論文の内容の要旨

論文題目

Accelerating convergence and tractability of multivariate numerical integration when the L^1-norms of the higher order derivatives of the integrand grow at most exponentially

（被積分関数の高階偏微分の L^1 ノルムの増大度が高々指数的である場合の多次元数値積分の加速的な収束と計算容易性）

氏名 鈴木航介

1　背景

高次元の数値積分は，ファイナンス，物理，CG など多くの応用を持つ．ここでは，s 次元超立方体 $[0,1)^s$ 上の滑らかな実数値関数 $f\colon [0,1)^s \to \mathbb{R}$ の積分値 $\int_{[0,1)^s} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ を関数値の和 $\sum_{i=1}^n a_i f(\boldsymbol{x}_i)$　$(a_i \in \mathbb{R})$ で近似する．特に $a_i = n^{-1}$ のとき，これを準モンテカルロ積分（QMC）と呼ぶ．

　QMC の重要なアイデアに，積分誤差を「関数の変動を表す量」$V(f)$ と「点集合の評価基準」$D(P)$ との積で評価する Koksma-Hlawka 型の不等式

$$\mathrm{Err}(f;P) := \left| \int_{[0,1]^s} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} - |P|^{-1} \sum_{\boldsymbol{x}\in P} f(\boldsymbol{x}) \right| \le V(f)D(P)$$

がある．オリジナルの不等式では，$V(f)$ は関数 f の Hardy-Krause の意味での全変動，$D(P)$ は P の star-discrepancy と呼ばれる,「非一様度」を測る尺度の一つである．star-discrepancy の値が $O(n^{-1}(\log n)^{s-1})$ のオーダーで減衰する n 点集合が多く知られていて，これらを用いた QMC により，積分誤差の上界も同じ速度で（モンテカルロ法の収束 $O(1/\sqrt{n})$ より速く）収束する．

　$b \ge 2$ を整数とする．以下 P を b 進デジタルネットと呼ばれる点集合に制限する．このとき，積分誤差は f の Walsh 係数 $\widehat{f}(\boldsymbol{k})$ と P のデュアルネットと呼ばれる集合 $P^\perp$ を用いて

$$\mathrm{Err}(f;P) \le \sum_{\boldsymbol{k}\in P^\perp\setminus\{0\}} |\widehat{f}(\boldsymbol{k})|$$

と評価できる．ただし，f の Walsh 係数 $\widehat{f}(\boldsymbol{k})$ とは，$L^2[0,1)^s$ において完備直交基底をなす Walsh 関数系 $\{\mathrm{wal}_{\boldsymbol{k}} \mid \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_0^s\}$ による一般化 Fourier 係数である．実は，Fourier 係数が関数の滑らかさを反映して減衰するというよく知られた事実の類比が，Walsh 係数についても成り立つ．

Dick は，各変数に対して α 階までの二乗可積分な混合偏導関数をもつ s 変数関数からなる Sobolev 空間 $\mathcal{H}_{\alpha,s}$ を考察した [1, 2]．彼は，α に対して広義単調増加な常に非負値の重み関数 $\mu_\alpha(\boldsymbol{k})$ を定義し，$f \in \mathcal{H}_{\alpha,s}$ のとき $|\widehat{f}(\boldsymbol{k})| \leq C_{b,\alpha,s}\|f\|_{\alpha,s}b^{-\mu_\alpha(\boldsymbol{k})}$ を示した．ただし $C_{b,\alpha,s}$ は b,α,s に依存する正定数，$\|f\|_{\alpha,s}$ は $\mathcal{H}_{\alpha,s}$ のノルムで，α 階までの混合偏導関数すべてが登場する．この式から，b 進デジタルネット P に対し，その評価基準を $\mathrm{WF}_\alpha(P) := \sum_{\boldsymbol{k}\in P^\perp\setminus\{0\}} b^{-\mu_\alpha(\boldsymbol{k})}$ とした Koksma-Hlawka 型の不等式

$$\mathrm{Err}(f;P) \leq C_{b,\alpha,s}\|f\|_{\alpha,s}\mathrm{WF}_\alpha(P)$$

が導かれる．Dick は，$\mathrm{WF}_\alpha(P)$ が $n^{-\alpha}(\log n)^{s\alpha}$ のオーダーで小さくなるようなデジタルネットの構成法を与えた．よって積分誤差も，同様の高速なオーダーで収束する．

Matsumoto-Saito-Matoba はこの結果の離散化を考察した [3]．彼らは，形式的に μ_α を $\alpha=\infty$ として定まる重み関数 μ_∞ を用いて，2 進デジタルネット P に対する評価基準 WAFOM を，$\mathrm{WF}(P) := \sum_{\boldsymbol{k}\in P^\perp\setminus\{0\}} 2^{-\mu_\infty(\boldsymbol{k})}$，より正確には，この和を有限で打ち切ったものとして定義した．この段階では，$2^{-\mu_\infty(\boldsymbol{k})}$ を用いた $\widehat{f}(\boldsymbol{k})$ の評価は存在しなかった，よって，彼らは離散化誤差を許容した形で Koksma-Hlawka 型不等式を示した．一方，彼らは WAFOM が高速計算可能であり，よってコンピュータにより WAFOM の小さな点集合が探索できるという利点があることを示した．理論的には，最小 WAFOM の値は C をとある正定数として $O(n^{-C\log n})$ のオーダーで減衰することが示された [4]．

