

博士論文

都市内の移動と集積から導かれる容量制約付き職住形態の数理的研究

宗政由桐

目次

| | | |
|-------|----------------------|----|
| 第1部 | 序論 | 1 |
| 第1章 | 序 | 5 |
| 1.1 | 本研究の目的 | 5 |
| 1.2 | 本研究の概要 | 7 |
| 1.3 | 本研究の位置づけ | 10 |
| 1.4 | 本研究で用いる用語と記法 | 12 |
| 第2章 | 既往研究 | 15 |
| 2.1 | 職住分布配置に関する研究 | 15 |
| 2.1.1 | 本研究と既往研究との差異 | 15 |
| 2.1.2 | 古典立地論と施設配置問題 | 15 |
| 2.1.3 | 空間相互作用モデル族 | 18 |
| 2.1.4 | 職住分布配置問題 | 24 |
| 2.2 | 都市内のコスト配分法に関する研究 | 26 |
| 2.2.1 | 利用者均衡配置の導出の意義 | 26 |
| 2.2.2 | 利用者均衡配分 | 27 |
| 2.2.3 | システム最適配分 | 28 |
| 2.2.4 | 利用者均衡配分とシステム最適配分の定式化 | 28 |
| 2.2.5 | 配分原則の数理最適化問題への拡張 | 30 |
| 2.3 | 距離の算出に関する研究 | 32 |
| 2.3.1 | ユークリッド距離 | 32 |
| 2.3.2 | マンハッタン距離 | 32 |
| 2.3.3 | 領域間距離と領域内距離 | 33 |

| | | |
|--------|----------------------------------|----|
| 第 II 部 | 本論：仮想都市モデルを用いた実証分析 | 37 |
| 第 3 章 | 都市内の移動による職住分布のシステム最適配置 | 41 |
| 3.1 | はじめに | 41 |
| 3.2 | 移動コストを最小化する職住分布最適配置問題の定式化 | 42 |
| 3.2.1 | 都市モデル | 42 |
| 3.2.2 | 都市モデル内の移動コスト | 43 |
| 3.3 | 2 次計画問題としての定式化 | 45 |
| 3.4 | 線形緩和法による提案問題の導出 | 48 |
| 3.4.1 | 線形緩和法による非凸 2 次計画問題の緩和 | 48 |
| 3.4.2 | 提案モデルの最適解導出 | 50 |
| 3.5 | 数値解析例 | 52 |
| 3.5.1 | 移動コストを最小化する職住分布の最適配置 | 52 |
| 3.5.2 | 最適配置における T 値, α 値の定性的特性 | 60 |
| 3.6 | 本章のまとめ | 61 |
| 第 4 章 | 都市内の移動と集積による職住分布のシステム最適配置 | 65 |
| 4.1 | はじめに | 65 |
| 4.2 | 移動・不快感コストを最小化する職住分布最適配置問題の定式化 | 66 |
| 4.2.1 | 都市モデル | 66 |
| 4.2.2 | 都市モデル内の移動・不快感コスト | 66 |
| 4.3 | 2 次計画問題としての定式化 | 68 |
| 4.4 | 提案モデルの最適解導出 | 70 |
| 4.5 | 数値解析例 | 71 |
| 4.5.1 | 移動・不快感コストを最小化する職住分布の最適配置 | 71 |
| 4.5.2 | 最適配置における β 値の定性的特性 | 75 |
| 4.6 | 本章のまとめ | 76 |
| 第 5 章 | 都市内の移動と集積による職住分布の利用者均衡配置 | 79 |
| 5.1 | はじめに | 79 |
| 5.2 | 移動・不快感コストを均衡配分する職住分布配置問題の定式化 | 80 |
| 5.2.1 | 都市モデル | 80 |
| 5.2.2 | 都市モデル内の移動・不快感コスト | 80 |
| 5.3 | 均衡配分モデルの数理計画問題への定式化 | 82 |

