

論文審査の結果の要旨

氏 名 芳木 武仁

多変数の数値積分は、自然科学のあらゆる分野に登場する基本的な問題である。しかし、定義域の次元の上昇に伴い、変数の数は急激に増大し、多くの標準的な数値積分公式は無効となる。モンテカルロ法 (MC) は、これに対する一つの回答であるが、計算精度にはおのずから限界があり、応用上は十分ではない。そこで、近年、さらに効率よく近似を行うために、サンプル点集合を「一様ランダム」ではなく決定論的に「超一様ランダム」に配置して、平均を計算することで、目的とする積分値の近似値を得る手法である準モンテカルロ法 (QMC) が提案され、活発に研究されている。QMC においては、点集合の「超一様性の性能指標」が重要であり、実際複数のものが提案されている。近年、Walsh Figure of Merit (WAFOM) と呼ばれる性能指標が松本・斎藤・Matoba により導入され、高速・高精度な収束が可能になることが理論的に保証された。

本学位論文は、この WAFOM の基礎理論に関する芳木氏の一連の研究の成果をまとめたものであり、

- I 「WAFOM の良い点集合の存在証明＝上からの評価」(松本眞氏との共同研究、発表済)、「WAFOM をある限度以上には良くできない」という下からの評価 (発表済)、「指数関数の QMC 積分に WAFOM の計算を帰着する」高速化、「高階導関数のノルムの増大に対するロバストネス」の制御
- II 差分的な手法により改良された、Walsh 係数のバウンドと Koksma-Hlawka 型不等式の改善

の 2 部からなる。

第 I 部では、次の内容を扱っている。点集合 P としては、digital net の形のみ考える。まず、符号理論における Hamming weight の一般化といえる Dick weight を使い、 F_2 係数形式べき級数体 K の上での離散的距離を定義し、符号理論における Shannon の存在定理を模倣して、WAFOM の小さな digital nets over F_2 の存在を示した。

具体的には、 $m > 9s$ を満たす自然数 m に対し、 $N = 2^m$ とおいたとき

$$\text{WAFOM}(P) \leq -EN^{\{-C\log N/s\}} + D$$

なる点集合 P の存在を示した。 C 、 D 、 E は適当な正定数である。さらに、ある C' により

$$\text{WAFOM}(P) \geq -N^{\{-C'\log N/s\}}$$

がかなり広いクラスの点集合 P に対して成立することを示した。これにより、

おおむね上界と下界が一致したため、WAFOM の有効性とその限界が (log をとったあとの定数倍を除いて) 示されることとなった。これは、従来の性能指標である star-discrepancy (そこでは対応する上界と下界の乖離度についての予想があり、Fields 賞受賞者の Roth らがさかんに研究したがいまだ未解決である) よりも、WAFOM が研究しやすいすぐれた指標であることを示している。さらに、これらの結果は、(関数空間が十分な滑らかさをもつ場合に限るものの) 積分誤差のオーダーが、従来 J. Dick らにより研究されてきた「超高次収束」を超えた収束速度を示している。この有効性は、大堀らによって数値実験で確かめられており、その意義は高い。

第 II 部では、効率的な WAFOM の近似が行われている。松本、大堀との共同研究により、多次元ガウス分布 $\exp(-2 \sum_i (x_i^2))$ の P による QMC 積分誤差と WAFOM (P) の比が、上下から定数で抑えられることが明らかになった。この結果は、WAFOM (P) を小さくすることは「指数関数を含む滑らかな関数空間」の QMC 積分誤差を小さくするために必須であることを示唆している。さらに、「WAFOM (P) の計算」を「指数関数の QMC 積分誤差の計算」で代替することで、WAFOM (P) の計算が高速化できることを示唆している。

さらに、新たな Koksma-Hlawka (KH) 型不等式の構築も行われている。芳木氏は被積分関数の高階微分に対応する離散的概念として二進差分に着目し、Walsh 係数と二進差分の関係を表す簡明な等式を証明した。また二進差分と微分係数を比較することで、既存の結果よりも精密な Walsh 係数の高階偏導関数による評価を得た。さらにこの評価をもちいて、新しいタイプ KH 型不等式を得た。既存の KH 型不等式では、積分誤差は高階偏導関数の積分値たちの和で押さえられるため、誤差が降り積もって大きくなる。しかし、本研究による上界は、この問題点を見事に克服し、はるかに小さな上界を与えることができるのが大きな特徴である。

まとめると、芳木氏の研究成果は、純粋数学の成果を駆使して、応用上基本的で重要でありながら、これまであまり大きな進展がなかった、多変数数値積分の分野に本質的な貢献なすものである。

よって、論文提出者 芳木武仁氏は、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。