論文の内容の要旨

論文題目: Approximate Controllability, Non-homogeneous Boundary Value Problems and Inverse Source Problems for Fractional Diffusion Equations
(非整数階拡散方程式に対する近似可制御性，非斉次境界値問題およびソース項決定逆問題)

氏　　名: 藤城 謙一

本学位請求論文では，時間方向の微分の階数が自然数とは限らない偏微分方程式について，ソース項および境界値による制御と，ソース項の時間依存部分を決定する逆問題を考察した．$0 < \alpha < 1$ として，時間変数 t に関する α 階の Caputo 微分を次のように定義する；

$$\partial_t^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{dh}{d\tau}(\tau) d\tau. \tag{1}$$

古典的な拡散方程式 $\partial_t u - \Delta u = 0$ は水中や空気中の拡散現象を記述するのに用いられるが，時間微分の項 $\partial_t u$ を $\partial_t^\alpha u$ で置き換えた非整数階拡散方程式 $\partial_t^\alpha u - \Delta u = 0$ は土壌などの不均質性の高い媒質中の拡散を表すモデルとして使われる．1992 年には Adams, Gelhar によって，土壌中での拡散現象は古典的な移流拡散方程式では正確に記述できないことがフィールド実験によって確認されている．このような異常拡散現象を表すために，従来の拡散方程式に代わる数学モデルとして (1) で定義した α 階 $(0 < \alpha < 1)$ の時間微分を含む方程式が考えられている．

本論文の主目的は，(1) で定義した時間方向の微分を含む拡散方程式の数学解析である．古典的な拡散方程式に対しては制御・逆問題ともにすでに多くの問題が考えられているが，非整数階拡散方程式に対しては残されている問題も多く，これらに取り組むことは上に挙げた土壌中の拡散，例えば土壌汚染などの問題への貢献も期待できる．本学位請求論文では，以下の問題を考察した．

- ソース項の入力による近似可制御性（第１章）
- 非斉次境界値問題およびその応用として境界値の入力による近似可制御性（第２章）
- 一点観測によるソース項および反応項係数の決定の逆問題（第３章）

個々の得られた結果と証明に用いた手法については，以下で説明する．

第 1 章の内容

本章の内容は山本昌宏教授との共著 (2014) に基づく．

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ は滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ を持つ有界領域とし，以下の初期値・境界値問題を考える．

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u + \mathscr{L} u = f & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{on } \Gamma \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{2}$$

ここで，微分作用素 $\mathscr{L}$ は

$$\mathscr{L}u(x) = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right) + c(x)u(x), \quad x \in \Omega,$$

と定義し，係数 a_{ij}, c には適当な滑らかさと対称性・一様楕円性および $c \geq 0$ を仮定する（たとえば，$-\Delta$ など）．この初期値・境界値問題に対して，次のような問題を考える．

問題 1. 初期時刻 $t=0$ において $u(x,0)=u_0(x)$ であった $u(x,t)$ を，$f=f(x,t)$ を適当に与えることによって時刻 $t=T$ において所望の状態に近付けよ．

このようなソース項 f が存在するか—可制御性—を本章で問うていく．とくに，任意の $\varepsilon>0$ と $u_1 \in L^2(\Omega)$ に対して f をうまく選ぶことにより解 $u=u(x,t)$ が $\|u(\cdot,T)-u_1\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$ を満たすようにできれば，(2) に対して近似可制御性が成り立つという．この章の主結果は次の通りである．

定理 1 (内部制御による近似可制御性). $u_0 \in L^2(\Omega)$ とし，部分領域 $\omega \Subset \Omega$ と $T>0$ を任意に固定する．このとき，

$$\overline{\{u_f(\cdot,T);\ f \in C_0^\infty(\omega\times(0,T))\}} = L^2(\Omega). \tag{3}$$

