微視的な光の反射を物理的に解析し、これを数学的に表したモデルがいくつか提案されている。数式が複雑なものが多く、またパラメータも多いため、ランバート反射よりも当然実際の反射特性をよりよく近似できるはずであるが、扱いにくい欠点もある。

Nayar, Ikeuchi と Kanade は Beckmann-Spizzichino のモデル [2] と Torrance-Sparrow のモデル [3] を調べ、計算機実験によって、粗い表面の反射がガウス関数で、なめらかな表面のそれはデルタ関数で近似し、3つの要素からなる反射モデルを提案している [4]。  $(\theta_i, \phi_i)$  方向の光源に対する輝度は

$$C_s \cos \theta_i + \frac{C_{sl}}{\cos \theta_r} \exp \left( -\frac{\alpha^2}{2\sigma_s^2} \right) + C_m \delta(\theta_i - \theta_r) \delta(\phi_r)$$

となる。第1項が拡散反射の成分、第2、3項が鏡面反射の成分である。第2、3項はそれぞれ specular lobe, specular spike と呼ばれる。

Wolff はなめらかなで過度に粗い絶縁性の表面の拡散反射は、次のような式で表されると述べている [5]。  $(\phi_i, \theta_i)$  方向の光源に対する輝度は

$$\rho L_i(1 - F(\theta_i, n)) \cos \theta_i \left( 1 - F \left( \sin^{-1} \left( \frac{\sin \theta_r}{n} \right), \frac{1}{n} \right) \right)$$

となる。ただし  $F(\cdot)$  は Fresnel 反射成分、注目すべきは輝度が観測者の方向にもよることである。  $\theta_i$  と  $\theta_r$  の差が  $60^\circ$  を越えるときは、ランバート反射と相当けはなれたものになり、  $\theta_i$  と  $\theta_r$  がともに  $50^\circ$  以下のときはランバート反射で良く近似できると述べている。

Oren と Nayar は、ランバート面が拡散反射のモデルとして不十分であることを指摘し、それ

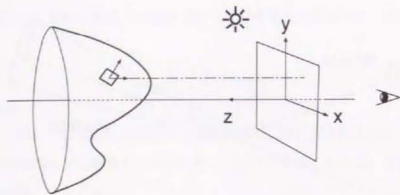


図 2.4. The viewer-centered coordinate.

に代わるモデルを提案している [6, 7]. 照明を平行光としたとき、拡散反射をする物体は、照明方向が視線方向に近づくほど濃淡の差が小さくなる現象が知られている。1 画素が物体表面をカバーする範囲より小さい尺度での表面の凹凸をモデル化することで、この現象を説明する反射モデルを示した。

## 2.4 反射率分布表現

上では BRDF や面の放射輝度と放射輝度の関係を定義するのに、物体表面の局所座標系を用いた。しかし、陰影からの形状復元などを考える場合には、対象物体の形状、特に面の向きをカメラの座標系で表し、それによって画像の明るさを明示的に表現できた方が便利である。

このような考えのもとに Horn が考案したのが反射率分布図 (reflectance map) である [8]。反射率分布図の考え方をを使うと、画像の明るさをカメラの座標系で表した面の勾配ないし面の向きだけを変数とする関数として表現できる。そのためには次の 2 つの仮定が必要となる。

- 画像の投影変換が正射影である
- 照明が物体表面から無限遠に分布し、物体表面の各点から見た照明条件が等しい

これらを仮定しなくても、画像の 1 点と対応する表面の 1 点だけでの話であるとなれば以下の導出は可能であるが、それはあまり意味がない。

さて、具体的に反射率分布図を導くことを考える。そのために、まず、図 2.4 に示すように座標系をとる。画像上の点  $(x, y)$  は、表面上の点  $(x, y, z(x, y))$  と対応する。この点での面の法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とし、視線ベクトルを  $\mathbf{v}$ 、光源の方向を示すベクトルを  $\mathbf{l}$  とする。上の 2 つの条件より、物体表面上のどの点でも  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{l}$  はともに定数となることに注意する。

この物体表面上の点で、前節などで用いた局所座標系を考える。面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を基準

とする入射方向  $(\theta_i, \phi_i)$  は  $\mathbf{n}$  の関数として  $(\theta_i(\mathbf{n}), \phi_i(\mathbf{n}))$  と書ける。また、反射方向  $(\theta_r, \phi_r)$  も、 $\mathbf{n}$  の関数として、 $(\theta_r(\mathbf{n}), \phi_r(\mathbf{n}))$  と書ける。これらは、光源の方向 (入射方向) と視線の方向 (反射方向) が表面のいたるところで等しいという条件から得られる。ここで、方向  $(\theta_r, \phi_r)$  への面の放射輝度が (2.8) 式で与えられたことを思い出し、単一の点光源以外の場合も考慮して光源の放射輝度を  $L_i(\theta_i, \phi_i)$  とすると

$$L_s(\theta_r, \phi_r) = \int F(\theta_i, \phi_i, \theta_r, \phi_r) L_i(\theta_i, \phi_i) d\Omega$$

すなわち

$$L_s(\mathbf{n}) = \int F(\mathbf{n}, \mathbf{l}) L_i(\mathbf{l}) d\Omega$$

となる (光源の放射輝度は面の法線にはよらない)。

2.2 節で導いたように、面の放射輝度と画像の明るさが比例関係にあることから、法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を引数とする適当な関数  $R(\mathbf{n})$  を用いて

$$E(x, y) = R(\mathbf{n})$$

によって画像と形状の関係を簡単に表現できる。ここで  $\mathbf{n}$  は  $(x, y)$  の関数  $\mathbf{n}(x, y)$  であることに注意する。面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の代わりに、対象の形状を表す関数  $z(x, y)$  の勾配  $(p, q) \equiv (z_x, z_y)$  を用いると

$$E(x, y) = R(p, q) \quad (2.11)$$

と表せる。この関数  $R(p, q)$  のことを反射率分布図と呼ぶ。Horn と Sjöberg はこれを BRDF と関連付けている [1]。

### 2.4.1 画像照度等式

上では表面の点すべてについて、照明条件が同じであるとしたことによって、等式  $E(x, y) = R(p, q)$  が導かれた。これを画像照度等式と呼ぶ。そしてこのように表される濃淡のことを陰影と呼ぶ。1 枚の画像が与えられたとき、画像照度等式に基づいて画像から各点での  $(p, q)$  さらには形状  $z(x, y)$  を計算することが陰影からの形状復元である。これについては第 3 章で詳しく述べる。

本論文では、このような陰影に基づいて画像から形状の情報を取り出すことを考える。しかし上のような照明条件が表面上で均一であるという仮定がいつも成り立つわけではない。これについては次節に述べる。

## 2.5 相互反射

陰影とは、上で述べたように、画像の任意の点で反射率分布  $R(p, q)$  は共通であり、明るさは純粋に面の向き関数として表せるとの仮定に基づく。しかし実際の物理はこのように簡単ではない。光源からの光は面で反射され空間の様々な方向へ拡散する。ある光は直接センサに入り、残りの光は再び面で反射される。この過程は延々と繰り返され、その結果センサに和として届く光が実際の画像の明るさを決めている。この効果—相互反射—は、一般には無視できないことが知られている。

相互反射をビジョンの問題として初めて扱ったのは Koenderink と Van Doorn である [9]。彼らは、相互反射を考慮したランバート面の輝度を Radiosity 等式によって積分方程式の解として表現し、その一般解を導いた。また、光が相互反射するときに物体自身が光を遮蔽する効果により、なめらかでない濃淡のパターンが生成されることに注目し、人の視覚ではそのようなパターンも形状認識の手がかりに使われていると主張している。

Forsyth と Zisserman は、画像の濃淡が画像照度等式で十分に説明できない場合があることを、凹みのある形状について撮影した実画像によって示した [10]。また、ランバート面の仮定の下で、Radiosity 等式の順方向の解によってそのような濃淡をより良く説明できると述べた。彼らは画像の大きさにおさまらない見えない物体の反射の影響が無視できないと説き、画像照度等式が無効であること、陰影からの形状復元が現実的でないことを主張している。

Nayar らは、ランバート面の仮定の下で、一般の形状について、相互反射を考慮した場合の輝度（画像）は、擬似面素（pseudofacet）と呼ばれる元の面素とは異なる面素について、相互反射を考慮しない場合の輝度と同じであることを示した [11]。

### 2.5.1 Radiosity 等式

相互反射を記述するには Radiosity 等式が有効である。コンピュータグラフィックスの分野ではおおいに用いられている。この Radiosity 等式について簡単にまとめる [9]。

物体表面を2つのパラメータを用いて  $\mathbf{x}(u, v)$  と表し、点  $\mathbf{x}$  での面の向きを  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  とする。物体表面をランバート面と仮定する。その他の反射特性については関係が複雑になり取り扱いは極めて困難である。さて、点  $\mathbf{x}$  での光源からの直接光のみによる面の照度を  $H(\mathbf{x})$  と書く。さらに点  $\mathbf{x}$  でのいずれかの方向への輝度を  $N(\mathbf{x})$  とする。ランバート面の仮定によりどの方向かは

関係ないことに注意する  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}'$  の2点間の相互の関係を表す核関数  $K(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$  を

$$K(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \frac{\text{Pos}[\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})] \cdot \text{Pos}[\mathbf{n}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')]}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2}$$

とする。ただし

$$\text{Pos}[a] = \frac{a + |a|}{2}$$

である。点  $\mathbf{x}$  での輝度  $N(\mathbf{x})$  は、同じ点への光源からの直接光による成分と、それ以外の面上すべての点からの間接光による成分の和として、次のような等式として書ける。

$$N(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\pi} \int K(\mathbf{x}; \mathbf{x}') N(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \frac{\rho(\mathbf{x})}{\pi} H(\mathbf{x})$$

反射係数が一定の場合 ( $\rho(\mathbf{x}) = \rho$ ) を考える。このとき第2種の Fredholm 積分方程式となり

$$K_1 = \frac{K}{\pi}$$

$$K_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \int \frac{K(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{\pi} K_{m-1}(\mathbf{y}; \mathbf{x}') d\mathbf{y} \quad (m \geq 2)$$

と定義すると順問題の解は

$$N(\mathbf{x}) = \frac{\rho H(\mathbf{x})}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \int K_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \frac{\rho H(\mathbf{x}')}{\pi} d\mathbf{x}'$$

と表される。

### 2.5.2 疑似面素

物体表面がランバート面であるとするれば、任意の形状の物体について、相互反射を考慮したときの画像は、仮想的な、元の物体とは異なる面素と反射係数をもつ物体について、相互反射を考慮しないときの画像と同じになることが示されている [11]。これについて述べる。

照明は無限遠光源、物体に陰はできないとする。i 番目の面素が対応する面の点を  $\mathbf{x}_i$  とし、面素を投影した面素は平面で近似できるとし、その点での面の向きと反射係数を  $\mathbf{n}_i, \rho_i$  とする。 $\mathbf{x}_i$  での輝度を  $L_i$  とし、輝度の光源からの直接光による成分を  $L_{di}$  とする。Radiosity 等式を離散化した

$$L_i = L_{di} + \frac{\rho_i}{\pi} \sum_{j \neq i} L_j \int_{S_j} K(\mathbf{x}_i; \mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_j$$

を得る。 $S_j$  は面素  $j$  の対応する表面の微小領域。

$$K_{ij} = \int_{S_j} K(\mathbf{x}_i; \mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_j$$

と書く、これを用いて Radiosity 等式はさらに

$$L_i = L_{ei} + \frac{\rho_i}{\pi} \sum_{j \neq i} L_j K_{ij}$$

と書けて、 $L = [L_1, L_2, \dots, L_M]$ ,  $L_s = [L_{s1}, L_{s2}, \dots, L_{sM}]$  を定義すると

$$L = L_s + PKL$$

と書き直せる、面の向きと反射係数の積を要素とする  $M \times 3$  行列

$$B = \left[ \frac{\rho_1}{\pi} n_1, \frac{\rho_2}{\pi} n_2, \dots, \frac{\rho_M}{\pi} n_M \right]^T$$

を定義すると、ランバート面の仮定から  $L_s = BI$  であるから

$$L = (I - PK)^{-1} BI$$

と表せる、ただし  $I$  は点光源の方向と強さを表す 3 次元ベクトルである、ここで

$$\tilde{B} = (I - PK)^{-1} B$$

とおくと、輝度は  $L = \tilde{B}I$  と書けるようになり、行列  $\tilde{B}$  の行ベクトル  $b_i$  について、面の向きが  $b_i/|b_i|$  であって、反射係数が  $|b_i|$  の面を仮想的に考えると、相互反射を考えずにこの面の輝度を計算すると、元の面の相互反射を考慮した輝度と等しくなる、この  $b_i$  を疑似面素と呼ぶ、これを用いて相互反射を考慮した形状推定の方法も示されている [11]、これについては 3.7 節でも述べる。

#### Koenderink-Van Doorn の疑似面素

Koenderink と Van Doorn は文献 [9] で同じ疑似面素 (psuedofacet) という言葉を異なる概念に用いている、これについて説明しておく。

疑似面素  $P_k(\mathbf{x})$  を核  $K(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$  の固有関数

$$\frac{1}{\pi} \int K(\mathbf{x}; \mathbf{x}') P_k(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mu_k P_k(\mathbf{x})$$

$$\int \|P_k(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x} = 1$$

と定義する、これによって輝度  $N(\mathbf{x})$  と光源からの直接光による照度  $H(\mathbf{x})$  を

$$N(\mathbf{x}) = \sum_k n_k P_k(\mathbf{x})$$

$$H(\mathbf{x}) = \sum_k h_k P_k(\mathbf{x})$$

と書く

$$n_k = \frac{\rho}{\pi} \alpha_k h_k, \quad \alpha_k = \frac{1}{1 - \rho \mu_k}$$

となる、Koenderink らは  $\alpha_k$  を  $k$  番目の疑似面素のゲインと呼んでいる、この疑似面素とゲインの考え方を取り入れることにより相互反射を考える必要がなくなる、 $M$  を十分大きい数とし  $N = [n_1, n_2, \dots, n_M]^T$ ,  $H = [h_1, h_2, \dots, h_M]^T$  とおくと

$$N = \frac{\rho}{\pi} \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M] H$$

と表せる、形式的には、相互反射のない凸な物体が一定でない反射係数をもつ場合と同じになることが分かる、これは上の Naylor らのいう疑似面素 (pseudofacet) とは全くことなる。

#### 2.5.3 物体自身の作る陰による濃淡の不連続

Forsyth と Zisserman は相互反射が濃淡に及ぼす影響について簡単な実験を行い、それが無視できないと述べている [10]、彼らは、平面上に半円筒をおき、斜めから光を当てたときの濃淡が定性的には図 2.5 のようになることを例として挙げている、まったく同じ例を Koenderink と Van Doorn も挙げている [9]、図中 A では円筒と平面との間の相互反射で輝度が増している、B は光の当たる部分と陰との境界に当たる、F は円筒の平面に落とす陰の境界である、興味深いのは C で輝度が極値をとることであり、これは F から右の平面による円筒への光の反射による、これらは画像照度等式では記述できない濃淡変化である、これを Forsyth らは画像照度等式の限界と位置付け、陰影からの形状復元が困難であることを指摘した、Koenderink らは、人間はこのような濃淡変化も形状知覚に利用していると示唆している。

#### 2.5.4 相互反射に対する本論文の立場

上では、相互反射の数学的な取り扱いをまとめ、それが濃淡に与える影響について具体的な例を考えた、それによると相互反射をはじめとする要因によって画像照度等式が必ずしも満足できるものでないということを述べた。

しかしこのような部分は表面の反射特性に応じて大きくも小さくもなり、相互反射の存在がただちに画像照度等式を無意味なものにすると考えるのは間違いだと考える、本論文は、むしろ、相互反射などの要因で画像照度等式がそれほど信頼できないことを十分考慮し、厳密に画像照度等式を利用しなくとも得られる情報は何かということを考えて行く。

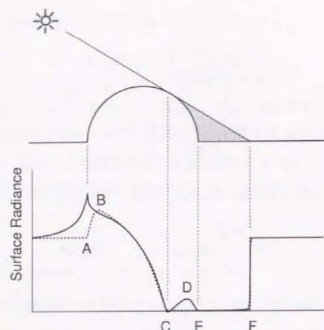


図 2.5. Typical profile of the surface radiance for a half cylinder on planar background.

## 2.6 ま と め

この章では画像の生成過程についてまとめた。物体表面の反射特性と照明条件を固定すると、画像の明るさは面の向きの関数として書ける。反射特性が物体面上で変化せず、正射影、無限遠光源を仮定し、相互反射が無視できるとすると、画像は画像照度等式によって反射率分布と結び付けられることを述べた。また、相互反射の画像におよぼす影響についても簡単にまとめた。

以降の章では陰影と画像照度等式に基づいて画像から形状情報を得る問題とそのための方法について考えてゆく。

## 3 陰影からの形状復元アルゴリズム

### 3.1 はじめに

陰影からの形状復元問題とは、1枚の濃淡画像から画像の陰影を手がかりに物体の3次元形状を推定する問題である。本章では、これまでに提案されている復元アルゴリズムを要約する。非常に多くの研究があるが、そのうちの代表的なものを取り上げて、基本的な考え方を網羅する。まず、照明条件、物体表面の反射特性とともに（表現方法は色々あるにせよ）既知である場合を考える。その後、照明方向の推定方法について触れ、最後に相互反射など陰影に限らない濃淡をも対象としたいいくつかの試みについてまとめる。

### 3.2 陰影からの形状復元問題

陰影からの形状復元問題とは、一般に、正射影と無限遠光源を仮定し、反射率分布  $R(p, q)$  が与えられたとき、次の画像照度等式に基づいて、画像  $E(x, y)$  から物体の形状  $z(x, y)$  を求めることである。

$$E(x, y) = R(p, q)$$

この問題に対し、これまでに提案されている解法は、大きく分けて2つに分類される。1つは画像照度等式を  $z(x, y)$  に関する1階偏微分方程式と見て、何らかの手段で得た初期条件や境界条件を利用して、初期値問題あるいは境界値問題として  $z(x, y)$  を求める方法である [12-22]。もう1つは、 $E(x, y)$  と  $R(p, q)$  の差の画像にわたる積分を  $z(x, y)$  の汎関数と見て、これをしてだけ小さくするような  $z(x, y)$  を求める方法である [13, 14, 23-36]。

偏微分方程式の初期値・境界値問題として解く方法を半局所手法、汎関数の最小化問題とする方法を全域手法と呼ぶことにする。半局所手法では、初期値から決まる部分的な範囲で正しい形状を計算できるが、全体形状を得るには工夫が必要である。領域境界での形状の値を得て境界値問題に帰着できる場合は少なく、たいていは初期値からの求積による形状の計算になる。その過程で誤差が蓄積するから画像のノイズに影響を受けやすいと言われている。全域手法では、初めから形状を近似的に求め、形状の正しさについては何の保証もないことが多い。代わりに画像のノイズには強いと言われている。

これまでに提案されている方法は基本的にすべて、半局所手法と大域手法とに分類できる。以下順にこれらの方法について述べる。

### 3.3 半局所手法

画像  $E(x, y)$  と反射率分布  $R(p, q)$  がともに与えられているとする。半局所手法では、画像照度等式  $E(x, y) = R(p, q)$  を  $z(x, y)$  に関する偏微分方程式

$$F(x, y, z_x, z_y) = I(x, y) - R(z_x, z_y) = 0$$

と見て、これを解くこと考える。解を定めるためには何らかの初期条件、境界条件が必要となる。

#### 3.3.1 特性曲線による方法

陰影からの形状復元を行う方法として、一般的な反射率分布を扱った最初のものが Horn のこの方法 [12, 13] であり、1 階偏微分方程式の一般解をもとめる求積法として標準的な、特性曲線による解法をここでの問題に応用したものである。特性曲線（特性方程式）の考え方にしたとすると、1 階の偏微分方程式は基本的にすべて連立常微分方程式に書き直すことができる。この節の方法は第 4 章で再び触れるので、ここでは連立常微分方程式の導出の部分について特に詳しく述べる。

ある点  $(x, y)$  で奥行き  $z$  と面の勾配  $(p, q)$  が分かっていたとすると、この点から微小な移動  $(\delta x, \delta y)$  を行って、解を延長して求めることを考える。この移動前後での奥行きの変化  $\delta z$  は

$$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

と表せる。同時に、面の勾配の変化  $(\delta p, \delta q)$  は

$$\begin{bmatrix} \delta p \\ \delta q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

と表せる。ただし  $r, s, t$  は奥行き  $z$  の二階の偏微分であり、

$$r = z_{xx}, \quad s = z_{xy}, \quad t = z_{yy}$$

である。次に  $E(x, y) = R(p, q)$  を  $x$  と  $y$  について偏微分する。微分の連鎖法則より、

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_p \\ R_q \end{bmatrix}$$

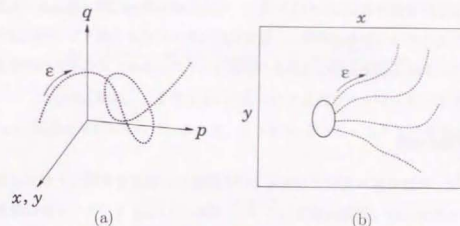


図 3.1. Illustrations of the characteristic strip method. (a) The simultaneous ordinary equations (3.2) describes an orbit of  $(x(\varepsilon), y(\varepsilon), p(\varepsilon), q(\varepsilon))$  in the four dimensional space. (b) From a given curve  $(x(s), y(s), z(s))$ , curves  $(x(\varepsilon), y(\varepsilon))$  in the image (called base characteristic curves) are drawn according to (3.2). On these curves the depth  $z(\varepsilon)$  is calculated.

となる。これを (3.1) 式と見くらべると、点の移動方向を特別に

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p \\ R_q \end{bmatrix} \delta \varepsilon$$

ととると、

$$\begin{bmatrix} \delta p \\ \delta q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \delta \varepsilon$$

となることが分かる。つまり、点の移動方向をその点での反射率分布の勾配の方向に選べば、勾配  $(p, q)$  の変化を求めることができる。以上をまとめると、

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R_p, & \dot{y} &= R_q, & \dot{z} &= pR_p + qR_q \\ \dot{p} &= E_x, & \dot{q} &= E_y \end{aligned} \quad (3.2)$$

と 5 つの常微分方程式になる。ただし微分は  $\varepsilon$  に関するものである。この  $\varepsilon$  は曲線にそった媒介変数であり、たとえば曲線上ある点からはかった曲線の長さなどに相当する。

以上のように、ある点での奥行きと面の勾配が分かっていたら、その点から、反射率分布図により決まる方向へ微小に移動した点においても、奥行きと面の勾配がわかる。(3.2) 式にしたがって、最初の点に端を発する解曲線が生成され、その曲線上で、奥行きと面の勾配が分かるのである。この曲線のことを特性曲線とよび、これに曲線上の奥行きと勾配をあわせたものを特性帯とよぶ。与えられた初期条件（曲線上の奥行きや 1 点での勾配など）から特性帯を延長する。

ただしこの方法は数値計算には向いていない。特性曲線にそって解（奥行き）を延長してゆく際、延長するにしたがって誤差が累積し、特性曲線は最初の点から様々な方向に延びてゆくが、空間と濃淡両方に関する画像の量子化誤差や画像のノイズにより、それぞれの特性帯の奥行きの間にずれが生じてしまうから、これを1つの形状にまとめることは難しかった。

### 3.3.2 等高線の伝播

Bruckstein は、特性曲線の方法とは別な方法で偏微分方程式を常微分方程式に直せることを示し、陰影からの形状復元問題に適用した [15]。同時に Osher は、この方法は陰影からの形状復元問題だけに限らず一般の1階偏微分方程式に適用できることを示している [16]。この方法についても第4章で再度触れ、特に非ランバート面への拡張を行うので、ここではランバート面と視線方向の照明を仮定した元の Bruckstein の方法について簡単にまとめる。

光源として、視線方向と等しい方向  $\mathbf{l} = (0, 0, -1)$  の無限遠にある点光源を考える。画像照度等式は、画像を適当に正規化することによって

$$E(x, y) = R(p, q) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

となる。形状  $z(x, y)$  の高さ  $t$  での等高線 ( $z(x, y) = t$ ) を画像面に投影した曲線を考え、曲線のパラメータを  $s$  としてこれを  $(x(s, t), y(s, t))$  と書くことにする。すなわち  $z(x(s, t), y(s, t)) = t$  である。等高線上では  $t$  は固定で  $z(x(s, t), y(s, t))$  は定数であるから、 $s$  で微分すると

$$p\dot{x} + q\dot{y} = 0$$

を得る。ただし  $\dot{x} = \partial x / \partial s$ ,  $\dot{y} = \partial y / \partial s$  である。

等高線のある点での単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{bmatrix}$$

と表せる。等高線のパラメータ  $s$  を、曲線のある点からはかった長さなどにとると、この法線ベクトルが、常に等高線の外側を向くようにできる。ベクトル  $\mathbf{n}$  は、同じ点  $(x, y)$  での曲面  $z(x, y)$  の3次元法線ベクトル  $\mathbf{m}$  を画像面に射影したものに平行である。画像面上で、法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の方向に  $\delta d$  だけ進むことを考えたとき、移動前後での形状の降下分を  $\delta z$  とすると、これは

$$\delta d = \frac{\delta z}{\tan \alpha}$$

と表せる。ただし  $\alpha = \cos \alpha = \mathbf{l} \cdot \mathbf{m}$  によって与えられる。ここで、この点で  $R(p, q) = \cos \alpha =$

$1/\sqrt{1+p^2+q^2}$  であることを使うと

$$\delta d = \delta z \frac{1}{\tan \alpha} = \delta z \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} = \delta z \frac{E(x, y)}{\sqrt{1-(E(x, y))^2}}$$

とできる。

$z(x, y) = 0$  の等高線が与えられているとき、高さを  $\delta z$  登ったところでの等高線  $z(x, y) = \delta z$  を

$$\begin{bmatrix} x(s, \delta z) \\ y(s, \delta z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(s, 0) \\ y(s, 0) \end{bmatrix} + \delta d \cdot \mathbf{n}$$

のようにして求めることができる。これを微分で書くと、初期条件として高さ 0 での等高線

$$(x(s, 0), y(s, 0))$$

が与えられたときの偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} x_t(s, t) \\ y_t(s, t) \end{bmatrix} = \frac{E(x, y)}{\sqrt{1-(E(x, y))^2}} \begin{bmatrix} \dot{y}/\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ -\dot{x}/\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{bmatrix}$$

として表現できる。この方程式を与えられた初期条件のもとに解けば、全体形状が得られる。ここでは光源の方向として  $\mathbf{l} = (0, 0, 1)$  を考えたが、傾いた光源の場合に適用できる方法 [16, 17, 37] も提案されている。空間で1本1本ばらばらに曲線を伸ばしてゆく特性曲線の方法にくらべ、曲線を発展させて形状を求めるため数値計算の安定性はずっと高い。

### 3.3.3 形状の陽な表現

Dupuis と Oliensis は最適性の原理と動的計画法の考え方によって、形状を陽な表現を導いている [20]。彼らはランバート面と視線と平行な無限遠点光源の場合を考えている。 $\mathbf{r} = (x, y)$  とし終端でのコスト関数を

$$g(\mathbf{r}) = \begin{cases} z(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \text{ が極小特異点} \\ \infty & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定義する。特異点とは視線と面の向きが平行になるような画像の点のこと（第4章で詳しく述べる）、それが極小とは形状  $z(x, y)$  の点がそこで極小となることを言っている。 $\mathbf{u} = (u, v)$  としてコスト関数

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{E^2(\mathbf{r})} - 1 \right)$$

を定義すると、 $\mathbf{r}$ での奥行きは

$$z(\mathbf{r}) = \inf \left[ \int_0^{\tau} \frac{1}{2} L(\mathbf{r}(s), \dot{\mathbf{r}}(s)) ds + g(\mathbf{r}(\tau)) \right]$$

と書ける。極値はすべての  $\tau < \infty$ ,  $\mathbf{r}$  に端を発するすべての区分的連続微分可能な道  $\mathbf{r}(s)$  についてとられる。

Rouy と Tourin は、粘性解理論 (例えば文献 [38] を参照) を陰影からの形状復元問題に適用し [21], 別な解の陽的表示を与えている。これによると画像の点  $\mathbf{x} = (x, y)$  での奥行きは

$$z(\mathbf{r}) = \inf_{l(s) \in L} \left[ \int_0^{|l|} \sqrt{\frac{1}{E^2(\mathbf{x})} - 1} : \left| \frac{\partial l}{\partial s} \right| = 1, l(0) = \mathbf{x}, l(|l|) = \mathbf{m} \right]$$

で与えられる。ただし  $L$  は  $\mathbf{x}$  と極小の特異点  $\mathbf{m}$  をつなぐすべての道である。

### 3.3.4 最小降下の原理

Bischel と Pentland は、形状の情報を常に高いほうから低い方へ延長してゆくという、最小降下の原理 (minimum downhill principle) を導入し、それに基づく形状復元の方法を提案した [22]。形状の高低はランバート面なら光源方向からはかり、それ以外は反射率分布に応じて定めるとしている。

画像のある点  $(x, y)$  へ向けて  $\phi$  の方向に微小な距離進み、進む前の点の形状情報を伝播させることを考える。この方向の形状の勾配 (すなわち方向微分) は、 $(x, y)$  での面の勾配  $(p, q)$  を用いて

$$\sigma(\phi) = p \cos \phi + q \sin \phi \quad (3.3)$$

と表せる。 $(x, y)$  での明るさ  $E(x, y)$  によって  $E(x, y) = R(p, q)$  から  $(p, q)$  は拘束される。そのような  $(p, q)$  の中で (3.3) 式を最大にするように  $(p, q)$  を選ぶと決める。

このように  $(p, q)$  を決めることにし、色々な  $\phi$  について、 $(x + ds \cos \phi, y + ds \sin \phi)$  から点  $(x, y)$  へ形状情報を伝播させると、 $\phi$  ごとに異なる推定  $z^i$  が

$$z^{i+1}(x, y, \phi) = z^i(x + ds \cos \phi, y + ds \sin \phi) - ds \sigma(\phi)$$

と得られる。この中で光源にもっとも近い  $z$  を選び、もし  $z(x, y)$  が近いならそれを残す

$$z^{i+1}(x, y) = \max_{\phi} \{ \sup_{\phi} [z^{i+1}(x, y, \phi), z^i(x, y)] \}$$

という更新を行う。これを初期情報を与える点を除く画像の全点で反復計算する。これによって特異点などの初期情報を伝播させることができ、全体形状が求まることを示している。

### 3.4 大域手法

半局所手法では、基本的には与えられた初期条件の近くのある範囲の形状しか求めることはできない。これに対し大域手法では全体形状を漸近的な反復法で求めようとする。非常に多くのアルゴリズムが提案されている。

大域手法では、画像  $E(x, y)$  と反射率分布  $R(p, q)$  がともに与えられているとき、 $E(x, y)$  と  $R(p, q)$  の差ができるだけ小さくなるように形状  $z(x, y)$  を求めることを考える。具体的には

$$\iint (E(x, y) - R(p, q))^2 dx dy$$

を最小にする解  $(p(x, y), q(x, y))$  を求めることを考える。これを直接最小にする解は無数に存在し、解  $(p, q)$  が物理的に意味のある形状に対応するとは限らない。この問題の解決のため、様々な方法が試された。そのバリエーションと具体的な数値計算の方法 — 主に収束性 — の2つが中心的なテーマとなる。

#### 3.4.1 初期の方法

大域手法の中でも最も有名な方法は、変分原理により評価関数を最小化する解 (形状) が満たすべき微分方程式 (オイラー方程式) を得てそれを数値的に解くもので、Ikeuchi と Horn [23] による方法が最初である。しかしそれ以前にも変分法に基づかない方法が提案されていた。Strat [25] と Smith [26] の方法である。しかしこの Smith と Strat の方法は収束するどころか、正しい解に到達してなおその後には必ず発散することが Durou と Maitre によって示されている [27]。これは収束しないことが証明された極端な例だが、唯一 Lee の方法 [28] を除き、すべての大域手法において収束性は保証されていない。つまり、解が常に求まるとは限らず、これは大域手法の欠点の1つである。そこで、ここではそれらの方法について簡単にまとめ、数値計算の方法がどのように導出されていたかを見る。

まず Strat の方法 [25] を Horn の解説 [39] にしたがって簡単に述べる。最初に画像照度等式の誤差  $E(x, y) - R(p(x, y), q(x, y))$  を小さくするように  $(p(x, y), q(x, y))$  を決めることを考える。具体的には離散和

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (E_{i,j} - R(p_{i,j}, q_{i,j}))^2$$

を最小化することを考える。この解は無数にあるので、隣接する勾配の間に成り立つ関係を用い

て意味のある解を定める。Strat は画像内の任意の閉曲線  $C$  に対して  $p$  と  $q$  の間に次の関係

$$\oint_C (p(x, y)dx + q(x, y)dy) = 0$$

が成り立つことから、積分路  $C$  を隣接する 4 つの格子点を頂点とする正方形と見て、上の積分を

$$e_{i,j} = \frac{\varepsilon}{2} [p_{i,j} + p_{i+1,j} + q_{i+1,j} + q_{i+1,j+1} - p_{i,j+1} - p_{i,j+1} - q_{i,j+1} - q_{i,j}]$$

と近似し、これが 0 になることを条件として取り入れた。  $\varepsilon$  は座標の格子間隔である。これを取り込んだ最小化すべきコスト関数は

$$\varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (E_{i,j} - R(p_{i,j}, q_{i,j}))^2 + \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} e_{i,j}^2$$

である。  $\lambda$  は画像の誤差と閉路積分の誤差をバランスさせる係数である。この式を  $p_{k,l}, q_{k,l}$  で微分した式を 0 と置いて

$$\varepsilon^2 (E_{k,l} - R(p_{k,l}, q_{k,l})) R_p(p_{k,l}, q_{k,l}) - \frac{\lambda}{2\varepsilon} [e_{k,l} + e_{k-1,l} - e_{k-1,l-1} - e_{k,l-1}] = 0,$$

$$\varepsilon^2 (E_{k,l} - R(p_{k,l}, q_{k,l})) R_q(p_{k,l}, q_{k,l}) - \frac{\lambda}{2\varepsilon} [e_{k-1,l} + e_{k-1,l-1} - e_{k,l-1} - e_{k,l}] = 0$$

を得る。この式から、両式から  $R(p, q)$  に含まれない  $p_{i,j}$  と  $q_{i,j}$  だけを抜き出し、次のような反復のためのスキームを得ている。

$$p_{i,j}^{k+1} = \bar{p}_{i,j}^k - \bar{q}_{i,j}^k + \frac{\varepsilon^2}{\lambda} (E_{i,j} - R(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k)) R_p(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k),$$

$$q_{i,j}^{k+1} = \bar{q}_{i,j}^k - \bar{p}_{i,j}^k + \frac{\varepsilon^2}{\lambda} (E_{i,j} - R(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k)) R_q(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k),$$

ただし

$$\bar{p}_{i,j} = \frac{1}{4} [(p_{i+1,j+1} - 2p_{i+1,j} + p_{i-1,j-1}) + 2(p_{i,j+1} + p_{i,j-1}) + (p_{i-1,j+1} - 2p_{i-1,j} + p_{i-1,j-1})],$$

$$\bar{q}_{i,j} = \frac{1}{4} [(q_{i+1,j+1} - 2q_{i+1,j} + q_{i-1,j-1}) + 2(q_{i,j+1} + q_{i,j-1}) + (q_{i-1,j+1} - 2q_{i-1,j} + q_{i-1,j-1})],$$

$$\bar{p}_{i,j} = \frac{1}{4} (p_{i+1,j+1} - p_{i-1,j+1} + p_{i-1,j-1} - p_{i+1,j-1}),$$

$$\bar{q}_{i,j} = \frac{1}{4} (q_{i+1,j+1} - q_{i-1,j+1} + q_{i-1,j-1} - q_{i+1,j-1}).$$

次に Smith の方法 [26] を同じく Horn の解説 [39] にしたがって (変分原理を用いて) 述べる。

Smith の原論文では Strat の方法と同じく離散化して微分を用いてアルゴリズムを導いている。まず面の向きを

$$l = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad m = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

と表す。次を最小化することを考える。

$$\iint_{\Omega} (E(x, y) - R(l(x, y), m(x, y)))^2 + \lambda ((\nabla^2 l)^2 + (\nabla^2 m)^2) dx dy$$

2 番目の積分項は正則化項である。オイラー方程式は

$$(E - R)R_l - \lambda \nabla^4 l = 0, \quad (E - R)R_m - \lambda \nabla^4 m = 0$$

となる。次の差分近似を用いる。

$$\{\nabla^4\} \approx \frac{20}{\varepsilon^4} [l_{i,j} - \bar{l}_{i,j}]$$

ただし

$$\bar{l}_{i,j} = \frac{1}{20} [8(l_{i+1,j} + l_{i-1,j} + l_{i,j+1} + l_{i,j-1}) - 2(l_{i+1,j+1} + l_{i-1,j-1} + l_{i-1,j+1} + l_{i+1,j-1}) - (l_{i+2,j} + l_{i-2,j} + l_{i,j+2} + l_{i,j-2})]$$

である。  $m$  についても同様の近似を行い、  $(l_{i,j}, m_{i,j})$  を分離して

$$l_{i,j} = \bar{l}_{i,j} + \frac{\varepsilon^4}{20\lambda} (E_{i,j} - R(l_{i,j}, m_{i,j})) R_l(l_{i,j}, m_{i,j}),$$

$$m_{i,j} = \bar{m}_{i,j} + \frac{\varepsilon^4}{20\lambda} (E_{i,j} - R(l_{i,j}, m_{i,j})) R_m(l_{i,j}, m_{i,j})$$

を得る。これより次の反復則

$$l_{i,j}^{k+1} = \bar{l}_{i,j}^k + \frac{\varepsilon^4}{20\lambda} (E_{i,j} - R(l_{i,j}^k, m_{i,j}^k)) R_l(l_{i,j}^k, m_{i,j}^k),$$

$$m_{i,j}^{k+1} = \bar{m}_{i,j}^k + \frac{\varepsilon^4}{20\lambda} (E_{i,j} - R(l_{i,j}^k, m_{i,j}^k)) R_m(l_{i,j}^k, m_{i,j}^k)$$

を得た。

いずれの方法 (Strat と Smith) も、ある初期値から出発して上の計算を反復することで形状を漸近的に求めようとする。しかし上で述べたようにこれら数値計算は不安定で収束しないと分かっている [27]。

### 3.4.2 なめらかさによる問題の正則化

3.3.1節の特性曲線による形状の計算方法には、いくつかの問題点があった。それは、特性曲線によってしか形状が計算できず、その過程で誤差が蓄積することと、初期条件の周囲の局所領域しか計算できないということであった。これを克服するため Ikeuchi と Horn は新たな方法を提案した [23]。彼らは問題を  $E(x, y)$  と  $R(p, q)$  の差を小さくするような  $z(x, y)$  を求める最小化問題と定義し、形状のなめらかさによって問題を正則化し変分原理によって最小化を達成することを考えた。勾配空間でなく正射図法（後述）により面の向きを表現することで遮蔽境界を境界条件として利用できるようにもした。後に文献 [24] にあらためて問題点などがまとめられている。

面の向きを勾配空間  $(p, q)$  で表現すると、遮蔽境界では  $p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty$  となるので、遮蔽境界を境界条件として用いることを考えるとこれは不便である。そこで Ikeuchi らは面の向きを勾配  $(p, q)$  でなく次の正射図法と呼ばれる表現

$$f = \frac{2p}{1 + \sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad g = \frac{2q}{1 + \sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

で表した。これを用いて次の汎関数

$$\iint_{\Omega} (E(x, y) - R(f(x, y), g(x, y)))^2 dx dy$$

を最小化することを考える。前述のようにこれを最小化しても意味のある解は得られないため、隣り合う面素の向きは近いはずであるというなめらかさを拘束として取り入れる。具体的には

$$f_x^2 + f_y^2 + g_x^2 + g_y^2 = 0$$

とする。これを正則化項として取り入れた次の汎関数

$$\iint_{\Omega} (E(x, y) - R(f(x, y), g(x, y)))^2 + \lambda (f_x^2 + f_y^2 + g_x^2 + g_y^2) dx dy$$

の最小化を考える。この最小化問題のオイラー方程式は

$$(E - R)R_f + \lambda \nabla^2 f = 0,$$

$$(E - R)R_g + \lambda \nabla^2 g = 0$$

となる。差分近似

$$\{\nabla^2 f\}_{i,j} \approx \frac{1}{\varepsilon^2} [(f_{i,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i-1,j}) - 4f_{i,j}]$$

をオイラー方程式に適用して ( $\varepsilon$  は格子点間隔),  $f_{i,j}$  と  $g_{i,j}$  を分離すると

$$f_{i,j} = \bar{f}_{i,j} + \frac{\varepsilon^2}{4\lambda} (E_{i,j} - R(f_{i,j}, g_{i,j})) R_f(f_{i,j}, g_{i,j}),$$

$$g_{i,j} = \bar{g}_{i,j} + \frac{\varepsilon^2}{4\lambda} (E_{i,j} - R(f_{i,j}, g_{i,j})) R_g(f_{i,j}, g_{i,j})$$

となる。ただし

$$\bar{f}_{i,j} = \frac{1}{4} [f_{i,j+1} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i-1,j}]$$

である ( $g$  についても同様)。これから反復のスキーム

$$f_{i,j}^{k+1} = \bar{f}_{i,j}^k + \frac{\varepsilon^2}{4\lambda} (E_{i,j} - R(f_{i,j}^k, g_{i,j}^k)) R_f(f_{i,j}^k, g_{i,j}^k),$$

$$g_{i,j}^{k+1} = \bar{g}_{i,j}^k + \frac{\varepsilon^2}{4\lambda} (E_{i,j} - R(f_{i,j}^k, g_{i,j}^k)) R_g(f_{i,j}^k, g_{i,j}^k)$$

を得る。この方法にも収束性の証明等は与えられていないが、十分安定で収束性もあると述べられている [39]。

この方法には  $\lambda$  を大きくすると形状が過剰になめらかになり、実際とかけ離れた形状が得られてしまう欠点があった。これは正則化の悪影響として指摘され、これを克服する提案がいくつかなされてきた。Horn らは文献 [39] で、与えられた画像に対する解が一意でない場合には、何らかの解を選ぶ必要が生じるから、正則化項はまさにその解を選ぶために機能する、と主張している。しかし、解が一意であればそのような正則化は好ましくないことも認めている。

### 3.4.3 積分可能性

正則化に代わるものとして、Horn と Brooks は、Strat の方法 [25] ですでに取り込まれていた、勾配  $(p, q)$  が面を表すために  $p$  と  $q$  の間に成り立つべき関係——積分可能性——にあらためて注目し、これを検討している [29, 39]。

まず、面がなめらかであるとは、いたるところで、つまり任意の  $(x, y)$  で

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

であると定義する。これは  $z(x, y)$  が  $C^2$  級であれば常に成り立つ関係で積分可能条件と呼ばれる。逆に  $z(x, y)$  が少なくとも区分的に  $C^2$  級であると仮定するのとはほぼ同じである。なお、Strat は本来の積分形を考えていた [25]。つまり  $p$  と  $q$  は任意の閉路  $C$  での閉路積分が

$$\oint_C p dx + q dy = 0$$

となるという条件を満たすというものである。\$C\$ の内部を領域 \$D\$ とすると、Green の定理より

$$\oint_C p dx + q dy = \iint \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy$$

であるから、\$z(x, y)\$ が \$C^2\$ 級であれば微分、積分の両表現は同値である。

さて、まず最初に積分可能条件を正則化項とするのではなく、拘束条件とする拘束付きの最小化問題を考える。すなわち、ラグランジュ乗数 \$\mu(x, y)\$ を用いて汎関数

$$\iint_{\Omega} (E(x, y) - R(p(x, y), q(x, y)))^2 + \mu(x, y)(p_y - q_x) dx dy$$

を最小化する解を得ることを考える。これのオイラー方程式は

$$\begin{aligned} (E - R)R_p + \frac{1}{2}\mu_y &= 0, \\ (E - R)R_q + \frac{1}{2}\mu_x &= 0 \end{aligned}$$

