

## 論文の内容の要旨

論文題目 On stability of viscosity solutions under non-Euclidean metrics  
(非ユークリッド距離構造の下での粘性解の安定性について)

氏 名 中安 淳

非線形偏微分方程式論は自然科学の諸分野で現れる非線形現象を解析する数学的な道具として発展してきたが、近年非ユークリッド距離構造の下での現象とその数学解析が多くの研究者の関心を集めている。一つの例として人体の中での化学物質の伝播が挙げられ複雑な系での解析が不可欠であると考えられている。また、結晶成長学において平らな面ができることは異方的な曲率にしたがって表面が運動するクリスタイン曲率流として数学的にモデル化されている。これらの例は単純に非ユークリッド的つまり等方的ではないというだけでなく距離構造に特異性があり、対応する方程式も特異性を含んだものが提案されている。例えば、ネットワークやフラクタルのように微分構造を持たない空間上のハミルトン・ヤコビ方程式は接合点での微分の定式化によりいくつかの研究がある。また、クリスタイン曲率流は拡散係数に相当する部分にディラックのデルタ関数などの非局所的な項を含む強特異拡散方程式に帰着される。

これまでの研究では上にあげたような特異性を持つ方程式に対して粘性解理論を用いて適切性を示されていたが、多くの研究は解の一意存在性に注力していて解の安定性に注目した研究はあまりなされていなかった。ここで解の安定性は比較原理と並ぶ非線形方程式の基礎的な性質であり、大まかにいうと近似方程式の解の列が一様収束するならば収束先は極限方程式の解であるということを主張している。解の安定性は解の漸近挙動の研究において重要な役割を果たすことに注意する。一つに均質化問題、すなわち微視的にはある方程式に従う解が巨視的にはどのような均質化された方程式に従うかという問題があり、もう一つに十分に時間がたった場合の解の挙動の問題があげられる。これらの話題を特異な距離構造の下で考えるとどうなるかを考察するために、本博士論文では距離空間上のハミルトン・ヤコビ方程式や強特異拡散方程式の粘性解の安定性およびその応用について得られた結果を説明する。また、ペロンの方法による解の構成で主要な部分となる劣解の最大が解にな

るといふ命題および凸ハミルトニアンの研究で重要な役割を果たす解の近似は解の安定性の双対的な問題と関係性があり、本博士論文ではこれらについても研究した。

本博士論文は全 5 章からなりそれぞれの内容を以下に説明する。

第 1 章は本博士論文の内容の概観であり、距離空間上のハミルトン・ヤコビ方程式や強特異拡散方程式の粘性解理論の歴史的な経緯の説明と中心的道具である粘性解の安定性、ペロンの方法の原理および解の近似について大まかな定式化を行う。ここで、古典的な粘性解理論によりユークリッド空間上の方程式は連続である限り解の安定性とペロンの方法の原理は成立する一方解の近似はいくらかの条件がいることに注意する。

第 2 章は距離粘性解の導入であり、アイコナル方程式を扱った Giga-Hamamuki-Nakayasu (2015) の手法に基づいて完備距離空間  $(X, d)$  上の時間発展ハミルトン・ヤコビ方程式

$$\partial_t u + H(x, |Du|) = 0 \quad \text{in } (0, \infty) \times X \quad (1)$$

に対する適切な解の概念の構築を目標とする。ここで  $H$  は  $X \times \mathbf{R}_+$  上定義された連続凸なハミルトニアンである。ネットワークやフラクタルのように完全な接ベクトル構造を持たない空間では未知関数  $u$  の勾配  $Du$  に相当する量が定義されないが、勾配の絶対値  $|Du|$  は方向微分の最大であることの類推

$$|Du|(t, x) := \sup \{ |w'(0)| \mid w(s) = u(\xi(s), t), \xi \in \text{Lip}(\mathbf{R}), |\xi'| \leq 1, \xi(0) = x \}$$

を考えることが解決策である。その結果少なくとも劣解についてはこの方法が有効であり、優解を最適性に基づいた定義にすることで方程式 (1) のコーシー問題に対する解の一意存在性を示し、Crandall-Lions (1983) による古典的な粘性解との関係性も調べた。

