

論文審査の結果の要旨

氏名 中安 淳

非線形偏微分方程式論は自然科学の諸分野で現れる非線形現象を解析する数学的な道具として発展してきたが、近年非ユークリッド距離構造の下での現象とその数学解析が多くの研究者の関心を集めている。一つの例として人体の中での化学物質の伝播があげられ複雑な系での解析が不可欠であると考えられている。また、結晶成長学において平らな面ができることは異方的な曲率にしたがって表面が運動するクリスタライン曲率流として数学的にモデル化されている。これらの例は単純に非ユークリッド的つまり等方的ではないというだけでなく距離構造に特異性があり、対応する方程式も特異性を含んだものが提案されている。例えば、ネットワークやフラクタルのように微分構造を持たない空間上のハミルトン・ヤコビ方程式は接合点での微分の定式化によりいくつかの研究がある。また、クリスタライン曲率流は拡散係数に相当する部分にディラックのデルタ関数などの非局所的な項を含む強特異拡散方程式に帰着される。

これまでの研究では上にあげたような特異性を持つ方程式に対して粘性解理論を用いて適切性を示されていたが、多くの研究は解の一意存在性に注力していて解の安定性に注目した研究はあまりなされていなかった。ここで解の安定性は比較原理と並ぶ非線形方程式の基礎的な性質であり、大まかにいうと近似方程式の解の列が一様収束するならば収束先は極限方程式の解であるということを主張している。解の安定性は解の漸近挙動の研究において重要な役割を果たすことに注意する。一つに均質化問題、すなわち微視的にはある方程式に従う解が巨視的にはどのような均質化された方程式に従うかという問題があり、もう一つに十分に時間がたった場合の解の挙動の問題があげられる。これらの話題を特異な距離構造の下で考えるとどうなるかを考察するために、本博士論文では距離空間上のハミルトン・ヤコビ方程式や強特異拡散方程式の粘性解の安定性を調べその応用について述べる。また、ペロンの方法による解の構成で主要な部分となる劣解の最大が解になるという命題および凸ハミルトニアンの研究で重要な役割を果たす解の近似は解の安定性の双対的な問題と関係性があり、本博士論文ではこれらについても研究した。

本博士論文は全5章からなる。

第1章では、距離空間上のハミルトン・ヤコビ方程式や強特異拡散方程式の粘性解理論の歴史的な経緯の説明と中心的道具である粘性解の安定性、ペロンの方法

の原理および解の近似について大まかな定式化を行う。

第2章で距離粘性解を導入する。アイコナル方程式を扱った Giga-Hamamuki-Nakayasu (2015) の手法に基づいて完備距離空間 (X, d) 上の時間発展ハミルトン・ヤコビ方程式に対する適切な解の概念の構築を行った。ここで H は $X \times \mathbf{R}_+$ 上定義された連続凸なハミルトニアンである。ネットワークやフラクタルのように完全な接ベクトル構造を持たない空間では未知関数 u の勾配 Du に相当する量が定義されないが、勾配の絶対値 $|Du|$ は方向微分の最大であることを考えることが解決策である。その結果少なくとも劣解についてはこの方法が有効であり、優解を最適性に基づいた定義にすることで距離空間上のハミルトン・ヤコビ方程式のコーシー問題に対する解の一意存在性を示し、Crandall-Lions (1983) による古典的な粘性解との関係性も調べた。

第3章では完備測地的距離空間上のハミルトン・ヤコビ方程式の距離粘性解の安定性とその応用について研究する。本章では Gangbo-Swiech (2014) によって導入された距離粘性解の概念を中心に考える。安定性の応用として Namah-Roquejoffre (1999) の方法に従い凸で強圧的なハミルトン・ヤコビ方程式の解の時間無限大での漸近挙動について調べる。結果としてシェルピンスキーのギャスケットを含むコンパクト距離空間上の方程式の解 u の時間無限大での漸近を得た。

第4章ではハミルトニアンの加法的固有値問題を扱った。ここでは従来扱えなかった必ずしも凸でない H に対しての（加法的）固有値問題の固有値の inf-sup 型の表現公式を導出した。本章では二つの証明を与えている。そのうちの一つは粘性解の安定性が微分のグラフの問題に帰着されるように、粘性解の近似を微分のグラフの段階に変換するというもので、全く新しい考え方によるものである。

第5章では一次元強特異拡散方程式について外力項が空間的に非一様な場合の一般の初期値についての存在定理を確立した。

これらの成果はどれも先駆的で、一流学術雑誌への掲載に値する。よって、論文提出者 中安淳 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。