となる。これから \$\mu\$ を消去すると

$$\begin{aligned} (R_p^2 p_x + R_p R_q (p_y + q_x) + R_q^2 q_y) - (E_x R_p + E_y R_q) \\ = (E - R)(R_{pp} p_x + R_{qq} p_y + q_x) + R_{pq} q_y \end{aligned}$$

となる。この式と \$p\_y - q\_x = 0\$ の両方を満たすものが解である。しかし、これらを満たす解を求める安定に収束する数値計算の方法は見つかっていない。

そこで Horn らは積分可能性を拘束条件とするのではなく「ペナルティ」とする次の汎関数

$$\iint_{\Omega} (E(x, y) - R(p, q))^2 + \lambda(p_y - q_x)^2 dx dy$$

の最小化を考えた [39]。この汎関数の最小化問題のオイラー方程式は

$$\begin{aligned} (E - R)R_p + \lambda(p_{yy} - q_{xy}) &= 0, \\ (E - R)R_q + \lambda(q_{yy} - p_{xy}) &= 0 \end{aligned}$$

となる。上で述べたのと同様な方法により反復のスキーム

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{k+1} &= p_{i,j}^k - \frac{1}{2} q_{i,j}^k + \frac{\varepsilon^2}{2\lambda} (E_{i,j} - R(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k)) R_q(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k), \\ q_{i,j}^{k+1} &= q_{i,j}^k - \frac{1}{2} p_{i,j}^k + \frac{\varepsilon^2}{2\lambda} (E_{i,j} - R(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k)) R_p(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k) \end{aligned}$$

を得る。ただし

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i,j} &= \frac{1}{2} (p_{i,j+1}, p_{i,j-1}) \\ \bar{q}_{i,j} &= \frac{1}{4} (p_{i+1,j+1} + p_{i-1,j-1} - p_{i-1,j+1} - p_{i+1,j-1}) \end{aligned}$$

である (\$q\$ も同様)。文献 [39] には、この方法は Ikeuchi らの方法 [23] にくらべて、より正確な形状が得られると述べられている。代わりに遮蔽境界を条件として用いることは困難になっている。これを克服するためのアイデアが示されている [29, 39] が、有効性には疑問点がある。

また積分可能条件のペナルティの項だけでは若干の数値的な不安定さがあったため、Horn はさらに 3.4.2 節で述べたなめらかさを保証する項を加えた

$$\begin{aligned} \iint (E(x, y) - R(p, q))^2 \\ + \lambda(p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2) \\ + \mu((z_x - p)^2 + (z_y - q)^2) dx dy \end{aligned}$$

という汎関数の最小化を提案している [30]。このとき \$\lambda\$ を少しずつ減じながら反復 (解を更新) することで、数値計算の安定さを保ちつつ同時に解が過剰になめらかになるのを防ごうとした。また数値計算の性能の向上のため、反射率分布を区分的に線形近似する工夫をしている。

この他にも多くの研究がある。Frankot と Chellappa は反復のたびに積分可能な関数への射影を行うことで、積分可能性を実現しようとした [31]。Zheng と Chellappa は \$E(x, y) = R(p, q)\$ の両辺を \$x\$ と \$y\$ で微分した

$$R_x(p, q) = E_x(x, y), \quad R_y(p, q) = E_y(x, y)$$

を滑らかさ拘束の代わりに用いることを提案している [32]。すなわち

$$\begin{aligned} \iint (E(x, y) - R(p, q))^2 \\ + [R_p(p, q)p_x + R_q(p, q)q_x - E_x(x, y)]^2 \\ + [R_p(p, q)p_y + R_q(p, q)q_y - E_y(x, y)]^2 \\ + \mu[(p - z_x)^2 + (q - z_y)^2] dx dy \end{aligned}$$

を最小化することを考えた。真中の 2 項は、画像が滑らかなところでは形状も滑らかであるべきであるという予想を具体化したものとなっている。この他、反復の計算を早くしようとするものなどがある [40]。

### 3.4.4 奥行き直接的復元

上で述べたように積分可能条件を本来の姿で取り入れて、数値計算の方法を作るのは困難である。また積分可能条件は勾配  $(p, q)$  を経由して問題を解こうとしたことで生まれたものであるから、最初から奥行きを何らかのパラメータで表し、それを決定する問題とすればこのような困難さを回避できる可能性がある。このような考え方のもとでいくつかの方法が提案されている。

Leclerc と Bobick は、初めから画像空間を離散化して考え、勾配  $(p, q)$  でなく奥行き  $z$  を変数とすることで積分可能条件を要しない方法を提案した [33]。そこでは  $z_{i,j}$  の関数

$$Q = \sum_{i,j} (1 - \gamma)(E_{i,j} - R(p_{i,j}, q_{i,j}))^2 + \gamma(u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2)$$

が最小化された。  $p_{i,j}$ ,  $q_{i,j}$ ,  $u_{i,j}$ ,  $v_{i,j}$  はそれぞれ  $z_{i,j}$  を差分近似した 1 階と 2 階の導関数である。  $\gamma$  は計算途中で解の滑らかさをコントロールし、最終的には 0 にされる。数値計算のスキームは

$$\frac{\partial Q}{\partial z_{i,j}} = 0$$

から得られる式を元に上で述べたのと同様にして得られるものである。

近年、Wei と Hirzinger は Radial Basis Function(RBF) を応用した方法を提案している [34]。RBF は本来は補間や近似の目的で使われるものである。Wei らは次のガウス関数

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{t}_k, \mathbf{s}_k) = \exp \left\{ - \left( \frac{(x - t_{x,k})^2}{\sigma_{x,k}^2} - \frac{(y - t_{y,k})^2}{\sigma_{y,k}^2} \right) \right\}$$

を用いて奥行きを

$$z(\mathbf{x}, y) = \sum_{k=1}^N w_k \phi(\mathbf{x}, \mathbf{t}_k, \mathbf{s}_k)$$

と表した。パラメータは各 RBF の位置  $\mathbf{t}_k$ 、大きさ  $\mathbf{s}_k$  と重み  $w_k$  である。これを  $W = (\mathbf{t}_k, \mathbf{s}_k, w_k)$  と書く。勾配  $(p, q)$  はこの表現を微分すれば解析的に表せる。これを  $z_x(x, y, W)$ ,  $z_y(x, y, W)$  とする。そして評価関数

$$E = \sum_i \left\{ \left[ E_i - R(z_x(x_i, y_i, W), z_y(x_i, y_i, W)) \right]^2 + \lambda \left[ S_1(x_i, y_i) z_{xx}^2(x_i, y_i, W) + 2S_2(x_i, y_i) z_{xy}^2(x_i, y_i, W) + S_3(x_i, y_i) z_{yy}^2(x_i, y_i, W) \right] \right\}$$

を最小にすることを考えた。ただし  $S_i(x, y)$  は local smoothness weight と呼び

$$S_1(x, y) = (1 - |E_x(x, y)|)^2$$

$$S_2(x, y) = \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} |E_x(x, y) + E_y(x, y)| \right)^2$$

$$S_3(x, y) = (1 - |E_y(x, y)|)^2$$

である。画像と反射率分布を反射係数で正規化してあるので  $E_x$  と  $E_y$  はともに 1 より小さいとしてあるがこれは間違った記述であると思われる。またこの付加項の意味は直感的であり「滑らかな曲面ほど画像も滑らかになる」とことと符合すると述べているが、この項が求まる形状にどのような影響を与えるかは定かでない。最小化の数値計算法は確率的勾配法で行っている。すなわち  $i$  番目の画素について

$$\delta W^k = -\beta \frac{\partial E_i}{\partial W} + \alpha \delta W^{k-1}$$

によってパラメータを更新し、これをすべての画素について行う。文献 [34] には良好な実験結果が示されてあるが、滑らかさの付加項の解釈が不明な点と、数値計算の安定性や収束性が疑問として残る。

この他にも、同じような考え方に基づく形状復元の方法がある。Lee と Kuo は曲面を多数の三角形のメッシュで表し、各三角形の面の向きと画像の陰影を対応付け、この関係から形状を求める方法を提案している [35, 36]。

## 3.5 その他の方法

上で述べた半局所手法と大域手法以外に、問題設定の枠組みを変えて形状の復元を試みるいくつかの方法が提案されている。この節ではそれらについて述べる。

### 3.5.1 局所陰影の解析

半局所手法と大域手法では、ある広がりを持った画像の領域で陰影を元に形状を定めることを考えていた。その根底には局所的な陰影から形状を定めることはできないという考えがあった。つまり画像照度等式だけでは画像 1 点の明るさから 2 自由度ある面の勾配を 1 つに定めることはできない。しかし、あらゆる形状を対象とするのではなく、許される形状を制限してやれば、局所的な陰影だけで形状を定めることが可能になる。

Pentland は、形状が局所的に球で近似できる、すなわち 2 つの主曲率が互いに等しい、という仮定の下で、画像の明るさと 1 階、2 階の導関数 (合計 6 つの量) から、ランバート面で

きた物体の面の向き、曲率半径、反射係数と光源の向き（6つの量）までを2通りの不定性を残して定められることを示した[41]。光源の方向や強度さえ求まることは、照明の知識がほとんど要らないことになり、その有効性は大である。つまり画像だけと面がランバート面だという知識だけでほとんどすべて求められる。代わりに、形状が球で近似できるという極めて強い制約を必要とすることが問題であった。実際、多くの形状と画像にこの仮定を適用したとき、不満足な復元結果しか得られなかった。

Lee と Rosenfeld は、照明方向が与えられていれば、同じく局所的な球の仮定とランバート面の仮定の下で、画像の明るさの2階の導関数を用いなくとも、明るさの勾配（1階の導関数）だけから、面のティルト角が定められることを述べた[42]。さらに、表面の2つの点が光源中心座標系で同じティルト角をもつのは、2点での画像の濃淡の勾配方向が等しいときのみであることを示した。

さらに Ferrie と Lavine は、形状が局所的に球面で近似できるという仮定を弱めている[43]。Lee と同様の仮定すなわちランバート面、既知の無限遠点光源の仮定の下で、次の条件を満たす形状について、画像の明るさと勾配から面の向きを定められることを示した。

$$\frac{f_u^2 - f_v^2}{f_u f_v} = \frac{f_{uv} - f_{vu}}{f_{uv}}$$

( $u, v, w$ ) は光源中心座標系であり、 $f(u, v)$  は  $w$  方向の高さで表した形状とする。この条件は、光源中心座標系で、濃淡の勾配が面の向きと等しくなるための必要十分条件になる。

Sara は上のように形状に拘束を加えなくとも、明るさの等しい画像上の線の微分と形状の面の傾きの関係によって、近似的に面の向きを十分よく推定できると述べている[44]。

### 3.5.2 線形な反射率分布

反射率分布が線形、すなわち  $k_1, k_2, k_3$  を定数として

$$R(p, q) = k_1 + k_2 p + k_3 q$$

と表せる場合には、問題はずっと簡単になる。これについて若干の研究が行われているのでそれらについて述べる。

この場合には Horn も述べているように[8]、奥行きは、画像面上での傾き ( $k_2, k_3$ ) をもつ直線上での積分

$$z(s) = z_0 + \int \frac{I(x, y) - k_1}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}} ds$$

によって陽に書ける。直線と直交する方向には奥行き（勾配）に関する何の情報も得られないことに注意。

Pentland はこの場合にフーリエ変換を用いると形状が巧みに計算できることを示した[45]。フーリエ変換の微分公式を利用して、照度方程式から画像と形状を分離したもので、簡単にまとめると次のようになる。まず面の勾配 ( $p, q$ ) のフーリエ変換を考える。フーリエ変換は、空間周波数域での極座標 ( $f, \theta$ ) を用いて、次のように行う。

$$F_z(f, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} z(x, y) e^{-i(xf \cos \theta + yf \sin \theta)} dx dy$$

これによって、面の勾配  $p = \partial z / \partial x$ ,  $q = \partial z / \partial y$  をフーリエ変換し、微分公式を用いて面の形状  $z(x, y)$  のフーリエ変換  $F_z(f, \theta)$  で表すとそれぞれ次のようになる。

$$F_p(f, \theta) = 2\pi \cos \theta f e^{i\pi/2} F_z(f, \theta)$$

$$F_q(f, \theta) = 2\pi \sin \theta f e^{i\pi/2} F_z(f, \theta)$$

ただし、直流成分は省いてある。これを用いて  $E(x, y) = k_1 + k_2 p + k_3 q$  のフーリエ変換を書く

$$\begin{aligned} F_E(f, \theta) &= k_2 F_p(f, \theta) + k_3 F_q(f, \theta) \\ &= 2\pi e^{i\pi/2} (k_2 \cos \theta + k_3 \sin \theta) F_z(f, \theta) \end{aligned}$$

となり、この式の左辺と右辺を入れ換えると次のようになる。

$$F_z(f, \theta) = [2\pi f e^{i\pi/2} (k_2 \cos \theta + k_3 \sin \theta)]^{-1} F_E(f, \theta)$$

すなわち、奥行き  $z(x, y)$  はこれを逆フーリエ変換したものとなる。

実際には方向 ( $k_2, k_3$ ) と直交する成分の情報は得られていないはずだが、これを Pentland は滑らかさの仮定が盛り込まれているのだとしている。しかしこれは正確ではなくより厳密には次のように考えるのが正しい。フーリエ領域での積を対応する画像空間での畳み込みに直すと（仮に  $k_3 \neq 0$  として）

$$h(x, y) = \begin{cases} 1/2 \cdot \delta(k_2 y - k_3 x) & x \geq 0 \\ -1/2 \cdot \delta(k_2 y - k_3 x) & x < 0 \end{cases}$$

という形の関数と画像の畳み込みに他ならないことが分かる（ $\delta$  はディラックのデルタ関数）。これはこの節の最初に述べた画像の線上の積分による奥行きの計算に他ならず、先の Pentland

による滑らかさの仮定とは、 $(x, y) \rightarrow \infty$ での奥行きが0であるとするのであったことが分かる。このような問題点はあるものの、この方法は、画像をフーリエ変換したものにある関数をかけて逆フーリエ変換するだけなので数値的に非常に安定である。線形な反射率分布図のみを対象としているが、Pentland はこれを生物の立体知覚のモデルとして考えている [46]。

### 3.5.3 さらにその他

Pong, Haralick と Shapiro は形状を2次曲面で近似し、画像の陰影から2次曲面のパラメータを推定することを考え、これを非線形最小化問題として定式化して Levenberg-Marquardt 法で数値計算を行っている [47]。これは局所的に実行できるだけでなく、ある程度の大きさの領域で同じ2次曲面である場合に可能な方法である。

## 3.6 照明方向の推定

これまでに述べた形状復元アルゴリズムでは、照明に関する情報は分かっているものとしていた。したがって、これらアルゴリズムを実行する前に何らかの手段で照明に関する情報を取得する必要があるが、与えられた同じ画像から照明の情報を得ることができれば理想的である。この節では1枚の画像から、照明を推定する手法について述べる。

### 3.6.1 統計的推定

Pentland は、ランバート反射の場合に、無限遠点光源の方向を画像から推定する方法を提案している [45, 48]。その方法は、物体表面の面の向きが統計的に一様に分布するとの仮定に基づいている。まとめると次のようになる。ランバート反射の仮定から画像の明るさは  $E = \rho \lambda (\hat{n} \cdot \hat{l})$  と書ける。ここで  $\rho$  は反射係数、 $\lambda$  は光源強度、 $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$  は面の向き ( $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ )、 $\hat{l} = (\alpha, \beta, \gamma)$  は照明方向 ( $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ )、である。画像上で、方向  $\phi$  に関する明るさの方向微分  $E_\phi = E_x \cos \phi + E_y \sin \phi$  を考えると、 $E_\phi = \rho \lambda ((n_1)_\phi \alpha + (n_2)_\phi \beta + (n_3)_\phi \gamma)$  となる。ある方向  $\phi$  に関する画像の色々な場所での  $E_\phi$  の平均  $\langle E_\phi \rangle$  は

$$\langle E_\phi \rangle = \rho \lambda (\langle (n_1)_\phi \rangle \alpha + \langle (n_2)_\phi \rangle \beta + \langle (n_3)_\phi \rangle \gamma)$$

と書ける ( $\langle \cdot \rangle$  は期待値を表す)。面の向きが一様であるとの仮定から、任意の  $\phi$  について  $\langle (n_3)_\phi \rangle$  は0となり、さらに

$$\langle E_\phi \rangle = k(\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi)$$

となる。 $k$  は  $\rho$  と  $\lambda$  さらに  $(n_1)_\phi$  の分布の分散で決まる定数。これより色々な方向  $\phi$  について

$$\begin{bmatrix} \langle E_{\phi_1} \rangle \\ \langle E_{\phi_2} \rangle \\ \vdots \\ \langle E_{\phi_N} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 \\ \cos \phi_2 & \sin \phi_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \phi_N & \sin \phi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{bmatrix}$$

と書ける ( $(\alpha^*, \beta^*)$  は正規化されていない照明方向)。左辺の行列を  $B$  とおくと、

$$\begin{bmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T \begin{bmatrix} \langle E_{\phi_1} \rangle \\ \langle E_{\phi_2} \rangle \\ \vdots \\ \langle E_{\phi_N} \rangle \end{bmatrix}$$

のようにして  $(\alpha^*, \beta^*)$  を推定できる。 $k$  は分散によって

$$k = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}$$

と計算でき、これから  $(\alpha, \beta, \gamma)$  は

$$\alpha = \alpha^*/k, \quad \beta = \beta^*/k, \quad \gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$$

のように決定される。

やはりランバート面、無限遠点光源の仮定の下で、Lee と Rosenfeld [42] は物体表面が局所的に球で近似できると仮定し、面の向きの密度関数を  $f(\sigma, \tau) = (\sin^2 \sigma)/(2\pi)$  と導出した。このことから、照明方向の方位角  $\tau$  を

$$\tau = \arctan \frac{\langle E_y \rangle}{\langle E_x \rangle}$$

と計算できることを示した。ただし  $E_x, E_y$  は面上の局所的な座標系での微分である頂角の推定は、明るさの微分の分散の知識に依存しない方法を提案しているが、方程式は超越方程式になるが、その解については議論していない。

Zheng と Chellappa は物体表面が局所的に球で近似できると仮定し、それによって得られる局所曲面の拘束を利用して推定方法を考案した [32]。照明方向の方位角  $\tau$  は

$$\tau = \arctan \left( \frac{\frac{\beta^*}{\sqrt{\alpha^{*2} + \beta^{*2}}}}{\frac{\alpha^*}{\sqrt{\alpha^{*2} + \beta^{*2}}}} \right)$$

で与えられる。

### 3.6.2 形状が既知の場合

Brooks と Horn は、ランバート面と無限遠点光源の仮定の下でさらに形状が既知のときに光源のベクトルを計算する方法を示した。きわめて単純であるが、ここに記しておく。面のベクトルを  $\hat{n}(x, y)$  とするとき次の汎関数を最小にする  $l$  を求めることを考える。

$$\iint (E(x, y) - \hat{n}(x, y) \cdot l)^2 dx dy$$

$l$  は大きさを光源の強度とし方向を光源の方向とするベクトルである。 $l$  についての微分を 0 とおいて

$$\iint (E - \hat{n} \cdot l) \hat{n} dx dy = 0$$

を得る。これを変形すると

$$\iint E \hat{n} dx dy - \iint (\hat{n} \cdot l) \hat{n} dx dy$$

であり、 $(\hat{n} \cdot l) \hat{n} = \hat{n} \hat{n}^T l$  を使うと、最初の汎関数を最小にする  $l$  が以下のように直接求まる。

$$l = \left[ \iint \hat{n} \hat{n}^T dx dy \right]^{-1} \iint E \hat{n} dx dy$$

### 3.7 画像照度等式に基づかない形状復元手法

2.5 節で見たように、相互反射や物体自身の作る陰など、画像照度等式による画像の濃淡の表現には限界がある。そこで、画像照度等式に基づかない形状復元のための方法がいくつか提案されている。これらはいずれも試みの範疇を出ていないが、この節でまとめておく。

Nayar, Ikeuchi と Kanade はランバート面の仮定の下で、相互反射を考慮した形状復元の方法を示した [11]。そこでは 2.5.2 節で述べた疑似面素の考えが使われている。相互反射をシミュレートし、反復によって疑似面素から真の面素を取り出すアルゴリズムを示した。しかし反復の収束性と、疑似面素から形状を構成して積分可能条件が満たされているかが疑問である。

Langer と Zucker は一様な光源下での濃淡は面の向きで決まるよりも、形状に応じて照明の当たり方が不均一になる効果のほうが大きいと考え、そのための形状復元の方法を示した [49]。また Stewart と Langer はこれを発展させている [50]。

Haddon と Forsyth は shading primitives と呼ばれる、相互反射によらない形状の要素を画像から取り出す方法について述べている [51]。

これらの方法は、濃淡が面の向きだけで局所的に決まるとする陰影が不適当であるとして、その他の要因を取り入れるような形をとっているが、アルゴリズムが現実的でないか、かえって濃淡の説明が不十分となっている。陰影が記述できない濃淡の取り扱いにはさらなる研究が必要である。

### 3.8 ま と め

この章ではこれまでに提案されている陰影からの形状復元問題における形状復元の方法を、主にアルゴリズムを中心に述べた。半局所手法の方法をいくつか述べたが、それらは相互に深く結び付いていることが分かる。これは次の章でも再び検討する。また、照明方向の推定方法についても述べた。さらに相互反射など、濃淡が面の向きだけで局所的に記述できるとする仮定が成り立たないときに、形状復元を行う試みについても述べた。

## 4 陰影に対する形状の存在と一意性

### 4.1 はじめに

この章では、陰影からの形状復元問題における解の存在と一意性について考える。すなわち、画像（陰影のボタン）が1枚与えられたとき、これに対応する形状が存在するか、またそれはただ1つに定まるかを考える。

一般に陰影からの形状復元問題とは、画像  $E(x, y)$  と反射率分布  $R(p, q)$  とが与えられているときに、画像照度等式  $E(x, y) = R(p, q)$  に基づいて、形状  $z(x, y)$  を定める問題である。第3章で述べたような復元アルゴリズムの研究と並行して、どのような条件のときに解が存在し、また一意に決まるかについて、様々な研究が行われてきた。その中で、特異点と呼ばれる  $R(p, q)$  の最大値を与える画像の点が果たす重要な役割が繰り返し述べられてきた。特異点という名前は、そのような点で偏微分方程式  $E(x, y) = R(p, q)$  の解に発生する特異性から来ている。

最初に、このような特異点まわりの局所陰影に対応する局所形状の一意性についての研究が行われた。Bruss は、回転対称で単調な反射率分布図（例えばランバート面と視線まわりに回転対称な照明条件の場合）のときは、凸と凹な解が1つずつあってそれ以外にないことを示した [52]。後に Saxberg は一般の反射率分布についても同様に凸と凹な解が1つだけ存在することを示した [53]。基本的に、曲面の各点はその近傍の形状に応じて凸、凹、鞍点のいずれかに分類される。Bruss と Saxberg の得た結果は凸と凹の形状について、それぞれ局所的な解が1つだけあることを示した。

これに基づいて Oliensis は、ランバート面の場合は、画像に複数の特異点があるとき、これらが凸、凹、鞍点のどれに当たるかを決めれば大域的にも形状が定まると述べた [54, 55]。特異点がそれぞれ凸、凹、鞍点のどれになるかの割り振り方について、視線まわりに回転対称で単調な反射率分布のときは、遮蔽境界の存在を前提として、その割り振り方は一通りしかないと示した [54]。つまりこの場合には、解としての形状は一意に定まる。さらにそれ以外の反射率分布図について、ランバート面であれば、一意には定まらないものの、少ない数の有限個にまで絞れることを示した。さらに、特異点が凸、凹、鞍点のどれに当たるかを実際に画像から定めるためのアルゴリズムも Oliensis と Dupuis [20] や Kimmel と Bruckstein [19, 56] によって提案された。

この他にも存在と一意性に関する研究でいくつかの重要なものがある。Rouy と Tourin は、粘性解理論 [38, 57-62] を応用し、ランバート面の場合、ある領域の境界での奥行きと特異点での奥行きが与えられているとき、領域内部の形状は一意に定まることを述べた [21]。Lions らは、同じ理論の枠組みで、遮蔽境界や光の当たる部分とそうでない部分の境界を利用することも試みた [63]。また特異点にこだわらずこの問題に取り組む研究も若干ある。Brooks と Kozera は、ランバート面でできた単位球が視線と平行な無限遠点光源の下で与える陰影には、単位球以外に対応しないことを示している [64, 65]。

解の存在と一意性に関して、上で述べたような多くの研究が重ねられてきたが、それらは（特異点まわりの局所形状の話題を除き）ほとんどがランバート面を仮定していた。この章ではランバート面に限らない一般の反射特性、照明条件を対象とし、どのような条件があれば、解の存在や一意性についてどのようなことが言えるかを考える。具体的には、反射率分布がある条件を満たせば、可能な解の間には相互に強い関係が存在することを示す。これにより、与えられた陰影に対応する形状は有限個の少ない数しか可能性がないことが示される。

本章では、まず最初に、特異点での形状の 2 階微分係数が、濃淡と反射率分布の 2 階微分係数を用いて陽に書けることを示す。これにより、特異点まわりの局所陰影に対応する局所形状について、常に凸、凹の形状が 1 つずつ存在し、ほとんどの場合に鞍状の形状が 2 つ存在することが言える。凸、凹の形状については、Saxberg と同じ結果を別な方法で導く形になり、鞍状の形状については新しい結果になっている。

次に、これを利用して大域的な形状の一意性を考える。その議論のために、特性曲線による方法 [12, 39] と、等高線による方法 [15, 16] という偏微分方程式の 2 つの解法を利用する。特性曲線による方法は非ランバート面も扱えたが、等高線による方法はそうでなかったため、その拡張を行う。この方法では問題は初期値問題として定式化されるが、順に積分して解を定めて行く過程でそれが一意に行えるために、ある条件が反射率分布図に必要になる。この条件の下では、大域的な形状が画像内の特異点の数とせいぜい同数程度しかないことが示される。

最後に、同じ等高線の方法を利用して大域的な形状の存在について考える。そこでは、なめらかな解が存在する条件がかなり厳しい、つまり勝手な画像に対してなめらかな解が存在することはあまりないことが示される。

これらを述べる前に、本章の議論の基礎となる曲面の微分幾何に関するいくつかの概念をまとめておく。

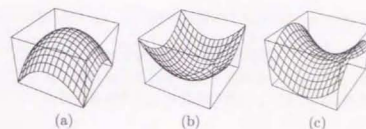


図 4.1. Local shapes and the signs of their principal curvatures. (a) Convex point. (Both signs are positive.) (b) Concave point. (Both signs are negative.) (c) Saddle point. (Positive sign and negative sign.)

## 4.2 曲率符号と局所形状

なめらかな物体表面を考える。この表面の各点での局所形状をその点で表面に接触する 2 次曲面で表すことを考える。ある点での面の向きを  $z'$  軸とし、その点を原点にとるような局所  $x'y'z'$  座標系を取ると、曲面は局所的に  $z'(x', y') = (ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)/2$  と表せる。曲面によっては、2 次の項が縮退 ( $a = b = c = 0$ ) し、3 次の項を考える必要がある場合もあるが、それはここでは考えないことにする。これら 2 次曲面のパラメータ  $a, b, c$  の作る行列  $C$  を

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

とする。行列  $C$  の 2 つの固有値は、この点での曲面の曲率を表し主曲率と呼ばれる。2 つの主曲率の積をガウス曲率（あるいは全曲率）と呼ぶ。ガウス曲率は行列  $C$  の行列式  $\det C$  で表せる。また 2 つの主曲率の和の平均を平均曲率と呼ぶ。これは行列  $C$  のトレースを用いて  $\text{trace } C/2$  と表せる。

局所形状は 2 つの主曲率の符号によって 3 つのクラスに分けることができる。すなわち 2 つの符号が両方ともに正の場合、両方ともに負の場合、1 つが正で 1 つが負である場合の 3 つである。両方ともに正であるような点を凸点、両方ともに負であるような点を凹点、正と負であるような点を鞍点と呼ぶ（図 4.1）。

ガウス曲率と行列式、平均曲率とトレースの関係から、述べたような各点の形状の種類は、行列  $C$  の行列式の符号とトレースの符号で区別される。ある点で  $\det C > 0$  であれば、この点は凸か凹である。さらに  $\text{trace } C < 0$  であれば凸、 $\text{trace } C > 0$  であれば凹である。 $\det C < 0$  であればこの点は鞍点である。

上では、形状の各点での局所座標系  $x'y'z'$  を考えたが、画像を中心とする（視線方向が  $z$  軸に等しい） $xy$  座標系で考えてみる。ある点で勾配が  $(p, q)$  であるとし、その点で形状  $z(x, y)$  に

接する2次曲面

$$px + qy + rx^2 + 2sxy + ty^2$$

を考えると（原点はその点にとる），2次の係数 $r, s, t$ で作る行列

$$H = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$$

と勾配 $p, q$ を用いて，行列 $C$ の行列式とトレースは

$$\det C = \frac{\det H}{(1 + p^2 + q^2)^2} \quad (4.1)$$

$$\text{trace } C = \frac{\text{trace } H + u^T H u}{2(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} \quad (4.2)$$

と表せる。ただし $u = [q, -p]^T$ である。(4.1)式より $\det H$ の符号は $\det C$ の符号と等しい，また(4.2)式より $\det H > 0$ のとき， $\text{trace } H$ の符号は $\text{trace } C$ の符号と等しい。なぜなら $\det H > 0$ かつ $\text{trace } H > 0$ のとき $H$ は正値で，任意の $u$ について $u^T H u$ は正となるから(4.2)式の分子は正となり，逆に $\det H > 0$ かつ $\text{trace } H < 0$ のときは $H$ は負値で分子が負となるからである。このことから， $z(x, y)$ のHesse行列 $H$ の行列式の符号とトレースの符号だけで，曲面の各点でその点が凸，凹，鞍点のどれであるかを判別できることが分かる。

### 4.3 特異点まわりの局所形状の一意性

#### 4.3.1 特異点

一般に1階偏微分方程式はすべて，特性方程式の考え方にしたがって連立常微分方程式に直すことができる。3.3.1節で述べたように，画像照度等式を $z(x, y)$ に関する1階偏微分方程式と見ると，それはパラメータを $\varepsilon$ とする曲線

$$\{x(\varepsilon), y(\varepsilon), p(\varepsilon), q(\varepsilon)\}$$

に関する常微分方程式

$$\frac{d}{d\varepsilon} \begin{bmatrix} x \\ y \\ p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p \\ R_q \\ E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

になる[12, 13]。形状（奥行き）は，この特性曲線の上で $dz/d\varepsilon = pR_p + qR_q$ で与えられる。初期条件 $(x(0), y(0), p(0), q(0)) = (x_c, y_c, p_c, q_c)$ が与えられれば（ある点 $(x_c, y_c)$ での面の傾き $(p_c, q_c)$ が分かれば），これに端を発する特性曲線を求めることができ，その上で奥行き $z$ を計算できる。

このような初期値を与える画像内に存在する情報源として，最大輝度を与える画像の点がある。ここで $R(p, q)$ が $(p_0, q_0)$ でただ1つの最大値をとるとする。すなわち $(p_0, q_0)$ を除く任意の $(p, q)$ について $R(p, q) < R(p_0, q_0)$ であるとする。このとき $E(x, y) = R(p_0, q_0)$ となるすべての点 $(x, y)$ で，面の勾配は $(p_0, q_0)$ となる。つまり画像の中で最大の明るさを与える点では，面の勾配が $(p_0, q_0)$ とすぐに分かる。例えばランバート面，無限遠点光源の場合， $R(p, q)$ は唯一の最大点を持ち，その最大の明るさの値を示す画像の点では，面の向きは照明方向と等しいと分かる。したがって $E(x_0, y_0) = R(p_0, q_0)$ となる点 $(x_0, y_0, p_0, q_0)$ は上の問題の初期条件になり得る。

ただし，このような点はそのままでは初期条件として用いることができない。 $R(p, q)$ はその最大値をとる点 $(p_0, q_0)$ で $R_p = R_q = 0$ である。画像照度等式の微分は

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_p \\ R_q \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

であるから， $R_p = R_q = 0$ ならば $E_x = E_y = 0$ となることが分かる。したがって(4.3)式の左辺は $(x_0, y_0, p_0, q_0)$ ですべて0となってしまう，この点からの特性曲線が構成できない（特性曲線が広がらない）のである。

このような性質から $E(x, y) = R(p_0, q_0)$ となるような画像の点を特異点と呼ぶ。名前の由来は，特性曲線の流れを考えたとき，その流れ場の「特異点」となることによる。

このような特異点まわりの特性曲線の性質に関して，次の定理が知られている[52, 53]。

**定理** 特異点のまわりの陰影 $E(x, y)$ と反射率分布 $R(p, q)$ が与えられたとき，対応する局所形状として凸なものもただ1つ存在し，凹なものもただ1つ存在する。

これは，極限的に見ると特異点から特性曲線を引っ張り出すことができ，それによって凸か凹な局所形状が決まることを述べている。Brussは原点について回転対称な $R(p, q)$ について最初にこれを示し[52]，その後Saxbergが一般の $R(p, q)$ について示している[53]。彼らは特性曲線を決める(4.3)式を， $(x, y, p, q)$ の4次元状態空間の動的システムと見なし，そのシステムの特異点近傍での振舞いを調べることでこれを証明している。具体的には特異点近傍で動的システムを線形近似し，その近似線形システムの性質を調べて証明を行った。

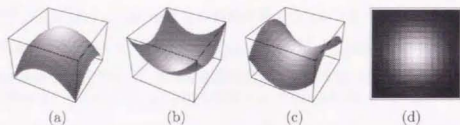


図 4.2. Local shapes around a singular point; (a), (b), and (c) are convex, concave, and saddle points, respectively. They can be represented by the quadratic surfaces  $z = \pm x^2 \pm y^2$  up to scale and rotation. Shadings of all of them when illuminated and viewed from the  $z$ -axis are the same as (d), and thus they are not distinguished only by their local shading.

このような特異点まわりの局所的な陰影と形状の例として、特異点での表面の局所形状が  $z = \pm x^2 \pm y^2$  で表されるランパート面を考える。2 次式の符号によって点  $(x, y) = (0, 0)$  は凸、凹、鞍点になる (図 4.2)。面の法線方向 ( $z$  軸方向) から照明を与え、同じ方向から見たとき、面の明るさは  $E(x, y) = 1/\sqrt{1+p^2+q^2}$  となる。勾配が  $p = \pm 2x$ ,  $q = \pm 2y$  となるので、面の明るさは、点の種類に関係なく同じになり、局所的には  $1/\sqrt{1+4x^2+4y^2}$  となる (図 4.2(d))。点  $(x, y) = (0, 0)$  は特異点となる。ここで逆に、特異点まわりの局所陰影  $1/\sqrt{1+4x^2+4y^2}$  が与えられて対応する形状を得ることを考えると、少なくとも凸なものと同凹なものとは 1 つずつあり (図 4.2(a), (b))、鞍状のものも少なくとも 1 つあることになる。上の定理から凸なものと同凹なものはそれ以外にないことが保証される。しかし、上の定理 (Saxberg の証明 [53]) では鞍状の解については存在や一意性は述べていない。実際、上の例では (図 4.2(c)) を任意の角度  $z$  軸まわりに回転したのも同じ陰影を与えるから、解は無数にある。

次節では、特異点近傍の局所陰影から局所形状を定める問題と見て、上の定理を示す。また述べたように上の定理 (Saxberg の証明 [53]) では、鞍状となる場合の解が明らかでなかったが、鞍状となる解の存在を示す。

### 4.3.2 特異点の種類と局所陰影

特異点  $(x_0, y_0, p_0, q_0)$  では  $E_x = E_y = R_p = R_q = 0$  であった。この点での  $E(x, y)$  の微分と  $R(p, q)$  の微分から、局所的な形状、すなわち  $z(x, y)$  を点  $(x_0, y_0)$  のまわりで

$$z(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) = z_0 + p_0 \delta x + q_0 \delta y + r \delta x^2 + 2s \delta x \delta y + t \delta y^2 + O(\delta x, \delta y \text{ の 3 次以上の項})$$

と表したときの  $r, s, t$  が分からないか考えてみる。 $r, s, t$  は  $z(x, y)$  の 2 階導関数の  $(x_0, y_0)$  での値である。普通の画像の点では  $E(x, y)$  の 2 階の導関数は  $z(x, y)$  の 3 階の導関数によるので、

このようなやり方はうまく行かない (何回微分を重ねても形状のパラメータが増えるだけ、3.5.1 節参照)。しかし特異点では事情は別で、 $R_p = R_q = 0$  であることから  $E(x, y)$  の 2 階導関数は ((4.4) 式を点  $(x_0, y_0)$  で微分して)

$$E_{xx} = r^2 R_{pp} + 2rs R_{pq} + s^2 R_{qq} \quad (4.5)$$

$$E_{xy} = rs R_{pp} + (rt + s^2) R_{pq} + st R_{qq} \quad (4.6)$$

$$E_{yy} = s^2 R_{pp} + 2st R_{pq} + t^2 R_{qq} \quad (4.7)$$

のように  $z(x, y)$  の 2 階導関数までで書ける。この式は、 $E(x, y)$  と  $R(p, q)$  の 2 階導関数を既知とすると、それらを係数とする  $r, s, t$  に関する連立 (代数) 方程式と見ることができる。この方程式が実数解を持てば局所陰影から局所形状が定まり、虚数解しかもたない場合は与えられた陰影に対する形状が存在しないことを意味する。さらに解が不定となるときは局所形状が一意に定まらないことになる。

計算の詳細は付録 B に示すことにし、ここでは結果だけを記す。まず行列

$$A = \begin{bmatrix} R_{pp} & R_{pq} \\ R_{pq} & R_{qq} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} \\ E_{xy} & E_{yy} \end{bmatrix}$$

を定義する。 $E(x, y)$  と  $R(p, q)$  が特異点で凸であることから行列  $A, B$  はともに負値となる。解は、特異点での形状が凹点ないし凸点 ( $rs - t^2 > 0$ ) のとき

$$r = \pm \frac{R_{qq} \sqrt{\det B / \det A} + E_{xx}}{\sqrt{\text{trace}(AB) + 2\sqrt{\det(AB)}}}, \quad (4.8a)$$

$$s = \mp \frac{R_{pq} \sqrt{\det B / \det A} - E_{xy}}{\sqrt{\text{trace}(AB) + 2\sqrt{\det(AB)}}}, \quad (4.8b)$$

$$t = \pm \frac{R_{pp} \sqrt{\det B / \det A} + E_{yy}}{\sqrt{\text{trace}(AB) + 2\sqrt{\det(AB)}}}, \quad (4.8c)$$

となり (2 つの符号がそれぞれ凹と凸に対応する)、特異点での形状が鞍点 ( $rs - t^2 < 0$ ) のときは、特異点において  $R(p, q)$  と  $E(x, y)$  の間に

$$R_{pp} E_{xx} - R_{qq} E_{yy} = 0, \quad (4.9a)$$

$$R_{pp} E_{xy} + R_{pq} E_{yy} = 0, \quad (4.9b)$$

$$R_{qq} E_{xy} + R_{pq} E_{xx} = 0, \quad (4.9c)$$

表 4.1. Existence and uniqueness of the solution around a singular point for each type of local surface.

type of solution	conditions	the number of solutions
convex	none	one
concave	none	one
saddle	$R_{pp}/E_{yy} = R_{qq}/E_{xx}$ $= -R_{pq}/E_{xy}$	infinite
	otherwise	two

の関係が成り立つ場合には

$$E_{yy}r - 2E_{xy}s + E_{xx}t = 0, \quad (4.10a)$$

$$rt - s^2 = -\sqrt{\frac{E_{xx}E_{yy} - E_{xy}^2}{R_{pp}R_{qq} - R_{pq}^2}}, \quad (4.10b)$$

を満たすすべてが解となり、それ以外の場合には

$$r = \pm \frac{R_{qq}\sqrt{\det \mathbf{B}/\det \mathbf{A} - E_{xx}}}{\sqrt{\text{trace}(\mathbf{AB}) - 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})}}}, \quad (4.11a)$$

$$s = \mp \frac{R_{pq}\sqrt{\det \mathbf{B}/\det \mathbf{A} + E_{xy}}}{\sqrt{\text{trace}(\mathbf{AB}) - 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})}}}, \quad (4.11b)$$

$$t = \pm \frac{R_{pp}\sqrt{\det \mathbf{B}/\det \mathbf{A} - E_{yy}}}{\sqrt{\text{trace}(\mathbf{AB}) - 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})}}}, \quad (4.11c)$$

と決まる (付録 B 参照)。以上をまとめたものを表 4.1 に示す。

注目すべきは、勝手な局所反射率分布 (勝手な  $\{R_{pp}, R_{pq}, R_{qq}\}$ ) を与えたとき、特異点まわりの任意の局所陰影  $\{E_{xx}, E_{xy}, E_{yy}\}$  に対して、凹な解と凸な解がそれぞれ 1 つだけ存在すること (Saxberg の証明の確証)。さらに鞍状の解は、ほとんどの場合に正確に 2 つ存在することである。図 4.2 の例のように、鞍状の解が無数に存在する場合は (4.9) 式の特種な場合に限り、たいていの場合 2 つに決まることが分かった。

### 4.3.3 実験

(4.8) 式と (4.11) 式を用いて特異点での形状の 2 階微分係数  $r, s, t$  を推定することについて実験を行った。これら微分係数は特異点 1 点の近傍の形状を表しているに過ぎないが、その点のまわりでの形状を近似的に得られる意味で、これ単独でも価値がある。このようなことを想定して実験を行った。

特にノイズを含む画像を対象としたとき推定が現実的であるかどうかを判断するために、その場合の推定の精度を確かめた。(4.8)、(4.11) 式から推定の精度は、 $R(p, q)$  と  $E(x, y)$  の 2 階微分係数行列  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  の計算の精度に依存することが容易に分かる。ここでは実際の条件を想定して、反射率分布  $R(p, q)$  は、その解析的な式が分かっているものとし、2 階微分  $\mathbf{A}$  は正しく計算できるものとした。ここではノイズを含む画像からの  $E(x, y)$  の 2 階微分  $\mathbf{B}$  の計算に重点をおく。

このような仮定に基づき、ランバート面を仮定し  $R(p, q)$  を

$$R(p, q) = \frac{(l_1 p + l_2 q - l_3)}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

とした。(  $l_1, l_2, l_3$  ) は照明方向であり、以下の実験では (0.2, -0.3, -1.0) とした。この式を用いて画像を合成し、また、上述のように  $\mathbf{A}$  を計算した。

ノイズを含む画像から  $\mathbf{B}$  を精度良く計算するため、簡単な 2 次式のあてはめを画像  $E(x, y)$  について行った。次のような画像のある小さい範囲にわたる和

$$\sum_{i,j \in S} [a_1(x_i - x_0)^2 + a_2(x_i - x_0)(y_j - y_0) + a_3(y_j - y_0)^2 - E(x_i, y_j)]^2$$

を  $a_1, a_2$ , と  $a_3$  について最小化することを考えた。ここで  $(x_0, y_0)$  は特異点の位置である。 $S$  はこの点を中心とする  $n \times n$  正方領域である。上を最小化する  $a_1, a_2, a_3$  を用いて  $\mathbf{B}$  を

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2a_1 & a_2 \\ a_2 & 2a_3 \end{bmatrix}$$

とセットした。上の最小化を行う目的関数において和をとる範囲  $S$  の大きさは慎重に選ぶ必要がある。ノイズの多い画像では  $S$  は十分大きくとって平滑化をはかる必要があるし、ノイズのない場合は  $S$  はなるべく小さくとって正確な 2 階微分係数を求めるのが望ましい。これを見るために以下の実験では 2 つサイズの  $S$  を用意した。

実験には 3 つの曲面 — すなわち 2 次曲面で凸なもの、2 次曲面で鞍状なもの、ガウス関数の形の曲面 — をもちいた。 $z$  軸を視線方向にとり、これらの曲面に対し上のランバート面の仮定から  $64 \times 64$  の画像を合成した。特異点の位置は画像の中で選んだ 1 画素とした。その後、ガウス性のノイズを画像に加え、 $\mathbf{B}$  を述べた方法で求めた。その際  $S$  のサイズは  $9 \times 9$  と  $19 \times 19$  の 2 種類を選んだ。 $\mathbf{A}$  は前述のように解析的に計算し、得た  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  から  $r, s, t$  を計算した。加えるノイズを変えて 100 回の試行を行い、平均 2 乗誤差を計算した。

1 つ目は凸な 2 次曲面 ( $z(x, y) = -1.0x^2 - 0.4xy - 1.2y^2$ ,  $|x| < 1$  かつ  $|y| < 1$ ) である。図

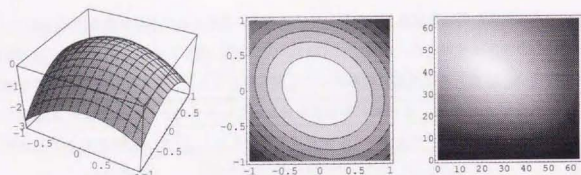


図 4.3. The surface  $z(x, y) = -1.0x^2 - 0.4xy - 1.2y^2$ , its contour map, and the shaded image generated with  $(l_1, l_2, l_3) = (0.2, 0.3, -1.0)$ . The maximal critical point is at  $(23, 41)$ .