第 3 章では完備測地的距離空間上のハミルトン・ヤコビ方程式 (1) の距離粘性解の安定性とその応用について研究する。本章では Gangbo-Swiech (2014) によって導入された距離粘性解の概念を中心に考える。この新しい解は勾配の絶対値  $|Du|$  を局所勾配と呼ばれる量

$$|\nabla u|(t, x) := \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|u(t, y) - u(t, x)|}{d(y, x)}$$

で特徴づけることから定義され、偏微分方程式論的な議論と親和性が高いことを特徴としている。本章の第 3 節では Gangbo-Swiech により導入された解の安定性が解の列の最大値に関するある条件のもとで成立することを示す。この追加の条件は空間が局所コンパクトであるときは自動的に成立し、逆に局所コンパクトでないときには本質的であることもわかる。第 4 節では安定性の応用として Namah-Roquejoffre (1999) の方法に従い凸で強圧的なハミルトン・ヤコビ方程式の解の時間無限大での

漸近挙動について調べる。結果としてシェルピンスキーのギャスケットを含むコンパクト距離空間上の方程式 (1) の解  $u$  の時間無限大での漸近を得た。

第 4 章ではハミルトニアン  $H: \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  の (加法的) 固有値問題

$$H(x, Du) = c \quad \text{in } \mathbf{T}^N$$

を考える。この固有値問題は均質化問題や解の長時間挙動において現れその固有値を計測することは応用上重要である。ハミルトニアン  $H$  が凸ならば固有値  $c$  に対して inf-sup 型表現公式

$$c = \inf_{u \in C^1(\mathbf{T}^N)} \sup_{\nabla u} H = \inf_{u \in \text{Lip}(\mathbf{T}^N)} \sup_{\nabla u} H$$

が成立することが Contreras-Iturriaga-Paternain-Paternain (1998) などにより知られている。ここで  $\nabla u$  は古典的な意味での微分のグラフである。この問題はリプシッツ連続な粘性解  $u$  を滑らかな関数  $u_n$  でうまく近似することに帰着され、凸ハミルトニアンの場合はフリードリクス軟化子による方法で正当化される。本研究ではこの方法は途中で使われるイェンセンの不等式を準凸関数に対応する不等式に取り換えることで準凸ハミルトニアンにも適用できることを示した。本章では全く新しい別証明も与えている。粘性解の安定性が微分のグラフの問題に帰着されるように粘性解の近似を微分のグラフの段階に変換したより強い補題の証明に成功した。

第 5 章では一次元強特異拡散方程式

$$u_t = a(u_x)[(W'(u_x))_x + \sigma(t, x)]$$

を研究する。ここで、 $W$  は  $\mathbf{R}$  上の局所有限個の点で微分可能とは限らない凸関数であり、 $\sigma$  は十分滑らかな関数である。この方程式は平面上のクリスタライン曲率流で曲線が関数  $u$  のグラフで与えられるときに導出されるが、 $W$  の滑らかさの欠如に起因して方程式中に局所的ではない量が現れ取り扱いが難しい。Giga-Giga (1998) による解決の糸口はエネルギー汎関数

$$\Phi[f] = \int (W(f_x) - \sigma f) dx$$

を導入し、非局所的な部分を汎関数微分として書くことにある。この方程式に対して粘性解理論と汎関数劣微分の理論を組み合わせた一般化された解が導入され、 $\sigma$  が空間変数  $x$  に依存しない場合は Giga-Giga (1998-1999) によって研究され、依存する場合は Giga-Giga-Rybka (2014) によって比較原理が成立することが示された。そこで本研究では空間非一様な  $\sigma$  を持つ強特異拡散方程式に対して解の安定性解析を行った。この方程式の難しさは粘性解の試験関数が  $\Phi$  の劣微分の定義域に入る必要があり、 $W$  が微分不可能な勾配のところでは平らであるというファセット性が要求さ

れる点にある。さらに  $\sigma$  が  $x$  に依存する場合は強特異拡散項は劣微分が陽に計算できない。本研究では対応する障害物問題の解について十分な考察を行い、ファセット関数に対して強特異拡散項の値を計算するために必要な有効領域を明確化した上で安定性を示すために必要な修正試験関数を構成した。結果として有界一様連続な初期値に対するコーシー問題の解の存在性をペロンの方法により証明することに成功した。