| | | |
|-------------------------------|--|--------|
| 5.4 | 提案モデルの均衡解の導出 | 87 |
| 5.4.1 | 2次計画問題としての定式化 | 87 |
| 5.4.2 | 求める均衡解について | 88 |
| 5.4.3 | ラグランジュ乗数値の導出 | 88 |
| 5.5 | 数値解析例 | 90 |
| 5.5.1 | 等コスト原則による職住分布の均衡配置 | 90 |
| 5.5.2 | 均衡配置における α 値, β 値の定性的特性 | 94 |
| 5.5.3 | 最適配置と均衡配置における α 値, β 値の違い | 94 |
| 5.6 | 本章のまとめ | 95 |
| 第 III 部 本論：実空間データを用いた実証分析 | | 97 |
| 第 6 章 | 実空間データを用いた職住分布の均衡・最適配置問題 | 101 |
| 6.1 | はじめに | 101 |
| 6.2 | 2次計画問題としての定式化 | 102 |
| 6.3 | 実空間データ操作 | 104 |
| 6.3.1 | 容量制約の導出 | 105 |
| 6.3.2 | 都市内の領域統合 | 107 |
| 6.3.3 | 領域間距離と領域内距離 | 109 |
| 6.4 | 10 都市における実証分析 | 110 |
| 6.4.1 | 各都市のパラメータの散布図 | 110 |
| 6.4.2 | 領域面積の違いによるパラメータ | 117 |
| 6.4.3 | 三角座標による都市の大局的特徴 | 117 |
| 6.4.4 | 最適職住形態とパラメータ変動による都市の変化 | 118 |
| 6.4.5 | 他指標との比較 | 132 |
| 6.5 | 手法の取扱い範囲と今後の数学的展開 | 133 |
| 6.6 | 本章のまとめ | 133 |
| 第 7 章 | 結 | 137 |
| 7.1 | 結論 | 137 |
| 7.2 | 今後の課題と展望 | 139 |
| 参考文献 | | 142 |

目次

| | | |
|-----|-----------------------------------|-----|
| 1.1 | 本論の構成と流れ | 9 |
| 2.1 | Weber の工場最適配置モデル | 16 |
| 2.2 | Christaller と Lösch の中心地論の概念図 | 17 |
| 2.3 | 円領域内の距離 | 35 |
| 3.1 | 都市モデルとゾーンあたりの移動コストの概念図 | 44 |
| 3.2 | $H-W-H$ 線形都市モデル | 52 |
| 3.3 | $H-W-H$ 線形都市モデルにおける最適配置 | 54 |
| 3.4 | $H-W-H-W-H$ 線形都市モデル | 55 |
| 3.5 | $H-W-H-W-H$ 線形都市モデルにおける最適配置 | 56 |
| 3.6 | $H-W-H$ 平面都市モデル | 57 |
| 3.7 | $H-W-H$ 平面都市モデルにおける最適配置 | 58 |
| 3.8 | 実行可能領域 $[D]_L^2$ と D の概念図 | 61 |
| 4.1 | 都市モデルとゾーンあたりの移動・不快感コストの概念図 | 67 |
| 4.2 | $H-W-H$ 線形都市モデル | 71 |
| 4.3 | $H-W-H$ 線形都市モデルにおける最適配置 | 72 |
| 4.4 | $H-W-H$ 平面都市モデル | 73 |
| 4.5 | $H-W-H$ 平面都市モデルにおける最適配置 | 74 |
| 5.1 | 都市モデルと 1 人あたりの移動・不快感・ペナルティコストの概念図 | 81 |
| 5.2 | 不快感コストとペナルティコストの概形図 | 81 |
| 5.3 | $H-W-H$ 線形都市モデルにおける均衡配置 | 91 |
| 5.4 | $H-W-H$ 平面都市モデルにおける均衡配置 | 93 |
| 6.1 | 現状の居住地ノード (赤) と就業地ノード (青) | 105 |
| 6.2 | 都市の 20 領域への統合 | 107 |