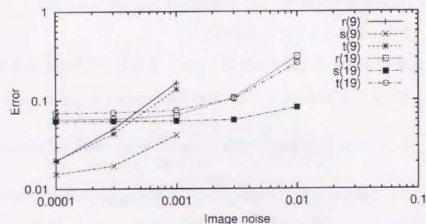


図 4.4. RMS error of the estimated  $r$ - $s$ ,  $s$ - $s$ , and  $t$ - $s$  over 100 iterations for two sizes of  $S$  ( $9 \times 9$  and  $19 \times 19$ ).

4.3に曲面形状，等高線，陰影を示す。特異点は画素  $(23, 41)$  の位置とした。図 4.4 は  $r, s, t$  の平均 2 乗誤差である。2 つ目は鞍状の 2 次曲面 ( $z(x, y) = 0.9x^2 + 1.0xy - 0.7y^2$ ,  $|x| < 1$  かつ  $|y| < 1$ ) である。同様に図 4.5 に曲面形状，等高線，陰影を示す。特異点は画素  $(31, 45)$  の位置とした。図 4.6 に  $r, s, t$  の平均 2 乗誤差を示す。3 つ目は  $z(x, y) = \exp(-x^2 - xy - 2y^2)$  なる曲面である。図 4.7 に曲面形状，等高線，陰影を示す。特異点は画素  $(21, 39)$  の位置とした。図 4.6 に  $r, s, t$  の平均 2 乗誤差を示す。

以上の簡単な実験から，まず前節で導いた計算式により形状の 2 階微分の係数が確かに計算され，さらにある程度のノイズが画像にあるときも安定してそれらが計算されることを確かめられた。

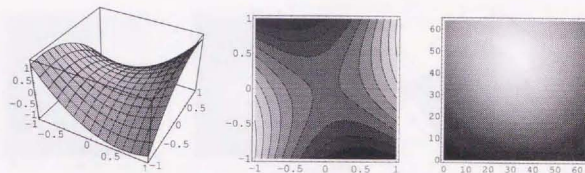


図 4.5. The surface  $z(x, y) = 0.9x^2 + 1.0xy - 0.7y^2$ , its contour map, and the shaded image. The maximal critical point is at  $(31, 45)$ .

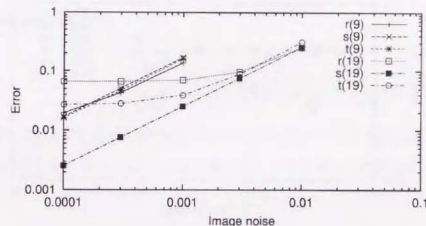


図 4.6. RMS error of estimated  $r$ - $s$ ,  $s$ - $s$ , and  $t$ - $s$  over 100 iterations for two sizes of  $S$  ( $9 \times 9$  and  $19 \times 19$ ).

#### 4.4 等高線による形状の計算

1 階偏微分方程式  $F(x, y, z, z_x, z_y)$  を Cauchy 問題，すなわち常微分方程式の初期値問題に直す方法は，特性曲線による方法の他にもう 1 つあることが知られている。それは  $z(x, y)$  の等高線を利用する方法で，Bruckstein がランバート面の場合の陰影からの形状復元問題についてこれを提案し [15]，同時に Osher は一般的な定式化を行っている [16]。

この節ではこの方法をランバート面だけでなく一般の反射率分布  $R(p, q)$  の場合に拡張し，その後の節で大域形状の一意性を示すのに利用する。

##### 4.4.1 非ランバート面に対する等高線の方法

これまで同様， $R(p, q)$  は最大値を 1 つだけ  $(p_0, q_0)$  でとるとする。形状  $z(x, y)$  を勾配  $(p_0, q_0)$  で決まる方向の高さ関数として  $u(x, y)$  で表す (図 4.9)。これは形状にオクルージョンがない

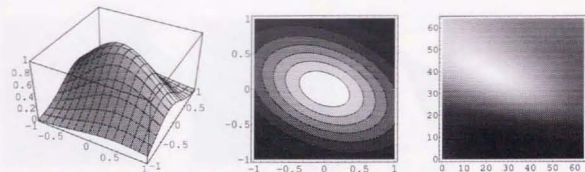


図 4.7. The surface  $z(x, y) = \exp(-x^2 - xy - 2y^2)$ , its contour map, and the shaded image. The maximal critical point is at (21, 39).

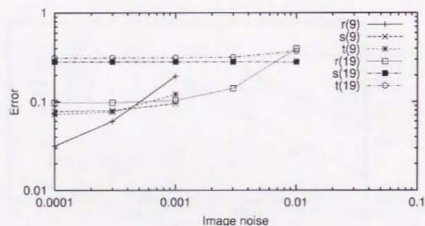


図 4.8. RMS error of estimated  $r$ - $s$ ,  $s$ - $s$ , and  $t$ - $s$  over 100 iterations for two sizes of  $S$  ( $9 \times 9$  and  $19 \times 19$ ).

とすれば可能で

$$u(x, y) = \frac{z(x, y) - p_0x - q_0y}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \text{const.} \quad (4.12)$$

と表せる。右辺の定数は  $u$  をどこを基準にしてはかるかによる。

$u$  方向にある高さ  $t$  で  $u(x, y)$  を切った等高線を、画像面に投影した曲線

$$C(s, t) = \{x(s), y(s) \mid u(x(s), y(s)) = t\} \quad (4.13)$$

を考える (図 4.9)。簡単のため  $C(s, t)$  が単一閉曲線であるとする。そして、ある  $t$  でのこのような  $C(s, t)$  が与えられたとき、 $\delta t$  だけ高さを低くした等高線  $C(s, t + \delta t)$  を求めることを考える。

今求めるのは等高線の形であるので、等高線の各点  $s$  での法線方向の移動量  $\delta d(s)$  を表すことができれば十分であり、これを求めることにする。

$C(s, t)$  の  $s$  の点  $s$  がその点での曲線の法線方向  $(-y, x)$  に  $\delta d$  だけ進んで  $C(s, t + \delta t)$  上に到達し

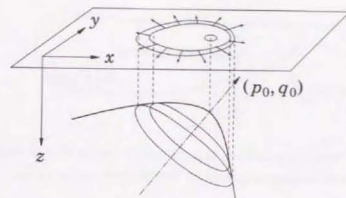


図 4.9. Projections of level contours of  $u(x, y)$  onto the image plane.

たとする。その移動成分は

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \frac{\delta d}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

と書ける。今仮にこの点での面の勾配  $(p, q)$  が分かっているとすれば、 $(\delta x, \delta y)$  移動することによる奥行き方向の変化分を  $\delta z = p\delta x + q\delta y$  と書ける。このときの  $u$  の変化分  $\delta u$  は (4.12) 式より

$$\delta u = \frac{(p - p_0)\delta x + (q - q_0)\delta y}{\sqrt{1 + p_0^2 + q_0^2}}$$

となる。これが  $\delta t$  となるように  $\delta x, \delta y$  を決めるのであるから、(4.14) 式より

$$\frac{\delta d}{\delta t} = \frac{\sqrt{1 + p_0^2 + q_0^2} \sqrt{x^2 + y^2}}{(p - p_0)y - (q - q_0)x} \quad (4.15)$$

と表せる。これを  $v (= \delta d / \delta t)$  と書いて、法速度と呼ぶ。 $p, q$  が分かっているときの等高線の発展を表す微分方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{1 + p_0^2 + q_0^2}}{(p - p_0)y - (q - q_0)x} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

と書ける。慣用的に、各点での法線方向  $\mathbf{n}$  と法速度  $v$  を用いて

$$\frac{\partial C}{\partial t} = v\mathbf{n} \quad (4.17)$$

と書かれる。

等高線を (4.16) 式の常微分方程式にしたがって計算するには、 $p, q$  が必要である。そこで次に、発展の過程で  $p, q$  を決定することについて考える。

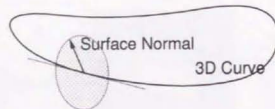


図 4.10. Given a 3D curve on a surface, the normal of the surface at each point on the curve is constrained as it must be perpendicular to the tangent to the curve.

等高線  $C(s, t)$  が分かっているので、各点  $s$  での勾配は自由度を 1 つ分拘束される。図 4.10 のように、等高線上の各点で、等高線の接線と面の向きが直交するからである。さらに等高線  $C(s, t)$  の  $s$  の点での画像の明るさは  $E(x(s), y(s)) = R(p, q)$  によって面の勾配  $(p, q)$  を 1 自由度分拘束する。この 2 つの拘束により  $p$  と  $q$  を決定できる可能性がある。

1 つ目の拘束は次のようにして式で表せる。(4.12) 式より等高線  $C(s, t)$  と  $z(x(s), y(s))$  は次の式を満たす。

$$\frac{z(x(s), y(s)) - p_0 x(s) - q_0 y(s)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = t$$

この式の両辺を  $s$  で微分すると、等高線による勾配の拘束

$$(p - p_0)\dot{x} + (q - q_0)\dot{y} = 0 \quad (4.18)$$

を得る。

したがって等高線の  $s$  の点での勾配  $(p, q)$  は、上式とでこの点での画像照度等式で構成する連立方程式

$$\begin{cases} (p - p_0)\dot{x} + (q - q_0)\dot{y} = 0 \\ R(p, q) - E(x(s), y(s)) = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

の解である。与えられた  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $E(x, y)$  に対して、 $p$ ,  $q$  が拘束される様子を図 4.11 に示す。 $R(p, q)$  はただ 1 つの最大値を  $(p_0, q_0)$  でととしたので、解はたいていの場合 2 つ以上存在する (図 4.11 (a))。 (4.18) 式を用いると (4.15) 式の  $v$  は最終的に

$$v = \pm \frac{\sqrt{1 + p_0^2 + q_0^2}}{\sqrt{(p - p_0)^2 + (q - q_0)^2}} \quad (4.20)$$

と書ける。

今、等高線  $C(s, t)$  が次の時刻の等高線  $C(s, t + \delta t)$  に向かって進む方向 (内向きか外向きか)、すなわち (4.15) 式 ((4.20) 式) の符号が分かっているとすると、 $C(s, t)$  は単一閉曲線であるので、

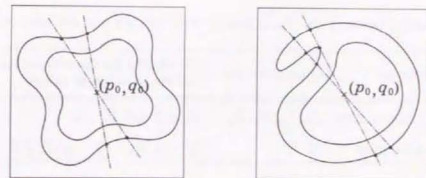


図 4.11. The number of intersections of the line passing through  $(p_0, q_0)$  with a contour of  $R(p, q)$  must be less than two for the unique evolution of the level contour.

曲線に向きをつけることができ、1 点でこの符号を決めると曲線のすべての点で (4.15) 式の符号は同じになる。この符号は分母の  $(p - p_0)\dot{y} - (q - q_0)\dot{x}$  で決まる。たとえば正の符号として

$$(p - p_0)\dot{y} - (q - q_0)\dot{x} > 0$$

のとき、(4.19) 式の連立方程式にこの条件を加えて、 $(p, q)$  の候補を絞ることができる。(4.19) 式の解が 2 つのときは、この符号によって 1 つに絞り込むことができ、面の勾配を決められる。

このことから、大雑把に言って (4.19) 式が解を 3 つ以上もたないことが、 $(p, q)$  を等高線の各点で一意に定め、ひいては等高線を一意に発展させるための条件と言うことができる (図 4.11)。  $(p, q)$  平面で考えると、「 $(p_0, q_0)$  を通るすべての直線と  $R(p, q)$  の等高線の交点が 2 つしかない」と言い換えることができる。詳しい証明は付録 C に記すが、厳密には、

$$(p - p_0)R_p + (q - q_0)R_q \neq 0 \quad (4.21)$$

と局所的に表せる。

あとは初期曲線となる等高線を得ることができれば、それから等高線を発展させられる。この初期曲線として、特性曲線の方法と同じく特異点を利用できる。Bruckstein と Kimmel は、数値計算を行う際に、特異点のまわりに十分小さい円を描き、それを初期曲線とすることを提案している [15, 17, 18]。より望ましいのは 4.3.2 節で述べた方法で凹か凸の特異点まわりの局所形状を計算し、その等高線を初期曲線とすることであろう。また理屈の上では、凸ないし凹な特異点まわりには特性曲線を引き出して局所形状を計算できるわけであるから、それから等高線を作ったりすることは明らかに可能であり、凸ないし凹な特異点から等高線を発展させられると言える。

いずれにせよ、 $R(p, q)$  が (4.21) 式を満たせば、以上のようにして等高線を凹か凸の特異点から発展させて、特異点まわりのある範囲で形状を一意に (凹と凸それぞれの場合で) 決定できる。

表 4.2. Comparison between the characteristics strip method and the level-curve method.

Methods	Quantities used	Conditions for the uniqueness (except at singular points)
Characteristics	$E_x, E_y, R_p, R_q$	$R_p \neq 0$ and $R_q \neq 0$
Level-curves	$E, R$	$(p - p_0)R_p + (q - q_0)R_q \neq 0$

どの範囲まで形状を決定できるかは (4.15) 式の法速度  $v$  を見ると分かる。正常に等高線が発展するのは  $v$  の絶対値が 0 でない有限の値をとっている限りである。  $p = p_0, q = q_0$  で  $v = \infty$  となることから、等高線が特異点に到達するまでであると分かる。つまり、ある凸の特異点から始め、等高線が最初に別の特異点に到達するところまで形状を一意に定められるということである。

以上より次のようなことが言える。

**定理.**  $D$  を画像面  $(xy$  平面) の単連結 (開) 領域とし、内部に一つだけ特異点  $(x_0, y_0)$  を含むとする。特異点  $(x_0, y_0)$  で形状が凸であるとしたり、これを初期値として上に述べた方法で等高線を発展させ、これを  $D$  の境界に接するまで続けるとする。このとき、接するまで発展が一意に行えるための十分条件は、  $(p_0, q_0)$  を除く任意の  $(p, q)$  で

$$(p - p_0)R_p + (q - q_0)R_q \neq 0 \quad (4.22)$$

となることである。

#### 4.4.2 特性曲線と等高線の関係

表 4.2 に特性曲線を用いる形状復元の方法と等高線を用いる方法の比較を示す。両方法とも、初期値問題の解を与えるものであり、解の存在は自明である。解の一意性の条件が問題になる。特性曲線によって形状を計算するとき、それが一意に定まるとは、特性曲線が分岐しないことであり、その条件は (特異点以外で)  $R_p \neq 0, R_q \neq 0$  と表せる。等高線が一意に定まる条件は (4.21) 式が成立することであった。

画像から見た等高線  $(x(s), y(s))$  の接方向  $(\dot{x}, \dot{y})$  は、画像のある点での勾配  $(p, q)$  によって決まり、(4.18) 式より  $(q_0 - q, -(p_0 - p))$  であった。したがって等高線の法線方向は  $(p_0 - p, q_0 - q)$  で与えられる。これを踏まえて  $R(p, q)$  に仮定された条件 (4.21) 式

$$(p - p_0)R_p + (q - q_0)R_q \neq 0$$

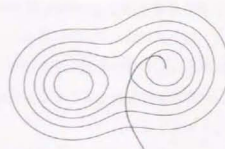


図 4.12. An arbitrary curve that is never tangent to the level contours of a surface always reaches a maximal point (or a minimal point, depending on the initial direction).

を見ると、この式が等高線の法線方向  $(p_0 - p, q_0 - q)$  と  $R(p, q)$  の勾配方向  $(R_p, R_q)$  が決して直交しないことが分かる。基底特性曲線 (画像上の特性曲線) の進行方向は  $(R_p, R_q)$  であったから ((4.3) 式)、基底特性曲線は等高線と決して接することがなく、常に横切ることが分かる。このことから、次の定理が示せる。

**定理.** (4.21) 式を満たす  $R(p, q)$  と、ある  $z(x, y)$  から作った画像  $E(x, y)$  が与えられたとする。ある点  $(x, y)$  での勾配  $(p, q)$  が与えられたとき、その点に端を築する特性曲線は、 $z(x, y)$  の  $(p_0, q_0)$  方向での極大点ないし極小点 (すなわち  $u(x, y)$  の極大・極小点) に必ず到達して終る。

上で述べたように、特性曲線と等高線とは接しないから、最初に特性曲線を伸ばす向きが上昇の向きならば、常に  $u$  方向へ上昇して行く他はない。接することなく上昇してゆくと必ず  $u$  の極大点に到達するから、これが証明となる (図 4.12)。最初の向きとして下向きを選べば、極小点に到達する。厳密には特性曲線が  $u(x, y)$  の鞍点に入る場合も考えられるが、わずかな振動で鞍点に入らなくなること、入っても再び上昇する特性曲線をそこから始められるから同じである。極大点、極小点とは特異点に対応する形状の点であることに注意する。後でこの定理を用いることにする。

#### 4.4.3 実世界での反射特性との対応

上で述べたように、反射率分布  $R(p, q)$  が最大点  $(p_0, q_0)$  を除く任意の点  $(p, q)$  で

$$(p - p_0)R_p + (q - q_0)R_q \neq 0$$

を満たすとき、等高線の方法によって、形状復元の問題は初期値問題として定式化でき、解が存在すればそれは一意に決まる。このような不等式の条件を満たす反射特性が実世界でどのようなものに相当するかについてここで考える。

すでに述べたように、上の条件を勾配空間で幾何学的に考えると、図 4.11 に示したように、

$R(p, q)$  の最大点  $(p_0, q_0)$  を通る任意の直線と  $R(p, q)$  の等高線が接することがない、というように表現される。このことから極大・極小点が最大点以外にあってはならないことが分かる。したがって鏡面反射成分を含んだ反射特性は上の条件を満たさないから除外することになる。しかし、鏡面反射を含まない純粋な拡散反射のみからなる反射特性では、述べた幾何学的解釈によって上の条件は満たされたと考えて良い。

以前から等高線の方法が適用されてきたランバート面は当然上の条件を満たす。この節での議論によって、ランバート面を 1 要素として含む非ランバート性拡散反射の集合を考え、それが含むどの反射特性にも等高線の方法を適用することが可能になった。単なるランバート面から一般の拡散反射にその枠を広げたことに意義がある。あらゆる反射特性の中の 1 つの標準クラスとして、この条件を満たす反射率分布  $R(p, q)$  (をもつ反射特性) を考えている。

## 4.5 大域形状の一貫性

前節では、ランバート面でなくても反射率分布がある条件を満たせば、等高線の方法で凸ないし凹の特異点まわりにある程度の範囲で形状を一意に定められることを述べた。次にこれを元に大域的な形状の一貫性について考える。まず最初にこれまで分かっているランバート面の場合について述べ、その後に 4.4.3 節の反射特性を考慮した新しい結果を述べる。

### 4.5.1 ランバート面の場合

Oliensis は、ランバート面について、特性曲線の流れを解析し、大域的な解の一貫性に関する結果を導いた [54, 55]。光源が視線方向まわりに対称な場合には次の定理が成り立つ [55]。

**定理.** a) 物体はなめらかで穴でなく、画像がその物体が自分自身で表面を隠さないような (self-occlusion が無い) 視点から得たものである、b) 面の反射特性が Bruss 反射関数 (下に述べる) である、c) 遮蔽境界がすべて画像内にあってそれはなめらかな閉曲線である、d) 特異点是有限個ですべて非退化 (4.2 節の行列  $C$  について  $\det C \neq 0$ ) であるとする、e) 特異点での  $E(x, y)$  の Hesse 行列は異なる固有値をもつ、の 5 つの条件の下で陰影から形状は一意にさだまる。

Bruss 反射関数とは全単射の任意の関数  $f$  について  $R(p, q) = f(p^2 + q^2)$  となるものを言う。この証明では、特性曲線が (ランバート面、無限遠光源の場合に) 形状の上を走る、光源方向から見た最急降下曲線に相当することを利用している。ランバート面、無限遠点光源では、照明の方向を  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$  として画像は

$$E(x, y) = R(p, q) = \frac{l_1 p + l_2 q + l_3}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

とかける。特性曲線  $(x(s), y(s))$  の画像の各点での方向は  $[R_p, R_q]^T$  であり、これは

$$R_p = \frac{l_1}{(1 + p^2 + q^2)^{1/2}} - p \frac{l_1 p + l_2 q + l_3}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}$$

$$R_q = \frac{l_2}{(1 + p^2 + q^2)^{1/2}} - q \frac{l_1 p + l_2 q + l_3}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}$$

である。空間内では特性曲線は  $(x(s), y(s), z(x(s), y(s)))$  と書ける。 $\dot{z} = p\dot{x} + q\dot{y}$  であるから、 $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$  の微分は

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T)\mathbf{l}$$

と書ける。曲面上の特性曲線の方向  $d\mathbf{r}/ds$  は、照明方向  $\mathbf{l}$  を、曲面の接平面に射影したものであり、それは照明方向に対する曲面の最急降下曲線に他ならないことが分かる。特性曲線のこの性質から、凸な特異点に端を発した特性曲線は凹な特異点に収束するか、あるいは遮蔽境界に到達することが分かる。まず画像内のすべての特異点の種類が既知とすると、物体の像は画像上の特性曲線で重複することなく覆われ、特性曲線の一貫性から、大域形状も一意であると言える。さらに特異点の種類割り当て方も 1 通りしかないことを示した (これについては後述)。これが上の定理の証明の概略である [55]。

視線に対して傾いた照明については、解を有限個まで絞れることを Oliensis は示している [54]。ただしその結果は上の定理とともに証明において、特性曲線が最急上昇曲線になるというランバート面の性質を利用して、そうでない一般の反射特性には適用できなかった。そこで 4.4.3 節の反射特性ではどうなるかを考える。

### 4.5.2 全体形状の決定

仮に画像のすべての特異点の種類 (凹, 凸, 鞍点) が分かっていたとすると、全体形状を一意に定められるかを考える。凸あるいは凹の特異点から発展させた等高線が別な特異点に至るまでの形状は一意に定まることは上で述べた。大域形状が一意に定まるとは、凸な特異点すべてから発展させた等高線 (群) が画像 (の形状が投影されている部分) をすべて覆うかどうかで決まる。

これについて Kimmel と Bruckstein は、形状が Morse 関数であると仮定すると次のように形状が決まることを述べた [19]。この仮定は、Monkey Saddle ( $z = x^3 - 3xy^2$ ) と呼ばれる曲面に代表されるような、特異な曲面を除外するものである。この仮定の下では、4.2 節で述べた曲率に関する行列  $C$  について曲面のすべての点で  $C \neq \mathbf{O}$  となる。また、Oliensis [54] 同様に、特異点で形状が非退化であること ( $\det C \neq 0$ ) を仮定する (Kimmel らは [19] でこのことを明確



#### 4.5.3 特異点の種類の割り当ての一意性

上では特異点の種類はすべて分かっているものとした。次に、特異点の種類の割り当てが一意かどうかを考える。

画像に  $n$  個の特異点があるとし、それぞれを  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) と表す。凸な特異点の集合を  $E_v$ 、凹な特異点の集合を  $E_c$ 、鞍状の特異点の集合を  $S$  と書く。問題は各  $s_i$  が集合  $E_v$ 、 $E_c$ 、 $S$  のどれに含まれるか、その分け方である。

Shimshoni, Kimmel と Bruckstein は、ランバート面と視線と平行な照明を仮定し、凸と凹の特異点の個数と鞍状の特異点の個数の差が 1、つまり  $|E_v + E_c| - |S| = 1$  と分かっているとき ( $|\cdot|$  は要素の数を表す)、集合  $S$  はただ 1 つに決まる (したがって  $E_v + E_c$  も決まる) ことを示した [56]。この個数の条件は、考えている範囲の外側が等高線に囲まれている場合や、遮蔽境界が画像内に見える場合などに得られる。 $S$  が 1 つに決まることの証明は、ある特異点を凸あるいは凹と決めたとき、そこから発展させた等高線が最初に到達する特異点 (鞍点であった) が画像だけで決まることを利用している。照明が視線方向に平行で面がランバート面なので、発展を開始する特異点が凸でも凹でも等高線が最初に接触する特異点は同じになり、簡単に証明できる [56]。彼らは集合  $E_v + E_c$  をさらに  $E_v$  と  $E_c$  に分ける一意性については何も述べず、その分け方の分だけ形状が存在するかもしれないとしている。

これに対し 4.5.1 節で述べたように Oliensis は、ランバート面と視線に平行な照明の下では、上の条件 ( $|E_v + E_c| - |S| = 1$ ) があれば、 $E_v$ 、 $E_c$ 、 $S$  をすべて一意に定まることを示した [55]。傾いた照明の場合には、いくつかの拘束が得られることを述べた。それは、(i) ある特異点が凸であると分かれば、そこに端を発する特性曲線が画像だけから計算でき、すべての特性曲線が覆う領域内と領域境界の特異点の種類を決定できる、(ii) そうやって種類の分かった特異点についてこれを繰り返すことにより、画像のほとんどの特異点の種類を決められる、というものであった。

ランバート面ではこのような結果が得られている。ここでは 4.4.3 節の反射特性を対象とする一意性について考える。(4.21) 式を満たす反射率分布  $R(p, q)$  に対し、前節で示した等高線による局所形状の決定や特性曲線の性質から次のようなことが言える。

**定理.** 2 つの割り当て方  $\{E_v, E_c, S\}$ ,  $\{E'_v, E'_c, S'\}$  が可能であったとする。このとき

$$E_v \cap E'_v = \emptyset \text{ かつ } E_c \cap E'_c = \emptyset.$$

が成り立つ。

すなわち、2 つの割り当て方の間で、同じ特異点を凸ないし凹とすることはない、というものである。これは可能な割り当て方を大きく減じる。この定理を言い換えると、画像の中にある特異点の個数とただか同数程度しか種類の割り当て方、ひいては全体形状は存在しない、となる。なぜならある特異点を凸とすると残りの特異点の種類が特定されるからである。画像の特異点の中に凸な特異点が少なくとも一つは含まれるとすると、どれを凸とするかという選び方しかない。したがってこのようなことが言える。以下にこの定理を示す。

ある特異点  $s_i$  を凸である ( $s_i \in E_v$ ) としたとき、そこから別の特異点に到達するまでの等高線の発展は、画像だけで決まる。到達した特異点を  $s_j$  とすると、 $s_j$  は鞍点 ( $s_j \in S$ ) である。 $s_i$  を凸と決めたときに鞍状の特異点  $s_j$  を選ぶこの過程を

$$s_j = F_v(s_i)$$

とかく。同様に凹な特異点  $s_i \in E_c$  から鞍点  $s_j \in S$  を選ぶことができ、これを

$$s_j = F_c(s_i)$$

と書く。

ある特異点  $s_i$  が  $s_i \in S$  である、すなわち鞍点であるとしたとき、4.3.2 節の結果より、その特異点まわりの形状は 2 つ存在した (無限個になる特殊な場合はない) と仮定する)。このいずれであるかが分かるとき、4.4.2 節に示した定理により、そこから上向きに特性曲線を伸ばすと、最終的に形状の極大点のどれかに到達する。すなわちそれは凸の特異点である。特性曲線の初期位置によってどの特異点に達するかが決まり、そのときの特性曲線は画像だけで描ける。

以上より上の定理は次のようにして示せる。仮に  $s \in E_v \cap E'_v$  であったとする。すなわち、2 つの割り当て方  $E_v$  と  $E'_v$  の間で同じ特異点を共有したとする。ただちに画像のみから等高線を発展させることができ、鞍点  $s' = F_v(s)$  を見つけることができ、 $s' \in S \cap S'$  となる。この  $s'$  は鞍点であるから局所形状は 2 通り考えられるが、鞍点の片側の形状はそこに届いた等高線により分かるので、1 つに決めることができる。したがってこの点から特性曲線を上向きに伸ばすと図 4.14 のグラフでの下流にある特異点がどれか 1 つ求まる。この過程も画像だけで決まる。その特異点を  $s''$  とすると、上の議論から  $s'' \in E_v \cap E'_v$  である。 $s''$  についても  $s$  と同じ操作を行うと、鞍点  $s'''$  を見つけることができる。 $s' \neq s''' (= F_v(s''))$  なら  $s'''$  について  $s'$  と同様のことを繰り返す。 $s' = s'''$  ならそこで等高線を併合し、発展させて新たに鞍点を選ぶ。これを繰り返すと  $E_v = E'_v$ 、 $E_c = E'_c$ 、 $S = S'$  となり、2 つの割り当て方が実は全く同じであったことになる。これは最初の条件に矛盾するから、証明されたことになる。

図 4.14 (c) を例にこの手順を考える。例えば  $s_6$  が  $E_0$  と  $E'_0$  に共通の凸点であったとする。まず  $s_6$  から等高線の方法により鞍点  $s_2$  を特定する。この時点で  $s_2$  は  $S$  と  $S'$  に共通の鞍点となる。次に  $s_2$  から特性曲線を伸ばすと  $s_1$  が  $s_3$  の凸点にたどり着く。例えばそれが  $s_3$  だったとすると、この点は再び  $E_0$  と  $E'_0$  共通の凸点と特定される。さらに  $s_3$  からの等高線によって  $s_5$  が共通の鞍点となり、次に特性曲線によって  $s_1$  も共通の凸点と特定される。 $s_1$  と  $s_3$  からの等高線は  $s_5$  で併合することができ、等高線の発展を続けられる。 $s_{11}$  の鞍点では等高線の発展は止まらず、 $s_7$  が凹点と特定される。後は同じようにすれば、すべての特異点の種類が 2 つの割り当て方の間で同じ。すなわち  $E_0 = E'_0$ ,  $E_c = E'_{c'}$ ,  $S = S'$  となってしまう、矛盾を導ける。

以上により、上で述べたように可能な割り当て方はかなり少なくなり、せいぜいどの特異点を凸とするかの選び方、すなわち高々特異点と同数個しか形状の可能性はないことが分かる。また、Oliensis なども述べているように [54, 55]、遮蔽境界が利用できる場合など、考えている領域  $D$  (穴がないとする) の境界  $\partial D$  上で面の勾配が必ず外向きになっているようなときは、 $D$  内部の特異点の種類の数について

$$|E_0 + E_c| - |S| = 1 \quad (4.23)$$

という関係が成り立つ。これは 4.5.2 節の Mountaineer's Theorem の内容と同様の意味をもち、これが正しいことは図 4.14 でも確認できる。この数の制限を合わせると、特異点の種類可能な割り当て方はさらに少なくなる。

また、上の定理の条件を満たすような、複数の特異点の割り当て方それぞれに、大域的に定めらな形状が常に存在するとは限らない。むしろ次の節に述べるように、定めらな形状を与える特異点の割り当て方は、かなり少ない数しか存在しないと分かる。

## 4.6 局所・大域形状の存在について

これまで考えてきたのは、ある形状  $z(x, y)$  と反射率分布  $R(p, q)$  から作った画像  $E(x, y)$  に対して、解があるかということであった。元の形状  $z(x, y)$  は明らかに解であり、それだけが唯一の解かどうかを論じた。もう 1 つの興味あるテーマとして、ある  $R(p, q)$  を仮定したとき、形状と無関係に任意に与えた  $E(x, y)$  に対して画像照度等式を満たす形状  $z(x, y)$  は 1 つでも存在するかということがある。存在しない場合の  $E(x, y)$  (と  $R(p, q)$ ) を Impossible Shaded Image などと呼び、そのような陰影に関する若干の研究がある [55, 66, 67]。

画像照度等式  $E(x, y) = R(p, q)$  が示すように、画像は勾配すなわち形状の 1 階微分と関係する。したがって連続な反射率分布を仮定すると、与えられた画像  $E(x, y)$  が連続ならば一般に対

象物体の形状  $z(x, y)$  はなめらか (微分可能) であると考えてよい。形状がなめらかでないのに画像が連続になることも理論的には有り得るがそれは特殊である (後述)。一般的な画像では形状のなめらかでない部分は画像の不連続性を生む。そこで、連続な画像を考えるとき、形状復元において解が存在するとは、微分可能な  $z(x, y)$  が存在することであると考えることにする。

Horn あるいは Brooks, Chojnacki と Kozera は、画像照度等式が Eikonal 方程式 (視線まわりに回転対称な照明の下での陰影) で書ける場合について、対応する形状が 1 つも存在しない濃淡が存在することを示した [66, 67]。また Oliensis は、ある  $z(x, y)$  に基づかない勝手な濃淡では、特性曲線が交差し得ることを指摘した。これは同じ点に 2 つの異なる  $(p, q)$  が与えられることになり、形状がなめらかでないことに相当すると述べている [54, 55]。Saxberg もこれを指摘している [53]。彼らはみな、これらの現象から反射率分布の情報を得ることができるのではないかと示唆している。

ここでは、この問題を等高線の方法を用いて考える。特性曲線の方法では 2 階連続微分可能な形状が前提となるが、等高線の方法では 1 階微分可能なら良いので、上で述べたようになめらかさは 1 階微分可能性であるからこの点で都合がいい。まず、与えられた画像に解がない、すなわち対応するなめらかな形状がない、という状況は、発展の過程で等高線自体がなめらかでなくなることで示す。これは、曲線 (曲面) の発展方程式における shock の発生 (後述) と同様を考えることができ [37]、粘性解と呼ばれる偏微分方程式の弱形式解と深いつながりがある。最後に、このような解の存在の有無により反射率分布  $R(p, q)$  の矛盾を検出することが可能かどうかについて検討する。

### 4.6.1 粘性解となめらかでない解

Rouy と Tourin は文献 [21] で陰影からの形状復元問題に初めて粘性解理論を応用した。そこでは、領域境界での実行きが既知である場合に、領域内部での解の一意性と存在の条件を示した。現実には事前に入手するのが困難な、領域境界での実行きを与える必要があるから、彼らの理論と方法の実際の有効性には疑問があるが、粘性解自体はなめらかな解の存在を考えるときには重要な概念となる。

この節ではまず粘性解の概念について簡単にまとめ、その後 Rouy と Tourin の示した粘性解の一意性定理について述べる。

粘性解とは偏微分方程式の弱形式解の一つで、微分可能でない (連続な) 解でも形式的にもとの偏微分方程式の解として表せるようにしたものである。例として平面上を等速度で伝播する波面の動きを考える。この場合、ある時刻の波面がなめらかであっても、一定時間後には波面がな

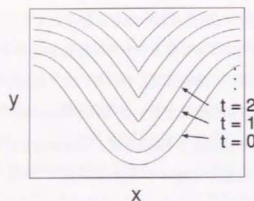


図 4.15. Cosine curve propagating with unit speed.

めらかでなくなることは物理的に起こり得る。例を図 4.15 に示す。図はコサイン曲線を等速度で伝播させた場合で、中央付近になめらかでない点が発生しているのが分かる。このような波面の伝播を微分方程式で表すことを考える。時刻  $t$  の波面を  $y = f(x, t)$ 、すなわち波面の各点を  $(x, f(x, t))$  と表すと、波面の等速度運動は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}}$$

という偏微分方程式で表せる。この式は  $\frac{\partial f}{\partial x}$  を含むから、波面が微分可能であることが前提である。したがって、このままでは図 4.15 のような物理的には発生し得る、なめらかでない波面を扱えない。このような状況を数学的にうまく扱うのが粘性解の概念である。

$z(x, y)$  に関する 1 階偏微分方程式  $F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$  があるとする。上で述べたような現象を扱い、微分不可能な  $z(x, y)$  も解とするため、粘性解は次のように定義される。

**定義.**  $z(x, y)$  が粘性解であるとは、任意の関数  $\varphi(x, y) \in C^1$  について次の二つを満たすときである。

(1)  $z - \varphi$  が  $(x_0, y_0)$  で極大点をとるならば

$$F(x, y, z(x_0, y_0), \varphi_x(x_0, y_0), \varphi_y(x_0, y_0)) \leq 0.$$

(2)  $z - \varphi$  が  $(x_0, y_0)$  で極小点をとるならば

$$F(x, y, z(x_0, y_0), \varphi_x(x_0, y_0), \varphi_y(x_0, y_0)) \geq 0.$$

$z$  の代わりに微分可能なテスト関数  $\varphi$  が使われていることに注意する。また粘性解  $z$  が滑らかならば解は古典解（あらゆる点で元の偏微分方程式を満たす）である。粘性解の一意性や存在に関する諸定理、その有用性などについては、文献 [38] に詳しくまとめられている。同文献では 2 階の微分方程式が中心課題であるが、以下に述べるここでの問題（陰影からの形状復元問題）

題) には Ishii の示した偏微分方程式  $F(\cdot)$  が  $z$  に依存しない場合の証明 [61] がそのまま応用される。

以上のような概念である粘性解を Rouy と Tourin は陰影からの形状復元問題に次のようにあてはめた。領域  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合とし、ランバート面と無限遠点光源の仮定の下での画像照度等式を

$$F(x, y, z_x, z_y) = E(x, y) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} - \alpha z_x - \beta z_y - \gamma = 0$$

と書き直し、この偏微分方程式について、次のディリクレ型の境界条件

$$z(x, y) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

の下での解について考える。他の領域境界で 0 でない任意の連続関数をとる場合の境界条件も元の方程式の形を変形すればこの形に直せる。このとき次の意味で解は一意である。

**定理.**  $E(x, y)$  がリプシッツ連続で、 $\Omega$  で  $E(x, y) < 1$  ならば、 $F(x, y, z_x, z_y) = 0$  の粘性解はせいぜい 1 つしか存在しない。

$E(x, y) = 1$  となるような点  $(x_0, y_0)$  が  $\Omega$  にあるときは、その点での奥行き  $z(x_0, y_0)$  を境界条件に加えることで同じことが言える。つまり  $\Omega' = \{(x, y) \in \Omega / E(x, y) \neq 1\}$  として、問題

$$\begin{cases} F(x, y, z_x, z_y) = 0 & \text{in } \Omega' \\ z(x, y) = n(x, y) & \text{on } \partial\Omega' \end{cases} \quad (4.24)$$

の粘性解はせいぜい 1 つしかない。 $E(x, y) = 1$  となる点とは特異点であり、ここでも特異点が解を一意に定めるのに果たす役割の大きさが分かる。粘性解の存在についても条件が示されているが、境界や特異点でとる奥行きの値に関する条件なのでここでは省略する（付録 D.2 参照）。

以上のことを Rouy と Tourin は示した。さらに Lions らは、ここに述べた粘性解の枠組みで遮蔽境界や光と陰の境界を境界条件とすることの可能性について論じている [63]。しかし、ここでの問題（陰影からの形状復元問題）では、粘性解本来の意義はあまり活きていない。というのも、粘性解が有効な状況をここでの問題に当てはめてみると、それは「画像が連続なのに形状がなめらかで無い場合」である（図 4.16）。少し考えると、同様の状況は極めて稀で、そのような画像は実際にはほとんど得られないと分かる。もし偶然そのような状況にあったとしても、そのときはほんのわずかに照明方向を変えれば、画像は必ず不連続になるからである。上の証明では、このような特異な場合を扱えることが利点であるということになってしまっている。より現

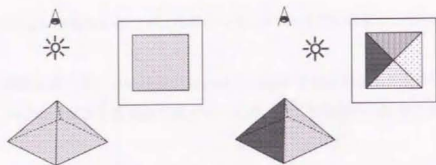


図 4.16. An example of the situation where a non-smooth surface produces a continuous image; A regular pyramid is illuminated from a source located exactly above the apex. If the source is slightly moved, the image immediately becomes discontinuous.

実的な解釈は、「なめらかな粘性解は古典解（偏微分方程式を普通の意味で満たす解）であり、古典解はいつも粘性解である」という事実を用いて、なめらかな解の一意性が次のように言えるとすることであろう。

定理. すべての  $(x, y) \in \Omega'$  で  $E(x, y) < 1$  とする. このとき (4.24) 式で与えられる境界値問題の解となるなめらかな形状はせいぜい一つしかない.

すなわち、「領域境界とその内部の特異点での奥行きをすべて与えれば領域内部でのなめらかな形状は高々 1 つしかない」ということである. 次の節では、ここで議論した、なめらかでない形状と粘性解の関係を用いて、なめらかな解の存在について考える.

#### 4.6.2 なめらかでない等高線の発展

ある反射率分布  $R(p, q)$  を前提として、何らかのなめらかな形状  $z(x, y)$  から作ったわけではなない勝手な画像  $E(x, y)$  に対して 4.4 節の (4.17) 式にしたがって等高線の発展を計算することはできるが、またできる場合は何が求まるかを考える. 曲線の発展の様子は一般に法速度（曲線の法線方向の速度） $v$  を用いた偏微分方程式  $\partial C / \partial t = v \mathbf{n}$  で表されるが、この場合の等高線の各点での法速度は

$$v = \frac{\sqrt{1 + p_0^2 + q_0^2}}{\sqrt{(p - p_0)^2 + (q - q_0)^2}}$$

であった.

発展の途中のある時刻で等高線がなめらかであれば連立方程式 (4.19) 式の解である  $(p, q)$  は  $(E(x, y), R(p, q))$  は連続であるから等高線上で連続で、したがって  $v$  も等高線上で連続である. このとき次の時刻の等高線は少なくとも区分的になめらかになるが、すべての点でなめらかになるとは限らない. 図 4.15 の例のように（等速度で運動する波面にも）微分不可能な点 (shock

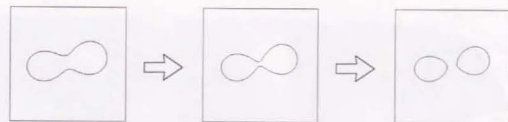


図 4.17. There exists a case where a curve propagating with the speed that is continuous along the curve breaks into more than two parts.

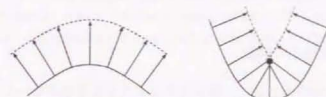


図 4.18. The shock can occur only in the evolution of a concave curve.

という) が現れ得るし、図 4.17 のように曲線が 2 つ以上に分かれることもあるからである. ただし図 4.18 に示したように、等高線が凸なところではこのような shock は起こらない. 凹なときに限り起こる可能性がある.

等高線は  $\partial C / \partial t = v \mathbf{n}$  にしたがって発展するのであるから、等高線がなめらかでない各点で法線方向  $\mathbf{n}$  を定義できず、この式の枠組みでは図 4.15 や図 4.17 のような shock が現れた時刻以降の等高線の発展は扱えない. そこで、粘性解の立場から、発展の途中で等高線が微分不可能になった場合も、図 4.15 のように発展を続けることにする. これはエントロピー条件 [37, 68] を満足するように発展させるということもできる.

いずれにせよ、この意味で等高線は  $v$  が 0 でない有限の値をとる限り（連続なまま）発展させられる. その条件は、特異点まわりの等高線を初期値として発展を開始する場合、等高線が次の特異点に到達するまで満足されることはすでに述べた.  $E(x, y)$  に形状  $z(x, y)$  の裏付けがないので、今の場合には、等高線が特異点に到達したときとその後の等高線の扱いははっきりしない.

特異点のまわりの等高線など何らかの等高線を初期値として等高線を発展させたとき、なめらかな等高線（群）が求まれば、形状はなめらかであり、そうでなければ形状もなめらかでないに分かる. 形状はなめらかでなくても、少なくとも連続であり、画像と形状の関係はちょうど図 4.16 のような稀な状況にある. すなわち、照明条件を少しでも変化させると画像が不連続になるという状況である.



図 4.19. A smooth surface, its contour map, and its shaded image.