より最近になって，Yoshiki は滑らかな関数と 2 進デジタルネットに対して Dick の結果の類似を示した [5]．とくに，彼は常に μ_∞ 以上の値をとる関数 $\mu_{\infty,\mathrm{Y}}$ を定義し，すべての（高階混合）偏導関数の L^p ノルムたちの上限 $\|f\|_{\mathrm{Y},p}$ が有限となる関数に対し，2 進 Walsh 係数が $|\widehat{f}(\boldsymbol{k})| \leq 2^{s/p}\|f\|_{\mathrm{Y},p}2^{-\mu_{\infty,\mathrm{Y}}(\boldsymbol{k})}$ と評価されることを示した．彼の結果は，適切な仮定の下で Dick の不等式よりも優れているうえ，そこから得られる 2 進デジタルネット P に対する Koksma-Hlawka 型の不等式

$$\mathrm{Err}(f;P) \leq 2^{s/p}\|f\|_{\mathrm{Y},p}\sum_{\boldsymbol{k}\in P^\perp\setminus\{0\}} 2^{-\mu_{\infty,\mathrm{Y}}(\boldsymbol{k})}$$

は，[3] の議論を離散化の過程を経ることなく正当化することができる．

2　主結果

本論文の第一の目標は，[3, 5] の 2 進デジタルネットおよび Walsh 係数に関する結果を b 進の場合に一般化することである．3 章では，まず WAFOM の概念を b 進に一般化する．さらに，関数 $\mu_\infty(\boldsymbol{k})$ に関する MacWilliams 型恒等式を与える．これは WAFOM を高速に計算する手法 [3] の一般化である．加えて 2 進 WAFOM の値に関する結果 [4, 6] を一般化する．とくに，b に依存する正定数 C_b が存在して，最小 WAFOM のオーダーが $O(n^{-C_b(\log n)/s})$ で上から抑えられることを示す．4 章では，b が素数のとき，本質的に上記のオーダーを達成する b 進デジタルネットを構成する具体的なアルゴリズムを与える．5 章では [5] とは異なる手法でその結果を一般化する．とくに滑らかな関数の b 進 Walsh 係数に関する公式および上界を与える．

本論文の第二の目標は，滑らかな関数からなる重み付き関数空間の誤差の収束が n だけでなく次元 s にどう依存するかを調べることである．応用上 s は数百以上になりえるので，s への依存性を調べることは極めて重要である．$n(\varepsilon, s)$ を information complexity，すなわち誤差 ε を達成するために必要な関数の評価回数の最小値とする．$n(\varepsilon, s)$ が ε と s とに対して指数的よりゆるやかにしか増大しないとき，積分問題は tractable であるという．現在では，関数空間に応じて多様な tractability が定義されている．

6 章では，重み $\boldsymbol{u} = \{u_j\}_{j\geq 1}$ を単調減少な正実数列とし，空間

$$\mathcal{F}_{s,\boldsymbol{u}} := \left\{ f \in C^\infty[0,1]^s \;\middle|\; \|f\|_{\mathcal{F}_{s,\boldsymbol{u}}} := \sup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)\in\mathbb{N}_0^s} \frac{\|\partial_{x_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{x_s}^{\alpha_s} f\|_{L^1}}{\prod_{j=1}^s u_j^{\alpha_j}} < \infty \right\}$$

を考察する．$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^s$ に対して，μ_∞ や $\mu_{\infty,\mathrm{Y}}$ を一般化した関数 $\mu(\boldsymbol{a};\cdot)$ を定義する．5 章の結果から，$\boldsymbol{u}$ に対応した $\boldsymbol{a}$ が存在して $|\widehat{f}(\boldsymbol{k})| \leq \|f\|_{\mathcal{F}_{s,\boldsymbol{u}}} b^{-\mu(\boldsymbol{a};\boldsymbol{k})}$ となることがわかる．WAFOM の収束を踏まえ，ある $q \in (0,1)$ と $p > 1$ とが存在して，積分誤差が $O(q^{(\log n)^p})$ のオーダーで収束することを加速的な収束と定義する．さらに，加速的な収束に対応した tractability を複数定義する．とくに加速的な収束の定数倍項および p, q が次元 s に依存しないという条件を考察する．本論文では，空間 $\mathcal{F}_{s,\boldsymbol{u}}$ における加速的な収束と，それが s に依存しないための条件を以下のように明らかにした．

定理. $\mathcal{F}_{s,\boldsymbol{u}}$ 上の積分問題について，以下がいえる．

1. $p = 2$ での加速的な収束が常に成り立つ．
2. $1/2 < t < 1$ を実数とする．重み $\boldsymbol{u}$ が $\liminf_{j\to\infty} \log(u_j^{-1})/j^{(1-t)/(2t-1)} > 0$ をみたすとき，次元 s に依存しない，$p = 1/t$ での加速的な収束が成り立つ．

参考文献

[1] Josef Dick, *Walsh spaces containing smooth functions and quasi-Monte Carlo rules of arbitrary high order*, SIAM J. Numer. Anal., 46 (2008), pp. 1519–1553.

[2] ——, *The decay of the Walsh coefficients of smooth functions*, Bull. Aust. Math. Soc., 80 (2009), pp. 430–453.

[3] Makoto Matsumoto, Mutsuo Saito, and Kyle Matoba, *A computable figure of merit for quasi-Monte Carlo point sets*, Mathematics of Computation, 83 (2014), pp. 1233–1250.

[4] Makoto Matsumoto and Takehito Yoshiki, *Existence of higher order convergent quasi-Monte Carlo rules via Walsh figure of merit*, in Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2012, vol. 65 of Springer Proc. Math. Stat., Springer, Heidelberg, 2013, pp. 569–579.

[5] Takehito Yoshiki, *Bounds on Walsh coefficients by dyadic difference and a new Koksma-Hlawka type inequality for Quasi-Monte Carlo integration.* ArXiv:1504.03175 [math.NA].

[6] ——, *A lower bound on WAFOM*, Hiroshima Math. J., 44 (2014), pp. 261–266.