| | | |
|------|--|-----|
| 6.3 | 領域間距離と領域内距離 | 109 |
| 6.4 | パラメータ推定の手法 (例:高松市) | 110 |
| 6.5 | コストパラメータの散布図 | 111 |
| 6.6 | 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (札幌市) | 112 |
| 6.7 | 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (仙台市) | 112 |
| 6.8 | 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (新潟市) | 113 |
| 6.9 | 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (静岡市) | 113 |
| 6.10 | 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (岡山市) | 114 |
| 6.11 | 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (広島市) | 114 |
| 6.12 | 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (神戸市) | 115 |
| 6.13 | 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (熊本市) | 115 |
| 6.14 | 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (徳島市) | 116 |
| 6.15 | 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (高松市) | 116 |
| 6.16 | 領域面積の違いによるパラメータ変化の検証 | 117 |
| 6.17 | 三角座標におけるコストの評価 | 118 |
| 6.18 | UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (札幌市) | 119 |
| 6.19 | UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (仙台市) | 120 |
| 6.20 | UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (新潟市) | 120 |
| 6.21 | UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (静岡市) | 121 |
| 6.22 | UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (岡山市) | 121 |
| 6.23 | UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (広島市) | 122 |
| 6.24 | UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (神戸市) | 122 |
| 6.25 | UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (熊本市) | 123 |
| 6.26 | UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (徳島市) | 123 |
| 6.27 | UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (高松市) | 124 |
| 6.28 | パラメータ変動による居住地の変化 (神戸市) | 126 |
| 6.29 | パラメータ変動による就業地の変化 (神戸市) | 127 |
| 6.30 | パラメータ変動による居住地の変化 (新潟市) | 128 |
| 6.31 | パラメータ変動による就業地の変化 (新潟市) | 129 |
| 6.32 | パラメータ変動による居住地の変化 (徳島市) | 130 |
| 6.33 | パラメータ変動による就業地の変化 (徳島市) | 131 |

表目次

| | | |
|-----|---|-----|
| 3.1 | I と J の組み合わせによる変数と制約式の総数 (基本モデル) | 51 |
| 4.1 | I と J の組み合わせによる変数と制約式の総数 (SO モデル) | 70 |
| 5.1 | I と J の組み合わせによる変数と制約式の総数 (UE モデル) | 89 |
| 6.1 | 圏域ごとの人口推移の推計値 | 104 |
| 6.2 | 10 都市のコストデータ | 119 |
| 6.3 | 他指標との比較 | 132 |

第 I 部

序論

第1章 序

- 1.1 本研究の目的
- 1.2 本研究の概要
- 1.3 本研究の位置づけ
- 1.4 本研究で用いる用語と記法

第1章

序

1.1 本研究の目的

本研究は、都市における就業地および居住地の分布（以下、職住分布）の配置を、容量制約を付した都市モデルにおいて収束解を導出する数理モデルを独自の方法で構築し、それをを用いて都市モデル内のコスト配分法や都市の発展を議論するものである。都市における最適な施設配置という問題は、建築計画・都市計画を策定するにあたり大変重要な問題であり、とりわけ職住分布は都市を構成する要素として基本的なものである。職住分布は各都市において様々な形態をとっており、その土地の環境に適した地域社会が形成されていると考えられるため、職住分布を一括りにして記述することは困難を伴う。しかしながら都市を構成する要素以上に、社会を構成する重要な要素であることもまた自明であり、都市の発展を考えるにあたって、今一度深く議論する必要があると考えられる。