#### 4.6.3 反射率分布の妥当さの判断

与えられた画像と反射率分布に対し、対応するなめらかな形状がないことを利用して、反射率分布が画像に対して妥当なものであるか判断できるかを考える。前節で述べたように、なめらかな形状しか対応しないことは、等高線を発展させている途中で shock が発生するかどうかを検出することで分かる。したがって少なくとも次のようなことが言える。

- 特異点のまわりの小さい領域だけを計算したのでは、反射率分布の妥当さは分からない。

等高線が凹でないと shock が現れないことから、特異点まわりの小さい領域では、 $R(p, q)$  が条件 (4.21) 式を満たしさえすれば、どのような  $R(p, q)$  と  $E(x, y)$  が与えられても、なめらかな形状が計算されてしまう。逆に凹な等高線があれば、それは強い条件となることから

- 周囲境界条件が与えられ、それを初期値として等高線を領域内部へ向けて発展させるとき、反射率分布の妥当さを良く調べられる。

と言える。特異点を初期値とするしかない場合には、そこから出発した等高線が他の等高線と併合される程度の大い領域まで計算すれば良い。このときには shock が起こる可能性があり、反射率分布の妥当さを判断できると考えられるからである。

以上のことを確かめるために簡単な実験を行った。図 4.19 に示す曲面と、そこからランバート面を仮定して作った画像を用いた。

まず、特異点の種類割り当て方について、本来の曲面のそれと異なる割り当て方をしたときに、形状がどのように復元されるかを見た。結果を図 4.20 に示す。図 4.19 の画像中に 3 つある特異点のうち鞍状のものを選んでこれを凸と思って、これを初期値として等高線を発展させたのが図 4.20 である。曲面形状は上下を逆に表示してある。間違った割り当て方を行った結果、なめらかな形状が得られてしまうことが分かる。

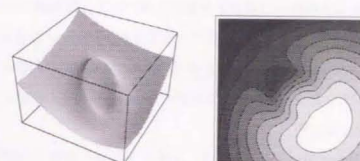


図 4.20. The case where a wrong singular point is chosen as an initial convex point; the chosen singular point is not actually convex on the original surface. As a result, a nondifferentiable surface is reconstructed. (The surface is displayed upside down so that the undifferentiable part is exposed.)

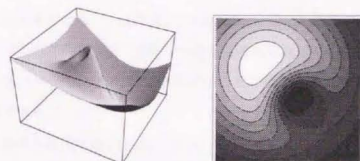


図 4.21. The case where a wrong reflectance map is used. Also nondifferentiable surface is reconstructed. (The surface is displayed upside down so that the undifferentiable part is exposed.)

また、反射率分布が間違っているとき、形状がどのように復元されるかを見た。結果を図 4.21 に示す。この場合も同様になめらかな形状が得られてしまっている。

#### 4.7 ま と め

この章では、陰影からの形状復元問題の解の一意性として、ランバート面を扱った既存の研究を非ランバート面も扱えるように一般化した。

任意に与えられた画像と反射率分布に対し、反射率分布が最大となる点によって生じる画像の明るさが最大となる点——特異点と呼んだ——のまわりの画像について、対応する局所形状は、凸、凹状のものがそれぞれ 1 つずつ存在し、鞍状のものが通常は 2 つ、また特殊な場合は無数に存在することを示した。また無数に存在する条件も明らかにした。

等高線の方法を非ランバート面の場合に拡張し、ある範囲で解が一意に定まるための反射率分布の条件を述べた。これによって、特異点の種類が分かれば、大域的な形状を定められることを

述べた、上の特異点まわりの形状の存在と一意性に基づいて、等高線と特性曲線の両方を用いて、大域的な解の一意性を調べた。その形状が一意であるかどうかは特異点の種類の割り当て方が一意であるかどうかと同じである。非ランパート面の場合でも、等高線の方法を非ランパート面に一般化する際に導入した条件を反射率分布が満たせば、特異点の種類の可能な割り当ての間に強い関係があることを示した。

さらに、ある反射率分布が与えられたとき、必ずしも任意の画像に対応する形状は存在しない。このことを等高線のなめらかさと粘性解の関係を用いて表した。これを利用して、反射率分布の妥当性を判断することについて検討した。

しかしながら、照明条件と反射特性をいつも画像から知ることは期待できない。そこで、次の章では、反射率分布がその概形しか分からないとき、画像からどのような形状の情報を引き出せるかを考える。

## 5 等濃度線の照明変化に対する不変な性質

### 5.1 はじめに

画像の明るさは、第2章で述べたように、照明と物体の形状、そして物体表面の反射特性の3つの要素で決まる。人間は、大抵の場合に画像1枚だけから物体の形状をよく知ることができ、ところが照明についてはそれを正確に言い当てることはできないと言われる。例えば、適当に照明を与えて撮った人の顔の写真が1枚与えられたとき、その場の照明がどのようなものであったかを正しく当てるのは簡単ではない。人間は、一般に形状の差には敏感だが、照明の差にはそれほど敏感でないとも言われている[69]。見かけの明るさから形状が分かるのに照明が分からないというのは、上述のように形状と照明が物体表面での光の反射に深く関わる2要素であることを考えれば、不思議である。

画像の明るさから形状を復元することは、コンピュータビジョンの中心的な課題であり、画像と照明の関係に対しても、様々な研究が行われてきた。

以前は、3.6節に述べたような画像だけから照明を推定しようとする試みがあった。例えば、無限遠に置かれた点光源の方向を、画像から推定する方法が提案された([32, 45, 48])。推定された結果は、そのまま陰影からの形状復元のアルゴリズムで利用された。しかしそれらの光源方向の推定は、物体の形状に対する強い仮定(面の向きの分布が空間的に一様であるなど)を必要とし、どんな場合にも普遍的に使えるというわけではなかった。

一方、近年、画像だけから照明を完全に決定するのは原理的に不可能であると主張する、いくつかの研究がある[70, 71]。これは、上で述べたような人間の視覚系が、照明を正確に推定できないのではないかという予想と一致する。それらの研究では、画像から形状と照明を完全に分離した形で推定することはできないと結論されている。

照明を形状推定に前もって推定できないとき、にもかかわらず画像から形状情報を得る方法として、照明が分からなくても得られる形状の情報、いわゆる照度不変性 (photometric invariants) [72, 73] を利用することが考えられる。例えば、物体表面での明るさの極値は、照明を変化させても常に形状の放物的点(ガウス曲率がゼロの点、図5.1参照)にあることなどが示されている。ただしこれらの不変性は、表面の点や線の上という非常に狭い部分でしか形状の情報を与えず、そこから形状の大域的な特徴をただちに引き出すというわけにはいかなかった。

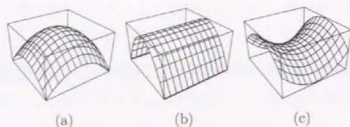


図 5.1. Local shapes and the signs of their Gaussian curvature. (a) Positive sign (elliptic point). (b) Zero (parabolic point). (c) Negative sign (hyperbolic point).

本章では、形状に関するより大域的な特徴として、特異点と等濃度線（等しい明るさの点を連ねてできる曲線）の照度不変性を示す。まず、反射特性と照明条件を反射率分布図として表現したとき、それが極値を一つだけとるとする（例えばランバート面と無限遠点光源等が含まれる）。このとき、あるクラスの曲面について次のことが厳密に成り立ち、またそれ以外の曲面についても大抵成り立つことを示す。それは、2つの特異点を内部に含むような「8」の字を描く等濃度線について、その2つの特異点が互いに異なるガウス曲率の符号をもつことである。反射率分布に求められる仮定は、上のように表せるということだけであり、濃淡の定量的な解析は不要である。この意味で照明や反射特性によらない不変な性質であると言える。またランバート反射の場合には照明方向によらないという明かな意味になる。

さらに、同じ条件の下で濃淡の鞍点に端を発する濃淡の最急上昇曲線がつかう2つの特異点は、凸と凸であるか凹と凹であることがほとんどないことを示す。

第4章で述べたように特異点の種類を同定することは、陰影からの形状復元問題において大域的な解を定める鍵である。この章で述べる性質は特異点の種類の可能性を絞り込むのに用いることができる。また、特異点の種類を同定は、大域的な解を定める前処理にとどまらず、凹凸という大まかな形状情報を得ることもあり、それ自体大きな意味があると考えられる。

## 5.2 放物的曲線上での濃淡の不変性

この節では、Koenderink と Van Doorn [72]、Yuille [73] らが示した照度不変性について、その内容を要約するとともに、特異点の概念を取り込んだ新たな証明を与える。結果は、本論文の主題である等濃度線の不変性を導くために、5.3節で利用される。

### 5.2.1 放物的曲線

放物的曲線とは、ガウス曲率が0となる点（放物的点、図5.1(b)）を連ねてできる曲線上の曲線のことであり（図5.2参照）、なめらかな曲面は、ガウス曲率の符号が正の点（楕円点、

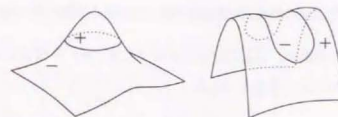


図 5.2. Parabolic curves of a smooth surface. It corresponds to the boundary curve between the elliptic region and the hyperbolic region.

図5.1(a)) だけからなる領域と、ガウス曲率の符号が負の点（双曲点、図5.1(c)) だけからなる領域に分割され、その境界が放物的曲線になる（図5.2）。以下に述べるのは、曲面上の放物的曲線の上での濃淡の振舞いに関する不変性である。

### 5.2.2 反射率分布

ここでは画像照度等式

$$E(x, y) = R(p, q)$$

において反射率分布図  $R(p, q)$  は1階連続微分可能で、また極値（最大値）を一つしか持たないものとする。以下に Koenderink と Van Doorn [72] や Yuille [73] の示した不変性について、簡単な証明を与える。彼らは反射率分布図について今述べたような仮定はしていないが、以下ではこれを取り込んだ証明を与え、特異点との関係を明確にする。

### 5.2.3 2つの不変性

Koenderink と Van Doorn [72] は、ランバート反射をする曲面形状を無限遠点光源によって照らしたとき、曲面上の照度（曲面が光源から受け取る単位面積当り光のパワー、ランバート面なので空間中のどの方向へ対しても輝度は同じであり、画像の明るさと考えて良い）の極点のうち最大値をとらないものは、常にその曲面の放物的曲線上にあることを示した。さらに、曲面上の放物的曲線の上では、照度の等しい点を結んだ線の向きが、照明の方向によらず一定であることを示した。後に、Yuille [73] は、これらがランバート面でなくても成り立つことと、放物的曲線上での等濃度線（画像の明るさが等しい画像上の曲線）の向きが、実は曲面の主曲率方向の像と一致することを示した。放物的曲線の上では、2つある主曲率のいずれかが0になる。Yuille は、等濃度線の向きに当たる主曲率方向が、0になる方の主曲率方向になっていることを述べた。

まとめると

- 特異点を除く画像の濃淡の極点は、曲面の放物的曲線（の像曲線）上にある。
- 画像上で濃淡一定の曲線が、曲面の放物的曲線（の像曲線）を横切るとき、その方向は曲面の0になる主曲率の方向（の像）である。

の2つである。これらについて、KoenderinkとVan Doornは曲面のガウス写像を考え、ガウス像上に現れる特異な特徴に注目して、直感的な証明を与えている[72]。Yuilleは、曲率線（接方向が主曲率方向となる曲面上の曲線）によって曲面をパラメータ化し、それが与える局所座標系で画像の濃淡を微分することで、以上の不変性を示した[73]。しかし、曲面形状 $z(x, y)$ のHesse行列を経由して考えると、彼らの得た結果はより簡単に証明でき、新しい解釈が可能である。次にこれを示す。

## 5.2.4 不変性の証明

まず1番目の不変性を示す。(5.2.2)式の画像照度等式を $x$ と $y$ でそれぞれ偏微分すると

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_p \\ R_q \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

を得る。ただし $E_x = \partial E / \partial x$ などであり、 $r = \partial^2 z / \partial x^2$ ,  $s = \partial^2 z / \partial x \partial y$ ,  $t = \partial^2 z / \partial y^2$ である。この $r, s, t$ で構成される $2 \times 2$ 行列を $\mathbf{H}$ と書くことにする。つまり $[E_x, E_y]^T = \mathbf{H} [R_p, R_q]^T$ である。

濃淡の極点とは $(E_x, E_y) = (0, 0)$ となる点のことである。上の関係から、濃淡の極点を与える点では $R_p = R_q = 0$ かまたは $\det \mathbf{H} = 0$ のいずれかが成り立っているはずである（ $\mathbf{H} = \mathbf{O}$ 、つまり平面状であることは最初から除外する）。5.2.2節で導入した反射率分布図の仮定、すなわち極点（＝最大点）を1つしか持たないとの仮定から、 $R_p = R_q = 0$ となるのは特異点（すなわち最大の明るさを持つ点）以外に、特異点以外の濃淡の極点では必ず $\det \mathbf{H} = 0$ となる。4.2節に述べたように曲面のガウス曲率 $K$ と $\det \mathbf{H}$ の間には

$$K = \frac{\det \mathbf{H}}{(1 + p^2 + q^2)^2} \quad (5.2)$$

の関係がある。述べたように特異点を除く濃淡の極点では必ず $\det \mathbf{H} = 0$ となる。この式から $\det \mathbf{H} = 0$ のときガウス曲率 $K = 0$ である。したがって1番目の不変性、すなわち特異点以外の濃淡の極点は放物的曲線上にあることが証明できた。

次に2番目の不変性を示す。放物的曲線の上の点では $K = 0$ であり(5.2)式から $\det \mathbf{H} (= rt - s^2) = 0$ である。画像のある点での等濃度線の接方向は、同じ点での勾配方向 $(E_x, E_y)$ に直

交し、 $(E_y, -E_x)$ と書ける。放物的曲線の上で、等濃度線の接方向 $(E_y, -E_x)$ を $\mathbf{H}$ に左からかけ、(5.1)式を使うと、 $\det \mathbf{H} = rt - s^2 = 0$ であることから

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y \\ -E_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_p s + R_q t \\ -R_p r - R_q s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} rt - s^2 & 0 \\ 0 & rt - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_q \\ -R_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。したがって放物的曲線上では $(E_y, -E_x)$ は行列 $\mathbf{H}$ の0固有値に対応する固有ベクトルである。そしてこれは、面の0になる主曲率方向の画像面への投影になっている。 $z(x, y)$ は、視線方向を $z$ 軸とする座標系（観測者中心座標）で曲面を表現したものであった。曲面のある点に注目し、その点での局所座標系（面の向きを $z'$ 軸とするような座標系）で、曲面を $z'(x', y')$ と表すことができる。このとき $\mathbf{H}$ の固有値0に対応する固有ベクトルは $z'(x', y')$ のHesse行列 $\mathbf{H}'$ の固有値0に対応する固有ベクトルを画像面に投影したものと等しいことが示せる。この証明は付録Eに示す。

以上がKoenderinkとVan Doorn[72]、Yuille[73]の述べた不変性の証明である。これらは放物的曲線の上という曲面のごく部分的な局所的な形状情報について述べたものであり、特に2番目の不変性は、画像が1枚だけしか与えられないときには意味がない。次節では、より大域的な形状情報を得ることのできる不変性が存在することを示す。証明にはこの節の2つの不変性を使う。

## 5.3 等濃度線の不変性

この節では前節の不変性を利用して、等濃度線について次の不変性があることを示す。

- 「8」の字の等濃度線の含む2つの特異点は互いに異なるガウス曲率の符号をもつ（1つはガウス曲率正の楕円点、もう1つは負の双曲点）。

以下の証明には形状と特異点の曲面上の位置などいくつかの仮定を必要とする。ただしそれらは自然なものである。これについてまず述べる。

### 5.3.1 形状に関する仮定

形状について次のことを仮定する。

- 放物的曲線はなめらかであり、交わらない。

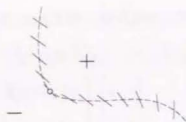


図 5.3. An illustration of the point where the direction of the vanishing principal curvature coincides with the tangential direction of the parabolic curve. The broken line is a parabolic curve and each short line represents the direction of the vanishing principal curvature at the point. In general the direction has no relation to that of the parabolic curve at each point, and thus it can be tangential to the parabolic curve.

実際には交わる放物的曲線をもつ曲面は存在するものの、この仮定はそれほど強いものではない。というのは、Koenderink と Van Doorn が文献 [72] で指摘しているように、仮に曲面上のある点で交わる放物的曲線があったとしても、曲面にはほんのわずかな変動を加えると交わっていたものが交わらなくなるからである。そのような交点の存在は不安定であるということができ、この意味で稀であると考えて良い。

さらに次を仮定する。

- 放物的点で、0 になる主曲率方向と、その点での放物的曲線の接方向とが等しくなるような点は存在しない。

この仮定の述べる状況を図 5.3 に示す。Koenderink は文献 [74] でこのような点を ruffle と呼んでいる。ここではひだ点と呼ぶことにする。

ひだ点およびひだ点を持つ曲面の例として、 $xy$  平面内の円  $x^2 + (y-2)^2 = 1$  を  $x$  軸まわりに回転してできる  $xyz$  空間のドーナツ型の曲面がある (図 5.4 参照)。この面は 2 つの放物的曲線 ( $y^2 + z^2 = 4$  かつ  $x = \pm 1$  で与えられる) を持つが、その点はすべてひだ点である。つまり放物的曲線の接方向は常に 0 になる主曲率方向となる。この例から分かるようにひだ点をもつ曲面は存在し、曲面上にひだ点がないという仮定は成り立たないことは少なくない。しかし上で述べた不変性はそのような曲面でもたいてい成り立ち、5.3.6 節でこれを示す。

ひだ点がないことが保証される曲面として、例えば任意の一価関数  $y = f(x)$  が描く  $xy$  平面内の曲線を  $x$  軸回りに回転してできる回転面がある。これは次の理由による。曲面のうち  $xy$  平面内に含まれる点での曲面のガウス曲率を考える。各点  $x$  でのガウス曲率は、Meusnier の定理 ([74] などを参照) により、 $xy$  平面内の母線の曲率  $d^2 f/dx^2$  と、 $yz$  面に平行な平面で回転面を切った切口 (円になる) の曲率  $1/f(x)$  との積、すなわち、 $1/f(x) \cdot d^2 f/dx^2$  となる。回転面な

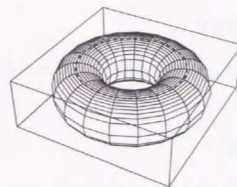


図 5.4. A surface having 'ruffle' points. The dotted circle on the surface is the parabolic curve and also a set of the ruffle points.

ので  $xy$  面内の点だけでなく曲面上のどの点をとってもこの関係は成り立つ。  $1/f(x) \neq 0$  であるから、ガウス曲率が 0 になるのは  $d^2 f/dx^2 = 0$  となる点しかなく、放物的曲線は  $xz$  面に平行な平面内の円になる。したがって放物的曲線は接方向に必ず曲率 ( $1/f(x)$ ) を持ち、ひだ点の点はない。回転面では放物的曲線は常に回転軸に垂直な平面内の円になる。放物的曲線はその接方向に必ず曲率 (円の半径の逆数) を持つから、ひだ点はない。また一般化円筒など厳密な回転面でないものにもひだ点を含まない曲面はある。

以下に述べる性質の厳密な証明には、曲面上にひだ点がないという仮定を要するが、証明される性質は、上でも述べたようにこの仮定を満たさない曲面でもたいてい成立する。これは 5.3.6 節で示す。例えば上で述べたドーナツ型の曲面の場合、「8」の字の等濃度線はどのように光を当ててもできないから、このような曲面の存在は、以下の不変性を利用する際の障害とはならない。

### 5.3.2 特異点に関する仮定

特異点について次のことを仮定する。

- 特異点はすべて孤立している。

これは特異点が曲面上で、ちょうど放物的曲線上にこないということである。この仮定は自然なものである。ランバート面と無限遠点光源の場合で考えると、これは、放物的曲線上の点のもつ面の向きと光線の向きが一致することである。光源の位置を少しでも変えれば特異点は曲線から離れ、楕円の領域か双曲線の領域に入るから、このような不一致は稀であると考えられる。一般の反射率分布図の場合でも、次に述べる極値に関する仮定から、同様のことが言える。

### 5.3.3 反射率分布図に関する仮定

すでに5.2.2節で述べたように、反射率分布  $R(p, q)$  はなめらかで、それは唯一の極値 (= 最大値) を持つと仮定する。

### 5.3.4 照明変化に不変な性質

等濃度線は画像内に曲線群を与える。この曲線群の中で、「8」の字を描き、その2つの穴の内部にそれぞれ1つずつ特異点を含み、それ以外に濃淡の極点を持たないような曲線 (図5.5参照) を考える。このような等濃度線は、たいていの場合に画像内に存在するが (例は、図5.6-5.14を参照) これについては次節で述べる。この「8」の字の等濃度線について、前節までの仮定の下で、次を証明する。

- 「8」の字の等濃度線の含む2つの特異点は互いに異なるガウス曲率の符号をもつ (1つはガウス曲率正の楕円の点、もう1つは負の双曲線の点)。

5.2節で議論した不変性から、放物的曲線の上では、等濃度線の方法は0になる主曲率方向に対応していた。曲面上にひだ点がないという仮定から、放物的曲線は等濃度線と決して接しない、接すれば、その点はひだ点に他ならないからである。このことを利用すると、以下のようにして上の性質が示せる。

「8」の字の交差部分は濃淡の極点であり、5.2.2節で述べたように特異点以外の極点は放物的点であるから、この点も放物的点である。したがってこの点を通る放物的曲線が存在する (図5.5)。「8」の字の囲む領域に特異点以外に極値がないこと、上で述べたように放物的曲線と等濃度線は接しないことから、「8」の字の交差する点を通る放物的曲線は、「8」の字とその点以外に点を共有しないことが分かる (図5.5)。

また、同じ理由でこの放物的曲線以外に「8」の字の等濃度線と交わるような放物的曲線は存在しない。これにより「8」の字の交点を通る放物的曲線は、この等濃度線をその交点で2つの部分に分ける。5.2.1節に述べたように、放物的曲線は曲面を楕円の領域と双曲線の領域に分けるから、「8」の字のうち、その交点で分割された等濃度線の一方は楕円の領域に、もう一方は双曲線の領域にあることになる。当然、内部に含まれる特異点についても、必ず一方は楕円の領域にあり、もう一方は双曲線の領域にある。したがって上の性質を示せた。

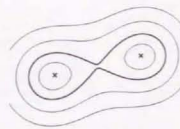


図 5.5. An illustration of an '8'-shaped isophote. The dotted line, the solid lines, the two marks, and the broken line represent an '8'-shaped isophote, the other isophotes, singular points, and a parabolic curve, respectively. The parabolic curve crosses the '8'-shaped isophote at the self-intersection point of the isophote, and does not touch the isophote at any other point.

### 5.3.5 「8」の字等濃度線が存在

画像中に複数の特異点があるとし、濃淡がなめらかであるとすると、ある明るさでの画像の濃淡の等高線 (すなわち等濃度線) を考える。特異点のもつ明るさの最大値に対して少しだけ小さい値の明るさでは、等濃度線は、それぞれの特異点まわりの楕円状の曲線となる。明るさの値をすこしずつ小さくしてゆくと、対応する等濃度線はすこしずつ大きくなり、やがて自分自身や他の等濃度線と併合され始める。この最初の併合時の曲線の併合のされ方には2種類しかないことが知られている [75] (4.5.2節での等高線の議論を参照)。そのうちの1つが「8」の字の曲線であり、この意味で多くの場合に画像から見つけることができる。

### 5.3.6 いくつかの例

回転面  $y^2 + z^2 = (0.8 - 0.3 \exp(-5x^2))^2$  (図5.6(a)) に対し、面をランバート面とし照明を無限遠点光源としたときの画像を考える。視線を  $z$  軸方向に固定したまま、照明方向を変えて得た画像の等濃度線を同図 (b), (c) に示す。2枚の画像で照明方向を変えてあり、(b), (c) それぞれ  $(0.3, 0.2, 1)$  と  $(-0.3, 0.1, 1)$  である。図では点線が「8」の字の等濃度線を、破線が放物的曲線と輪郭を表している。照明方向によらず、2つの特異点がそれぞれ別のガウス曲率符号の領域にあることが見て取れる。この曲面は前節で述べたようにひだ点を含まない。

次にひだ点を含む2つの曲面を考える (図5.7(a), 図5.9(b))。図5.7(a)の曲面は、楕円の領域に1つの双曲線の領域を含むような曲面であり、図5.7(b)の曲面は、さらに双曲線の領域内に楕円の領域を含むような曲面である。より複雑な一般の曲面 (たとえば人の顔など) も、ここに

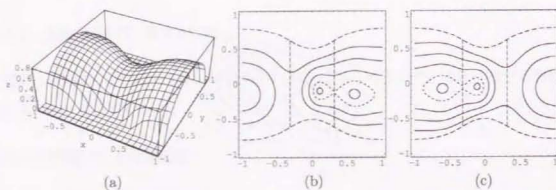


図 5.6. The change of the isophotes on the surface of rotation  $y^2 + z^2 = (0.8 - 0.3 \exp(-5x^2))^2$  due to the change of illuminant direction. The solid line shows the isophotes. The broken lines show the boundary curves and parabolic curves. The '8'-shaped isophote (shown as a dotted line) contains two singular points and each of them is on the region of different curvature sign. This nature is invariant to the illumination change.

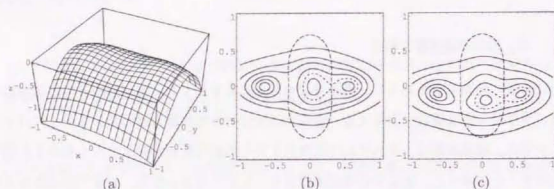


図 5.7. The changes of isophotes of a surface  $z(x, y) = -0.3x^2 - y^2 - 0.3 \exp(-3x^2 - 2y^2)$ . The solid and broken lines show the isophotes and the parabolic curve. The '8'-shaped isophote (shown as a dotted line) contains two singular points and each of them is on the region of different curvature sign. This nature is invariant to the illumination change.

挙げた曲面を原始要素として表すことができる。この考え方は Koenderink 〔72〕によるものである。したがってこの2つの曲面はひだ点を含むものの、これらについて述べた不変性が成り立つならば、より一般の曲面についても成り立つことが期待できる。

曲面  $z(x, y) = -0.3x^2 - y^2 - 0.3 \exp(-3x^2 - 2y^2)$  (図 5.7(a)) に対し、同様にランバート面、無限遠点光源の下で、視線を固定して照明方向のみ変化した画像の等濃度線を図 5.7(b), (c) と図 5.8(d), (e) に示す。4 枚の画像の照明方向は (b), (c), (d), (e) それぞれ (0.06, 0.01, 1), (0.05, 0.2, 1), (0.05, 0.4, 1) と (0.2, 0.9, 1) である。前述のようにこの曲面はひだ点を含むが、述べてきた性質が成り立つこと、すなわち2つの特異点がそれぞれ別のガウス曲率符号の領域にあることが分かる。照明方向をだんだん傾けて行くと、(e) のように2つの特異点が消滅すると同時に「8」の字の等濃度線も消滅し、特異点が1つだけになる。

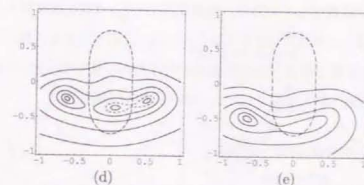


図 5.8. The case of more oblique illuminant direction for the surface of Fig. 5.7.

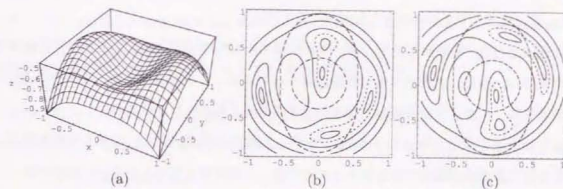


図 5.9. The change of isophotes for a surface  $z(x, y) = -0.4x^2 - 0.5y^2 - 0.7 \exp(-2x^2 - 1.3y^2)$ .

曲面  $z(x, y) = -0.4x^2 - 0.5y^2 - 0.7 \exp(-2x^2 - 1.3y^2)$  (図 5.9(a)) に対し、同様に得られる画像の等濃度線の変化を図 5.9(b), (c) に示す。2 枚の画像の照明方向は (b) が (0.08, 0.1, 1), (c) が (0.11, -0.1, 1) である。この曲面もひだ点を含む。「8」の字が囲む特異点の位置は、照明方向によって大きく変動するが、その2つの特異点はやはり別の曲率符号の領域にある。

最後に実画像を用いた例を示す。ゴム製のアヒルを用いて、2通りの方向の照明を与えて画像を得た（この章の最後の図 5.14）。図で、特異点  $s_1$  と  $s_2$  を「8」の字の等濃度線が囲む。 $s_1$  と  $s_3$  が凸、 $s_2$  が鞍点であり、等濃度線の囲む2つの特異点  $s_1$  と  $s_2$  は異なる曲率符号であることが分かる。

このように、「8」の字の等濃度線が2つの特異点を含むとき、それぞれが互いに異なるガウス曲率符号の領域にあることを確かめた。ひだ点のない回転面はもちろん、ひだ点を含む曲面でも、少なくとも示した例では成り立つことが分かる。より複雑な曲面も、前述のように基本的には図 5.7、図 5.9 に示した形の組み合わせからなっていると見ることができるので、たいていの曲面について述べた性質が成り立っていることは期待できる。

この性質は、特異点の種類を限定するのに応用できる。得た画像から「8」の字の等濃度線を抽出すれば、そこに含まれる2つの特異点の符号が異なることがただちに分かるからである。

以上の例では視線方向は固定していたが、視線を変えても、5.2.2節で導入した反射率分布図の仮定が成り立つならば、この性質は成り立つことは示した通りである。特にランバート面の場合は、曲面上「8」の字を描く照度一定の曲線はどの方向から見ても「8」の字を描き、位相的性質を保存するから、視線方向によらないことが明快に分かる例である。

#### 5.4 濃淡の鞍点からの最急上昇線

上で述べた「8」の字は、画像内の特異点の一部に関係するだけである。より大域的な領域でそのような情報を得ることを考える。厳密には「8」の字ではないが、それに近い等濃度線（図5.9に多く見られる）を手がかりとして使うことを考える。

画像の濃淡  $E(x, y)$  を曲面と見たとき、その曲面を最も上昇する方向に上ってゆく曲線を考える。この曲線は、曲線上の各点で常に等濃度線と直交するような曲線であり、最終的に濃淡の極大点に到達する。このような曲線は、最初の点を決めるとただ一つに決まる。

このような濃淡の最急上昇線の最初の点として、画像上の濃淡の鞍点、つまり画像の濃淡を曲面と見たときの鞍点を考える。

最急上昇線は常に最後は濃淡の極大点に到達するが、これが最大値をとる点（特異点）であることがある。濃淡の鞍点から発した2本の最急上昇線が両方ともそれぞれ別の特異点に到達する場合を考える。つまりそのような鞍点を選んで、そしてそれが結ぶ2つの特異点について考える。

このような2つの特異点は、ほとんどの場合に、互いに異なる符号を持つことを示す。符号というのは、特異点での物体形状の主曲率の符号のことである。主曲率は2つあるから、2つの特異点が互いに異なる符号をもつというのは、それらの組み合わせが、凸点と鞍点、凹点と鞍点、凸点と凹点、鞍点と鞍点、のいずれかであることを意味する。つまり、凸点と凸点や、凹点と凹点であることがない。これは特異点の種類を特定する上での拘束として用いることができる。

鞍点に端を発する最急上昇線に対応する、物体表面の上の曲線を考える。鞍点から特異点に達する途中で、その表面上の曲線の法曲率の符号が多くの場合変化しないことを示す。また、鞍点に端を発する最急上昇線は2本あるが、その2本の曲線に対応する曲線の法曲率の符号が、曲線の開始点（鞍点）付近で互いに異なることを示す。もしこれらが正しいとすると、鞍点からの最急上昇曲線がつなぐ2個の特異点で、物体形状の曲率の符号が互いに異なることになる。つまり、上で述べた特異点の種類に関する条件が言えたことになる。

まず、鞍点に端を発する2本の最急上昇線の、対応する表面上の曲線の法曲率が、互いに異

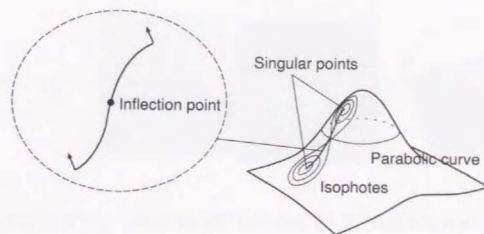


図 5.10. Two singular points are connected by a steepest ascent curve of the brightness starting from a saddle point of the brightness. The saddle point of the brightness usually corresponds to the inflection point of the curve as a 3D curve on the surface.

なる符号をもつことを示す。5.2節の1番目の不変性から、濃淡の鞍点（極点）は必ず放物的曲線の上にある。いま考えている2本の最急上昇線は、鞍点でつなぐとなめらかな1本の曲線になる。この曲線に対応する表面上の曲線は、鞍点のところで放物的曲線を横断し、接することはない。

放物的曲線上では、少なくとも1つの主曲率がゼロになる。5.2節の2番目の不変性から、放物的曲線上での等濃度線の方向は、ゼロになる主曲率方向である。2本の最急上昇線をつないだ曲線は、放物的曲線を横断する際、その曲線の方角とゼロになる主曲率方向とが等しい。つないだ曲線を曲面上で考えると、濃淡の鞍点が曲線の変極点になる（図5.10）。つまり、その曲線の曲面に対する法曲率が、濃淡の鞍点、つまり放物的点でゼロになり、その前後で符号が入れ替わる。

次に、鞍点に端を発する最急上昇線は、特異点に達するまで、対応する表面上の曲線の法曲率の符号が変化しないことを示す。5.2節の2番目の不変性にしたがって、等濃度線が放物的曲線をまたぐときは常に、ゼロになる主曲率の方角を向く。濃淡の最急上昇曲線は、その定義から、等濃度線と常に直交する。したがって、濃淡の最急上昇曲線が放物的曲線をまたぐときは常に、ゼロになる主曲率の方角と直交することになる。（ただし、開始点である濃淡の鞍点は除く。）つまり濃淡の最急上昇線は、ゼロになる主曲率の方角を決して向かない。これによって、濃淡の最急上昇線は、その途中で放物的曲線をまたいでも、法曲率の符号は不変であると言える。

ただし、ガウス曲率が負の領域の点（双曲点）では、主曲率とは関係なく法曲率がゼロになるような方向がある。濃淡の勾配方向がこの方向に等しいような点を、最急上昇曲線が通過すると、曲線上の法曲率の符号が変化する。しかし、それほど複雑な曲面でなければそのようなこ

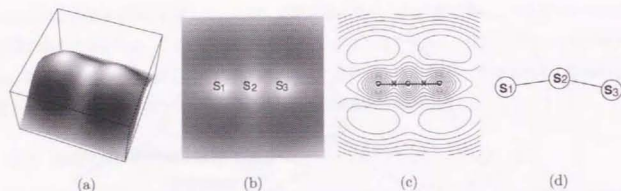


図 5.11. (a) Surface shape. (b) Its image and singular points. (c) The isophotes and the steepest ascent curves. (d) The topological graph connecting singular points by the curve.

とは起こらないと期待でき、上で述べたことを拘束として用いることができる。次の節で、この拘束がどのように画像に適用できるかを示す。

#### 5.4.1 大域的な形状復元問題との関係

5.3節で示した等濃度線の不変性と、この節で述べた特異点の種類と濃淡の関係は、第4章で述べた特異点の同定問題に適用できる。第4章で述べたように、画像の特異点の種類（凸、凹、鞍点のどれか）を知ることができれば、それに基づいて形状は一意に定まる。このように特異点の種類を同定することは大域的な形状復元の鍵である。

この問題に対して提案されている2つのアルゴリズム [17, 20] は、いずれも、光源の方向が与えられたときに、画像照度方程式を、偏微分方程式として解いてみて、特異点付近の形状を決定するものであった。光源の方向が推定できなければアルゴリズムは実行できないし、推定が少しでも誤っていると、特異点の種類を正しく同定できる保証がない。むしろ、濃淡画像をこわすかでも摂動させると、対応するなめらかな形状は存在しなくなることが示されていて [54]、その意味でこれらの方法はロバストではなかった。これに対し、本研究で示す不変性によって、部分的にはあるが、特異点の種類情報を、偏微分方程式を明示的に解くことなく画像の濃淡から直接に得られることを意味する。

#### 5.4.2 いくつかの例

図 5.11 (a) はラグダのこぶのような形状である。視線と平行な照明のもとでできる画像が同図 (b) である。画像には3つの特異点と4つの濃淡の鞍点があることが分かる。今関心があるのは、特異点の間の2つの濃淡の鞍点である。それらは、それぞれ  $s_1$  と  $s_2$ ;  $s_2$  と  $s_3$  の特異点を、最急上昇線がつなぐ（同図 (c), (d)）。前節の拘束を適用すると、 $s_1$  と  $s_2$ ,  $s_2$  と  $s_3$  は異なる特

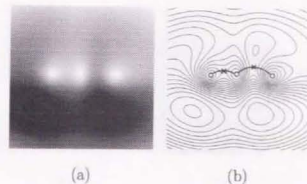


図 5.12. (a) The image of the same surface as Fig. 5.11 under oblique illumination. (b) Isophotes and the steepest.

号をもつはずである。すなわち、 $s_1 - s_2$ ,  $s_2 - s_3$  は、凸点 - 凸点や凹点 - 凹点ではありえない。第4章で述べたように、画像内に物体の輪郭（閉じた遮蔽境界）が見えれば、その内部で特異点で凸と凹のものの個数が、特異点で鞍点の個数を1つだけ上回ることが自動的に分かる。したがって  $s_1$ ,  $s_3$  は凸、凹のいずれか、 $s_2$  は鞍点であると分かる。もし、さらに形状が凹の領域を持たないことが既知であれば、 $s_1$ ,  $s_3$  は凸点であると限定できる。そして、これらの予想はもとの形状（図 5.11 (a)）と一致する。

図 5.12 は図 5.11 と同じ形状だが、照明方向を傾けた場合である。3つの特異点が2つの濃淡の鞍点によって結ばれている。上の議論はそのまま適用できる。照明方向が変化しても、濃淡の最急上昇線が結ぶ2つの特異点は、画像の濃淡からは正しく得られ、拘束を適用できる。

図 5.13 はより複雑な形状である。5つの特異点と8つの濃淡の鞍点がある。結ばれる特異点は、同図 (d) のようになる。グラフの両端の2つの特異点の組について、その符号は上で述べたように拘束される。真の特異点の種類は、 $s_1$ : 鞍点,  $s_2$ : 極大点,  $s_3$ : 極小点,  $s_4$ : 鞍点,  $s_5$ : 極大点、である。上の拘束はこの特異点の種類と矛盾なく一致する。ただし、この拘束だけでは、特異点の種類の組み合わせはさほど絞れず、可能な組み合わせは多いが、第4章で示した可能な割り当て方の間に成り立つ制限を考えると少なく絞れる。

さらに、実画像の例を図 5.14 に示す。これはゴム製のおもちゃのアヒルに、視線に対して傾いた照明を加えて得た画像である。遮蔽境界が見えるので、特異点の極大、極小なものは、特異点で鞍点であるものより一つ多いことが分かり、特異点の種類の組み合わせを大きく絞れる。等濃度線の分布から、2つの濃淡の鞍点が3つの濃淡の極大点（おそらく特異点と判断される）を結んでいることが分かる（ $s_1 - s_2$ ,  $s_2 - s_3$ ）。実際、 $s_1$  が凸点、 $s_2$  が鞍点、 $s_3$  が凸点であるので、これと一致する。

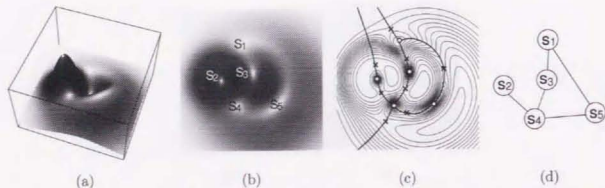


図 5.13. (a) Surface shape. (b) Its image and singular points. (c) The isophotes and the steepest ascent curves.

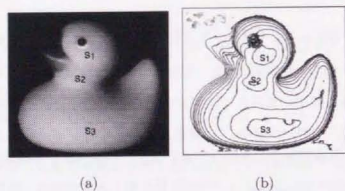


図 5.14. (a) The image of a toy duck. (b) Its isophote map.

## 5.5 ま と め

与えられた画像だけから、照明方向を推定するのは一般に難しい。この点で、画像の濃淡から導ける照明によらない形状の性質（不変量）について考えることは意味がある。本章ではまず「8」の字の等濃度線が2つの特異点を含むとき、その特異点は互いに異なるガウス曲率符号を持っていることを述べた。より正確には「ひだ点」がない曲面について、証明を与えた。それ以外の一般の曲面ではこのことは保証されないが、それでもたいてい場合には成り立つことを述べた。

さらに、同じ条件の下で濃淡の鞍点に端を発する濃淡の最急上昇曲線がたがう2つの特異点は、凸と凸であるか凹と凹であることがほとんどないことを示した。

この照明に対する等濃度線と特異点の不変性は、特異点の種類の同定問題に応用できる。形状のガウス曲率符号は、形状を把握する上で重要な特徴となると考えられ、この意味でも、示した等濃度線と特異点に関する性質は有用な情報を与えると考える。

## 6 複数の画像間の陰影差を用いた曲率符号の計算

### 6.1 はじめに

前の章までは、画像を1枚だけ用いて陰影から形状の情報を得る方法について論じてきたが、この章では照明を変えて得た複数枚の画像から形状の情報を得る方法について考える。ただし前の章と同様に、照明条件や反射率分布の知識がほとんどない場合に、このような画像から何が得られるかという立場で問題を考える。具体的には、照明を変えて得た複数枚の画像から、反射特性や照明条件の知識がほとんどなくても、対象物体の表面の曲率の符号が計算でき、符号による領域境界を求められることを示す。

複数枚の画像を用いる方法としては、同様にして得た複数枚の画像から形状を復元する照度差ステレオが良く知られている[76]。照度差ステレオは本来、照明条件や反射特性の正確な知識をもとに画像から形状を復元するものである。ランバート面を仮定できる場合には、照明方向の知識がなくても画像のみからある程度の不定性を残して形状を定めることが可能であるが[77, 78]、これはあくまで対象物体の表面がランバート面に正確にしたがう場合である。

近年、Wolffらは照度差ステレオと同様の照明方向を変化させて得られる3枚の画像から、方向に関する正確な知識なしに、画像の各点での表面のガウス曲率の符号を計算する方法を提案した[79]。

5.1節でも述べたようにガウス曲率は、曲面の局所的な形状を特徴的に表し（図6.1）、物体表面の向きに依存しない表面固有の量である。なめらかな物体表面は、各点のガウス曲率の符号によって領域を分けることができる。ガウス曲率0の放物的点は一般には領域を作らないから、図6.2のように、ガウス曲率が正であるような点だけからなる領域と、負の点だけからなる領域の2つに分けられる。2つの領域の境界をなす曲線がガウス曲率0の点の集合（放物的曲線と呼ばれる）であることもすでに5.2.1節で述べた。この境界は、物体の向きに依存しない表面固有の特徴であるから、物体認識や姿勢推定などに利用することが考えられる。

Wolffら[79]より前に、Koenderinkらは、物体表面がランバート面の場合に、表面の放物的点に対応する画像の点では、陰影の勾配の方向が、照明の方向を変えても不変であることを示していた[72]。またYuilleは、同じことがランバート反射に限らず成り立つことを示し、その方向が0になる主曲率方向に直交することを述べた[73]。KoenderinkらやYuilleはこの不変性

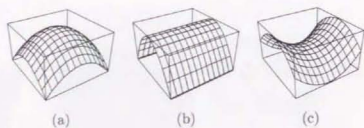


図 6.1. The sign of Gaussian curvature. (a) Positive sign (elliptic point). (b) Zero (parabolic point). (c) Negative sign (hyperbolic point).

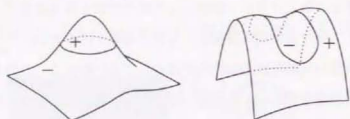


図 6.2. Segmentations of a surface based on the sign of Gaussian curvature.