ただし，u_f は f に対する (2) の解であり，上式左辺の閉包は $L^2(\Omega)$ の位相で取る．

定理 1 を証明するためには，方程式 (2) に対応した次の双対システムを考える必要がある；

$$\begin{cases} D_t^\alpha v + \mathscr{L}v = 0 & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ v = 0 & \text{on } \Gamma\times(0,T), \\ I_{T-}^{1-\alpha} v(\cdot,T) = v_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

ここで，D_t^α は t について時間逆向きの α 階 Riemann-Liouville 型微分であり，次のように定義される．

$$D_t^\alpha h(t) := -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^T (\tau-t)^{-\alpha}h(\tau)d\tau, \quad 0<\alpha<1.$$

また，$I_{T-}^{1-\alpha}$ は時間逆向きの $1-\alpha$ 階積分作用素であり，次のように定義される．

$$I_{T-}^{1-\alpha}h(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^T (\tau-t)^{-\alpha}h(\tau)d\tau, \quad 0<\alpha<1.$$

この双対システム (4) に対する弱一意接続性と元のシステム (2) に対する近似可制御性が同値であることが部分積分を用いて分かる．すなわち，

$$v=0 \quad \text{in} \quad \omega\times(0,T) \implies v_0 \equiv 0$$

という性質が (3) と同値になる．

第２章の内容

Ω, $\mathscr{L}$ などの記号は第 1 章と同様のものを使い，次の初期境界値問題を考える；

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u + \mathscr{L}u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = g & \text{on } \Gamma \times (0,T), \\ u = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

この非斉次境界値問題に対し，まずは g に適当な条件を課した上で Fourier の方法によって解の固有関数展開表示を得，その一意存在と安定性を示した．

$g \equiv 0$ の場合の $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対する解の一意存在および安定性は坂本・山本 (2011) によって示されている．いま，方程式は線形なので簡単のため $u_0 \equiv 0$ としてもよい．

定理 2 (**非斉次境界値問題**)**.** $u_0 \equiv 0$, $0 < \theta < 1/4$, $g \in C_0^\infty(\Gamma \times (0,T))$ とする．このとき，(5) はただ一つの解 $u \in C^\infty([0,T]; H^2(\Omega))$ を持ち，

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le Ct^{\alpha\theta}\|g\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma))}, \tag{6}$$

$$\|\partial_t^m u(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)} \le C\left(t^{\alpha(\theta-1)+1}\|\partial_t^{m+1}g\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma))} + \|\partial_t^m g(\cdot,t)\|_{H^{3/2}(\Gamma)}\right) \tag{7}$$

が任意の $m = 0, 1, 2, \dots$ に対して成り立つ．

上の定理 2 により各 $g \in C_0^\infty(\Gamma \times (0,T))$ に対する解 u の一意存在がいえたので，今後 (5) の解を u_g と記す．すると，第 1 章と同様の問題が考えられる．

定理 3 (**境界制御による近似可制御性**)**.** $u_0 \in L^2(\Omega)$ とし，部分境界 $\Gamma_0 \Subset \Gamma$ と $T > 0$ を任意に固定する．このとき，

$$\overline{\{u_g(\cdot,T);\ g \in C_0^\infty(\Gamma_0 \times (0,T))\}} = L^2(\Omega). \tag{8}$$

上の定理も証明の方針は定理 1 と同様で，双対システム (4) の解 v に対する弱一意接続性

$$\partial_{\nu_L} v = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_0 \times (0,T) \implies v_0 \equiv 0$$

を示すことによって得られる．ただし，

$$\partial_{\nu_L} u(x) = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\nu_j(x),$$

であり，$\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_d(x))$ は $x \in \Gamma$ における外向き法線ベクトルとする．

第３章の内容

本章の内容は Yavar Kian 教授（Aix-Marseille Université, Université de Toulon）との共同研究に基づく．

次の２つの初期値・境界値問題を考える；

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u + \mathcal{A}u = f(t)R(x,t) & \text{in } Q = \Omega \times (0,T), \\ \mathcal{B}_\sigma u = 0 & \text{on } \Sigma = \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{9}$$