すでにわが国では少子高齢化社会に突入しており、すべての圏域で都市の人口減少が起きると推定されている（国土交通省国土審議会政策部会長期展望委員会 2011）。三大都市圏に占める人口比率は50%を超える一方、今後35年で過疎化が進む地域の人口は61%減少するとも言われており、持続可能な地域発展の検討は今後ますます大きな課題となるであろう。このような諸問題を解決する一つの手法として、都市のコンパクトシティ型への移行施策が検討されているが、既存の都市構造を大きく変化させる手法には中長期的な視点を伴った計画が不可欠であり、変化させた場合における影響を多に考慮しなければならない。さらに既存の都市で生活を行っている人々に与える影響を考えると、極めて困難であり、その手法の具体化が課題となっている。本研究で議論するモデルは、都市内の移動と集積によって求められるコストの配分法により職住分布が変化することに着目し、人口変動や都市の縮小化に伴う収束的な職住形態を導出するものである。

本研究では、都市内の移動による移動コストと、都市内の集積（密度）から生じる不快感コスト、および建物の規模によって定まる容量制約に着目する。従来の職住分布を求める移動コストの定式化は、本質的には通勤移動コストのみを考慮したものであり、業務移動コストなどの施設相互作用コストを明示的に考慮したものではない。そこでまず、都市内の移動コストとして業務移動コストを加えて考慮し

た数理モデルを構築するとともに、そのモデルの含意を明確にする。次にこのモデルにおいて考えられている建物ノード間のコストに加え、建物ノード自体が負担する不快感コストを付加した一般的な都市のコストへと拡張する。建物ノード自体が負担するコストは容量制約に依存するコストであり、実空間都市分析への応用を念頭に付した独自の理論である。

職住分布を導出するにあたって、都市内における総コストを最小化するモデルであるか、あるいは都市内に住まう人々が負担するコストを等しくなるよう分配するのか、という都市のコストの配分法について議論する。前者はシステム最適配分と呼ばれ、システム（本研究では都市全体）のコストを最小化するためのモデルであり、後者は利用者均衡配分と呼ばれ、利用者（本研究では都市内の人々）が負担するコストを等しくするためのモデルである。都市計画を策定する上ではシステム最適化が望ましいものの、現実的には利用者が各々の利益に従って行動し利用者均衡状態に収束していると考えられるため、双方のモデルにおいて仮想都市モデルを用いた実証分析を行い、その差異をパラメータによって明らかにする。

最後に、全国の実空間データを用いて都市分析へと展開し、本モデルの有用性を検証する。東京都特別区や三大都市圏における職住形態に関する研究は盛んに行われているものの、地方都市における職住分布配置に関する実証的研究は少ないのが現状であり、今後の都市構造の変化を記述する上でも地方都市の職住分布の最適配置を導出することは非常に重要だと考えられる。各都市の実空間データによる現状の職住分布形態を、利用者均衡配分モデルを用いて業務移動コストや不快感コストのパラメータを推定し、そのパラメータをもってシステム最適配分法による最適配置を導出した上で、都市間の比較・分析を試みる。その上で、現状を表していると推察されるパラメータを変動させることにより、都市の安定性や変動を記述する。

本研究で構築する数理モデルは職住分布のみに適応されるものではなく、関係性が生じる施設間の配置問題一般について応用が可能であり、緊急性が高く相互連携が必要な主要公共施設などにも拡張が可能である。例として、警察・消防・病院といった施設を配置する際に、施設間の移動コストや利用者間によるコスト負担の大小を軽減することが追求でき、また建物内の配置問題に関しても効果を発揮すると考えられ、都市空間の施設配置問題への寄与が大きいと考えられる。

1.2 本研究の概要

本論文は第 I 部：序論，第 II 部：仮想都市モデルを用いた実証分析，第 III 部：実空間データを用いた実証分析の 3 部，全 7 章により構成される。以下に各章の概要を記述し，最後に本論の構成と流れを示す (図 1.1)。

第 1 章：

本研究の目的と背景および概要を述べ，位置づけを明確にした上で，本論で頻出する用語と記法についてまとめている。

第 2 章：

職住分布を導出するための既往の研究の中で，本論文と関係が深い既往研究を三つに大別して記述している。第一は職住分布配置に関する研究であり，施設配置問題と空間相互作用モデルの系譜について述べている。第二は都市内のコスト配分法に関する研究であり，システム最適配分と利用者均衡配分について記述し，その定式化と特徴を明らかにしている。第三は距離の導出を中心に概観する。