に関する証明を行ったが、画像から放物点や境界を取り出す具体的な方法については述べていない。例えば単純に、画像上で照明の方向を変えても濃淡の勾配の方向が変わらないような点を抽出することを考えても、ノイズや画像量子化の影響でうまくいかないことが多い。これに対し、Wolf らの方法では、画像の各点でガウス曲率の符号が計算され、ガウス曲率 0 の点はその符号で作る領域の境界として得られる。

先に進む前に、これらの方法や証明の内容の違いを比較しておく。物体表面を画像面からの奥行きで  $z(x, y)$  と表し、その勾配  $(p, q) = (\partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$  とする。画像  $E(x, y)$  が、画像座標  $(x, y)$  に対応する表面の点での反射係数  $\rho(x, y)$  と、反射率関数  $R(p, q)$  によって、次のように決まると仮定する。

$$E(x, y) = \rho(x, y) R(p, q) \quad (6.1)$$

Koenderink らが扱ったのは、反射係数が一様 ( $\rho(x, y)$  が定数) で、ランバート反射の場合である [72]。Yuille は、これをランバート反射以外の場合にも拡張したが、 $\rho(x, y)$  はやはり定数の場合であった [73]。先の Wolf らの論文 [79] では、 $\rho(x, y)$  が定数でない場合を考慮しているが、ランバート反射を仮定していた。

本章では、 $\rho(x, y)$  が定数でなくてランバート反射も仮定しない最も一般的な場合に、ガウス曲率の符号を決定する問題を考える。この条件はこれまでのところ扱われておらず、既存の証明の延長上にもなかった。本論文は、この条件の下でも照明の方向の知識なしにガウス曲率の符号が決定できることを示し、その具体的な計算の方法について述べる。

また、Wolf らの方法では、符号の計算を  $\rho(x, y)$  と無関係にするために、ランバート反射の場合の 2 枚の画像の明るさの比と反射率関数の比の関係を利用して、その代償として、3 方向の照明のうちの 1 方向は視線と平行にとる必要があり、照明方向の選択が自由でなかった。照明が視線と平行になるように光源をセットするのは容易でない。本章の方法ではこのような照明方向への条件は不要であり、3 つの方向は自由に選択できる。

本章の方法は、3 枚の画像の濃淡だけからガウス曲率の符号を決定するもので、その特長をまとめると

- 3 つの照明の方向は線形独立 (3 つの照明の方向が同一平面上にない) である限り自由。3 つの方向の視線方向まわりの回転の向きは符号の決定に必要なが、その他に定量的な知識は不要。

- 光源の強度に関する知識は不要。3 つの光源で強度が異なっても構わない。

- 物体表面の反射特性について、ある種の単調性をもつ反射特性ならば、完全に符号が決定できる。それ以外のすべての反射特性についても、2 つの符号の領域境界は常に正しい位置に来る。

である。Wolf らの方法と比較して、ランバート面以外の一様の反射特性を扱え、光源の方向が自由に選択できるという利点を持つ。

## 6.2 物体表面の面の向きと 3 枚の画像

画像  $E(x, y)$  が (6.1) 式で与えられると仮定する。勾配  $(p, q)$  は表面の単位法線ベクトル  $\hat{n}$  で表せるから、(6.1) 式を

$$E(x, y) = \rho(x, y) R(\hat{n}) \quad (6.2)$$

と書くことにする。ランバート反射では、照明の方向と強度を表すベクトル  $\mathbf{l}$  をもちいて

$$E(x, y) = \rho(x, y) (\hat{n} \cdot \mathbf{l}) \quad (6.3)$$

となる。ただし  $(\cdot)$  は内積を表す。

以降では、ランバート反射の場合 ((6.3) 式) を最初に議論し、その後一般の場合 ((6.2) 式) に進む。

画像の座標  $(x, y)$  を、画素の大きさを  $(\Delta x, \Delta y)$  として、 $(x_i, y_j) \equiv (i\Delta x, j\Delta y)$  と離散化す

る。画像  $E(x, y)$ , 反射係数  $\rho(x, y)$ , 面の法線ベクトル  $\hat{n} \equiv E(x, y)$ ,  $\rho_{i,j} \equiv \rho(x_i, y_j)$ ,  $\hat{n}_{i,j} \equiv \hat{n}(x_i, y_j)$  と表す。今、光源の方向を3通り  $(l^1, l^2, l^3)$  に変えて、3枚の画像  $E_{i,j}^1, E_{i,j}^2, E_{i,j}^3$  を得たとする。このとき、(6.3)式は座標を離散化して  $E_{i,j}^k = \rho_{i,j}(\hat{n}_{i,j} l^k)$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) と書ける。

各画素  $(i, j)$  で、その画素での3枚の画像の濃淡をならべ、3次元ベクトル  $e_{i,j} \equiv [E_{i,j}^1, E_{i,j}^2, E_{i,j}^3]^T$  を定義する。さらに、3つの光源方向を表すベクトルを次のように並べて  $3 \times 3$  行列  $L \equiv [l^1, l^2, l^3]^T$  とする。するとベクトル  $e_{i,j}$  は、

$$e_{i,j} = \rho_{i,j} L \hat{n}_{i,j} \quad (6.4)$$

と書ける。したがって  $e_{i,j}$  と  $\hat{n}_{i,j}$  の関係は、光源方向の行列  $L$  による簡単な線形変換になる。

ランバート反射でない場合の(6.2)式を離散化すると、照明方向の変化が反射率分布の変化で表せることから、 $E_{i,j}^k = \rho_{i,j} R^k(\hat{n}_{i,j})$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) と書ける。この場合には、 $e_{i,j}$  と  $\hat{n}_{i,j}$  との間には(6.4)式のような簡単な線形関係はないが、関数  $f$  を定義して

$$e_{i,j} = \rho_{i,j} f(\hat{n}_{i,j}) \quad (6.5)$$

書くことにする。

### 6.3 疑似ガウス像

この節では疑似ガウス像という新たな概念を導入する。これは3枚の画像の明るさから作られるものであり、曲面のガウス像と深いつながりがある。ガウス曲率はガウス写像によって幾何学的に解釈することが可能である。まずこの関係について述べることから始める。

#### 6.3.1 ガウス像とガウス曲率

ガウス写像とは、曲面の各点をその点での面の向きに写す写像のことである[13, 74, 80]。面の向きは単位球(ガウス球)上の一点として表せるから、曲面の点を単位球上の一点に写像すると考えても同じである。この写像によって得られる像を、もとの曲面のガウス像という。一例を図6.3に示す。

ガウス曲率( $K$ とする)は、曲面の2つの主曲率の積として定義される。この定義にしたがって画像の座標系で  $K$  を表すと、曲面の勾配  $(p, q)$  とその微分によって次のように表される。

$$K = \frac{(\partial p / \partial x)(\partial q / \partial y) - (\partial p / \partial y)(\partial q / \partial x)}{(1 + p^2 + q^2)^2} \quad (6.6)$$

この表現の他に、ガウス写像を経由した、より幾何学的なガウス曲率の表現がある。ここで

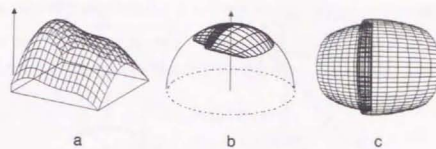


図 6.3. An example of Gaussian image. (a) Original surface. (b) Its Gaussian image on a unit sphere. (c) The projection of (b) onto a plane tangent to the north pole.

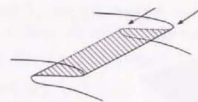


図 6.4. An illustration of folds of Gaussian image. They are the images of parabolic curves (curves consisting of points of zero Gaussian curvature) on original surface.

は、こちらの表現に注目する。

それは、曲面のある点でのガウス曲率が、その点の近傍の微小な領域と、その領域の像がガウス球上に占める領域との面積比(の微小領域の面積を零にもっていったときの極限)で表される(例えば[80]参照)、というものである。この関係から、曲面上のガウス曲率の変化、特にその符号の変化は、ガウス像の(トポロジ的な)構造を大きく左右する。ガウス像の構造とは、図6.4に模式的に示したような、ガウス像の折り目が作る構造を指す(図6.3cの例にも特徴的に現れている)。この折り目は、もとの曲面の放物的曲線(ガウス曲率が0となる点の集合)の像になっている。そして、ガウス像上のこの折り目を境にして、像のうち裏向きになっている部分(図6.3斜線部)がもとの曲面のガウス曲率負の領域の像であり、それ以外の表向きになっている部分が正の領域の像である。このように、ガウス曲率の符号は、ガウス像の構造を直接決めている。いま述べたような、ガウス像の構造と曲面の形状に関する議論は[74]に詳しい。

このことから、曲面上のある点でのガウス曲率の符号は、注目する曲面上の点近傍のまわりの3点での面の向きを使って、幾何学的に表すことができる。これを表したのが図6.5である。この3点を、注目する点まわりにある方向に巡回したとき、面の向きがどちら向きに回転するか、ガウス曲率の符号と対応する。すなわち、回転が反転すれば負であるし、そうでなければ正である。

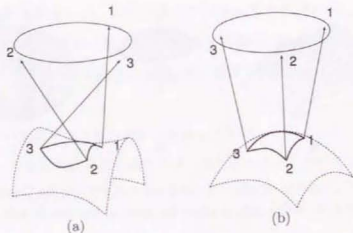


図 6.5. The geometric relationships between the sign of the Gaussian curvature and local surface shape. (a) For the negative sign. (b) For the positive sign.

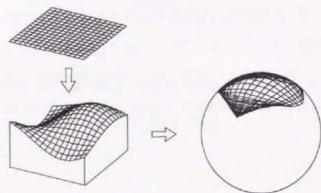


図 6.6. Back-projection of the image grid generates a grid pattern on the object surface. The surface normals on the grid pattern points form a discrete Gaussian image of the original surface.

### 6.3.2 離散的なガウス像とガウス曲率の計算

画像の各画素  $(i, j)$  に対応する物体表面の点での法線ベクトル  $\hat{n}_{i,j}$  を、球の中心に並べると、図 6.6 のように離散的なガウス像を得る。上で述べたガウス写像とガウス曲率との関係から、ある画素  $(i, j)$  に対応する表面の点でのガウス曲率の符号は、その点での法線ベクトル  $\hat{n}_{i,j}$  と隣接する 2 つの画素での法線ベクトル  $\hat{n}_{i+1,j}$ ,  $\hat{n}_{i,j+1}$  を用いて計算できる。図 6.5 の幾何学的関係から、符号は、この 3 つのベクトル  $\hat{n}_{i,j}$ ,  $\hat{n}_{i+1,j}$ ,  $\hat{n}_{i,j+1}$  が、この順に右手系を作るか、左手系を作るかによって定まる。それは、この 3 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の符号で判定でき、点  $(i, j)$  でのガウス曲率の符号は、次の行列式の符号になる。

$$\det[\hat{n}_{i,j}, \hat{n}_{i+1,j}, \hat{n}_{i,j+1}] \quad (6.7)$$

(6.7) 式が、(離散的ではあるが) ガウス曲率の符号を与えることは、次のようにして解析的

にも証明できる。面の向き  $\hat{n}_{i,j}$  は正規化されたベクトルで、画素  $(i, j)$  での勾配  $(p_{i,j}, q_{i,j})$  を使うと  $\hat{n}_{i,j} = (p_{i,j}, q_{i,j}, -1) / \sqrt{p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2 + 1}$  と表せる。行列  $[\hat{n}_{i,j}, \hat{n}_{i+1,j}, \hat{n}_{i,j+1}]$  を考えるのだが、各列に任意の正の数をかけてもその行列式の符号に変化はないから、行列

$$\begin{bmatrix} p_{i,j} & p_{i+1,j} & p_{i,j+1} \\ q_{i,j} & q_{i+1,j} & q_{i,j+1} \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

の行列式がガウス曲率の符号を与えることを示せば十分である。この行列式を計算すると

$$(p_{i+1,j} - p_{i,j})(q_{i,j+1} - q_{i,j}) - (p_{i,j+1} - p_{i,j})(q_{i+1,j} - q_{i,j})$$

である。これは (6.6) 式の分子を離散化したものに他ならない。こうして、(6.7) 式の行列式がガウス曲率の符号を与えることが示せた。

このように、対象物体の各画素での面の向き  $\hat{n}_{i,j}$ 、あるいは離散的なガウス像が得られていれば、(6.7) 式によって、各画素でのガウス曲率の符号を計算できる。

### 6.3.3 疑似ガウス像

(6.7) 式によって、面の向きが分かれば、各画素でのガウス曲率の符号が計算できる。各画素での面の向きを得るには、画像の濃淡と面の向きに成り立つ (6.2), (6.3) 式を使って、画像生成の逆問題を解く必要がある。これは陰影からの形状復元や照度差ステレオそのものであり、ここでは、表面の反射特性はもちろん、光源の方向や強度に関する知識が必要になってしまう。そうではなくて、ここでは、面の向きを求めるという手続きを経ずに、陰影から直接ガウス曲率の符号を決定する方法について考える。

そのために、(6.4), (6.5) 式などで導入した、ベクトル  $e_{i,j}$  に注目する。これは、3 枚の画像の画素  $(i, j)$  での濃淡の値からなるベクトル  $[E_{i,j}^1, E_{i,j}^2, E_{i,j}^3]^T$  であった。このベクトル  $e_{i,j}$  を使って、各画素  $(i, j)$  (あるいは対応する表面の点と考えても同じ) を  $e_{i,j}$  の指す向き ( $e_{i,j}$  で決まる単位球上の 1 点) に写す写像を考える。ガウス写像は、各画素  $(i, j)$  (あるいは表面の点) を面の向き  $\hat{n}_{i,j}$  に写す写像であった。新たな写像は、ガウス写像での面の向き  $\hat{n}_{i,j}$  の代わりに、各画素でのベクトル  $e_{i,j}$  を用いる。3 枚の画像の陰影 (濃淡) があればこの新たな写像を実行できて、新たな像を得る。これを疑似ガウス像と呼ぶことにする。

ランバート反射および一般の反射特性について、 $e_{i,j}$  は面の向きとそれぞれ (6.4), (6.5) 式によって関係付けられている。したがって疑似ガウス像は (6.4), (6.5) 式によってガウス像を「変換」したものであると考えることができる (図 6.7)。この「変換」によって疑似ガウス像はも

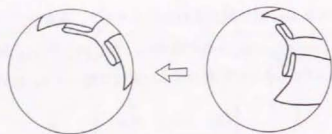


図 6.7. An illustration of the relationship between the Gaussian image (left) and the pseudo Gaussian image (right). The pseudo Gaussian image can be viewed as the result of transforming the Gaussian image by a mapping dependent on the reflectance map. It is a key to the solution whether the structure of the Gaussian image is preserved.

とのガウス像とは異なるものとなり、その異なり方は (6.4) 式や (6.5) 式を決める要素、すなわち 3 つの照明の方向や強度、さらに反射特性に依存する。しかし、前節で述べた、ガウス曲率の符号と関係深いガウス像のもつ構造は、この「変換」の前後では保存される（理由は次節で述べる）。つまり、真のガウス像のもつ構造を疑似ガウス像も保っていて、疑似ガウス像からでもガウス曲率の符号を決定できるのである。疑似ガウス像は、面の向きを復元することなく、画像の濃淡だけから直ちに作れる像である。したがって、画像の濃淡から直接ガウス曲率の符号が決定できることになる。

## 6.4 疑似ガウス像による曲率符号計算

### 6.4.1 ランバート反射の場合

(6.4) 式のランバート反射の場合を先に考える。面の向きからガウス曲率の符号を計算すると同じように、画素  $(i, j)$  まわりの濃淡のベクトル 3 つ  $e_{i,j}$ ,  $e_{i+1,j}$ ,  $e_{i,j+1}$  が右手系を作るか左手系を作るかを判定する行列式を作る。すると、これは (6.4) 式よりただちに

$$\det[e_{i,j}, e_{i+1,j}, e_{i,j+1}] = (\rho_{i,j} \rho_{i+1,j} \rho_{i,j+1}) \cdot \det[\hat{n}_{i,j}, \hat{n}_{i+1,j}, \hat{n}_{i,j+1}] \quad (6.8)$$

となる。(6.7) 式より、右辺最後の行列式の符号は、ガウス曲率の符号に等しい。反射係数  $\rho_{i,j}$ ,  $\rho_{i+1,j}$ ,  $\rho_{i,j+1}$  はどの画素でも常に正であるから、行列式  $\det L$  の符号が分かれば、(6.8) 式の行列式の符号から、この画素でのガウス曲率の符号が求められることになる。行列  $L$  は照明の強度、方向を表す 3 つのベクトルからなる行列であった。その行列式  $\det L$  の符号は、3 つ選んだ照明の方向の、視線方向まわりの回転の向きによって決まる。そして、それはすべての画素について同じである。したがってその回転の向きさえ分かれば、各画素でのガウス曲率の符号は  $\det[e_{i,j}, e_{i+1,j}, e_{i,j+1}]$  を計算することで得られる。

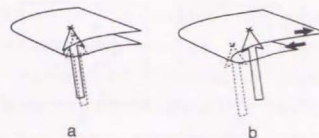


図 6.8. Two points having the same surface normal have the same brightness in the image. Two points mapped onto the same point on the Gaussian image, therefore, mapped onto the same point on the pseudo Gaussian image. The folds (a) of the Gaussian image cannot move away from the original position in the pseudo Gaussian image as shown in (b).

### 6.4.2 一般の反射特性の場合

次に一般の反射特性の場合について考える。(6.5) 式を再び書くと

$$e_{i,j} = \rho_{i,j} f(\hat{n}_{i,j})$$

であった。 $f$  は反射特性と照明条件（光源の方向、強度）をカプセル化して一つの関数として表したもので、一般にはたいへん複雑であると想像されるが、ガウス曲率が 0 となる領域の境界については、簡単な議論ができる。

つまり、この式が成り立っているならば、関数  $f$  が未知であっても、次のことが常に言える。すなわち、「同じ面の向きを持つ表面の 2 点は同じ光源方向のもとでは同じ明るさで見える。」ということである。これは (6.5) 式より自明である（あるいは画像の生成を考える上での前提である）。この事実によって、ガウス像の折り返し（ガウス曲率 0 の点の像）が、疑似ガウス像においても同じ場所に折り返しを作ることが保証される。なぜなら、ガウス像で同じ位置に写像される異なる 2 点は、そこでの面の向きが同じであるから、疑似ガウス像上でもやはり同じ位置に写像されるからである（図 6.8 参照）。疑似ガウス像から計算される  $\det[e_{i,j}, e_{i+1,j}, e_{i,j+1}]$  の符号が変わる境界が、真の境界（すなわち  $\det[\hat{n}_{i,j}, \hat{n}_{i+1,j}, \hat{n}_{i,j+1}]$  の符号が変わる境界）と異なる場所に移動することは決してない。 $\det[e_{i,j}, e_{i+1,j}, e_{i,j+1}]$  によって各画素で符号を計算したとき、その境界は反射特性によらず常にガウス曲率 0 の正しい位置に検出されることになる。

以上をより厳密に示す。証明すべきは、

$$\det[\hat{n}_{i,j}, \hat{n}_{i+1,j}, \hat{n}_{i,j+1}] = 0 \quad (6.9)$$

ならば

$$\det[e_{i,j}, e_{i+1,j}, e_{i,j+1}] = 0 \quad (6.10)$$

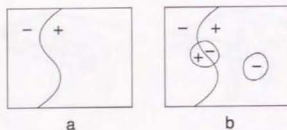


図 6.9. A typical example of errors of segmentation. For a true segmentation shown in (a), there are some cases where pseudo regions appear like (b). These errors often occur around specular reflections. Note that the original boundary still appears.

となることである。 $\delta \mathbf{n}_x$ ,  $\delta \mathbf{n}_y$ を微量量として,  $\hat{\mathbf{n}}_{i,j} = \hat{\mathbf{n}}$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_{i+1,j} = \hat{\mathbf{n}} + \delta \mathbf{n}_x$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_{i,j+1} = \hat{\mathbf{n}} + \delta \mathbf{n}_y$ とおく. 各列ベクトルの長さを定数倍しても行列式は0であるから, (6.9)式が成り立つならば  $\det[\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} + \delta \mathbf{n}_x, \hat{\mathbf{n}} + \delta \mathbf{n}_y] = 0$ である. したがって,  $\delta \mathbf{n}_x$ ,  $\delta \mathbf{n}_y$ は, その大きさが十分小さいとすれば互いに定数倍の関係にあるとしてよい (すなわち,  $\delta \mathbf{n}_x = \alpha \delta \mathbf{n}_y$ ,  $\alpha$ は定数). 一方 (6.10) 式は

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{e}_{i,j}, \mathbf{e}_{i+1,j}, \mathbf{e}_{i,j+1}] &= \det[\rho_{i,j} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}}), \rho_{i+1,j} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}} + \delta \mathbf{n}_x), \rho_{i,j+1} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}} + \delta \mathbf{n}_y)] \\ &\approx (\rho_{i,j} \rho_{i+1,j} \rho_{i,j+1}) \cdot \det\left[\mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}}), \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{n}} \delta \mathbf{n}_x, \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{n}} \delta \mathbf{n}_y\right] \\ &= (\rho_{i,j} \rho_{i+1,j} \rho_{i,j+1}) \cdot \det\left[\mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}}), \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{n}} \delta \mathbf{n}_x, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{n}} \delta \mathbf{n}_y\right] \quad (6.11) \end{aligned}$$

である.  $\delta \mathbf{n}_x = \alpha \delta \mathbf{n}_y$ であれば最後の行列式は0になる. 従って (6.9) 式が成り立つならば (6.10) 式が成り立つこと, すなわちガウス曲率0の点は  $\det[\mathbf{e}_{i,j}, \mathbf{e}_{i+1,j}, \mathbf{e}_{i,j+1}]$  を0にすることが示された.

ただし, その逆は常には言えない. つまり (6.10) 式が成立するのに (6.9) 式が成立しないことがある. この場合, 単純に  $\det[\mathbf{e}_{i,j}, \mathbf{e}_{i+1,j}, \mathbf{e}_{i,j+1}]$  の符号を計算し領域の境界を取り出すと, 例えば図 6.9 のように, ガウス曲率0の境界の他に, 偽の境界が得られてしまう. このようなことは (6.11) 式で  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{n}$  のランクが落ちる場合に起こる.

ある種類の拡散反射では, 光源方向からの面の向きの傾きが大きくなるにつれて, その点の明るさが単調に減少するような性質があり,  $\mathbf{f}$  には1対1対応の関係がある.  $\mathbf{f}$  が1対1写像であれば行列  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{n}$  はフルランクになるから, この場合, (6.9) 式と (6.10) 式は互いに必要十分となる. ((6.10) 式が成り立つならば  $\delta \mathbf{n}_x = \alpha \delta \mathbf{n}_y$  が言え, これから (6.9) 式が成り立つと言えるからである.) 疑似ガウス像を使って考えると,  $\mathbf{f}$  が1対1写像ならば, ガウス像から疑似ガウス像への変換 (3.3 節参照) の前後でガウス曲率の符号の構造が完全に保存され, 符号の同定が完全になるというように理解される.

上のことはすべての反射特性について成り立つわけではない. 例えば鏡面反射の成分が含まれると, 今述べた1対1対応の関係は成り立たなくなる. ある与えた照明方向に対して, 鏡面反射が支配的な場所とそうでない場所の境で, 行列  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{n}$  のランクが落ち, 偽の境界が現れる. しかし, その場合でも真の境界は必ず正しい位置に得られる (図 6.9b). また, 大抵の物体表面の反射特性について, 鋭いピークを与える鏡面反射の成分は, 入射角と反射角の等しくなる表面のごく小さい部分で起こり, そこから離れた, 角度の条件を満たさないところでは拡散反射が支配的になる. このことから, 画像内の鏡面反射を起こす部分を除いて,  $\det[\mathbf{e}_{i,j}, \mathbf{e}_{i+1,j}, \mathbf{e}_{i,j+1}]$  によってガウス曲率の符号が正しく計算できると期待できる. 鏡面反射のために誤った境界が得られ場合には, 画像を4枚以上用いることで, 総和として正しい境界を得ることが考えられる.

## 6.5 正しく符号が決定されるための条件

前節では, 疑似ガウス像の考え方を元にして, 曲率符号の計算方法を導き出した. そしてランバート面の場合には, その方法で符号を正しく計算できることを示した. 非ランバート面の場合には, 述べた方法では符号が間違ってしまうことがあつた. 正しい符号境界は常に正しい位置に得られることを示した. 偽の境界は照明条件の変化により一般に移動し得るから, 後に述べるように4枚以上の画像を用いることで偽の境界と真の境界を見分けることは可能である.

しかし, 非ランバート性の反射特性でも, 上で述べたような1対1対応の性質をもつ拡散反射の場合など, 同じ方法で3枚の画像から符号が正しく計算できる場合はある. 本節では, 前節までに述べた方法で, 非ランバート性の反射特性に対して, 曲率符号が正しく計算できるのはどのような場合かをより厳密に考える. つまり, 反射特性と照明条件 (つまり反射率分布) がどのような条件を満たしていれば, 符号の計算が正しく行えるのかを考える. これまでは疑似ガウス像とそれから導いた符号の計算方法とを, 画素ごとの離散領域で考えてきた. ここでは (通常の手続きとは逆に) 離散領域から連続領域に拡張することにより, 符号が正しく決定されるための条件を明らかにする.

### 6.5.1 微分の対称差分近似

ガウス曲率の符号の計算を、視線方向まわりの光源方向の回転の向き  $\det \mathbf{L}$  (非ランバート面の場合はそれに相当するもの) と、3枚の画像の濃淡で作る行列の行列式

$$\det [\mathbf{e}_{i,j}, \mathbf{e}_{i+1,j}, \mathbf{e}_{i,j+1}]$$

の符号によって計算するとした。行列式の性質により

$$\det [\mathbf{e}_{i,j}, \mathbf{e}_{i+1,j}, \mathbf{e}_{i,j+1}] = \det [\mathbf{e}_{i,j}, \mathbf{e}_{i+1,j} - \mathbf{e}_{i,j}, \mathbf{e}_{i,j+1} - \mathbf{e}_{i,j}]$$

である。このように表すと、式の符号が、図 6.10 a に示すように疑似ガウス像の写像の向きを計算するものであることがよりはっきりする。

この式は、ベクトル  $\mathbf{e}_{i,j}$  の添え字について対称でない。つまり各画素で上下左右を対称に扱っていない。実際の画像からの計算では、対称に扱ったほうが若干よい結果を与えることが確かめられている。同じく疑似ガウス像の写像の向きを調べ、しかも上に述べたような意味で対称な式を、幾何学的に考えると (図 6.10 b 参照)

$$\det [\mathbf{e}_{i,j}, \mathbf{e}_{i+1,j} - \mathbf{e}_{i-1,j}, \mathbf{e}_{i,j+1} - \mathbf{e}_{i,j-1}]$$

となる。この行列の成分をあらわに書くと

$$\begin{bmatrix} E_{i,j}^1 & E_{i+1,j}^1 - E_{i-1,j}^1 & E_{i,j+1}^1 - E_{i,j-1}^1 \\ E_{i,j}^2 & E_{i+1,j}^2 - E_{i-1,j}^2 & E_{i,j+1}^2 - E_{i,j-1}^2 \\ E_{i,j}^3 & E_{i+1,j}^3 - E_{i-1,j}^3 & E_{i,j+1}^3 - E_{i,j-1}^3 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

となる。この章の最後に示す実験ではこの行列の行列式の符号を計算に用いている。

### 6.5.2 連続領域における符号の計算式

(6.12) の行列は疑似ガウス像の考え方に基づいて、離散的に導き出したものである。逆にこれを連続領域の表現に直して、符号が正しく決定できる条件を検討することにする。

この行列を連続領域に直し、これを  $\mathbf{D}(x, y)$  と書くと、

$$\mathbf{D}(x, y) = \begin{bmatrix} E^1 & \partial E^1 / \partial x & \partial E^1 / \partial y \\ E^2 & \partial E^2 / \partial x & \partial E^2 / \partial y \\ E^3 & \partial E^3 / \partial x & \partial E^3 / \partial y \end{bmatrix}$$

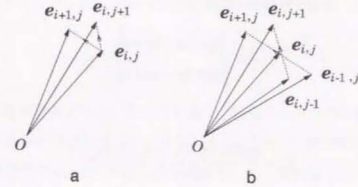


図 6.10. Geometric representations of the sign computation by the determinant of the matrix; (a) is non-symmetric and (b) is symmetric in terms of the image coordinates.

となる。  $E^k(x, y) = \rho(x, y) R^k(p, q)$ ,  $k = 1, 2, 3$  を代入すると  $\mathbf{D}(x, y)$  は

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \rho R^1 & \partial(\rho R^1) / \partial x & \partial(\rho R^1) / \partial y \\ \rho R^2 & \partial(\rho R^2) / \partial x & \partial(\rho R^2) / \partial y \\ \rho R^3 & \partial(\rho R^3) / \partial x & \partial(\rho R^3) / \partial y \end{bmatrix}$$

と表せる。微分の連鎖規則より、行列  $\mathbf{D}$  のたとえば (1,2) 成分は

$$\frac{\partial(\rho R^1)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} R^1 + \rho \left( \frac{\partial R^1}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial R^1}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

であるから、

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \rho R^1 & \rho_x R^1 + \rho(R_p^1 p_x + R_q^1 q_x) & \rho_y R^1 + \rho(R_p^1 p_y + R_q^1 q_y) \\ \rho R^2 & \rho_x R^2 + \rho(R_p^2 p_x + R_q^2 q_x) & \rho_y R^2 + \rho(R_p^2 p_y + R_q^2 q_y) \\ \rho R^3 & \rho_x R^3 + \rho(R_p^3 p_x + R_q^3 q_x) & \rho_y R^3 + \rho(R_p^3 p_y + R_q^3 q_y) \end{bmatrix}$$

と変形される。符号の計算に用いるのは行列式  $\det \mathbf{D}$  であってこれが目的のものである。行列式の性質から

$$\det \mathbf{D} = \det \begin{bmatrix} \rho R^1 & \rho(R_p^1 p_x + R_q^1 q_x) & \rho(R_p^1 p_y + R_q^1 q_y) \\ \rho R^2 & \rho(R_p^2 p_x + R_q^2 q_x) & \rho(R_p^2 p_y + R_q^2 q_y) \\ \rho R^3 & \rho(R_p^3 p_x + R_q^3 q_x) & \rho(R_p^3 p_y + R_q^3 q_y) \end{bmatrix}$$

となる。さらにこれを変形すると、

$$\det \mathbf{D} = \rho^3 \det \begin{bmatrix} R^1 & R_p^1 & R_q^1 \\ R^2 & R_p^2 & R_q^2 \\ R^3 & R_p^3 & R_q^3 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \partial p / \partial x & \partial q / \partial x \\ \partial p / \partial y & \partial q / \partial y \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

と書けることが分かる。右辺の最右の行列式

$$\det \begin{bmatrix} \partial p / \partial x & \partial q / \partial x \\ \partial p / \partial y & \partial q / \partial y \end{bmatrix}$$

は、ガウス曲率  $K$  が

$$K = \frac{\partial p / \partial x \partial p / \partial y - \partial p / \partial y \partial q / \partial x}{(p^2 + q^2 + 1)^2}$$

と表されることから、その符号は  $K$  の符号と同じになる。また、反射係数  $\rho(x, y)$  は常に正である。したがって、行列

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R^1 & R_p^1 & R_q^1 \\ R^2 & R_p^2 & R_q^2 \\ R^3 & R_p^3 & R_q^3 \end{bmatrix}$$

の行列式の符号が分かれば、 $\det \mathbf{D}$  からガウス曲率  $K$  の符号が分かる。領域境界が得られさえすればよい立場からは、上の行列式  $\det \mathbf{R}$  が 0 にならないければよいと分かる。また、正しく符号が計算されるための条件は  $\det \mathbf{R} \neq 0$  と表せることが分かった。

### 6.5.3 正しく符号が計算される反射率分布

上で述べたように、 $\det \mathbf{D}$  の符号によって曲率符号の境界を完全に決定できるための必要十分条件は、反射率分布  $R(p, q)$  が任意の  $(p, q)$  (あるいは対象物体の画像上での面の向きの分布  $(p, q)$  の範囲) において

$$\det \mathbf{R} \neq 0 \quad (6.14)$$

となることである。ここでこの条件の意味について考えておく。

まず  $U(p, q) \equiv R^1(p, q)/R^3(p, q)$ ,  $V(p, q) \equiv R^2(p, q)/R^3(p, q)$  とし、写像

$$g: (p, q) \rightarrow (U, V)$$

を定義する。この写像  $g$  は (勾配  $(p, q)$  で表された) 面の向きを  $[R^1, R^2, R^3]$  の向き (ベクトルの長さを問わない) に写すものである。この写像  $g$  の Jacobi 行列式は

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(p, q)} = \det \begin{bmatrix} \partial U / \partial p & \partial U / \partial q \\ \partial V / \partial p & \partial V / \partial q \end{bmatrix}$$

で与えられる。これを  $R^1, R^2, R^3$  によって表示し、さらに変形すると

$$\det \begin{bmatrix} \partial U / \partial p & \partial U / \partial q \\ \partial V / \partial p & \partial V / \partial q \end{bmatrix} = \frac{\det \mathbf{R}}{(R^3)^3} \quad (6.15)$$

となる。右辺の  $\det \mathbf{R}$  が非零であることが符号決定が完全となるための必要十分条件であったから、これは写像  $g$  の Jacobi 行列式が 0 にならないことであると言い換えられる。

照度差ステレオの研究では、面の向き (と反射係数) を一意に復元できるための条件が論じられてきた。次節に述べるように照度差ステレオでは、画像の明るさの組と面の向き (や反射係数) との対応の知識に基づいて形状を復元する。その場合には、写像  $g$  (あるいはそれに準ずるもの) が 1 対 1 対応であることが、面の向きを一意に定めるための必要十分条件となる。標準的な 3 枚の画像を用いる照度差ステレオでは、濃淡の 3 つ組と面の法線さらに反射係数の 3 つ組とが 1 対 1 に対応すること、すなわち異なる濃淡の 3 つ組には異なる法線と反射係数が対応することが条件であった。[81, 82].

この照度差ステレオにおける一意性の必要十分条件 — すなわち写像  $g$  が 1 対 1 対応であること — は、われわれの問題において境界が完全に決定できるための十分条件になっている。われわれの問題での必要十分条件は  $g$  の Jacobi 行列式が 0 にならないことであった。写像が 1 対 1 なら常にその写像の Jacobi 行列式は 0 でないから、上の十分性が言える。しかしながらその逆、すなわち写像の Jacobi 行列式が 0 でないからといって写像が 1 対 1 であることは言えないので、必要条件ではない。つまり照度差ステレオでの形状復元の一意性のための条件よりも、われわれの問題での符号決定の完全性の条件の方がいくらか緩いということが言える。

### 6.6 照度差ステレオとの比較

照度差ステレオは照明の方向を変えて得た複数枚の画像から形状を復元する方法で最初に Woodham が提案した [76] ものである。ランバート面と無限遠光源を仮定すると、画像の濃淡は面の向き  $\mathbf{n}$  と  $l$  を用いて  $\rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})$  と書ける。照明方向を変えて  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 得た画像の各画素の濃淡値をならべてベクトル  $\mathbf{x}_i$  を作る。各画素に対応する面の向きと反射係数の積  $\rho \mathbf{m}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) を行ベクトルとして同じ順で並べた  $M \times 3$  行列  $\mathbf{N}$  を作ると、

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{N} \mathbf{l}_i \quad (6.16)$$

と書ける。このような画像が 3 枚あれば

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] = \mathbf{N} [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3]$$

と書けて、 $N$  すなわち各画素での面の向きと反射係数を定めることができる。対象とする物体表面と同じ材質をもつ形状既知の参照物体を用意できれば、非ランバート面であっても、また照明が無限遠点光源に限らなくとも、形状を復元することが可能であることが知られている

また、ランバート面であれば、照明方向の知識がなくとも形状をある不定性を残して復元できることが知られている [77, 78]。Hayakawa は (6.16) 式の関係から、 $M \times N$  行列

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$$

を特異値分解

$$X = UWV^T$$

したとき ( $U, V$  は行直交行列、 $W$  は対角行列)、 $W$  のランクが 3 しかないことを用いて

$$N = U'W'A$$

$$[l_1, l_2, \dots, l_N] = AV'^T$$

と ( $U', W', V'$  はそれぞれランク 3 以下に相当する成分を 0 にした行列)、任意の正則行列  $A$  の不定性を残して面の向きと照明方向を知ることができることを示した [77]。さらに彼は照明強度が同じであれば  $A$  の不定性を回転行列までに絞れることも示した。Epstein と Yuille [83]、Yuille と Snow [78] は、積分可能条件を用いると  $A$  の不定性を、Bas-Relief 変換 [71] まで減じられることを示した。

このようなことができるのは (6.16) 式に見られるランバート反射の強い線形性 [84-86] のおかげであって、非ランバート面にこれらの方法を適用してもよい結果は得られないと考えられる。これに対し、この章で提案した曲率符号の計算方法は、上で述べたように基本的に反射特性に依存しない利点がある。

また、提案方法のように画像濃淡から曲率符号を直接に計算することと、照度差ステレオやレンジファインダなどの形状測定装置によってまず形状を得て、その後に形状データから曲率符号を計算することとを比較したとき、センサから得たデータの含む量子化誤差やノイズを考えると次のような利点がある。後者、すなわち形状から曲率情報を得るには、計測されたデータに対して 2 階の微分 (差分) の計算が必要になる。これに対し提案方法では画像濃淡の 1 階の微分 (差分) を計算するだけで済む。照度差ステレオなどで得た形状 (3 次元座標値や奥行き) データと画像の濃淡値のデータの間で、それらがもつ相対誤差が同程度であると大雑把に見積もったとき、1 階の差分を計算するのと、2 階の差分を計算するのでは、後者の方が量子化誤差や

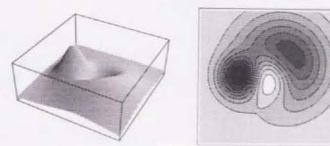


図 6.11. Shape and its contour map.

ノイズの悪影響はずっと大きい。この意味で、曲率符号の計算を目標とするときは、仮に光源分布や物体の反射特性が既知であっても、形状復元を経由せず、提案方法のように直接に曲率符号を計算する方がよい。

## 6.7 実験結果

本章で述べた方法を検証するため、合成画像と実画像を用いて実験を行った。

図 6.12 は、ある表面形状 (ガウス関数の加算で得た形状、図 6.11 に示す) に対して、3 枚の画像を合成し、その画像からもとの形状のガウス曲率の符号を計算した例である。物体表面は、

$$R(n; l) = |l| e^{-0.2((n_1/n_3 - l_1/l_3)^2 + (n_2/n_3 - l_2/l_3)^2)}$$

なる反射特性を持つとした。これはランバート反射とは異なる種類の拡散反射を模擬したものである。また、反射係数は非一様とし、光源方向  $l$  を適宜に変えて画像 (図 6.12 a の 3 枚) を合成した。この 3 枚から (6.12) 式によって計算した符号の分布が図 6.12 b である。白は符号が正、黒は負であることを表す。真の符号を画素ごとに表示したものが図 6.12 c である。両者の比較により推定した符号の分布が真のそれとほとんど同じになっていることが分かる。また、反射係数の影響を受けていないことも分かる。

次に実画像を用いて実験を行った結果を示す。実験では画像の取得のためにカメラに東芝製 1/3 インチ CCD カメラを、レンズに COSMICAR TELEVISION LENS (焦点距離 25mm, f 値 1.9) を用いた。これらにより  $640 \times 480$  画素、濃淡値 256 階調の画像を得た。濃淡の量子化誤差、ノイズ等の影響を考慮して、すべての画像は  $2 \times 2$  画素ごとの平均をとることで  $320 \times 240$  画素にサイズを縮小してから用いた。照明には家庭用白熱電球を用い、物体から 30cm から 1m の位置でこれを点灯させた。

表面の曲率符号の境界 (放物的曲線) は、物体の輪郭の変極点 (inflection point) すなわち輪

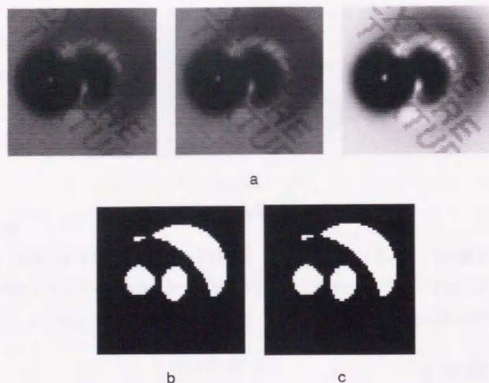


図 6.12. Results for synthetic images. (a) Three synthetic images. (b) Estimated distribution of sign of the Gaussian curvature. (c) True distribution. Hyperbolic points (negative sign) are displayed in black and elliptic points (positive sign) are in white.

郭の曲線上で曲率の符号が変わる点を必ず通る (Meusnier の定理などから, [74] 参照)。そしてこのことを使うと以下の実験で計算された境界が正しいかどうかを確かめる一つ目安となる。また実際に、符号の境界が輪郭の変極点を通るこの事実を利用して符号計算の正確さを調べた。

図 6.13 にゴム製のアヒルのおもちゃを用いた実験例を示す。図 6.13 a, b, c が光源方向を変えて得た 3 枚の画像である。表面の反射特性は、拡散反射成分が強く、鏡面反射はほとんど起きていない。図 6.13 d が符号の計算結果である。白が符号が正の点、黒が負の点にそれぞれ対応する。符号の境界線がアヒルの輪郭における変曲点を通っているのが認められる。上で述べたように少なくとも輪郭付近では結果は正しい。この例では、3 枚の画像で光源の明るさが相対的に異なるため、画像の濃淡が全体的に 3 枚の画像間 (図 6.13 a-c) で異なっている。このことは、しかし、上で述べたように符号の計算には影響しない。実際、この 3 枚にどれかを、他の異なる照明条件の下での画像 (特に強度の異なるもの) にいれかえても同じ結果が計算された。

図 6.14 は、光沢のあるピンを用いた実験の結果である。3 枚の画像図 6.14 a, b, c には鋭いスパイク状の鏡面反射が認められる。図 6.14 d に符号の計算結果を示す。そこでは、鏡面反射の影響で鏡面反射とちょうど同じ場所に、符号の反転が起こっており、6.4.2 節で述べた偽の境界

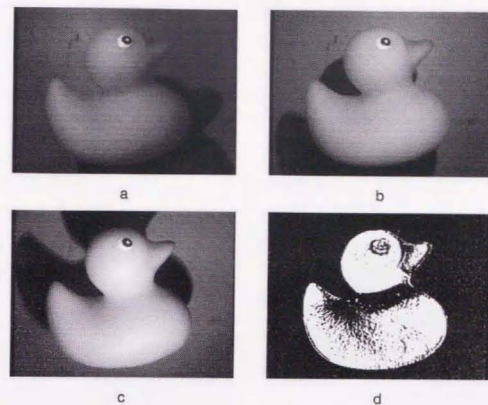


図 6.13. Segmentation result for real images (a duck made of rubber). (a), (b), (c) Taken three shaded images. (d) Distribution of sign. Hyperbolic points (negative sign) are displayed in black and elliptic points (positive sign) are in white.

が現れている。しかし、鏡面反射から離れたピンの首の部分に現れている符号の境界は、輪郭線から予想される正しい位置にあり (これについては後述)、鏡面反射のある一部を除けば、推定された符号の分布は正しいと思われる。鏡面反射の起こる場所は、元の画像からあらかじめ分かる場合が多いから、符号の推定結果から除くなどの処理をすればよい。鏡面反射の同定・除去の目的には、光の偏向の性質を利用することが有効であると知られている。あるいは 3 つ以上の方向から物体に光を照射してより多くの画像を取得し、画像のそれぞれの部分において、鏡面反射が起こっていない 3 枚の画像を選んでその部分での符号の計算を行うことにすれば、物体面上のすべての場所で符号を正しく推定できる。

より複雑な形状に対する例として、図 6.15 に示す石膏像を用いて実験を行った。同様に、3 枚の画像 (図 6.15 a, b, c) から図 6.15 d に示すような符号の分布を得た。頬や顎の出っ張った凸の部分为正の符号として正しく計算され、額を横に走る溝など双曲的な部分が負の符号として細かく抽出されているのが分かる。特に額の溝の部分については、元の画像 1 枚を見るだけでは、そのような構造があることは発見しにくく、本手法の有効性を示している。

抽出される符号の境界の位置が正しいものであるかどうかを調べる方法として、図 6.14 のピ

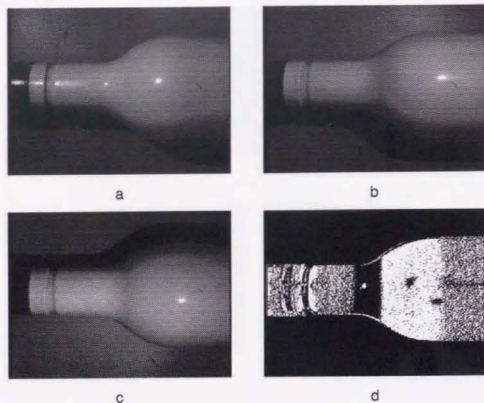


図 6.14. Segmentation result for real images (a bottle with specularities). (a), (b), (c) Taken three shaded images. (d) Distribution of sign. Hyperbolic points (negative sign) are displayed in black and elliptic points (positive sign) are in white.