および

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha v + \mathcal{A}v + f(t)q(x,t)v = 0 & \text{in } Q, \\ \mathcal{B}_\sigma u = 0 & \text{on } \Sigma, \\ u(\cdot,0) = v_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{10}$$

ただし，作用素 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}_\sigma$ は

$$\mathcal{A}u(x) := -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right), \quad x \in \Omega,$$

$$\mathcal{B}_\sigma u(x) := (1-\sigma(x))u(x) + \sigma(x)\partial_{\nu_A}u(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

$$\partial_{\nu_A}u(x) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\nu_j(x)$$

で定義し，係数 a_{ij}, σ は適当な滑らかさと対称性・一様楕円性を満たしているとする．これらに対して次の逆問題を考える．

問題 2. ある一点 $x_0 \in \overline{\Omega}$ における状態の観測 $\{u(x_0,t)\}_{t\in(0,T)}$ および $\{v(x_0,t)\}_{t\in(0,T)}$ から係数の時間依存部分 $\{f(t)\}_{t\in(0,T)}$ を決定せよ．

この問題に対して以下に示す安定性評価を得た．

定理 4. $R \in L^p(0,T;H^2(\Omega))$, $8/\alpha < p \le \infty$ かつ $\mathcal{B}_\sigma R = 0$ とし，$f = f_i \in L^\infty(0,T)$ $(i=1,2)$ に対応する (9) の解を u_i とおく．ある $\delta > 0$ が存在して $|R(x_0,t)| \ge \delta, \quad \text{a.e. } t \in (0,T)$ が満たされているとき，p, T, Ω, δ および $\|R\|_{L^p(0,T;H^2(\Omega))}$ に依存する定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|f_1 - f_2\|_{L^p(0,T)} \le C\|\partial_t^\alpha u_1(x_0,\cdot) - \partial_t^\alpha u_2(x_0,\cdot)\|_{L^p(0,T)},$$

$$\|\partial_t^\alpha u_1(x_0,\cdot) - \partial_t^\alpha u_2(x_0,\cdot)\|_{L^p(0,T)} \le C\|f_1 - f_2\|_{L^\infty(0,T)}.$$

とくに，$p = \infty$ の場合は，

$$C^{-1}\|\partial_t^\alpha u_1(x_0,\cdot) - \partial_t^\alpha u_2(x_0,\cdot)\|_{L^\infty(0,T)} \le \|f_1 - f_2\|_{L^\infty(0,T)} \le C\|\partial_t^\alpha u_1(x_0,\cdot) - \partial_t^\alpha u_2(x_0,\cdot)\|_{L^\infty(0,T)}.$$

定理 5. $q \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)), \partial_\nu q = 0, v_0 \in H^4(\Omega), \mathcal{B}_\sigma v_0 = \mathcal{B}_\sigma(\mathcal{A}v_0) = 0$ とし，$f = f_i \in L^\infty(0,T)$ $(i=1,2)$ に対応する (10) の解を v_i とおく．ある $\delta > 0$ が存在して $|q(x_0,t)v_2(x_0,t)| \ge \delta, \quad \text{a.e. } t \in (0,T)$ が満たされているとき，$\|f_i\|_{L^\infty(0,T)} \le M$ とすると，M, T, Ω, δ および $\|q\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}$ に依存する定数 $C > 0$ が存在して，

$$C^{-1}\|\partial_t^\alpha v_1(x_0,\cdot) - \partial_t^\alpha v_2(x_0,\cdot)\|_{L^\infty(0,T)} \le \|f_1 - f_2\|_{L^\infty(0,T)} \le C\|\partial_t^\alpha v_1(x_0,\cdot) - \partial_t^\alpha v_2(x_0,\cdot)\|_{L^\infty(0,T)}.$$

上の２つの結果はいずれも，まず順問題を解くに当たって低階項を右辺に移してから不動点定理を適用して解の一意存在と安定性を示す．定理の証明には，一般化された Gronwall の不等式を用いる．