第 3 章：

容量制約を付した都市モデルにおいて業務移動を考慮した移動コストを独自の方法で構築している。「都市モデルにおける総移動コストを最小化する」というシステム最適配分の原則に基づき，ある都市モデルにおける移動コストを算出可能な数理モデルを構築する。移動コストをモデル化する際に，定数ベクトル，変数ベクトル，正方行列を用いて 2 次計画問題へと帰着させるが，導入する正方行列には距離行列が含まれているため，一般的に半正定値性をみかさず非凸 2 次計画問題になることを記述する。非凸型では最適解が複数存在すると考えられるため，線形緩和法を用いて非凸型を凸型へと緩和し，線型計画問題へ応用可能であることを明らかにする。数値解析例として線形都市および平面都市における職住分布の最適配置を導出している。また，都市人口と業務移動頻度のパラメータの設定により，都市の広がりや発展が記述出来ることを明らかにしている。

第 4 章：

第 3 章において建物ノード間の移動コストの定式化が可能となったが，都市モデルを発展させ，容量制約により建物ノード自体がもつコストを考慮した新しい都市モデルを構築する。システム最適配分の原則には従ったまま，建物ノードが包含する人口によって不快感コストが算出される概念を導入し，建物ノード間の距離によって導出されていたコストに密度によって導出されるコ

ストを付加することで、多様なコストの導入が可能となるモデルの一般型を導出する。不快感コストは就業・居住密度から導出されるが、建物ノードが持つ独自のコストであるため、選択可能なコストとして定義され、ここで導出される結果は第5章における利用者均衡配分によるモデル構築とその分析に供されている。

第5章：

都市内の人々はシステム最適化を考慮することなく、各々が負担するコストを低減するよう職住地を選択すると考えられるため、その職住分布配置を利用者均衡配分に基づいて導出する。第4章で構築した移動コストと不快感コストを考慮した都市モデルにおいて、それらを均衡配分する数理モデルを提案し、これまで導出されてこなかった容量制約付き職住分布の均衡配置をモデル化する。コストの均衡配分とは、都市モデルにおける人々がそれぞれ負担するコストをみな等しくなるよう配分する概念であり、各建物ノードの容量に達した場合にはペナルティコストを与えることにより、職住分布は均衡状態に落ち着くことが予想される。与える条件から均衡条件式、容量制限式、ペナルティコストに関する条件式などの条件式が導かれるが、Karush-Kuhn-Tucker条件を援用することで数理計画問題と等価になることを明らかにする。数理計画問題の求解にあたっては線型計画問題を緩和することで解の導出を行っているが、容量制約に関する条件式を明示的に付与した双対問題を与え、そのラグランジュ乗数値を求めることで職住分布の均衡配置を導出し、パラメータの特性を明らかにしている。

第6章：

第5章で構築した数理モデルを用いて現状の都市の職住形態を再現するパラメータを推定し、そのパラメータを用いて各都市の最適配置を導出している。第4章および第5章の配分法を用いることで、利用者と都市全体の双方の最適化を行うことが可能となり、また各都市間で導出されたパラメータからその特性を記述することが可能となる。現実の10都市において、就業地・居住地の総延床面積から容量制約を決定し、領域間の統合においては領域間距離と領域内の円盤上の距離分布を導出して分析を行っている。利用者均衡配分モデルから移動頻度や不快感パラメータを推定し、パラメータの散布図や三角座標による都市の大局的構造を捉え、さらに各都市における総コスト分析を行うことにより、都市の規模や人口と、移動頻度や不快感コストがどのような関係にあるかを実証分析を通じて明らかにしている。また、パラメータを変動させることで今後の都市の動態を予測し、今後の都市のあり方について考察している。