ンの例において、物体の輪郭を利用して画像から符号の境界を求め、それを本章の手法による計算結果と比較することを考えた。すでに述べたように符号の境界は輪郭の変極点を必ず通る。回転対称である曲面では、符号の境界は曲面の回転軸に垂直な平面上の円となる。用いたビンも回転対称であり、符号の境界はこの場合中心軸に垂直な平面内の円となるはずである。ビンの中心軸が視線と垂直であるとし、符号の境界が画像の中央付近にあって、その円がのる平面が画像中心を通ると仮定すると、境界は画像上で直線となる。図 6.14 でこの条件が成り立っているとす。このとき、画像上での符号の境界は、輪郭の変極点を結んだ直線ではほぼ近似できるはずである。

そこで、まず図 6.14 a の画像に対し、ビンの輪郭を抽出し、これに手でスプライン曲線（制御点 7 点）をあてはめた、これを図 6.16 a に示す。さらにそのスプライン曲線から輪郭の変極点を求め、その間に直線を引いて符号の境界を求めたのが図 6.16 b である。符号の境界を元の画像に重ねると図 6.16 c のようになる。このように求めた境界と、われわれの手法で画像濃淡から計算した符号の計算結果とを比較したのが図 6.16 d である。この図において、ビンの輪郭と符号の計算結果の領域とが一致しないのは、その部分において、用いた 3 枚の画像（図 6.14 a-

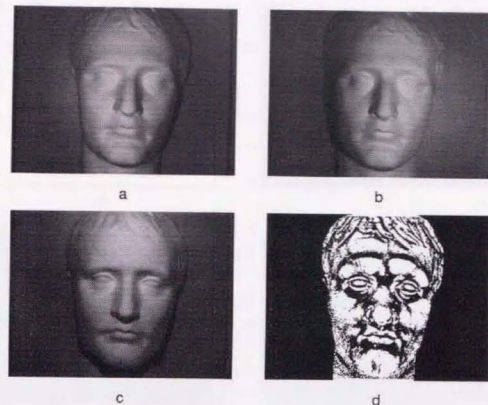


図 6.15. Segmentation result for real images (a plaster work). (a), (b), (c) Taken three shaded images. (d) Distribution of sign. Hyperbolic points (negative sign) are displayed in black and elliptic points (positive sign) are in white.

c) のいずれかに陰があるためである。これは別にして、符号の計算結果から分かる領域の境界は上のようにして求めた境界に近く、符号の決定が正確に行われていると言える。

さらに、本手法を簡単な問題に適用してその有効性を確認するためと、また、上とは別な方法で領域境界の正確さを再び確かめるために、同じビンを使って、抽出された画像上での領域境界の位置を元に、ビンの 3 次元空間内での姿勢を計算する実験を行った。すでに述べたように回転対象な曲面では、曲率符号の境界は回転軸に垂直な平面上の円となる。透視投影あるいは正射影の投影変換の下で、空間内の円は画像面上では楕円として見える。正射影を仮定すると、その楕円の長短軸の比は、視線方向（光軸）と物体の回転軸のなす角の余弦に等しくなる。このことを用いて、本手法によって計算された画像上の符号の境界に楕円を当てはめて、その長短軸の比を求め、視線と回転軸とのなす角を導いて、あらかじめ測っていた真の値と比較した。

この実験では、画像を取得するのに、カメラにソニー製 1/3 インチ CCD カメラを、レンズに COSMICAR TELEVISION LENS（焦点距離 25mm, f 値 1.9）を用いた。レンズ中心から約 60cm のところにビンを置いたので、焦点距離を考慮すると、ここでの目的には正射影が十分に近似である。なお、画像の取得には浜松ホトニクス製イメージグラバード IQ-V50 を用い、

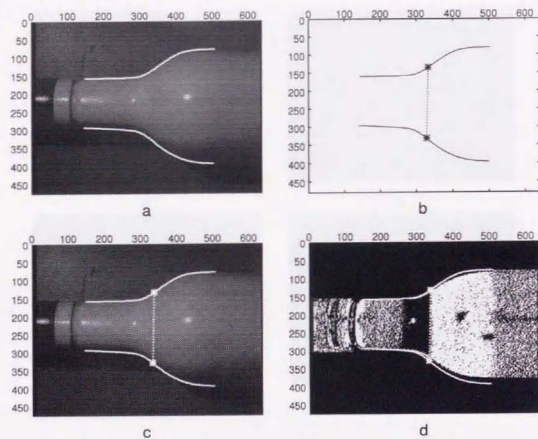


図 6.16. Comparison between the segmentation result and the boundary computed from the bottle's occluding boundary. (a) Spline curves fitted to the occluding boundary. (b) Line connecting the two inflection points of the fitted spline curves. This line corresponds to the parabolic curve in this case. (c) Original image with the computed boundary. (d) Comparison between the segmentation result and the computed boundary.

画像を 127 枚積算することでノイズの除去を図り、 $640 \times 480$  画素、65536 階調の濃淡画像を得ている。照明には家庭用白熱電球を用い、物体から 30cm 程度の位置でこれを点灯させた。

まず、視線と中心軸が 49 度の角度をなすようにピンを置き、領域境界を計算した。その結果を図 6.17 に示す。同図 a, b, c が取得した 3 枚の画像である。ここでは画像の上下の部分省いて表示してある（横は 640 画素のまま）。ピンの中心軸は画像の  $y$  軸（縦）と垂直になるようにおいた。同図 d が符号の計算結果である。さらに同図 e は、領域境界に楕円を手で当てはめた様子、同図 f はその楕円のみを取り出して表示したものを表す。この 2 つの楕円それぞれについて長短軸の比とそれから計算される角度を表 6.1 に示す。表中 (a) は大きい方の楕円、(b) は小さい方の楕円についての計算結果を表す。上で述べた関係を用いて、角度は長短軸の比の  $\cos^{-1}$  をとることで算出される。求めた値は真の値の 49 度に近く、楕円の当てはめ誤差や正射影による近似の影響を考慮すると、この推定は十分正確であると結論される。さらに、視線と

表 6.1. Calculation of the angle between the rotation axis of the object and the viewing direction using the two ellips shown in Fig.6.17f. (a) For the larger ellipse. (b) For the smaller one.

Ellipse	Ratio between the axes	Angle
(a)	0.67	$48^\circ$
(b)	0.59	$54^\circ$

中心軸のなす角度を 68 度に変えて同様の計算を行った。符号の計算結果を図 6.18 に、あてはめた楕円（同図 f）の長短軸の比とそこから計算される角度を表 6.2 に示す。算出された値は 68

表 6.2. Calculation of the angle between the rotation axis of the object and the viewing direction using the two ellips shown in Fig.6.18f. (a) For the larger ellipse. (b) For the smaller one.

Ellipse	Ratio between the axes	Angle
(a)	0.31	$72^\circ$
(b)	0.30	$73^\circ$

度に近く、上と同様に誤差の要因を考えると十分正確である。計算した領域境界を手がかりにピンの姿勢を推定したこの実験によって、本手法を実際の問題に適用できること、本手法による符号計算がほぼ正確であることを確認した。

## 6.8 ま と め

光源の方向を変えて得た 3 枚の画像の照度差から、物体表面のガウス曲率の符号を計算する方法について述べた。本手法は、符号を求めるだけで、面の向きを復元していない。この場合には、陰影からの形状復元や照度差ステレオが必要となる。反射特性や光源の位置に関する知識が不要となることを示した。ランバート面を含め大抵の拡散反射特性の場合には、本手法による符号の計算が完全に正しいものになり、そうでない反射特性の場合でも、計算される符号の境界の位置は、反射特性に全く影響を受けず正確であることを示した。このときに符号を正しく計算できるための反射特性の条件を導いた。それによると照度差ステレオでの一意性の条件が成り立つような反射率分布の場合には、符号の計算は正しく行えることが分かった。また、本節の手法が必要とする条件は照度差ステレオのそれより若干緩いことを示した。本手法は、照明条件や反射特性の知識が必要ないことからさまざまな応用が考えられる。実画像を用いた実験により、本手

法の計算する符号の領域境界の位置の正確さを確認した。また、簡単な応用として、物体の姿勢を領域境界から計算する実験を行い、本手法の有効性を示した。

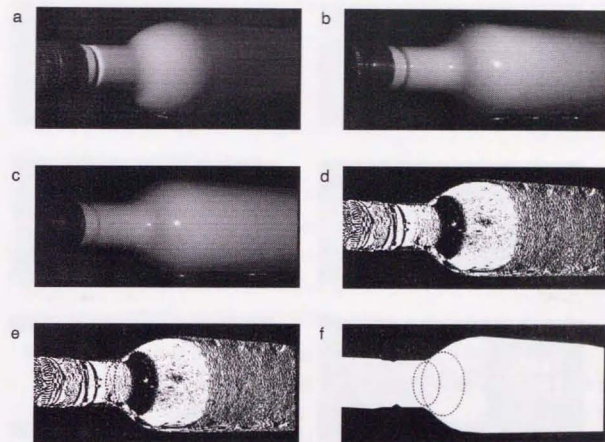


図 6.17. Fitting ellips to the segmentation boundary. A bottle is placed in the direction so that the angle between its axis and the viewing direction is  $49^\circ$ . (a)-(c) Taken three images. (d) Segmentation results. (e) Results of fitting ellips to the boudaries. (f) Fitted ellips.

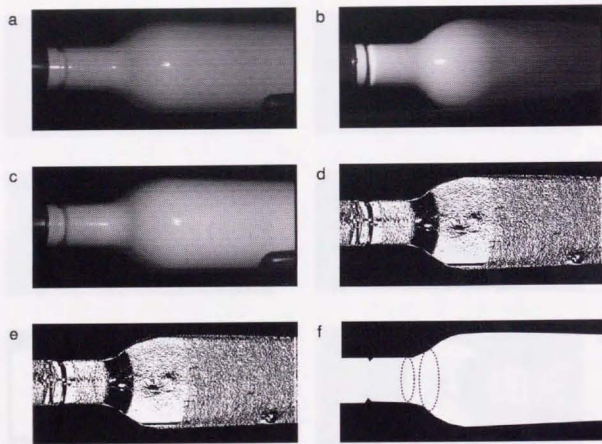


図 6.18. Fitting ellips to the segmentation boundary. A bottle is placed in the direction so that the angle between its axis and the viewing direction is  $68^\circ$ . (a)-(c) Taken three images. (d) Segmentation results. (e) Results of fitting ellips to the boudaries. (f) Fitted ellips.

## 7 近接光源下の陰影からの形状復元

### 7.1 はじめに

これまでに提案されている陰影からの形状復元の方法は、画像の投影変換を正射影で近似し、光源を無限遠方にある点光源と見なすものがほとんどである。このような単純化は、問題の定式化を簡単にした。正射影を仮定すれば、画像のいたるところで視線の方向が等しいと見なせる。また、光源が対象から無限遠方にあると仮定すれば、対象表面に届く光は表面いたるところで等しい強度をもち、その方角も等しいと見なせるようになる。そしてこれらによって反射率分布図の考え方を利用することができた。

しかし、このような仮定や近似は、形状復元の誤差を生むことになる。現実の環境で陰影をつくる光源は、常に無限遠方にあると見なせるわけではなく、対象に近い場合もある。得られる画像も正射影が仮定できる場合はそれほど多くはない。これらを考慮しないアルゴリズムでは、現実的な環境のもとで正確に形状を復元することは望めなかった。そこで、より一般的な条件を考慮した、陰影からの形状復元のための方法が必要となる。

本章では、上述のような一般的な条件を対象とする、陰影からの形状復元の手法について考える。まず、画像の投影変換モデルとして正射影でなく透視投影を仮定する。さらに、対象表面上に陰影を生成する光源は、対象に近い距離にある点光源を考える。このような条件を対象とする形状復元の方法は、その困難さからあまり考えられてこなかった。

この困難さを回避するために、光源からの距離が等しい表面上の曲線に注目する。この曲線の上では光源との距離が等しくなることを利用し、画像の濃淡を用いてこの曲線を少しずつ発展させてゆくことを考える。この方法によれば、最初に初期曲線が与えられると、これを発展させることにより、表面の全体形状を復元することができる。

本章の構成は、次の通りである。まず最初に、上で述べた一般的な条件を定式化する。次に、光源からの距離が等しい曲線について、その性質を調べ、これを用いて画像の濃淡からこの曲線を発展させる方法を定式化する。この方法は、そのまま数値計算を行うと様々な困難に遭遇するが、これらについて述べ、さらにその解決策として等高面の方法と呼ばれる発展方程式の数値計算法を導入する。最後にこの方法を用いた内視鏡画像への応用を示す。

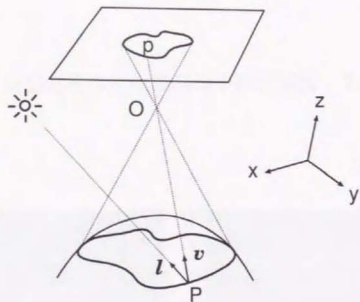


図 7.1. Perspective projection and a finite distance light source.

## 7.2 透視投影と有限距離にある点光源

他の多くの形状復元のためのアルゴリズムと違って、ここでは、透視投影を仮定し、有限距離にある点光源による陰影を対象としている。この節では、これを定式化する。

### 7.2.1 透視投影の仮定

ここでは、図 7.1 に示すような、透視投影による画像の投影変換を考える。投影中心の座標、カメラの光軸方向や焦点距離などのパラメータ、そして光源の座標はいずれも分かっているものとする。このとき、対象表面上のある点の座標  $P$  が分かれば、その点の画像上での座標  $p$  は計算できる。また同じ点  $P$  から見た、投影中心の方向（ベクトル  $\mathbf{v}$ ）と光源の方向（ベクトル  $\mathbf{l}$ ）も、ともに計算できる。次に、このような設定で、光源によって照射された面がどのような明るさに見えるかを考える。

### 7.2.2 有限距離にある点光源に照射された面

有限距離にある点光源に照射された面を考える（図 7.2）。この面の上に微小な面積  $dA$  をもつ領域を考え、この領域と光源との距離を  $r$  とし、この領域から見た光源の方向、視線の方向をそれぞれベクトル  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{v}$  で表す ( $|\mathbf{l}| = |\mathbf{v}| = 1$  とする)。また、 $\mathbf{n}$  をこの面の単位法線ベクトルとする。このとき、法線ベクトル  $\mathbf{n}$  と光源の方向を表すベクトル  $\mathbf{l}$  を基準として、入射角と反射角をそれぞれ  $\theta_l$ ,  $\theta_r$ ,  $\phi_r$  で表すことができる。

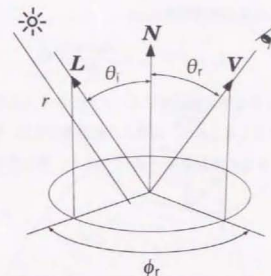


図 7.2. Local coordinates on surface patch describes the position of the light source and the camera.

さて、視点から見たこの面の明るさについて考える。これは、視点に対するこの面の放射輝度  $L_r$  を求めればよい。この面の BRDF（第 2 章参照）を  $F(\theta_l, \theta_r, \phi_r)$  とすると、光源によるこの面の放射照度を  $E_i$  として

$$L_r = F(\theta_l, \theta_r, \phi_r) E_i \quad (7.1)$$

の関係がある。BRDF は面の反射特性を表す関数であり、表面の物理的な性質によって決まる。これが何らかの方法で得られているとすると、面の放射照度  $E_i$  が分かれば放射輝度  $L_r$  を得ることができる。

そこで次に、面の放射照度  $E_i$  を考える。光源のパワーを  $I_0$  とすると、この光源が空中に放射する単位立体角あたりのパワーは  $I_0/2\pi$  である。光源から面の微小領域  $dA$  を見ると、その立体角は

$$\frac{dA \cos \theta_l}{r^2}$$

に相当する。したがって、この面に照射される光のパワー  $d\Phi$  は

$$d\Phi = \frac{dA \cos \theta_l}{r^2} \cdot \frac{I_0}{2\pi}$$

となり、光源による面の放射照度は

$$E_i \equiv \frac{d\Phi}{dA} = \frac{I_0 \cos \theta_l}{2\pi r^2} \quad (7.2)$$

となる。

このことから、視線方向への面の放射輝度  $L_r$  は

$$L_r = F(\theta_i, \theta_r, \phi_r) \frac{I_0 \cos \theta_i}{2\pi r^2} \quad (7.3)$$

となり、面と光源との距離  $r$  の2乗に反比例することが分かる。これが視点から見た面の明るさである。実際に画像として得られるのは、画像の放射照度であり、視点（投影中心）への放射輝度  $L_r$  ではない。しかし、画像の放射照度を  $E_e$  とすると、第2章で述べた画像の放射照度と面の放射輝度との関係：

$$E_e = L_r \frac{\pi}{4} \left( \frac{d}{f} \right)^2 \cos^4 \alpha \quad (7.4)$$

によって、画像の明るさは面の放射輝度  $L_r$  に比例すると考えて良い（ $d$  はレンズの口径、 $f$  は焦点距離、 $\alpha$  は光軸と視線方向のなす角）[13]。カメラのパラメータで決まる変数の部分をまとめて定数  $\sigma$  で表すと、結局画像の明るさは

$$E_e = \sigma \frac{F(\theta_i, \theta_r, \phi_r) \cos \theta_i}{r^2} \quad (7.5)$$

となる。

### 7.3 光源からの距離が等しい曲線の発展に基づく形状復元

#### 7.3.1 光源からの距離が等しい曲線：等距離曲線

対象表面の上で、光源からの距離が等しいような点を連ねてできる曲線を考える。この曲線は、見方を変えると、光源を中心とする球と対象表面との交線である（図7.3）。このような曲線のことを、等距離曲線と呼ぶことにする。さらに、この曲線上の点と光源との距離、つまり球の半径を  $r$  とするとき、これを明示して「距離  $r$  の等距離曲線」と表現する。

#### 7.3.2 等距離曲線上の面の向き

このような等距離曲線が一つ分かっているとしたとき、この曲線上の各点における面の向きを推定することを考える。対象物体の表面が十分なめらかであれば、その各点で面の向きを定義できる。これを与えられた等距離曲線の上で求めたい。

面の向きを表すのに単位法線ベクトルを使えば、その自由度は2である。これを決定しなければならないが、等距離曲線が与えられていれば、この自由度のうち1つは決まってしまう。これを以下に示す。

等距離曲線が与えられれば、その各点において、接ベクトルが計算できる。これを  $\mathbf{t}$  とする

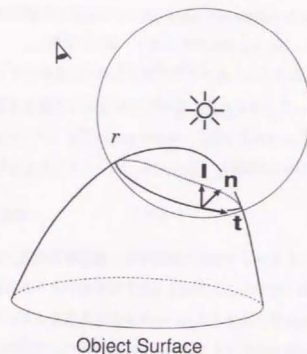


図 7.3. An equal-distance contour of the object surface. All the points on the contour are equal in the distance to the light source.

と、同じ点における法線ベクトル  $\mathbf{n}$  との間に次のような関係が成り立つ。

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7.6)$$

つまり、 $\mathbf{t}$  と  $\mathbf{n}$  は互いに直交する。これは、等距離曲線が対象表面の上の曲線であって、その接ベクトルは常にその点での接平面に含まれることを考えると、正しいと分かる。

このことを使って、面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を拘束し、自由度を一つ減らすことができる。等距離曲線上のある点における法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は、その点での接ベクトル  $\mathbf{t}$  と直交する向きにしかあり得ない。つまり、残された自由度は一つだけとなる。したがって後は、この残された自由度をどのようにして決定するかということになる。

#### 7.3.3 画像による面の向きの決定

$\mathbf{n}$  に残された自由度を決定するために、画像を用いることを考える。画像での明るさ  $E$  は (7.5) 式で導いたように

$$E = \sigma \frac{F(\theta_i, \theta_r, \phi_r) \cos \theta_i}{r^2}$$

である。等距離曲線上の点に対応する画像の明るさは、7.2.1 節で述べた投影変換によって、この点の画像上の位置を求めれば得られる。いま考えている等距離曲線の光源からの距離を  $r$  と

すれば、上の式から  $F(\theta_i, \theta_r, \phi_r) \cos \theta_i$  の値、つまり、面の向きに関する情報を得ることができる。ここで、 $\theta_i$  は入射角、 $(\theta_r, \phi_r)$  は反射角を表す（図 7.2 参照）。

ところで、7.2.1 節で見たように、カメラの位置と光源の位置が分かっているとしてあるので、空間の任意の点について、その点から見た投影中心の方向と光源の方向を知ることができる。いま考えている等距離曲線上の点から見て、投影中心の方向をさすベクトルを  $\mathbf{v}$ 、光源の方向をさすベクトルを  $\mathbf{l}$  とする（図 7.2 参照）。このとき、接ベクトル  $\mathbf{t}$  と  $\mathbf{l}$  の間に

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{l} = 0 \quad (7.7)$$

の関係が成り立つ。つまり、 $\mathbf{t}$  と  $\mathbf{l}$  も互いに直交する。等距離曲線は、対象表面の上にあると同時に、球の表面の上にも乗っていることを考えると、その接ベクトルは球にも接する。球の中心を向くベクトルが  $\mathbf{l}$  であるから、この 2 つのベクトルは常に直交する。

このことを用いると、反射角  $(\theta_r, \phi_r)$  を入射角  $\theta_i$  の関数として表せる。そのために、まず  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$  として、次のような  $3 \times 3$  行列  $\mathbf{R}(\theta)$  を定義する。

$$\mathbf{R}(\theta) \equiv \begin{bmatrix} t_1^2 + (1 - t_1^2) \cos \theta & t_1 t_2 (1 - \cos \theta) - t_3 \sin \theta & t_1 t_3 (1 - \cos \theta) + t_2 \sin \theta \\ t_1 t_2 (1 - \cos \theta) + t_3 \sin \theta & t_2^2 + (1 - t_2^2) \cos \theta & t_2 t_3 (1 - \cos \theta) - t_1 \sin \theta \\ t_1 t_3 (1 - \cos \theta) - t_2 \sin \theta & t_2 t_3 (1 - \cos \theta) + t_1 \sin \theta & t_3^2 + (1 - t_3^2) \cos \theta \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

これはベクトル  $\mathbf{t}$  周りに  $\theta$  だけの回転を行う変換行列である。さらに、

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{l} \times \mathbf{t} & \mathbf{l} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

なる  $3 \times 3$  行列  $\mathbf{Q}$  を用いると、反射角  $(\theta_r, \phi_r)$  はそれぞれ

$$\theta_r = \theta_r(\theta_i) = \cos^{-1} \left( [\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{R}(\theta_i) \mathbf{v}]_3 \right) \quad (7.10)$$

$$\phi_r = \phi_r(\theta_i) = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1} \left( \frac{[\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{R}(\theta_i) \mathbf{v}]_1}{\sin \theta_r} \right) \quad (7.11)$$

と表せる（付録 F 参照）。ここで  $[\mathbf{x}]_i$  はベクトル  $\mathbf{x}$  の第  $i$  要素を表す。これを用いると BRDF を  $\theta_i$  のみの関数として表現できる。これを

$$\tilde{F}(\theta_i) = F(\theta_i, \theta_r(\theta_i), \phi_r(\theta_i)) \quad (7.12)$$

とすると、(7.5) 式から、次のような  $\theta_i$  に関する方程式が得られる。

$$E = \sigma \frac{\tilde{F}(\theta_i) \cos \theta_i}{r^2} \quad (7.13)$$

これを  $\theta_i$  について解くことができれば、その  $\theta_i$  を用いて、法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は

$$\mathbf{n} = \mathbf{R}(-\theta_i) \mathbf{l} \quad (7.14)$$

となる。このようにすると画像から法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を決定できる。ただし、(7.13) 式は、 $\tilde{F}$  の関数形に応じて、常に解ける（一意に解が定まる）とは限らない。むしろ、一般の場合には解を一意に定められない方が普通である。これについては 7.3.6 節であらためて考えることにする。

### 7.3.4 等距離曲線の発展

等距離曲線の各点において、対象表面の面の向きが分かるとすると、これは等距離曲線の近傍では表面形状が分かるということ意味する。そこでこれを利用して、少しだけ距離の大きい等距離曲線をあらたに推定することを考えてみる。もしこれが可能ならば、推定された等距離曲線をもとに同じことを繰り返して、表面の大域的な形状を得ることができるはずである。以下にその方法を述べる。

光源からの距離  $t$  の等距離曲線が得られているとき、微小な距離  $\Delta t$  だけ進んだ、距離  $t + \Delta t$  の等距離曲線をあらたに構成することを考える。いま、光源の位置を空間座標系の原点にとり、与えられた距離  $t$  の等距離曲線を、媒介変数  $s$  を用いて  $\mathbf{x}(s)$  と書くことにする。 $\mathbf{x}(s)$  は等距離曲線上の点の空間座標  $(x(s), y(s), z(s))$  である。変数  $s$  は等距離曲線上のある点からはかった曲線の長さの単調関数とし、 $s \in [0, S)$  とする。任意の  $s$  について  $|\mathbf{x}(s)| = t$  であることに注意する。

このとき、曲線上のある点  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  を、ベクトル  $\mathbf{d}$  だけ動かして、距離  $t + \Delta t$  の等距離曲線の上にのせたとする（図 7.4）。この点を  $\mathbf{x}'$  とすると

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{d} \quad (7.15)$$

である。ベクトル  $\mathbf{d}$  は、その向きに関して、この点での面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  と直交するようにとる必要がある。そこで、動かし前の点での等距離曲線の接ベクトルを  $\mathbf{t}$  として

$$\mathbf{d} = D \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (7.16)$$

とすることにする。ここで  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$  はともに単位ベクトルとする。 $D$  はベクトル  $\mathbf{d}$  の長さに相当するが、これは  $\Delta t$  や法線ベクトル  $\mathbf{n}$  に依存する量である。次にこれを求めることを考える。

等距離曲線の上の点から光源の方向をさすベクトル  $\mathbf{l}$  と面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  が、ともに接ベクトル  $\mathbf{t}$  と直交することを思い出すと、ベクトル  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{l}$  と  $\mathbf{n}$  は同一平面上にあることが分かる

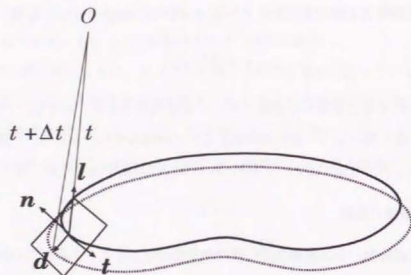


図 7.4. Equal-distance contour is evolving with a velocity  $D/\Delta t$  along  $t \times n$ .

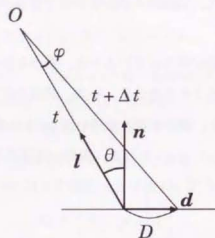


図 7.5. A triangle for achieving velocity  $D/\Delta t$ . The baseline is a surface patch.

(図 7.5). また、図の  $\varphi$  は、 $l \neq n$  である限り、 $\Delta t$  を小さく取ればいくらでも小さくできるから、これを使うと

$$D \approx \frac{\Delta t}{\sin \theta} \quad (7.17)$$

とできる。また、

$$\Delta \varphi \approx \frac{\Delta t}{t \tan \theta} \quad (7.18)$$

である。ここで  $\theta$  は  $\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{l}$  によって与えられる。

与えられた等距離曲線上の各点で、今考えた点の移動を行うと、移動後の点を連ねてできる曲

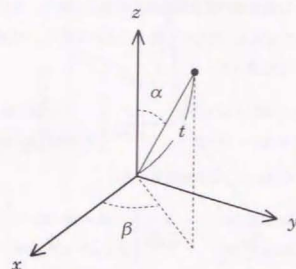


図 7.6. A polar coordinate system describes the evolution of equal range contour.

線は、距離  $t + \Delta t$  の新たな等距離曲線である。これを  $\mathbf{x}'(s)$  と書くと、

$$\mathbf{x}'(s) = \mathbf{x}(s) + \mathbf{d} = \mathbf{x}(s) + D \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (7.19)$$

とできる。ここに  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  は各点での接ベクトル、法線ベクトルをそれぞれ意味する。たとえば

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}(s)/ds}{|d\mathbf{x}(s)/ds|} \quad (7.20)$$

である。点の移動前後で曲線の媒介変数が  $s$  のままで不変なのは、曲線の形に関心があるからである。つまり、曲線にそっての媒介変数は適当にとって構わない。したがって、上のように決めることができる。

(7.19) 式を、より明確な形で表示するために、点の座標  $\mathbf{x}(s)$  を図 7.6 のような極座標を用いて

$$\mathbf{x}(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \sin \alpha(s) \cos \beta(s) \\ t \sin \alpha(s) \sin \beta(s) \\ t \cos \alpha(s) \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

と表す。 $|\mathbf{x}(s)| = t$  であることに注意。このとき、移動した点の座標  $\mathbf{x}'$  を極座標で表したものを  $(\alpha'(s), \beta'(s))$  とすると

$$\begin{bmatrix} \alpha'(s) \\ \beta'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \end{bmatrix} + \Delta \varphi \begin{bmatrix} (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_\beta / \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

と表せる。ここに  $e_\alpha$ ,  $e_\beta$  は極座標の直交曲線座標の基底であり、それぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$  に対応する。 $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  を距離  $t$  を含めて  $\alpha(s, t)$ ,  $\beta(s, t)$  と書くことにすると、 $\alpha'(s)$ ,  $\beta'(s)$  はそれぞれ  $\alpha(s, t + \Delta t)$ ,  $\beta(s, t + \Delta t)$  になる。したがって

$$\begin{bmatrix} \alpha(s, t + \Delta t) - \alpha(s, t) \\ \beta(s, t + \Delta t) - \beta(s, t) \end{bmatrix} = \frac{\Delta t}{t \tan \theta} \begin{bmatrix} (t \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ (t \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_\beta / \sin \alpha \end{bmatrix}$$

となり、両辺を  $\Delta t$  で割って  $\Delta t \rightarrow 0$  なる極限をとると

$$\begin{bmatrix} \partial \alpha(s, t) / \partial t \\ \partial \beta(s, t) / \partial t \end{bmatrix} = \frac{1}{t \tan \theta} \begin{bmatrix} (t \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ (t \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_\beta / \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

となる。これは、等距離曲線の各点が  $t$  とともに運動して行くさまを表す発展方程式である。運動の各時点で、点を連ねた曲線は等距離曲線になる。この式はこれを極座標で表示したものとなっている。

### 7.3.5 形状復元のアルゴリズム

前節で導いた等距離曲線の発展方程式 ((7.23) 式) によって、ある距離  $t_0$  の等距離曲線が最初に分かっているならば、これを繰り返し発展させて  $t \geq t_0$  なる  $t$  に関する一群の等距離曲線を求めることができる。そして、これは対象表面の形状を表している。これをまとめると、形状復元の手順は次のようになる。

1. 何らかの方法で初期曲線となる等距離曲線を求める (距離  $t_0$  とする)。
2. 等距離曲線上に適当な間隔で点を取り、座標の極座標表現を求めて、これを (7.23) 式にしたがって  $t$  について更新する。
3. 更新された点列から、新たな  $t$  についての等距離曲線を再構成する。
4. 画像の隅々まで等距離曲線が求まればへ、そうでなければ 2へ。
5. 各  $t$  に関する等距離曲線をまとめて 3次元形状を再構成する。

### 7.3.6 反射特性と面の向き計算

前節の手順にしたがえば、最初に等距離曲線が与えられたとき、画像から形状を復元することができる。しかしそのためには、7.3.3節で述べたように、等距離曲線の各点において面の向き  $\mathbf{n}$  を一意に決定できなくてはならない。この節ではその可能性について考える。

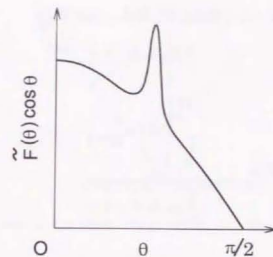


図 7.7. An example of typical reflectance property.

(7.13) 式をあらためて書くと

$$E = \sigma \frac{\tilde{F}(\theta_i) \cos \theta_i}{r^2}$$

である。いま、画像の明るさ  $E$ 、光源からの距離  $r$  と係数  $\sigma$  は得られている。未知数  $\theta_i$  を左辺にまとめて式を書くと

$$\tilde{F}(\theta_i) \cos \theta_i = r^2 E / \sigma \quad (7.24)$$

となる。これを解くときに問題となるのは、表面の物理的な反射特性を表す関数  $\tilde{F}$  の形である。典型的な  $\tilde{F}(\theta_i) \cos \theta_i$  の様子を図 7.7 に示す。

表面が、この図のような反射特性をもつ場合、(7.24) 式の解は一意に定まらないことがある。図の場合  $\theta_i$  の解として 2 つから 3 つの候補が考えられる。このような場合には、等距離曲線の一点だけの情報で、これを定めることはほぼ不可能である。考えている点のまわりの情報をうまく利用することを考えなければならない。

しかし、そのようなことを考えなくても、(7.24) 式の解がひとつに定まる場合がある。それには 2 つの場合があつて、1 つは対象表面が理想ランバート面である場合、もう 1 つは光源と投影中心の位置が一致する場合である。前者の場合、解の一意性は常に成り立つ。後者の場合には、解の一意性を保証するためには、対象表面の反射特性にある仮定が必要となるが、それはほとんどの物体の表面にあてはまる緩やかな条件である。

まず、対象表面が理想ランバート面である場合を考える。ランバート面とは、どの方向から見てもその明るさが等しく見える面である。このことから、ランバート面の BRDF は定数とな

る。たとえば、表面が光をまったく吸収しない場合、BRDFは

$$F(\theta_i, \theta_r, \phi_r) = \frac{1}{\pi}$$

となる。これよりただちに

$$\tilde{F}(\theta_i) = \frac{1}{\pi}$$

を得る。したがって(7.24)式は

$$\frac{1}{\pi} \cos \theta_i = r^2 E / \sigma$$

となるから、 $\theta_i$ を

$$\theta_i = \cos^{-1}(\pi r^2 E / \sigma)$$

と決めることができる。このように対象表面がランバート面であれば、等距離曲線上の各点において、その点の明るさだけから面の向きを決定できる。

もう一つ、このようなことが可能となるのが、光源と投影中心の位置が等しい場合である。光源と投影中心の位置が等しければ、表面の点から光源を見たベクトル $\mathbf{l}$ と投影中心を見たベクトル $\mathbf{v}$ はともに等しい。すなわち、入射角と反射角が等しいとして(7.24)式を考えればよい。具体的には $\theta_i = \theta_r$ ,  $\phi_r = 0$ であり、このとき $\tilde{F}(\theta_i)$ は

$$\tilde{F}(\theta_i) = F(\theta_i, \theta_i, 0)$$

で与えられる。

このように与えられた関数 $\tilde{F}(\theta_i)$ の性質を考えてみる。図7.8のように、視点と光源の面に対する方向を一致させ、その角度を変えて面の明るさを見たとする。このとき、面が極めて特別な反射特性を持たない限り、視線と光源の方向が面に垂直な方向に近づくほど、面は明るく見えてきて、ある特別ななめの角度から見たときに、明るさが極値をとるような面が存在しないとはいえないが、通常の物体表面ではこのようなことはない。面の法線方向に近いほど、面が明るく見えるという性質を $\tilde{F}(\theta_i)$ に置き換えると、この関数が単調減少関数であるということである。すなわち、 $\theta_i \in [0 : \pi/2]$ において極値をとらない。

$\tilde{F}(\theta_i)$ が単調関数であれば、(7.24)式の解は一意に定まる。 $\cos \theta_i$ も $\theta_i \in [0 : \pi/2]$ において単調であるから、関数 $G(\theta_i) \equiv \tilde{F}(\theta_i) \cos \theta_i$ も単調減少関数である。したがって $G(\theta_i)$ には逆関数 $G^{-1}$ が存在し、(7.24)式の解を

$$\theta_i = G^{-1}(r^2 E / \sigma) \quad (7.25)$$

として、一意に得ることができる。

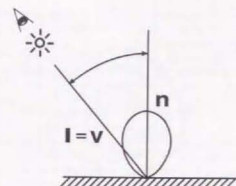


図 7.8. The case where camera and light source are in the same direction from the surface point.

## 7.4 等高面の方法

前節で、等距離曲線を画像の明るさを用いて発展させる方法を述べた。7.3.5節で述べたアルゴリズムにそって、初めに与えられた等距離曲線を発展させていくと、全体の形状が復元できる。しかし、この方法によって実際に形状復元の計算を行おうとすると、2つの困難な問題があることが分かっている。1つは、この方法のもつ数値的な不安定さである。そしてもう1つは、この方法では、微分方程式の特異点すなわち曲線がなめらかでなくなる点の扱いが難しくなってしまうことである。

これらの問題点は、陰影からの形状復元の問題に限らず、同じような発展方程式を多く取り扱う材料科学などの分野では、良く知られた問題であった。そこでは、これらの問題点に対して、等高面の方法と呼ばれる方法が考案されている[16, 87-89]。この方法は、特に偏微分方程式の弱形式解の一つである粘性解と組み合わせて使用すると、大変効果的である。最近になって、その数学的な裏付けも与えられ[90-92]、発展方程式の解法としては現在もっとも有効な方法として知られるようになっていく。

この節では、投影中心と光源の位置が等しい場合のみを考えることにする。この場合には、7.3.6節で述べたように、表面が理想ランバート面と見なせない場合でも、面の向きを画像から一意に決めることができる。そして、この場合について、上に述べた問題を議論し、その問題を解決する方法として、等高面の方法を導入することを考える。

以下では、まず最初に、上で述べた7.3節の方法の問題点について詳しく述べる。そしてその問題点を解決する等高面の方法を説明し、最後に、これを用いた形状復元のアルゴリズムを導くことにする。

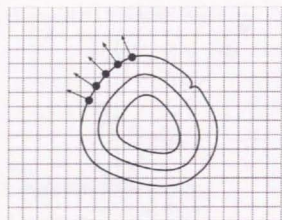


図 7.9. Contour points are not always on uniform image grid.

#### 7.4.1 等距離曲線の発展による方法の問題点

7.3節で導いた方法には、2つの問題点があることを述べた。この節ではこれらを具体的に示すことにする。

まず、第一の問題点は、この方法が数値的に不安定であることである。等距離曲線の発展を表す発展方程式 ((7.23) 式) は、その曲線上の各点の運動を記述した方程式である。そしてアルゴリズムは、曲線上にある粒子が運動して行く様を数値的に解くようなものである。このような解法の立場を Lagrange の方法と呼ぶ。

この場合、曲線上の各点の運動は、同時に運動する他のどの点からも拘束されない。さらに、わずかな数値計算の誤差や後述する画像の誤差に影響されて、曲線を構成する各点の運動は、わずかず誤差を含んだものとなる。各点が微小な運動を行うごとに、これを重ねて曲線を構成し直すことを行うが、各点の運動がばらばらな誤差を含むため、構成された曲線は本来の曲線に比べて、いびつな形になる。たとえば、本来なめらかなはずの曲線が、なめらかに求まらないことが起こる。しかも、この方法は、最初の曲線を初期条件として、発展的に解を構成する方法であるから、その途中の誤差を蓄積して、誤差が拡大されやすい。

誤差の要因として、画像センサによる明るさの測定誤差があるが、これをアルゴリズムの工夫で取り除くことはできない。アルゴリズムの側から見て問題なのは、この方法が、画像面のいたるところで明るさを必要とすることである。つまり、画像は、離散化された座標  $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$  での値  $E(x_i, y_j)$  しかないのに、この方法は連続領域における画像の明るさ  $E(x, y)$  を必要とする。これは画像に投影した等距離曲線が、自由な座標値を取るからである。図 7.9 にこれを示す。また同図に、典型的な誤差の発生の様子を示した。

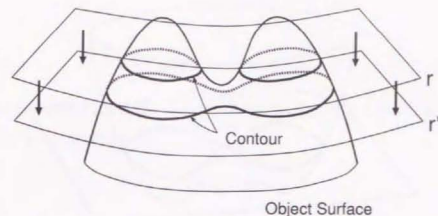


図 7.10. An example of singularity. Two contours are merged into one with propagation of the contour.

以上が数値計算を行う際の問題点である。さらにもう1つの問題がある。それは、微分方程式の特異点の取り扱いに関するものである。現実的なアルゴリズムを構成するという立場からは、こちらの問題も深刻である。以下これを具体的に説明する。

図 7.10 のような形状を考える。この形状の上で、図のような光源からの距離が  $r, r'$  の等距離曲線をそれぞれ考える。この場合、図に示したように、 $r$  と  $r'$  の距離の間で、2つの等距離曲線が1つに併合されることが起こる。あるいは形状によっては、1つの曲線が2つに別れる場合なども起こり得る。このようなことが起こるかどうかは対象の形状による。

発展の途中で2つの等距離曲線が1つになるとき、その瞬間に特異点が発生する。ここで特異点とは、曲線上のなめらかでない点のことである。なめらかでない、すなわち微分不可能であれば、その点では接線を定義できない。前節の方法は、接線によって面の法線を決めたり、曲線の発展の方向などを決めていた。したがって、このような場合には、それ以上の曲線の発展を考えることはできなくなってしまう。表面がなめらかであれば、特異点が発生するのは面の向きが光源方向（今の場合投影中心の方向でもある）を向く点に限られる。このような点 ( $\theta = 0$ ) では、(7.17) 式に示した等距離曲線上の点の進み量  $D = \Delta t / \sin \theta$  が定義できない。上で述べた接線が計算できないことと、このことは本質的に同じことである。

#### 7.4.2 等高方程式の導出

今までは、3次元空間内で等距離曲線の発展を考えてきたが、これ以降は、等距離曲線を画像上に投影してできる曲線に注目し、この曲線の画像上での発展を考えることにする。原点からの距離  $t$  が大きくなるときの、この曲線の発展を知ることができれば、画像の投影変換の逆を行うことによって、3次元空間内での等距離曲線が分かる。したがって、3次元空間の等距離曲線で

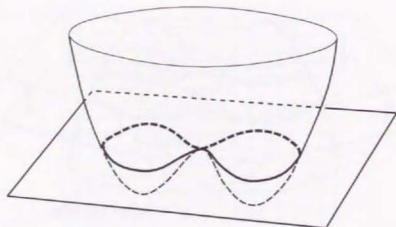


図 7.11. Even an uncontinuous contour with singular point is represented as level-sets of continuous surface.

はなく、これを画像上に投影した曲線の発展だけを考える。

等高面の方法では、この曲線はある関数のゼロ等高線として表す。具体的には、ある距離  $t$  おける曲線を  $C(t)$  とすると、補助関数  $\phi(x, y, t)$  を用いて

$$C(t) = \{(x, y) \mid \phi(x, y, t) = 0\} \quad (7.26)$$

と表現する。このように表す利点の一つは、図 7.11 に示したように、特異点をもつなめらかな曲線でも、なめらかな関数を用いて表現できる所にある。曲線が  $t$  にしたがって動くとき、この関数  $\phi(x, y, t)$  も  $t$  にしたがって形を変え、そのゼロ等高線の運動が曲線の運動と同じになる。この  $\phi(x, y, t)$  の微分方程式（発展方程式であり特に等高面方程式とよばれる）を導出する方法を説明する。その方法には 2 つの考え方がるので、それぞれ順に説明する [16, 89]。

初めに、Sethian [89] の行ったやり方で方程式を導くことにする。  $\phi$  の勾配

$$\nabla\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)$$

が常に  $\phi(x, y, t) = 0$  の曲線  $C(t)$  に対して垂直となることから、この曲線の（画像面上での）単位法線ベクトル  $\mathbf{m}$  は

$$\mathbf{m} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \quad (7.27)$$

と表せる。曲線の運動を考えるために、この法線方向への曲線の変化を考えることにする。  $t$  に対するこの方向への曲線の変化（法速度）を  $V(x, y, t)$  とすると、これは、

$$C_t(s, t) = (\partial x(s, t)/\partial t, \partial y(s, t)/\partial t)$$

を用いて

$$V(x, y, t) = C_t(s, t) \cdot \mathbf{m} \quad (7.28)$$

となる。曲線の法線方向の変化を考えるのは、曲線の形に関心があるからである。  $\phi(x, y, t)$  を  $t$  に関して微分すると、連鎖法則より

$$\phi_t + C_t \cdot \nabla\phi = 0 \quad (7.29)$$

を得る。この式に (7.27) および (7.28) 式を代入すると

$$\phi_t + V|\nabla\phi| = 0 \quad (7.30)$$

が得られる。この式が求める等高面方程式である。この方程式を完全に得るには、曲線の運動に関する法速度  $V(x, y, t)$  を求める必要がある。

ここで、画像の明るさを表す式 (7.13) を思い出すと

$$E = \sigma \frac{\tilde{F}(\theta) \cos\theta}{t^2} \quad (7.31)$$

であった。7.3.6 節に述べたように、投影中心と光源の位置が等しいとき、表面の反射特性を表す関数  $\tilde{F}$  は単調関数であることが期待できる。あらためて関数  $F$  を

$$F(\cos\theta_t) \equiv \tilde{F}(\theta) \cos\theta \quad (7.32)$$

と定義すると、この関数  $F$  も再び単調関数となる。これを用いると、画像の明るさを表す式

$$E(x, y) = \sigma \frac{F(\cos\theta)}{t^2} = \sigma \frac{F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})}{t^2} \quad (7.33)$$

となる。ただし  $\mathbf{n}$  は画像に対応する表面のある点での単位法線ベクトル、  $\mathbf{v}$  は同じ点から原点を向く単位ベクトルであり、それぞれ 3 次元ベクトルである。  $F$  が単調な関数であれば逆関数  $F^{-1}$  が存在する。このとき  $\cos\theta = F^{-1}(t^2 E(x, y)/\sigma)$  であるから、画像を用いて面の向き  $\mathbf{n}$  と視線ベクトル  $\mathbf{v}$  のなす角を知ることができる。そして、これによって曲線の法速度  $V$  を表せる。

画像上の曲線の点  $\mathbf{x} = [x, y, 0]^T$  が、曲線の法線方向  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, 0]^T$  に  $w(\xi)$  だけ進んで  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + w(\xi)\mathbf{m}$  に移り、同時に物体表面上の対応する点が  $\mathbf{p}(|\mathbf{p}| = t)$  から  $\mathbf{p}'(|\mathbf{p}'| = t + \xi)$  に移ったとすると

$$\mathbf{p} = \frac{t}{|\mathbf{p}|} \mathbf{p} \quad (7.34)$$

$$p' = \frac{t + \xi}{|p'|} p' \quad (7.35)$$

の関係がある (図 7.12). このとき,  $p'$  が  $p$  での接平面 (法線ベクトル  $\mathbf{n}$ ) に乗っているとすると

$$n \cdot (p' - p) = 0 \quad (7.36)$$

が成り立つ。この式を  $\mathbf{p} = -|\mathbf{p}|\mathbf{v}$  と  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \cos \theta$  を用いて  $w(\xi)$  について解き、これを微分すると

$$\left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \frac{(x^2 + y^2 + f^2) \cos \theta}{t(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \sqrt{x^2 + y^2 + f^2} - (m_1 x - m_2 y) \cos \theta)} \quad (7.37)$$

が得られる。これが求める  $V(x, y, t)$  である。  $n \cdot m$  を求めるために、連立方程式：

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \cos \theta \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0 \\ |\mathbf{n}| = 1 \end{cases} \quad (7.38)$$

を解いて ( $t$  が画像面上の曲線の接方向  $[m_2, -m_1, 0]^T$ ) と  $v$  の 1 次結合で表せることを使う),

$$n \cdot m = \frac{(m_1 x + m_2 y) \cos \theta}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} - \frac{f(m_1^2 + m_2^2) \sin \theta}{\sqrt{(x^2 + f^2)m_1^2 + (y^2 + f^2)m_2^2 + 2m_1 m_2 xy}} \quad (7.39)$$

を得る. これを (7.37) 式に代入して,

$$V(x, y, t) = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + f^2)((x^2 + f^2)m_1^2 + 2m_1m_2xy + (y^2 + f^2)m_2^2)}}{ft(m_1^2 + m_2^2)\tan\theta} \quad (7.40)$$

を得る.  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, 0] = \nabla\phi/|\nabla\phi|$  を代入し,  $\cos\theta = F^{-1}(t^2 E(x, y)/\sigma)$  を用いて求める方程式をあらわに書くと

$$\phi_t = - \frac{F^{-1}(t^2 E(x, y) / \sigma) \sqrt{(x^2 + y^2 + f^2) \{ (x^2 + f^2) \phi_x^2 + 2xy \phi_x \phi_y + (y^2 + f^2) \phi_y^2 \}}}{ft \sqrt{1 - \{ F^{-1}(t^2 E(x, y) / \sigma) \}^2}} \quad (7.41)$$

となる.

次に, Osher [16] の方法にしたがって方程式を導いてみる。対象表面上で、画像上の点  $(x, y)$  に対応する点を  $\mathbf{r}(x, y)$  と表すと、この点の空間座標は  $r(x, y) = |\mathbf{r}(x, y)|$  なる関数  $r(x, y)$  を用いて

$$\mathbf{r}(x, y) = \frac{r(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} [-x, -y, f]^T \quad (7.42)$$

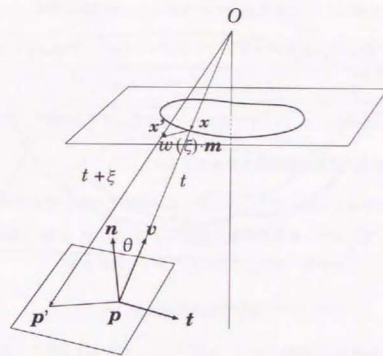


Fig. 7.12. The curve on the image plane is the projection of equal-distance contour. This projected contour is evolving with a velocity  $dw(\xi)/d\xi$  along its normals directions.  $w(\xi)$  is achieved by the relation of triangle  $Op'p$ , where  $p$  and  $p'$  are points on the surface patch.

と表せる.  $\mathbf{r}(x, y)$  は, 表面形状を媒介変数  $(x, y)$  で表現したものと見ることができるから  $\mathbf{r}(x, y)$  での面の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は

$$n = \frac{r_x \times r_y}{|r_x \times r_u|} \quad (7.43)$$

である。また、表面の同じ点から光源のある方向を向くベクトル  $\boldsymbol{v}$  は

$$v = -\frac{r}{r} \quad (7.44)$$

である。この2つのベクトルの内積  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$  を計算すると次のようになる。

$$n \cdot v = - \frac{fr}{\sqrt{f^2 r^2 + (x^2 + y^2 + f^2) \{ (x^2 + f^2) r_x^2 + 2xy r_x r_y + (y^2 + f^2) r_y^2 \}}} \quad (7.45)$$

これを用いると、画像の明るさを表す (7.33) 式は、次のような  $r(x, y)$  に関する 1 階の偏微分方程式になることが分かる。

$$G(x, y, r, r_x, r_y) = F^{-1}(r^2 E(x, y)/\sigma) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7.46)$$

関数  $\phi(x, y, t)$  が満たすべき方程式は、

$$G(x, y, t - \frac{\phi_x}{\phi_t}, -\frac{\phi_y}{\phi_t}) = 0 \quad (7.47)$$

として表現される (付録 G). これを  $\phi_t$  について解くと, 等高面方程式

$$\phi_t = - \frac{F^{-1}(t^2 E(x, y)/\sigma) \sqrt{(x^2 + y^2 + f^2) \{ (x^2 + f^2) \phi_x^2 + 2xy \phi_x \phi_y + (y^2 + f^2) \phi_y^2 \}}}{f t \sqrt{1 - \{ F^{-1}(t^2 E(x, y)/\sigma) \}^2}}$$

を得る. 以上のように異なる 2 つの方法で導かれた方程式はどちらも等しくなる.

### 7.4.3 等高面の方法による形状復元のアプローチ

最初の等距離曲線が与えられたとき, これをもとに曲線を発展させるアルゴリズムは, 具体的には次のようになる. まず, 画像の座標を離散化し  $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$  とし,  $t$  を  $t_n = t_0 + n\Delta t$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) とする. また, これにしたがって関数  $\phi$  を

$$\phi_{i,j}^n = \phi(x_i, y_j, t_n) \quad (7.48)$$

と書く. ここでは, 等高面方程式を

$$\phi_t = -H(x, y, t, \phi_x, \phi_t) \quad (7.49)$$

と表しておく.  $t$  に関する微分を

$$\phi_t = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (7.50)$$

と一階の差分で近似し,  $x$  に関する微分を, 粘性解 (4.6.1 節参照) を得るために次のようにする [17, 21, 89].

$$\phi_x^2 = \max(D_x^+ \phi_{i,j}, -D_x^- \phi_{i,j}, 0)^2 \quad (7.51)$$

ここで  $D_x^+$  は後退差分  $(\phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n)/\Delta x$  を表し,  $D_x^-$  は前進差分  $(\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n)/\Delta x$  を表す.  $y$  に関する微分も同様である. さらに

$$\phi_x = \minmod(D_x^+ \phi_{i,j}, D_x^- \phi_{i,j}) \quad (7.52)$$

とする ( $\phi_y$  も同様). ただし

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} \text{sign}(a) \min(|a|, |b|) & \text{if } ab > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.53)$$

である. これらはすべて, (7.49) 式を数値的に 1 次近似するものである. これにしたがって, アルゴリズムを次のように構成する.

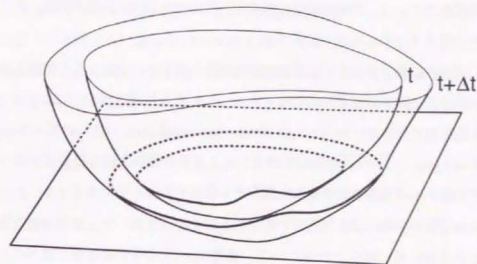


図 7.13. Evolution of equal-distance contour.

1. 最初に次の条件を満足する  $\phi(x, y, t_0)$  を選ぶ ( $t_0$  は得られているものとする)
  - a.  $\phi(x, y, t_0) = 0$  が初期曲線を与える
  - b.  $\phi(x, y, t_0) < 0$  が初期曲線内部,  $\phi(x, y, t_0) > 0$  が初期曲線外部
  - c.  $\phi(x, y, t_0)$  はリブシツ連続

2. 次を繰り返す

$$\left\{ \begin{array}{l} t_n = t_0 + n\Delta t \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \text{ について} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{画像上のすべての点 } (x_i, y_j) \text{ で } \phi_{i,j}^n \text{ を更新する} \\ \phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n = -\Delta t H(x_i, y_j, t_n, \phi_x, \phi_y) \end{array} \right. \\ \text{更新のたびに次のようにして画像面に投影された等距離曲線を求め, 空間内の等距離曲線を計算する.} \\ \phi(x, y, t_n) = 0 \end{array} \right.$$

3. 全体形状を再構成する

$t$  につれて  $\phi$  が更新され, これにしたがって画像面上の曲線が発展して行く様子を示したのが図 7.13 である. この方法では,  $\phi$  の更新は画像面の画素の格子上で行えばよいから, 各点での画像の明るさをそのまま利用できる.

### 7.4.4 初期曲線の計算

上の方法では, 最初の等距離曲線 (以下初期曲線と呼ぶ) が必要である. この初期曲線を得るには, 対象物体の表面の部分形状に関する知識を得る必要がある. そのための有力な方法として, 画像の特異点を用いることが考えられる. 後に示す実験では, 基本的にこの考え方にした

がって初期曲線を得ている。理論的にはこのような特異点まわりの初期曲線は、ある程度正確に計算することができる。これを以下に述べる。

今の場合、特異点は第4章のように画像の濃淡の最も明るくなる点として定義するのではなく、面の向きが視線方向と平行になる点として考える。このような点では、(7.13)式で $\cos\theta = 1$ となり、視線方向と面の向きが一致( $\theta = 0$ )する。特異点に対応する表面の点までの距離を $r_0$ とすれば、これは $r_0 = \sqrt{\sigma F(1)/E_1}$ として得られる。近傍の形状が凸な特異点を見つけることができる、その周りに微小な等距離曲線を濃淡から計算することができる。

まず、特異点周りの部分形状に対して、近傍の画像の濃淡を用いて、2次曲面を当てはめる。当てはめた2次曲面に対し微小な $\delta r$ について、距離 $r_0 + \delta r$ の等距離曲線を選ぶことができるから、これをもって初期曲線とすればよい。ただし3節に述べるように、初期曲線の詳細な形が復元精度にあたる影響は、それほど大きくない。したがって、後の実験結果に示すように、特異点周りに十分小さな円を初期曲線とすれば十分である場合が多い。

#### 7.4.5 初期曲線の形状と復元誤差との関係について

初期曲線が十分小さいとき、初期曲線の形は復元結果にあまり影響を与えないことが、以下の実験では確かめられる。ここで先にその理由について考察しておく。

等高面の方法では、初期値(初期条件)は等高面関数 $\phi(x, y, t)$ として与える。何らかの方法で得た初期曲線を元に、この初期関数 $\phi(x, y, t)$ を構成することになる。その作り方は、各画素からの初期曲線への距離をその値とするような関数として与えるように上では決めた。(この決め方は1通りではなく、距離にしたがって単調に増加するようなものであれば何でもよい[37].)このようにして作った初期関数を初期値として、上で述べた $\phi(x, y, t)$ に関する初期値問題を数値的に計算するのであるから、復元結果に影響するのは求めた初期関数の形である。そこで問題を2つに分け、初期曲線の形がこの初期関数にどれほどの変化を与えるかをまず考え、さらにそれが復元結果にどう影響するかを次に考えることにする。

まず、初期曲線と初期関数の形に関する関係について述べる。いま仮に、初期曲線が十分小さく、ほとんど1点と見なせるとする。このとき、初期関数のそれぞれの点での値は、そこから初期曲線(1点)までの距離である。この場合、初期関数の形は、小さい初期曲線の形には影響されにくい。したがって、初期曲線を小さくするとき、その形を考慮する必要はないと考えられる。実際の数値計算では、 $\phi(x, y, t)$ は画像上で各画素において離散的に扱われる。半径1画素程度の大きさに初期曲線を決めるとき、初期曲線の形が大きく変わったとしても、離散的に初期関数 $\phi(x, y, t)$ を構成する場合に、その情報は無意味である。

次に、それでも発生する初期曲線の形によるわずかな初期関数 $\phi(x, y, t)$ の変化が、復元結果に影響するかどうかを考える。 $\phi(x, y, t)$ の発展方程式(7.49)は、各時刻 $t$ において $\phi(x, y, t)$ の零点集合である画像上の曲線の上でのみ、曲線が発展する様を表すという物理的な意味を持つ。したがって、例えば初期関数が、上で述べたように、初期曲線までの距離としなくとも、初期曲線上で $\phi(x, y, t) = 0$ となり、また関数の値が初期曲線からの距離に対して単調性を有する限りにおいて、どのような形の関数であってもよい。これは初期時刻 $t = 0$ においてだけでなく、どの時刻でも同様である。このように考えると、初期関数のわずかな変化さえも復元結果にそれほどの影響を与えないと考えることができる。以下に示す実験でもこのことを確かめる。

### 7.5 実験結果

計算機により合成した陰影画像に対して上の方法を用いて形状復元の実験を行った。この節ではその結果について述べる。

図7.14aに示す形状から同図bの陰影を合成し、画像の中心、特異点のまわりに適当な円(半径1ピクセル)をとり、これを初期曲線として、形状を復元した。この点までの奥行きが必要となるが、これは分かっているものとした。図7.14c, dが復元結果である。誤差を同図eに示す。少ない誤差で復元されていることが分かる。

上では初期曲線までの距離が分かっているとしたが、実際にはこれは得られないことがふつうである。そこでこの距離が間違っているとき、復元結果がどのようになるかを見るため、正しい値に $\pm 20\%$ 加えた値を距離として用いて復元を試みた。結果を図7.15に示す。距離が正しくないことによる相応の誤差が周辺部で発生することが分かる。ただし、形状の概形はうまくとらえていることも分かる。この意味で初期曲線までの距離が不明の場合でもこの方法による復元結果は有用である。

また復元精度の初期曲線への依存度を確かめるため、初期曲線を楕円 $a(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2/a = 1$ (単位は画素、 $(x_0, y_0)$ は特異点の位置)として、パラメータ $a$ を変えて形状復元を行い、誤差を調べた。 $a = 1$ が図7.14に相当する。 $a$ を0.25, 0.5, 2.0, 4.0と変えたときの復元結果を図7.16に示す。またそのときの誤差の画像面上にわたる2乗和(画素に関する和)を表7.1に示す。この表と図7.16とから見て、復元誤差に与える初期曲線の影響は少ないことが分かる。実験したこの場合においては、与えた初期曲線がある程度いい加減なものであっても、復元誤差への影響は小さいことが確認された。

画像にノイズが含まれる場合を想定し、一様分布に従うノイズを画像に加えて、その画像から形状の復元を試みた。加えたノイズは、画像の最大輝度の値の2%, 5%, 10%とした。それぞ

表 7.1. Relation between the shapes of the initial contour and the reconstruction errors.

Shape parameter $\alpha$	0.25	0.5	1	2	4
Sum of the squared error over the image	5.71	4.44	5.75	5.65	5.73

れ、結果を図 7.17、図 7.18、図 7.19 に示す。画像が相当ノイズを含んでも、反復計算が破綻することなく実行されていることが分かる。したがってこのアルゴリズムはノイズに対して強いと言える。また、得られた結果も、加えたノイズの大きさを考えれば、十分正確であると言える。

## 7.6 内視鏡画像への応用

この節では、前節までに説明した方法に応用し、内視鏡の画像をもとに対象の 3 次元形状を復元することを考える。これによって、例えば、人体内部に送り込んだ内視鏡により得られる画像から、胃壁の形状を復元し、特に腫瘍などの形状に関する定量的な情報が得られる。より正確な診断を下すための判断材料を提供するものとして、このようなシステムが必要とされている。

このような内視鏡の画像から、対象の 3 次元形状を復元しようとする研究には、[93-95] などがある。これらは、対象ないし内視鏡（カメラ）の運動による運動視差を利用して、対象の形状と同時に対象と内視鏡の間の相対運動を得ようとする shape from motion による方法であった（図 7.20）。内視鏡は、その先端部を手元で自由に操ることができるが、これを精度良く制御することは不可能であり、位置情報は画像以外からは得られないという制約がある。この手法ではこの制約を克服していた。

しかし、この運動視差を利用する方法は、対象物体が剛体であるという前提が必要である。医用内視鏡による胃壁の形状復元などを目的とする場合、この前提は一般に成り立たない。さらにこの方法は、画像から物体表面の目印となる点（特徴点）を抽出しなければならないが、胃壁の画像からロバストにこれを行うのは困難である。この方法は、胃壁の形状を内視鏡画像から復元するという目的には、それほど適していない。

このようなことから、われわれは画像の陰影を利用して形状復元を行う手法に応用して、内視鏡画像から 3 次元形状を復元するシステムを実現することを考えた。画像を 1 枚しか利用しないこの方法の場合、対象が剛体であることは必要でない。画像を得たその時刻の形状を復元することになる。さらにこの方法が、特徴抽出を必要としないことも都合がよい。

内視鏡の画像からその陰影情報を用いて形状復元を行うことを考えるとき、問題になるのが陰

影を生むものとなる光源の位置である。光源は対象表面に近いところにあり、光源が対象から有限距離にあるとして問題を定式化する必要がある。この節では、前節で導いた方法を用いて、内視鏡の画像に対して行った実験の結果を示す。

### 7.6.1 内視鏡における画像生成の過程

内視鏡は、先端部に CCD イメージセンサを持ち、ここで画像は電気信号に変換されて手元に伝送される。一方、対象に照射する光は、手元にある極めて明るい光源を光ファイバ（ライトガイド）によって伝達し、内視鏡先端まで導いている。つまり、画像と光はちょうど逆向きに伝達されていることになる。図 7.21 に内視鏡の先端部の拡大写真を示す。

内視鏡の画像は、その先端部から照射された光によってできたものである。対象表面で反射された光が、再び先端部のレンズで集光されて、CCD イメージセンサに入力される。このように、内視鏡の画像では、その陰影は対象表面に比較的近い位置にある光源がもととなっている。

われわれは、内視鏡先端から照射される光を、画像の投影中心にある点光源がもとになっていると見なし、定式化を行う。つまり、画像の投影中心と点光源の位置が等しいと見なす。内視鏡先端の写真（図 7.21）に示したように、その微細な構造を見ると、投影中心に光源があるわけではないが、画像生成の過程を考える立場では、この近似は十分に可能である。

これを表したのが、図 7.22 である。まず、投影中心を原点にとり、画像面を  $xy$  平面に平行にとる。さらに上述のように、投影中心と同じ原点に点光源があるものとする。この場合、前節で述べたように、画像の明るさを表す式は

$$E = \sigma \frac{F(\cos \theta)}{r^2} \quad (7.54)$$

と表せ、対象表面の反射特性を表す関数  $F$  は単調関数となることが期待できる。したがって、対象表面について  $F$  が分かれば、7.4 節の方法で、対象形状を復元できるはずである。

### 7.6.2 実験結果

医用内視鏡によって撮影された実際の胃壁の画像から、形状を復元することを試みた<sup>1</sup>。この結果を図 7.23 に示す。両方とも、初期曲線として、特異点である画像の左中程にある点近傍の小円を選んだ。原画像は  $384 \times 384$  ピクセル 256 階調であり、ノイズへの対策としてこれを  $64 \times 64$  ピクセルに縮小して用いた。等距離曲線がなめらかに復元されていて、実画像に対してもこの方法が安定であることを示している。また、異なる方向から胃壁のほぼ同じ部分を撮影した 2

<sup>1</sup>実験に使用した内視鏡画像は、防衛医科大学病院 丹羽寛文 教授、順天堂大学医学部 萩原達雄 講師に御提供頂いた。

枚の画像から形状を復元し、これを重ねて表示したものを図 7.24 に示す。ほぼ重なっていて、形状復元が確からしいことが分かる。

## 7.7 ま と め

この章では、対象形状に近い光源による陰影から形状を復元する問題について考えた。光源が対象形状に近いと両者の間の距離が陰影（濃淡）に強く影響する。そこでこれを考慮した形状復元の方法として、光源から等距離の曲線を発展させる方法について考えた。また数値計算を安定に行うため、等高面の方法と呼ばれる方法を用いて、問題を定式化した。完成した方法を内視鏡画像に応用し、胃壁の形状復元を試み、実画像に対する手法の安定性を確認した。

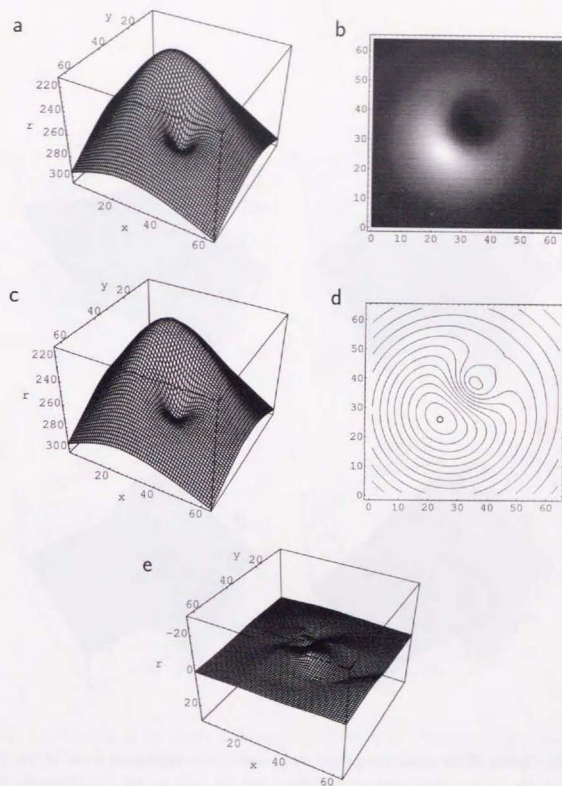


図 7.14. Reconstruction of the synthetic images: (a) the original surface; (b) the shaded image generated from (a); (c) the reconstructed surface; (d) the curve evolution; (e) the reconstruction error.

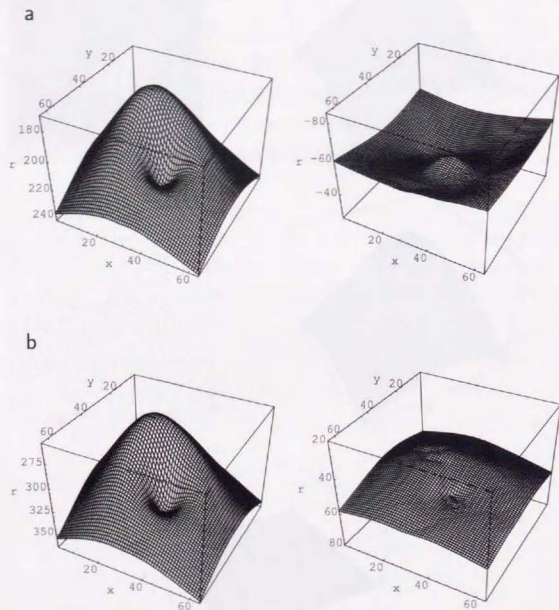


图 7.15. Errors of the shape reconstruction caused by the estimation errors of the initial distance; the left are the reconstructed surfaces and the right are the reconstruction errors: (a) the initial distance were set 20% smaller than its real value; (b) 20% larger.

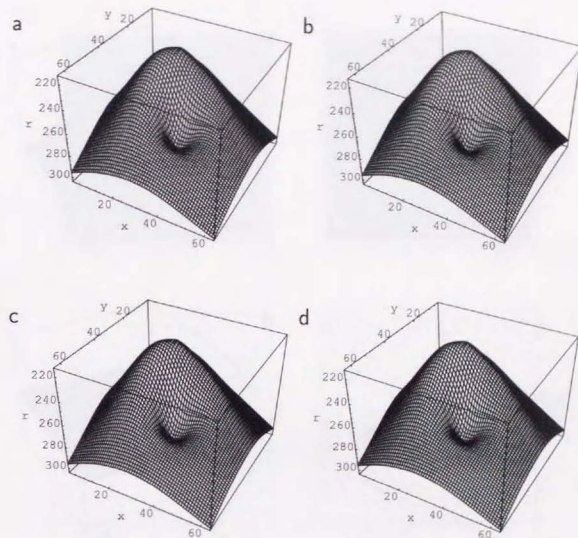


图 7.16. Relationship of the shape of the initial contour to the shape reconstruction. The initial contour is set to an ellipse  $a(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2/a = 1$ . (a)  $a = 0.25$ . (b)  $a = 0.5$ . (c)  $a = 2$ . (d)  $a = 4$ .

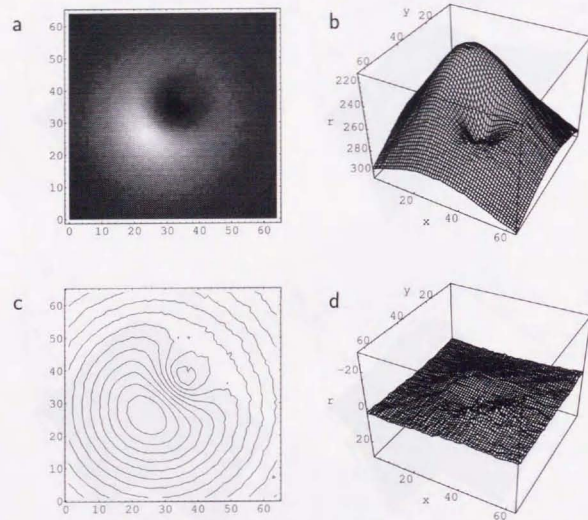


图 7.17. Reconstruction from a noisy image (uniform noise whose maximum is 2% of the maximum brightness). (a) Noisy image. (b) Reconstructed surface. (c) Curve evolution. (d) Error of the reconstruction.

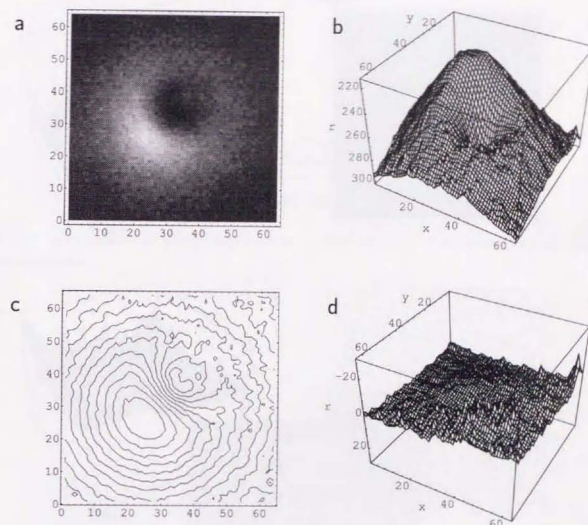


图 7.18. Reconstruction from a noisy image (uniform noise whose maximum is 5% of the maximum brightness). (a) Noisy image. (b) Reconstructed surface. (c) Curve evolution. (d) Error of the reconstruction.

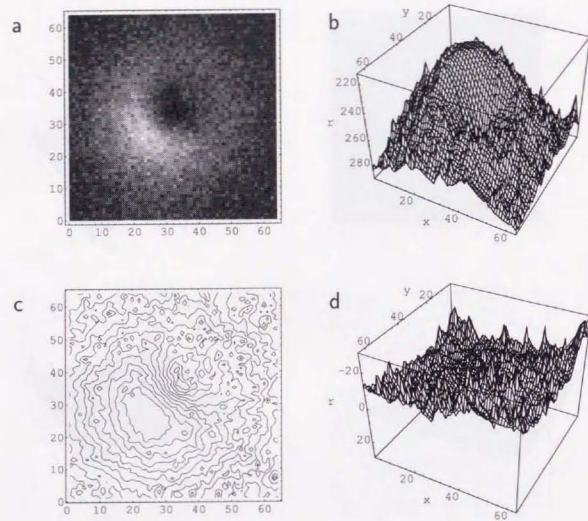


图 7.19. Reconstruction from a noisy image (uniform noise whose maximum is 10% of the maximum brightness). (a) Noisy image. (b) Reconstructed surface. (c) Curve evolution. (d) Error of the reconstruction.

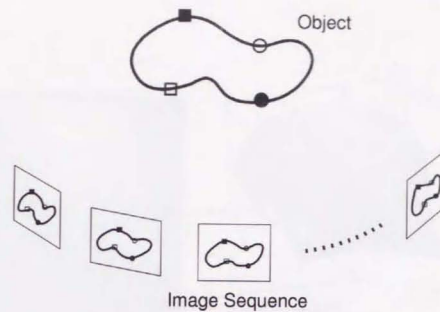


图 7.20. The method of shape from motion. Image sequence of a rigid object obtained by moving camera.



图 7.21. The head of endoscope. Larger circular hole at the left side on the head is object lens of image sensor, and two smaller ones at the right side are lens to radiate. The diameter of this endoscope head is 12mm.

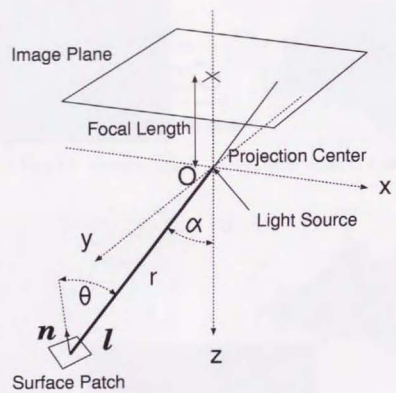


图 7.22. Optical system of an endoscopic image formation.

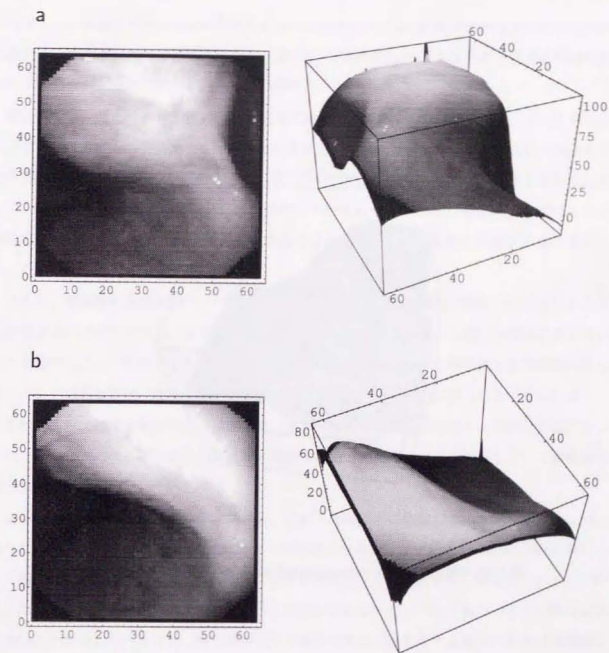


图 7.23. Reconstruction of real medical endoscope images of the stomach wall.

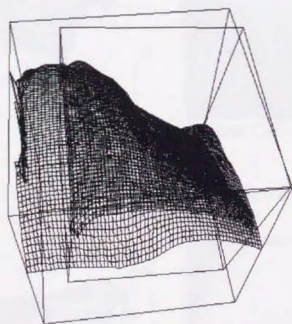


図 7.24. Fitting of the reconstructed surfaces of Fig. 13a and b.

## 8 結 論

本論文では、画像の陰影から形状情報を取り出す問題について、照明条件や反射特性などの事前知識が少なくときに何ができるかを中心に論じた。具体的にどのような程度・性質の事前知識があればどの程度の有用な情報が求まるのかを考えた。

第4章では、与えられた1枚の画像の陰影に対して、対応する形状が存在し、またそれが1つに決まるかどうかを、特に非ランバート面を対象に調べた。まず、任意に与えられた画像と反射率分布に対し、反射率分布が最大となる点によって生じる画像が最大となる点のまわりの画像について、対応する局所形状は、凸、凹状のものがそれぞれ1つずつ存在し、鞍状のものが通常は2つ、また特殊な場合は無数に存在することを示した。また無数に存在する条件も明らかにした。

さらに、等高線の方法を非ランバート面の場合に拡張し、ある範囲で解が一意に定まるための反射率分布の条件を述べた。これによって、特異点の型が分かれば、大域的な形状を定められることを述べた。上の特異点まわりの形状の存在と一意性に基づいて、等高線と特性曲線の両方を用いて、大域的な解の一意性を調べ、可能な解を有限個の少ない数に絞れることを示した。

また、ある反射率分布が与えられたとき、必ずしも任意の画像に対応する形状は存在しない。このことを等高線のなめらかさと粘性解の関係を用いて表した。これを利用して、反射率分布の妥当性を判断することについて検討した。

第4章での議論を踏まえて、第5章では、照明や反射特性に依存しない濃淡の不変性について述べた。まず、「8」の字の等高線が2つの特異点を含むとき、その特異点は互いに異なるガウス曲率符号を持っていることを示した。より正確には「ひだ点」がない曲面について、証明を与えた。それ以外の一般の曲面ではこのことは保証されないが、それでもたいていの場合には成り立つことを示した。さらに、同じ条件の下で濃淡の鞍点に端を発する濃淡の最急上昇曲線が少なくとも2つの特異点は、凸と凸であるか凹と凹であることがほとんどないことを示した。これらは、特異点の種類の同定問題に応用でき、さらに形状を把握する上で重要な特徴となる曲率符号の情報を与える。

第6章では、光源の方向を変えて得た3枚の画像の照度差から、物体表面のガウス曲率の符号を計算する方法について述べた。本手法は、符号を求めるだけで、面の向きを復元していない。この場合には、陰影からの形状復元や照度差ステレオで必要だった反射特性や光源の位置に

関する知識が、ほとんど不要となる。特に、符号の境界の位置が反射特性に影響を受けないことを示した。これによって、広範な対象を扱うことが可能となることを述べた。また、実画像を用いた実験によって、提案方法の実用性を示した。

第7章では、対象形状に近い光源による陰影から形状を復元する問題について考えた。光源が対象形状に近いと両者の間の距離が陰影（濃淡）に強く影響する。そこでこれを考慮した形状復元の方法として、光源から等距離の曲線を発展させる方法について考えた。また数値計算を安定に行うため、等高面の方法と呼ばれる方法を用いて、問題を定式化した。完成した方法を内視鏡画像に応用し、胃壁の形状復元を試み、有効性を確認した。

## 謝 辞

まず、本研究を進める上で、終始懇切なるご指導を賜りました出口光一郎教授に深謝いたします。また、本論文をまとめるに当たり、貴重なご指摘とご意見を賜りました安藤繁教授、池内克史教授、杉原厚吉教授、藤村貞夫教授に感謝いたします。さらに、本谷秀堅助手には、多くの議論を通じ、有益な御指摘を頂きました。先輩、同僚諸氏からは、本研究を進める上で多大な御協力を頂きました。また、防衛医科大学病院の丹羽寛文教授からは内視鏡の画像を提供して頂きました。順天堂大学医学部の萩原達雄講師からは、同じく画像を提供して頂き、内視鏡による胃壁の観察の詳細について説明を頂きました。以上の方々に衷心より感謝の意を表します。

# 参考文献

- [1] Horn, B. K. P. and Sjoberg, R. W.: Calculating the reflectance map, *Applied Optics*, Vol. 18, No. 11, pp. 1770-1779 (1979).
- [2] Beckmann, P. and Spizzichino, A.: *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, Pergamon, London (1963).
- [3] Torrance, K. E. and Sparrow, E. M.: Theory for off-specular reflection from roughened surfaces, *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 57, pp. 1105-1114 (1967).
- [4] Nayor, S. K., Ikeuchi, K. and Kanade, T.: Surface reflection: Physical and geometrical perspectives, *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 13, No. 7, pp. 661-634 (1991).
- [5] Wolff, L. B.: Diffuse reflection, *Proceedings of IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 472-478 (1992).
- [6] Oren, M. and Nayor, S. K.: Generalization of the Lambertian model and implications for machine vision, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 14, No. 3, pp. 227-251 (1995).
- [7] Nayor, S. K. and Oren, M.: Visual Appearance of Matte Surfaces, *Science*, Vol. 267, No. 5201, pp. 1153-1156 (1995).
- [8] Horn, B. K. P.: Understanding Image Intensity, *Artificial Intelligence*, Vol. 8, pp. 201-231 (1977).
- [9] Koenderink, J. J. and Doorn, V. J.: Geometrical modes as a general method to treat diffuse interreflections in radiometry, *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 73, No. 6, pp. 843-850 (1983).
- [10] Forsyth, D. and Zisserman, A.: Reflections on Shading, *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 13, No. 7, pp. 671-679 (1991).

- [11] Nayar, S., Ikeuchi, K. and Kanade, T.: Shape from interreflections, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 6, No. 3, pp. 173-195 (1991).
- [12] Winston, P. H.: *The Psychology of Computer Vision*, McGraw Hill, New York (1975).
- [13] Horn, B. K. P.: *Robot Vision*, MIT Press, Cambridge, MA (1986).
- [14] Horn, B. K. P. and Brooks, M. J.: *Shape from Shading*, MIT Press, Cambridge, MA (1989).
- [15] Bruckstein, A. M.: On shape from shading, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 44, pp. 139-154 (1988).
- [16] Osher, S.: A level set formulation for the solution of the Dirichlet problem for Hamilton-Jacobi equations, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 24, No. 5, pp. 1145-1152 (1993).
- [17] Kimmel, R. and Bruckstein, A. M.: Tracking level sets by level sets: A method for solving the shape from shading problem, *Computer Vision and Image Understanding*, Vol. 62, No. 2, pp. 47-58 (1995).
- [18] Kimmel, R., Siddiqi, K., Kimia, B. B. and Bruckstein, A. M.: Shape from shading: Level set propagation and viscosity solutions, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 16, pp. 107-133 (1995).
- [19] Kimmel, R. and Bruckstein, A. M.: Global shape from shading, *Computer Vision and Image Understanding*, Vol. 62, No. 3, pp. 360-369 (1995).
- [20] Oliensis, J. and Dupuis, P.: A global algorithm for shape from shading, *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*, pp. 692-701 (1993).
- [21] Rouy, E. and Tourin, A.: A viscosity solutions approach to shape-from-shading, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 29, No. 3, pp. 867-884 (1992).
- [22] Bishel, M. and Pentland, A. P.: A simple algorithm for shape from shading, *Proceedings of IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 459-465 (1992).

- [23] Ikeuchi, K. and Horn, B. K. P.: Numerical shape from shading and occluding boundaries, *Artificial Intelligence*, Vol. 17, No. 3, pp. 141-184 (1981).
- [24] Ikeuchi, K.: Comment on "Numerical shape from shading and occluding boundaries", *Artificial Intelligence*, Vol. 59, pp. 89-94 (1993).
- [25] Strat, T. M.: A Numerical Method for Shape from Shading from a Single Image, Master's thesis, MIT (1979).
- [26] Smith, G.: The recovery of surface orientation from image irradiance, *Proceedings of DARPA Image Understanding Workshop*, pp. 132-141 (1982).
- [27] Durou, J. D. and Maitre, H.: On Convergence in the Methods of Strat and of Smith for Shape from Shading, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 17, No. 3, pp. 273-289 (1996).
- [28] Lee, D.: A probably convergent algorithm for shape from shading, *Proceedings of DARPA Image Understanding Workshop*, pp. 489-496 (1985).
- [29] Brooks, M. J. and Horn, B. K. P.: The Variational Approach to Shape from Shading, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 33, pp. 174-208 (1986).
- [30] Horn, B. K. P.: Height and gradient from shading, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 5, No. 1, pp. 37-74 (1990).
- [31] Frankot, R. T. and Chellappa, R.: A method of enforcing integrability in shape from shading algorithms, *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. PAMI-4, No. 10, pp. 439-451 (1989).
- [32] Zheng, Q. and Chellappa, R.: Estimation of illuminant direction, albedo, and shape from shading, *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 13, No. 7, pp. 680-702 (1991).
- [33] Leclerc, Y. G. and Bobick, A. F.: The Direct Computation of Height from Shading, *Proceedings of IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 552-558 (1991).

- [34] Wei, G. Q. and Hirzinger, G.: Parametric Shape-from-Shading by Radial Basis Functions, *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 19, No. 4, pp. 353-365 (1997).
- [35] Lee, K. M. and Kuo, C. C. J.: Shape from Shading with a Linear Triangular Element Surface Model, *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 15, No. 8, pp. 815-822 (1993).
- [36] Lee, K. M. and Kuo, C. C. J.: Shape From Shading With Perspective Projection, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 59, No. 2, pp. 202-212 (1994).
- [37] Sethian, J. A.: *Level Set Methods*, Cambridge, MA (1996).
- [38] Crandall, M. G., Ishii, H. and Lions, P. L.: User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 27, pp. 1-67 (1992).
- [39] Horn, B. K. P. and Brooks, M. J.: The variational approach to shape from shading, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 2, No. 33, pp. 174-208 (1986).
- [40] Ascher, U. M. and Cater, P. M.: A multigrid method for shape from shading, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 30, No. 1, pp. 102-115 (1993).
- [41] Pentland, A. P.: Local analysis of the image, *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. PAMI-6, No. 2, pp. 170-187 (1984).
- [42] Lee, C. H. and Rosenfeld, A.: Improved methods of estimating shape from shading using the light source coordinate system, *Artificial Intelligence*, Vol. 26, pp. 125-143 (1985).
- [43] Ferrie, F. P. and Levine, M. D.: Where and Why Local Shading Analysis Works, *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, No. 2, pp. 198-206 (1989).
- [44] Sara, R.: *Local shading analysis via isophotes properties*, PhD Thesis, Johannes Kepler University Linz, Dept. of System Sciences (1994).
- [45] Pentland, A. P.: Linear shape-from-shading, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 4, pp. 153-162 (1990).