第7章：

本研究の成果をまとめ、今後の課題と展望について記述する。

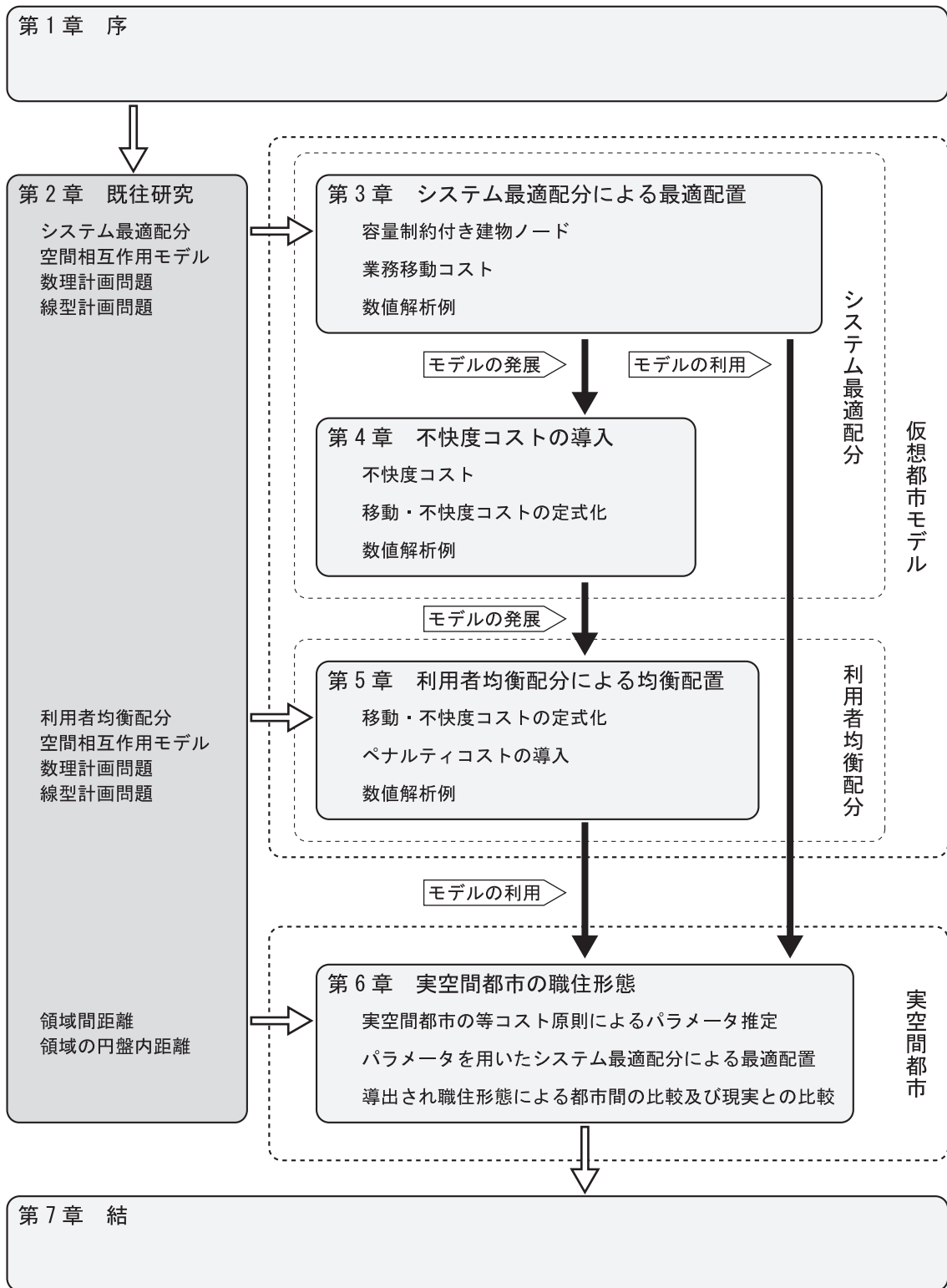


図 1.1 本論の構成と流れ

1.3 本研究の位置づけ

従来の職住分布の導出は、人口流動によって都市の立地が形成されるという概念に立脚し、主に空間相互作用モデルの各種によって人口分布を導出する一連の手法が Harris & Wilson (1978) のバランス・メカニズムをはじめとして数多く提案されている。また、職住配置問題における移動コストを最小化する試みは、Hamilton (1982, 1989) による通勤移動コストの最小化問題に端を発し、就業地の集中や分散の度合いが求められてはいるものの、それらは繰り返し計算を伴うものであり、一度の計算によって収束解が求められるモデルではない。そこで本研究では職住分布を数理計画問題として帰着させ独自の手法によって理論づけを行うことで、バランス・メカニズムとは対極の、解の厳密さを追求した職住分布の導出手法を新たに提案している。これにより、漸化式を導入することによって逐次的に最適解を追求した既往の研究とは異なり、一度の計算によって適解を追求した職住形態を導出することが可能である。

また、都市内の移動を考えるにあたっては、通勤移動のみならず就業地間の結びつきを明示的に考慮することが必須であると考えられる。このアイデアを導入した職住分布の最適配置問題も大津・腰塚 (1999) や本間・栗田 (2004) らによって部分的には研究されてはいるものの、平均距離理論や数値シミュレーションなどによって簡便化が図られているのが現状である。Hamilton モデルの自然な拡張として、就業地間の業務移動を同時に考慮した明解な数理モデルがあって然るべきであり、本研究では業務移動コストを2次形式として定式化を行い、その求解を試みている。

通勤移動や業務移動を考慮した都市モデルは、ノード間に発生するコストを条件式として与えることでその解を導出するが、ノード自体がもつコストを考慮することで都市モデルにおいて本質的に性質の異なる2種類のコストを考慮することが可能となる。そこで本研究ではノードにおける集積、すなわち混雑度を不快感コストと定義し、都市モデルに組込む手法を提案する。都市モデルにおけるノードに容量制約を付することで、各ノードに包含される人々の上限を設定し、その密度から不快感コストが算出できると同時に、モデルを都市分析に展開する際にもランダムに職住形態を導きだすのではなく、既存の建物群を所与のものとして扱うことが可能なモデルとなる。

何を基準に職住分布を導出するかという、都市内のコスト配分法について触れておきたい。都市内における人やものの流動（移動）、対流（集積）をコストと見なして職住分布を導出する必要性は上述した。そこで、交通ネットワークフローに関する Wardrop (1952) の2つの配分原則を本研究では用いて、職住分布の最適配置問題および均衡配置問題を取り扱う。具体的には「利用される経路の移動時間は皆等しく、利用されない経路の旅行時間よりも小さいか、せいぜい等しい」と表現される第1原則：利用者均衡配分 (UE: User Equilibrium assignment) モデルと、「道路網上の総旅行時間が最小となる」と表現される第2原則：システム最適配分 (SO: System Optimum assignment) モデルである。

移動コストの最小化問題は、都市モデルの総移動コストを最小化するため、SO モデルを主として研究されているが、都市内の移動を本質的に考慮すると、人々は各々の意志に従って移動すると考えるのが自然であり、現状の都市の職住分布形成もまた、人々の自由な意思決定によるものだと考えられる。そのため、本研究では SO モデル、UE モデルの両モデルによる職住分布の導出手法をモデル化することを試みており、UE モデルを導入することで、都市内のコストに組込んだ不快感コストの本質的な議論が可能になると考えられる。