- [46] Pentland, A. P.: Shape Information from Shading: A Theory about Human Perception, *Spatial Vision*, Vol. 4, No. 3/4, pp. 165-182 (1990).
- [47] Pong, T. C., Haralick, R. M. and Shapiro, L. G.: Shape from shading using the facet model, *Pattern Recognition*, Vol. 22, No. 6, pp. 683-695 (1989).
- [48] Pentland, A. P.: Finding the illuminant direction, *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 72, No. 4, pp. 448-455 (1982).
- [49] Langer, M. and Zucker, S.: Shape-from-Shading on a Cloudy Day, *Journal of the Optical Society of America A*, Vol. 11, No. 2, pp. 467-478 (1994).
- [50] Stewart, A. J. and Langer, M. S.: Toward Accurate Recovery of Shape from Shading Under Diffuse Lighting, *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 19, No. 9, pp. 1020-1025 (1997).
- [51] Haddon, J. and Forsyth, D.: Shading Primitives: Finding Folds and Shallow Grooves, *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*, pp. 236-241 (1998).
- [52] Bruss, A. R.: The Eikonal Equation: Some Results Applicable to Computer Vision, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 23, No. 5, pp. 890-896 (1982).
- [53] Saxberg, B. V. H.: Existence and uniqueness for shape from shading around critical points: theory and an algorithm, *International Journal of Robotics Research*, Vol. 11, No. 3, pp. 202-224 (1992).
- [54] Oliensis, J.: Shape from Shading as a Partially Well-Constrained Problem, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 54, No. 2, pp. 163-183 (1991).
- [55] Oliensis, J.: Uniqueness in Shape from Shading, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 6, No. 2, pp. 75-104 (1991).
- [56] Shimshoni, I., Kimmel, R. and Bruckstein, A. M.: Global Shape from Shading, *Computer Vision and Image Understanding*, Vol. 64, No. 1, pp. 188-189 (1996).
- [57] Crandall, M. G. and Lions, P. L.: Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 277, No. 1, pp. 1-42 (1983).

- [58] Crandall, M. G., Evans, L. C. and Lions, P. L.: Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 282, No. 2, pp. 487-502 (1984).
- [59] Crandall, M. G. and Lions, P. L.: On existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol. 10, No. 4, pp. 353-370 (1986).
- [60] Crandall, M. G. and Ishii, H.: The maximum principle for semicontinuous functions, *Differential and Integral Equations*, Vol. 3, No. 6, pp. 1001-1014 (1990).
- [61] Ishii, H.: A simple, direct proof of uniqueness for solutions of the Hamilton-Jacobi equations of Eikonal type, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 100, No. 2, pp. 247-251 (1987).
- [62] 石井仁司: 非線形偏微分方程式の粘性解について, *数学*, Vol. 46, pp. 144-157 (1994).
- [63] Lions, P. L., Rouy, E. and Tourin, A.: Shape-from-Shading, viscosity solutions and edges, *Numerische Mathematik*, Vol. 64, pp. 323-353 (1993).
- [64] Brooks, M. J.: Two results concerning ambiguity in shape from shading, *Proceedings of AAAI National Conference on Artificial Intelligence*, pp. 36-39 (1983).
- [65] Kozera, R.: Uniqueness in Shape from Shading Revisited, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 7, pp. 123-138 (1997).
- [66] Horn, B. K. P., Szeliski, R. S. and Yuille, A. L.: Impossible shaded images, *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 15, No. 2, pp. 166-170 (1993).
- [67] Brooks, M. J., Chojnacki, W. and Kozera, R.: Impossible and Ambiguous Shading patterns, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 7, No. 2, pp. 119-126 (1992).
- [68] LeVeque, R. J.: *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser Verlag, Basel (1990).

- [69] Langer, M. S. and Zucker, S. W.: Casting Light on Illumination: A Computational Model and Dimensional Analysis of Sources, *Computer Vision and Image Understanding*, Vol. 65, No. 2, pp. 322-335 (1997).
- [70] Chojnacki, W. and Brooks, M. J.: Can the sun's direction be estimated from an image prior to the computation of object shape?, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 7, pp. 139-147 (1997).
- [71] Belhumeur, P. N., Kriegman, D. J. and Yuille, A. L.: The bas-relief ambiguity, *Proceedings of IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 270-277 (1997).
- [72] Koenderink, J. J. and van Doorn, A. J.: Photometric invariants related to solid shape, *Optica Acta*, Vol. 27, No. 7, pp. 981-996 (1980).
- [73] Yuille, A. L.: Zero crossing on lines of curvature, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 45, pp. 68-87 (1989).
- [74] Koenderink, J. J.: *Solid Shape*, MIT Press, Cambridge, MA (1988).
- [75] Griffith, H. B.: *Surfaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2nd edition (1981).
- [76] Woodham, R. J.: Photometric method for determining surface orientation from multiple images, *Optical Engineering*, Vol. 19, No. 1, pp. 139-144 (1980).
- [77] Hayakawa, H.: Photometric Stereo Under a Light Source with Arbitrary Motion, *Journal of the Optical Society of America A*, Vol. 11, No. 11, pp. 3079-3089 (1994).
- [78] Yuille, A. and Snow, D.: Shape and Albedo from Multiple Images using Integrability, *Proceedings of IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 158-164 (1997).
- [79] Wolff, L. B. and Fan, J.: Segmentation of surface curvature using a photometric invariant, *Journal of the Optical Society of America A*, Vol. 11, No. 11, pp. 3090-3100 (1994).
- [80] do Carmo, M. P.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey (1976).
- [81] Tagare, H. D. and deFigueiredo, R. J. P.: A theory of Photometric stereo for a class of diffuse non-Lambertian surfaces, *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 13, No. 2, pp. 133-152 (1991).

- [82] Tagare, H. D. and deFigueiredo, R. J. P.: Simultaneous estimation of shape and reflectance map from photometric stereo, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, Vol. 55, No. 3, pp. 275-286 (1992).
- [83] Epstein, R., Yuille, A. L. and Belhumeur, P. N.: Learning object representations from lighting variations, *Object Representation in Computer Vision II*. Eds. J. Ponce, A. Zisserman, and M. Herbert. Springer Lecture Notes in Computer Science 1144, pp. 179-199 (1996).
- [84] Belhumeur, P. N. and Kriegman, D. J.: What is the set of images of an object under all possible illumination conditions?, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 28, No. 3, pp. 245-260 (1998).
- [85] Shashua, A.: On Photometric Issues in 3D Visual Recognition from a Single 2D Image, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 21, No. 1/2, pp. 99-122 (1997).
- [86] Nayar, S. and Murase, H.: Dimensionality of illumination in appearance matching, *Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation* (1996).
- [87] Osher, S. and Sethian, S. A.: Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 79, pp. 12-49 (1988).
- [88] Osher, S. and Shu, S. W.: High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 28, No. 4, pp. 907-922 (1991).
- [89] Sethian, S. A. and Strain, J.: Crystal growth and dendritic solidification, *Journal of Computational Physics*, Vol. 98, pp. 231-253 (1992).
- [90] Chen, Y. G., Giga, Y. and Goto, S.: Uniqueness and existence of viscosity solutions of Generalized mean curvature flow equations, *Journal of Differential Geometry*, Vol. 33, pp. 749-786 (1991).
- [91] Evans, L. C. and Spruck, J.: Motion of level sets by mean curvature, *Journal of Differential Geometry*, Vol. 33, pp. 635-681 (1991).

- [92] 儀我美一: 曲面の発展方程式における等高面の方法, *数学*, Vol. 47, pp. 321-340 (1995).
- [93] Deguchi, K., Sasano, T., Arai, H. and Yoshikawa, H.: 3-D Shape recognition from endoscope image sequences by the factorization method, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E79-D, pp. 1329-1336 (1996).
- [94] Oda, N. et al.: Shape measurement from endoscopic images: Determination of dimensional scale factor by a photometric method, *Optical Review*, Vol. 2, No. 3, pp. 194-198 (1995).
- [95] Oda, N. et al.: Estimation of the surface topography from monocular endoscopic images, *Optics Communications*, Vol. 109, pp. 215-221 (1994).
- [96] 高野栄一: レンズデザインガイド, 写真工業出版社 (1993).

## 付録 A 画像面の照度の不均一性

一般に、光軸と垂直に置いた一定の明るさの板（あらゆる方向に同じ輝度をもつランバート面など）を用意し、これをレンズを通して画像面で見ると、得られる画像は一定の明るさにはならない。前節で導いた画像照度等式には、視線方向と光軸方向の角度  $\alpha$  の余弦  $\cos^4 \alpha$  の項があった。したがってこの場合、一定の明るさの板に対する画像は、画像の周辺部に行くほど明るさが低下する。この傾向はコサイン則と呼ばれる。理想レンズでは、光量が不均一になる要因はこれだけであり、 $\cos^4 \alpha$  は像高と（実効）焦点距離  $f$  から計算できるから補正はたやすい。しかし現実のレンズ系では、この他にも画像面の光量の不均一を招くいくつかの要因がある。一般には、レンズの設計段階である程度補正されているが、完全に校正された画像を得るためには、あらかじめレンズの照度に関する特性を測定することがどうしても必要になる。その上で重要になるいくつかの要因についてここでまとめる。

### A.1 像の歪みによる照度の不均一性

理想レンズでは像点と物点の関係は中心投影の関係にあった。実際のレンズ系では、歪みをもつのがふつうである。幾何学的な歪みによって光量の変化が起きる。この場合はいちがいに周辺ほど光量低下が起きるわけでない。中にはわざと歪みを残すことで周辺光量の低下を打ち消す設計もあり、魚眼レンズなどはその例である [96]。

### A.2 口径食の影響について

通常、レンズ系には厚みがある。厚みのあるレンズを複数枚組み合わせることが、レンズの基本的なビント性能を左右する各種の収差を除く上で必要だからである。したがって、厚みを無視できる理想レンズに比べて、現実のレンズを通過する光束の量は光軸との角度が大きくなるにつれ少なくなる。それぞれの角度について光軸方向の光束の量との比をとったものが vignetting である。一般にその比は、光軸方向での値を最大として、角度が大きくなるにつれ小さくなることが多い。結果として画像周辺部の光量は低下する [96]。

一般的な設計の、標準域の焦点距離をもつレンズでは、周辺光量の低下の影響は、絞りが大きいときは口径食の影響が大きく、絞りを小さくするにつれコサイン則に従う。ただし広角域の焦点距離をもつレンズでは、逆に光軸と大きい角度をなす側でより大きい vignetting の値をとる

ように設計することが可能である。これを利用して、コサイン則による周辺光量低下を打ち消す設計が実際に行われている [96]。

## 付録 B 特異点まわりの形状の一意性に関する話題

### B.1 特異点まわりの局所陰影からの局所形状の決定

ここでは  $r, s, t$  に関する連立方程式 (4.7) を解いて、その一般解を導く。(4.7) 式を再び書くと

$$E_{xx} = r^2 R_{pp} + 2rs R_{pq} + s^2 R_{qq}, \quad (\text{B.1a})$$

$$E_{xy} = rs R_{pp} + (rt + s^2) R_{pq} + st R_{qq}, \quad (\text{B.1b})$$

$$E_{yy} = s^2 R_{pp} + 2st R_{pq} + t^2 R_{qq}, \quad (\text{B.1c})$$

である。微分はすべて特異点  $(x_0, y_0)$  とその明るさを与える点  $(p_0, q_0)$  におけるものである。この点で  $E(x, y)$  は極大、 $R(p, q)$  は最大となるとする。まず、次のように行列  $\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$  を定義する。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} R_{pp} & R_{pq} \\ R_{pq} & R_{qq} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} \\ E_{xy} & E_{yy} \end{bmatrix}$$

$E(x, y)$  が極大であることと  $R(p, q)$  が最大であることから  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  はともに負定値、すなわち  $\det \mathbf{A} > 0$ ,  $\det \mathbf{B} > 0$ ,  $\text{trace } \mathbf{A} < 0$ ,  $\text{trace } \mathbf{B} < 0$  である。これらの行列を用いると (B.1) 式は形式的に

$$\mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (\text{B.2})$$

と書ける。両辺の行列式をとると  $(\det \mathbf{X})^2 \det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$  となつて

$$\det \mathbf{X} = \pm \sqrt{\frac{\det \mathbf{B}}{\det \mathbf{A}}} \quad (\text{B.3})$$

を得る。 $\det \mathbf{A}$  と  $\det \mathbf{B}$  は両方とも正であることに注意する。ここで

$$c \equiv \frac{1}{\det \mathbf{X}} = \pm \sqrt{\frac{\det \mathbf{A}}{\det \mathbf{B}}}$$

とおく。 $\det \mathbf{X} \neq 0$  としたので逆行列  $\mathbf{X}^{-1}$  が存在し、これを (B.2) 式において右からかけると、

$$\begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} \mathbf{A} = c \mathbf{B} \begin{bmatrix} t & -s \\ -s & r \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

となる。両辺の非対角成分は

$$(R_{pq} - cE_{xy})r = -(R_{qq} + cE_{xx})s \quad (\text{B.5a})$$

$$(R_{pq} - cE_{xy})t = -(R_{pp} + cE_{yy})s \quad (\text{B.5b})$$

となる。  $R_{pq} - cE_{xy} \neq 0$  のとき

$$r = -\frac{R_{qq} + cE_{xx}}{R_{pq} - cE_{xy}}s \quad (\text{B.6a})$$

$$t = -\frac{R_{pp} + cE_{yy}}{R_{pq} - cE_{xy}}s \quad (\text{B.6b})$$

である。これを  $\det \mathbf{X} = rt - s^2 = 1/c$  に代入して整理すると

$$\left( \frac{\det \mathbf{A}}{c} + \text{trace}(\mathbf{AB}) + c \det \mathbf{B} \right) s^2 = \left( \frac{R_{pq} - cE_{xy}}{c} \right)^2 \quad (\text{B.7})$$

となる。

凸または凹の解

凸または凹の解，すなわち  $rt - s^2 > 0$  を満たす解を考える。これは  $\det \mathbf{X} > 0$  を意味し

$$c = \sqrt{\det \mathbf{A} / \det \mathbf{B}} \quad (\text{B.8})$$

である。

まず  $R_{pq} - cE_{xy} \neq 0$  の場合を考える。(B.8) 式を (B.7) 式の左辺に代入して整理すると

$$\left( \text{trace}(\mathbf{AB}) + 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})} \right) s^2 = \left( \frac{R_{pq} - cE_{xy}}{c} \right)^2$$

となる。次の B.2 節で示すように  $\text{trace}(\mathbf{AB})$  は正である。したがって左辺の括弧内は常に正に  
なり上の式を満たす  $s$  の実数解が常に存在し

$$s = \pm \frac{R_{pq} \sqrt{\det \mathbf{B} / \det \mathbf{A} - E_{xy}}}{\sqrt{\text{trace}(\mathbf{AB}) + 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})}}} \quad (\text{B.9a})$$

となって、(B.6) 式より  $r, t$  もそれぞれ

$$r = \mp \frac{R_{qq} \sqrt{\det \mathbf{B} / \det \mathbf{A} + E_{xx}}}{\sqrt{\text{trace}(\mathbf{AB}) + 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})}}} \quad (\text{B.9b})$$

$$t = \mp \frac{R_{pp} \sqrt{\det \mathbf{B} / \det \mathbf{A} + E_{yy}}}{\sqrt{\text{trace}(\mathbf{AB}) + 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})}}} \quad (\text{B.9c})$$

と決まる。両符号が凸な解と凹な解に対応する。

$R_{pq} - cE_{xy} = 0$  のとき (B.6) 式は導けない。このときは、(B.5) 式から、 $R_{qq} + cE_{xx} = 0$  か  
つ  $R_{pp} + cE_{yy} = 0$  となるか、 $s = 0$  となるかのいずれかである。前者の場合すなわち  $R_{qq} =$   
 $-cE_{xx}$ ,  $R_{pp} = -cE_{yy}$ ,  $R_{pq} = cE_{xy}$  となることは、次のように有り得ないことが分かる。行  
列  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  がともに負定値であるとしたので、 $R_{pp}$ ,  $R_{qq}$ ,  $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$  はすべて負であるのに、いま  
 $c > 0$  であり矛盾するからである。したがって  $s = 0$  である。 $s = 0$  を (B.1) 式に代入すると  
 $rt - s^2 > 0$  を満たす解として

$$r = \pm \sqrt{\frac{E_{xx}}{R_{pp}}}, \quad t = \pm \sqrt{\frac{E_{yy}}{R_{qq}}}$$

を得る。これらは  $R_{pq} - cE_{xy} = 0$  の条件の下で (B.9) 式によって表せる。

以上をまとめると、 $rt - s^2 > 0$  となる解は常に 2 つずつ存在し、(B.9) 式で与えられること  
が分かった。

鞍 状 の 解

$rt - s^2 < 0$  を満たす解について考える。このとき  $\det \mathbf{X} < 0$  で、

$$c = -\sqrt{\det \mathbf{A} / \det \mathbf{B}} \quad (\text{B.10})$$

である。

まず  $R_{pq} - cE_{xy} \neq 0$  の場合を考える。(B.10) 式を (B.7) 式の左辺に代入して整理すると

$$\left( \text{trace}(\mathbf{AB}) - 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})} \right) s^2 = \left( \frac{R_{pq} - cE_{xy}}{c} \right)^2 \quad (\text{B.11})$$

となり、B.3 節に示すように

$$R_{pp}E_{xx} - R_{qq}E_{yy} = 0, \quad (\text{B.12a})$$

$$R_{pp}E_{xy} + R_{pq}E_{yy} = 0, \quad (\text{B.12b})$$

$$R_{qq}E_{xy} + R_{pq}E_{xx} = 0, \quad (\text{B.12c})$$

が成り立つとき以外は、 $\text{trace}(\mathbf{AB}) - 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})} > 0$  である。したがってそのとき実数解が

存在し

$$s = \pm \frac{R_{pq} \sqrt{\det \mathbf{B} / \det \mathbf{A} + E_{xy}}}{\sqrt{\text{trace}(\mathbf{AB}) - 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})}}}, \quad (\text{B.13a})$$

$$r = \mp \frac{R_{qq} \sqrt{\det \mathbf{B} / \det \mathbf{A} - E_{xx}}}{\sqrt{\text{trace}(\mathbf{AB}) - 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})}}}, \quad (\text{B.13b})$$

$$t = \mp \frac{R_{pp} \sqrt{\det \mathbf{B} / \det \mathbf{A} - E_{yy}}}{\sqrt{\text{trace}(\mathbf{AB}) - 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})}}}, \quad (\text{B.13c})$$

となって  $r, s, t$  は決まる。

(B.12) 式が成り立つときは、次のようになる。(B.12) 式は、ある  $k(>0)$  について

$$R_{pp} = kE_{yy}, \quad R_{qq} = kE_{xx}, \quad R_{pq} = -kE_{xy}$$

が成り立つのと同じである ( $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  がともに負定値であるから  $k > 0$  に限られる)。この関係を用いると、(B.10) 式から

$$c = -\sqrt{\frac{\det \mathbf{A}}{\det \mathbf{B}}} = -\sqrt{\frac{R_{pp}R_{qq} - R_{pq}^2}{E_{xx}E_{yy} - E_{xy}^2}} = -k,$$

と分かる。これは  $R_{pq} - cE_{xy} = 0$  を意味し、いまの仮定  $R_{pq} - cE_{xy} \neq 0$  に反する。

そこで次に  $R_{pq} - cE_{xy} = 0$  のときを考える。このときは、(B.5) 式から、 $s = 0$  か、または  $R_{qq} + cE_{xx} = 0$  かつ  $R_{pp} + cE_{yy} = 0$  である。 $s = 0$  のときは (B.1) 式より、 $rt - s^2 < 0$  を満たす解として

$$r = \pm \sqrt{\frac{E_{xx}}{R_{pp}}}, \quad t = \mp \sqrt{\frac{E_{yy}}{R_{qq}}}$$

を得る。これは  $R_{pq} - cE_{xy} = 0$  の下で (B.13) 式によってともに表せる。もう一方の場合は  $R_{qq} = -cE_{xx}$ ,  $R_{pp} = -cE_{yy}$ ,  $R_{pq} = cE_{xy}$  である。これらを (B.4) 式に代入すると

$$E_{yy}r - 2E_{xy}s + E_{xx}t = 0$$

だけが独立な式として得られる。したがってこの式と  $\det \mathbf{X} = -\sqrt{\det \mathbf{B} / \det \mathbf{A}}$  の2つ

$$E_{yy}r - 2E_{xy}s + E_{xx}t = 0, \quad (\text{B.14a})$$

$$rt - s^2 = -\sqrt{\frac{E_{xx}E_{yy} - E_{xy}^2}{R_{pp}R_{qq} - R_{pq}^2}}, \quad (\text{B.14b})$$

を満たすすべてが解となる。つまり解は不定となる。

このように、解の不定となる条件は

$$R_{pp} = -cE_{yy}, \quad R_{qq} = -cE_{xx}, \quad R_{pq} = cE_{xy}$$

であるが、上で見たように、(B.12) 式が成り立つとき上の3式が導ける。逆も真であるから上の3式が成立することと (B.12) 式が成立することは同値である。簡潔さから解が不定になる条件を (B.12) 式で表すことにする。

### B.1.1 ま と め

以上をまとめると、凹と凸の解 ( $rt - s^2 > 0$ ) は常に1つずつ存在し (B.9) 式のようになる。鞍状の解 ( $rt - s^2 < 0$ ) は、(B.12) 式が成り立つときは無数に存在し、(B.14) 式を満たすものすべて、それ以外のときは (B.13) 式の2つになる。なお (B.12) 式は  $E_{xy}$  が0でないときには次のようにも表せる。

$$\frac{R_{pp}}{E_{yy}} = \frac{R_{qq}}{E_{xx}} = -\frac{R_{pq}}{E_{xy}}$$

### B.2 行列のトレースの符号

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$  をともに負定値対称行列であるとする。すなわち

$$\text{trace} \mathbf{A} < 0, \quad \det \mathbf{A} > 0, \quad \text{trace} \mathbf{B} < 0, \quad \det \mathbf{B} > 0.$$

このとき、その積  $\mathbf{AB}$  のトレース  $\text{trace}(\mathbf{AB})$  の符号が正であることを示す。

まず行列  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  の要素を

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}$$

とする。負定値対称であることより

$$\text{trace} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} < 0$$

$$\text{trace} \mathbf{B} = b_{11} + b_{22} < 0$$

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

$$\det \mathbf{B} = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$$

である。 $a_{11}a_{22} > a_{12}^2 > 0$ ,  $a_{12} + a_{22} < 0$  より  $a_{12} < 0$ ,  $a_{22} < 0$ 。同じく  $b_{11} < 0$ ,  $b_{22} < 0$ 。

$$\text{trace}(\mathbf{AB}) = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

である。もし  $a_{12}b_{12} \geq 0$  なら上のトレースは正。  $a_{12}b_{12} < 0$  のときを考える。  $a_{12} < 0$ ,  $b_{12} > 0$  とすると  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$  より  $-\sqrt{a_{11}a_{22}} < a_{12} < 0$  であり  $0 < b_{12} < \sqrt{b_{11}b_{22}}$  である。したがって

$$-\sqrt{a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}} < a_{12}b_{12} < 0$$

となる。これより

$$\begin{aligned} \text{trace}(\mathbf{AB}) &= a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ &> a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} - 2\sqrt{a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}} \geq 0 \end{aligned}$$

となる。  $a_{12} > 0$ ,  $b_{12} < 0$  でも同じ。

### B.3 行列積のトレースと行列式の大小関係

$\mathbf{A}$  を  $\mathbf{B}$  をともに負定値対称行列とするとき、

$$\text{trace}(\mathbf{AB}) - 2\sqrt{\det(\mathbf{AB})} \geq 0$$

を示し、等号が成立するときの条件を導く。B.2節より  $\text{trace}(\mathbf{AB})$  は常に正であるので

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{22}) \equiv (\text{trace}(\mathbf{AB}))^2 - 4\det(\mathbf{AB})$$

なる  $f$  について上を考えればよい。  $a_{12}$  を  $u$ ,  $b_{12}$  を  $v$  とおいて、  $f$  を  $u$ ,  $v$  について整理すると

$$f = (a_{11}b_{11} - a_{22}b_{22})^2 + 4(b_{22}u + a_{11}v)(b_{11}u + a_{22}v) \quad (\text{B.15})$$

となる。このように  $f$  は  $u$ ,  $v$  の2次関数と見ることができ、このとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right)^2 = -16(a_{11}b_{11} - a_{22}b_{22})^2$$

であるから、  $f$  は  $a_{11}b_{11} - a_{22}b_{22} = 0$  のとき放物型となり、それ以外のとき双曲型となる。

まず、  $a_{11}b_{11} - a_{22}b_{22} \neq 0$  のときを考える。  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ,  $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$  であったから、  $u$  と  $v$  は

$$a_{11}a_{22} - u^2 > 0$$

$$b_{11}b_{22} - v^2 > 0$$

に限られる。これは  $(u, v)$  空間の直方体の領域

$$-\sqrt{a_{11}a_{22}} < u < \sqrt{a_{11}a_{22}},$$

$$-\sqrt{b_{11}b_{22}} < v < \sqrt{b_{11}b_{22}},$$

をなし、  $f$  は  $(u, v, f)$  空間において双曲面をなすから、  $f$  の最小値（正確には下極限）は、  $(u, v)$  平面上のこの直方体の領域の辺上に与えられることは明らかである。ある一辺での最小値を調べるために、  $f$  に  $v = -\sqrt{b_{11}b_{22}}$  を代入し、これを整理すると

$$f = 4 \left( u - \frac{a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22}}{2\sqrt{b_{11}b_{22}}} \right)^2$$

となる。したがってこのときは  $u$  の範囲に関わらず  $f > 0$  となることが分かる。対称性から他の3辺についても同様に  $f > 0$  となることが示せる。

次に  $a_{11}b_{11} - a_{22}b_{22} = 0$  のときを考える。このとき、ある  $k > 0$  を用いて

$$b_{22} = kb_{11},$$

$$a_{11} = ka_{22},$$

と書ける。これを用いると  $f$  は

$$f = (a_{11}b_{11} - a_{22}b_{22})^2 + 4k(b_{11}a_{12} + a_{22}b_{12})^2$$

となる。したがって  $a_{11}b_{11} - a_{22}b_{22} = 0$  のときはさらに  $b_{11}a_{12} + a_{22}b_{12} = 0$  であれば  $f = 0$  となりそれ以外では  $f > 0$  であることが言える。  $b_{11}a_{12} + a_{22}b_{12} = 0$  は  $b_{22}a_{12} + a_{11}b_{12} = 0$  と入れ替え可能である。

以上をまとめると

$$a_{11}b_{11} - a_{22}b_{22} = 0 \quad (\text{B.16a})$$

$$b_{11}a_{12} + a_{22}b_{12} = 0 \quad (\text{B.16b})$$

$$b_{22}a_{12} + a_{11}b_{12} = 0 \quad (\text{B.16c})$$

のとき ((B.16b) と (B.16c) は独立でなく片方だけでよい) のみ  $f = 0$  となり、それ以外では  $f > 0$  となる。

## 付録 C 等高線の方法が利用可能な反射率分布の条件

4.4.1節では、非ランバート面に対する等高線の発展の方法を考えた。そこでは、初期値問題として書けるために（解が一意に決まるために）反射率分布に求められる次の条件を示した。 $R(p, q)$ の最大点 $(p_0, q_0)$ を除く任意の $(p, q)$ において

$$(p - p_0)R_p + (q - q_0)R_q \neq 0 \quad (\text{C.1})$$

が成り立つことである。ここでは、この条件の厳密な導出を示す。

4.4.1節では等高線の一意性は、 $(p, q)$ に関する連立方程式

$$R(p, q) - E(x, y) = 0$$

$$(p - p_0)\dot{x} + (q - q_0)\dot{y} = 0$$

$$(p - p_0)\dot{y} - (q - q_0)\dot{x} > 0$$

の解が常に一意に定まることと同値であることを述べた。したがって、ここではこの方程式の解の一意性の条件を調べ、それが(C.1)式になることを示す。

連続一階微分可能な $f(u, v)$ について、ある $\alpha, \beta, \gamma$ が与えられたとき、 $u, v$ に関する連立方程式

$$f(u, v) = \gamma \quad (\text{C.3a})$$

$$\alpha u + \beta v = 0 \quad (\text{C.3b})$$

$$-\beta u + \alpha v > 0 \quad (\text{C.3c})$$

を考える。この式について「解が2つ以上あるときは必ず接点 $(uf_u + vf_v = 0)$ となる $(u, v)$ が存在する」ことを示す。

$(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ はともに(C.3)式の解であるとし、 $uv$ 平面の互いに異なる点とする。曲線 $C = \{(u, v) | f(u, v) = \gamma\}$ は1本の曲線になると仮定する。曲線 $C$ を $(u(s), v(s))$ で表す。2点は曲線 $C$ 上にあり、 $(u(s_1), v(s_1)) = (u_1, v_1), (u(s_2), v(s_2)) = (u_2, v_2) (s_1 < s_2)$ とする。

曲線 $C$ 上のある点 $(u(s), v(s))$ で、その点での $C$ の接方向 $(\dot{u}(s), \dot{v}(s))$ と方向 $(u(s), v(s))$ のなす角を $\theta(s)$ とする。ここで方向 $(u_1, v_1)$ と方向 $(u_2, v_2)$ とは曲線 $C$ に接しないとすると $0 < \theta(s_1) < \pi, \pi < \theta(s_2) < 0$ である。 $\theta(s)$ は連続であるから、 $\theta(s) = 0$ なる $s$ が $s_1, s_2$

にある。これは次に示すように接点  $(uf_u + vf_v = 0)$  である。曲線  $C$  の接方向  $(\hat{u}(s), \hat{v}(s))$  は  $(f_v, -f_u)$  に平行であるから、これと  $(u, v)$  のなす角  $\theta$  は

$$\theta(s) = \arcsin \left( \frac{uf_u + vf_v}{\sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{f_u^2 + f_v^2}} \right)$$

と表せる。 $\theta(s) = 0$  となるのは  $uf_u + vf_v = 0$  のときであると分かる。

以上のようにして「解が2つ以上あるときは必ず接点  $(uf_u + vf_v = 0)$  となる  $(u, v)$  が存在する」ということが示された。その対偶は「接点  $(uf_u + vf_v = 0)$  となる  $(u, v)$  が存在しなければ解はせいぜい1つしかない」となる。 $u, v$  を  $p - p_0, q - q_0$  とし、 $f(u, v) \equiv R(u + p_0, v + q_0)$ 、 $E(x, y)$  を  $\gamma$ 、 $\hat{x}, \hat{y}$  を  $\alpha, \beta$  とそれぞれ読みかえて証明が終る。

## 付録 D その他の陰影からの形状復元の一意性

### D.1 半球と平面の陰影の一意性

Brooks は、ランバート面でできた半球と平面の陰影画像に関する次のような一意性に関する定理を示した [64] (のちに Kozera が証明の不備を指摘し正しい証明を与えている [65])。

**定理.** 原点を中心とするランバート面でできた単位球の、視線と平行な無限遠点光源の下で得られる画像を考える。照度方程式は  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  で  $1/\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  となるが、 $u(x, y) = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2} + C$  が唯一の解となる。

**定理.** ランバート面の平面  $u(x, y) = ax + by + c$  の、視線と平行な無限遠点光源の下で得られる画像について考える。照度方程式  $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1} = \sqrt{a^2 + b^2 + 1}$  の解は線織曲面である。

### D.2 粘性解の存在条件

粘性解の存在については次のようなことが言える。照明方向が視線と平行な場合  $((\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, -1))$  を考える。このとき

$$\begin{cases} |\nabla z| = n(x, y) & \text{in } \Omega \\ z(x, y) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

を考える。ただし  $n(x, y) = \sqrt{1/E(x, y)^2 - 1}$  である。ある点  $(x_0, y_0)$  を除き  $n(x, y) > 0$  とする。このとき、

$$L(x_1, y_1; x_2, y_2) = \inf \left\{ \int_0^{T_0} n(\xi(s), \eta(s)) ds \mid \begin{aligned} &(\xi(0), \eta(0)) = (x_1, y_1), \\ &(\xi(T_0), \eta(T_0)) = (x_2, y_2), \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq 1, (\xi(t), \eta(t)) \in \bar{\Omega}, t \in [0, T_0] \end{aligned} \right\}$$

なる  $L$  を定義すると、境界条件  $z(x_0, y_0) = \lambda$  を満足する上の問題の粘性解は、最適制御問題の値関数として

$$z(x, y) = \min \left\{ \inf_{(x_1, y_1) \in \partial\Omega} L(x, y; x_1, y_1), \lambda + L(x, y; x_0, y_0) \right\}$$

と書くことができて、さらに

$$|\lambda| \leq \inf_{(x_1, y_1) \in \partial\Omega} L(x_0, y_0; x_1, y_1)$$

となることを示した。逆に上の不等式が成り立てば上の値関数は  $z(x_0, y_0) = \lambda$  を満たす粘性解に他ならない。1点での値のみを境界条件とする場合を扱っているが、これは任意個の  $n(x, y) = 0$  となる点を境界条件として採用しても同様なことが証明でき、さらに最初の  $\partial\Omega$  での奥行きを境界条件とする場合でも同じことが言える。これが、境界条件を満たす粘性解の存在条件である。

## 付録 E 画像座標系で見た曲面の漸近方向

3次元空間内にある曲面を考える。視線方向を  $z$  軸、画像面を  $xy$  平面とするような座標系で、この曲面を  $z(x, y)$  と表す。曲面上のある点  $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$  を考える。この点での曲面の局所座標系  $XYZ$  を、この点を原点、 $Z$  軸を面の向きと一致するようにとる。曲面は  $Z = Z(X, Y)$  と書ける。

このとき画像の点  $(x_0, y_0)$  で

$$\begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たす画像面上の方向  $\mathbf{s} = [u, v]^T$  があったとする。  $\mathbf{s}$  は、  $X = Y = 0$  で

$$\begin{bmatrix} Z_{XX} & Z_{XY} \\ Z_{YX} & Z_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たす局所座標系での  $YZ$  面内の方向  $[U, V]^T$  を、画像面上に投影 ( $z$  軸方向への正射影) したものに等しい。以下にこれを示す。

$x_0 = y_0 = 0$  としても一般性は失われない。このとき、  $xyz$ 、  $XYZ$  両座標系間の変換は回転行列  $\mathbf{R}$  を用いて  $[XYZ]^T = \mathbf{R}[xyz]^T$  と書ける。ただし

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

である。回転行列の性質  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$  を用いて  $[xyz]^T = \mathbf{R}^T[XYZ]^T$  である

局所座標系  $XYZ$  の  $XY$  面内にある方向  $[U, V]^T$  を座標系  $xyz$  で  $\mathbf{S}$  と書くと、  $X$  軸の  $xyz$  での表現  $\mathbf{e}_X$  と  $Y$  軸の  $xyz$  での表現  $\mathbf{e}_Y$  を用いて

$$\mathbf{S} = U\mathbf{e}_X + V\mathbf{e}_Y$$

と書ける。ただし

$$\mathbf{e}_X = \mathbf{R}^T [1 \ 0 \ 0]^T = [r_{11} \ r_{12} \ r_{13}]^T$$

$$\mathbf{e}_Y = \mathbf{R}^T [0 \ 1 \ 0]^T = [r_{21} \ r_{22} \ r_{23}]^T$$

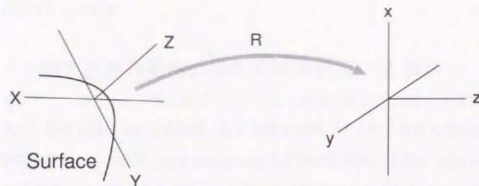


図 E.1. Local coordinate system on the surface.

である。S を画像面へ投影して得られるベクトル  $\mathbf{s}$  は

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S} = U \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \end{bmatrix} + V \begin{bmatrix} r_{21} \\ r_{22} \end{bmatrix}$$

と書ける。X = X(x, y), Y = Y(x, y) と見なし、Z(X(x, y), Y(x, y)) を書けることから x と y で偏微分すると、X(0, 0) = 0, Y(0, 0) = 0, Z(0, 0) = Z\_X(0, 0) = Z\_Y(0, 0) = 0 などから

$$z_x(0, 0) = -r_{31}/r_{33}$$

$$z_y(0, 0) = -r_{32}/r_{33}$$

$$\begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix} \bigg|_{x=y=0} = \frac{1}{r_{33}} \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{XX} & Z_{XY} \\ Z_{YX} & Z_{YY} \end{bmatrix} \bigg|_{X=Y=0} = \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{21} \\ -r_{12} & r_{11} \end{bmatrix}$$

を得る。最後の行列に右から  $\mathbf{s}$  をかけると

$$\begin{bmatrix} r_{22} & -r_{21} \\ -r_{12} & r_{11} \end{bmatrix} \left( U \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \end{bmatrix} + V \begin{bmatrix} r_{21} \\ r_{22} \end{bmatrix} \right) = r_{33} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

となる。ただし  $r_{11}r_{22} - r_{21}r_{12} = r_{33}$  を用いた。したがって

$$\begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix} \bigg|_{x=y=0} \mathbf{s} = \frac{1}{r_{33}} \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{XX} & Z_{XY} \\ Z_{YX} & Z_{YY} \end{bmatrix} \bigg|_{X=Y=0} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。

## 付録 F 入射角と反射角の関係

図 F.1 の  $(\theta_r, \phi_r)$  を  $\theta_l$  と  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{v}$  で表現することがここでの目的である。なお  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{v}$  はすべて長さが 1 であり、互いに

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{t} = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$$

の関係がある。

さて、 $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{t}$  が互いに直交することから、 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n} \times \mathbf{t}, \mathbf{n}\}$  は正規直交基底をなす。したがって適当な回転行列  $\tilde{\mathbf{R}}$  によって、これを  $\{[1, 0, 0]^T, [0, 1, 0]^T, [0, 0, 1]^T\}$  という特別な正規直交基底に移すことができる。この行列  $\tilde{\mathbf{R}}$  を使うと図 F.1 より、

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \sin \theta_r \cos(\phi_r - \pi/2) \\ \sin \theta_r \sin(\phi_r - \pi/2) \\ \cos \theta_r \end{bmatrix} \quad (\text{F.1})$$

であるから、 $\theta_r$  と  $\phi_r$  を求めることができる。つまり行列  $\tilde{\mathbf{R}}$  を求めればよい。

しかし、 $\mathbf{n}$  は与えられていないので、これを使って直接  $\tilde{\mathbf{R}}$  を計算することはできない。そこで、 $\mathbf{n}$  と同様に  $\mathbf{t}$  と直交する  $\mathbf{l}$  を使うことを考える。 $\mathbf{l}$  と  $\mathbf{t}$  が互いに直交することを使うと、同様に  $\{\mathbf{t}, \mathbf{l} \times \mathbf{t}, \mathbf{l}\}$  も正規直交基底をなすから、これは、適当な変換によって正規直交基底  $\{[1, 0, 0]^T, [0, 1, 0]^T, [0, 0, 1]^T\}$  に移すことができる。この変換は、次を満たす回転行列  $\mathbf{Q}$  の逆行列  $\mathbf{Q}^{-1}$  として表現するのが簡単である。

$$\mathbf{Q} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{l} \times \mathbf{t} & \mathbf{l} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2})$$

すなわち

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{l} \times \mathbf{t} & \mathbf{l} \end{bmatrix} \quad (\text{F.3})$$

さらにベクトル  $\mathbf{t}$  周りに  $\theta$  だけの回転を表す変換行列を  $\mathbf{R}(\theta)$  とすると (7.8 式参照)  $\mathbf{l}$  と

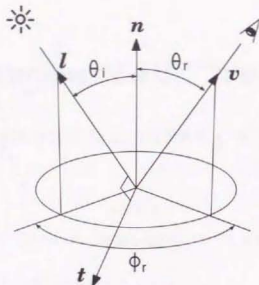


図 F.1. Local coordinate system on the surface to describe the position of light source and camera.

$n$  の間には

$$R(\theta_i)n = l \quad (F.4)$$

の関係があるので (図 F.1 参照), この  $R(\theta_i)$  は, 正規直交基底  $\{t, n \times t, n\}$  を  $\{l, l \times t, l\}$  に移す変換にも相当する。このことを使うと  $\tilde{R}$  は, 次のように二つの変換の合成で表せる。

$$\tilde{R} = Q^{-1}R(\theta_i) \quad (F.5)$$

したがって (F.1) 式より

$$\theta_r = \theta_r(\theta_i) = \cos^{-1}([Q^{-1}R(\theta_i)v]_3) \quad (F.6)$$

$$\phi_r = \phi_r(\theta_i) = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\left(\frac{[Q^{-1}R(\theta_i)v]_1}{\sin \theta_r}\right) \quad (F.7)$$

となる。

## 付録 G 等高面方程式の導出

ここでは, 1 階の偏微分方程式の初期値問題を, 等高面の方で解く際の考え方について述べる。ここでの議論は Osher [16] によるものである。まず  $\Gamma$  を  $R^2$  の閉曲線の集合とし, これによって  $R^2$  は閉曲線の内側  $\Omega$  と外側  $\Omega^c$  に分けられるとする。このとき, 次の偏微分方程式

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (G.1)$$

を  $\Gamma$  の上で与えられる初期条件

$$\begin{cases} x = x_0(s) \\ y = y_0(s) \\ z = z_0(s) \end{cases} \quad (G.2)$$

の下で,  $z = z(x, y)$  について解きたい。

$\Gamma$  の上で  $z = z_0(s)$  を表す関数  $w(x, y)$  を用いると, 未知関数  $n$  を

$$z(x, y) = w(x, y) + n(x, y) \quad (G.3)$$

と定義して, 初期条件を次のように直すことができる。

$$\begin{cases} x = x_0(s) \\ y = y_0(s) \\ z = 0 \end{cases} \quad (G.4)$$

ここで, 同様に (G.1) 式を変更した方程式をつくると,  $z = 0$  の簡単な境界条件をもとにあらたな偏微分方程式を解けばよいことになる。

関数のゼロ点集合が求める解の等高線を与える, 次のような関数  $\phi(x, y, t)$  を考える。

$$\phi(x, y, t) = 0 \quad \text{ならば} \quad z = z(x, y) = t$$

このような関数は一通りではないが, すくなくともそのゼロ点集合の上では次の関係が成立している。

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y, z(x, y)) = 0 = \phi_x + \phi_t \phi_x \quad (G.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, z(x, y)) = 0 = \phi_y + \phi_z \phi_y \quad (\text{G.6})$$

したがって、このゼロ点集合の上では

$$F\left(x, y, t, \frac{-\phi_x}{\phi_t}, \frac{-\phi_y}{\phi_t}\right) = 0 \quad (\text{G.7})$$

が成り立つ。これを  $\phi_t$  について解くことができれば、それが求める等高面方程式である。

## 研究発表

### 第4章（陰影に対する形状の存在と一意性）：

- T. Okatani and K. Deguchi. Closed Form Solution of Local Shape from Shading at a Critical Point. submitted to *International Journal of Computer Vision*.

### 第5章（等濃度線の照明変化に対する不変な性質）：

- T. Okatani and K. Deguchi. On identification of singular points using photometric invariants for global shape from shading problem. In *Proceedings of International Conference on Pattern Recognition*, pp. 1787–1790, 1998.
- T. Okatani and K. Deguchi. On classification of singular points for global shape from shading, In *Proceedings of Asian Conference on Computer Vision*, pp. 48–56, 1998.
- 岡谷 貴之, 出口 光一郎. 陰影画像における特異点の種類に関する等濃度曲線の不変性について. 情報処理学会論文誌, 投稿中

### 第6章（複数の画像間の陰影差を用いた曲率符号の計算）：

- 岡谷 貴之, 出口 光一郎. 複数の画像間の陰影差に基づく曲面のガウス曲率の符号の決定. 情報処理学会論文誌, Vol. 39, No. 6, pp. 1965–1972, 1998.
- T. Okatani and K. Deguchi. Computation of sign of Gaussian curvature of surface from multiple unknown illumination images without knowledge of reflectance property, submitted to *Computer Vision and Image Understanding*.

### 第7章（近接光源下の陰影からの形状復元）：

- T. Okatani and K. Deguchi. Shape reconstruction from an endoscope image by shape from shading technique for a point light source at the projection center. *Computer Vision and Image Understanding*, Vol. 66, No.2, pp. 119–131, 1997.
- 岡谷 貴之, 出口 光一郎. 内視鏡画像からの陰影に基づく立体形状復元. 計測自動制御学会論文集, Vol. 33, No. 10, pp. 1035–1042, 1997.