最後に実空間データを用いた実証分析の対象地について述べる。本研究では第 3 章から第 5 章において SO モデル、UE モデルを 2 次計画問題として定式化を行い、仮想都市モデルにおいて実証分析を行っているが、第 6 章において国内 10 都市における均衡・最適配置を導出し、職住形態について分析を行っている。都市の人口データを用いて実証的に研究を行っている例は散見されるが、それは主に東京都特別区や三大都市圏に属する大都市が主であり、三大都市圏以外の都市の実証分析例は少ない。しかしながら、今日、人口減少や高齢化による移動形態が変化する中で職住形態を導出するモデルを構築する意義は、今後必ず訪れるであろう都市の再構築時に、職住形態の新たな指標となる評価手法を提案することであり、持続可能な地域発展の姿を描くことである。そのために様々な都市における職住形態を分析することは必要不可欠であろう。さらに言えば本研究で提案するモデルは変数を変化させることで、モデルの安定性のみならず、今後の都市が変化した際の収束解を導き出すことも可能である。移動形態や都市環境が変化する中で、現状の職住分布の再現と時間変化を追いかける手法としても有効なモデルを構築した点も、本研究独自の提案である。

実空間の諸データを分析することに止まらず、都市内の移動や集積の本質的な意味を議論しながら職住形態を導出することは、数値解析による最適配置を導出するだけでなく、今後の都市計画における施策低減や持続可能な地域発展に有用な知見をもたらすものと考えられる。

1.4 本研究で用いる用語と記法

本研究で用いる用語の定義，頻出する変数を以下にまとめる．

都市モデル

就業地と居住地から構成される職住形態のモデルであり，都市内の人口は定数とする．

移動コスト

都市内における移動からなるコストであり，通勤移動と業務移動に大別される．移動コストは移動人数 \times 移動距離から算出される．

不快感コスト

都市内における集積からなるコストであり，容量制約に達した場合に最大となるコストをとる．ノード間に発生する移動コストとは性質を異とし，ノード自体に発生するコストである．

ペナルティコスト

第5章で用いるコストであり，各ノードにおいて内省的に発生するコストである．利用者均衡配分モデルにおいて容量制約まで達した場合に，不快感コストに加えてペナルティコストを導入する．

容量制約

都市モデル内に分布する任意の建物ノードには包含される人の上限を設定し，これを容量制約と定義する．数理モデルの提案においては容量制約を任意に定めて定式化を行い，実空間データに基づく分析においては延床面積から容量制約を設定する．

都市モデルにおける変数・添字

i, w : 就業地における添字

j, h : 居住地における添字

T : 都市モデル内の人口

w_i : ノード i における就業人数

W_i : ノード i における容量制約

h_j : ノード j における居住人数

H_j : ノード j における容量制約

t_{ij}^h : $i - j$ 間の通勤移動人数

d_{ij}^h : $i - j$ 間の通勤移動距離

$d_{i'i'}^w$: $i - i'$ 間の業務移動距離

α : 業務移動頻度

β : 不快感パラメータ

第2章 既往研究

- 2.1 職住分布配置に関する研究
- 2.2 都市内のコスト配分法に関する研究
- 2.3 距離の算出に関する研究

第2章

既往研究

2.1 職住分布配置に関する研究

2.1.1 本研究と既往研究との差異

本研究は職住分布配置を導出するための手法として2次計画問題に帰着させ、その解を一度の計算によって求める都市モデルを構築している。職住分布という古典的な題目は多くの既往研究がなされているが、その手法は繰り返し計算によって求められるものであり、かつ職住間の移動コストのみが考慮されたものである。就業形態が変化した現在では就業地間の移動が重要なコストであるにもかかわらず考慮されてこなかった背景には、就業地間移動コストを2次項として考慮した場合の2次計画問題として最適解を導出する解法が存在しなかったことが挙げられる。本研究では就業地間移動コストを考慮した場合のコスト最小化問題が非凸2次計画問題となった場合においても、線形緩和法を援用することで解が導出可能なモデルを構築し、また繰り返し計算を伴わないことで計算機にかかる負荷や計算時間を減少することができる有用な手法が提案できるものと考えられる。

以下に、職住分布配置に関する既往研究を概観する。

2.1.2 古典立地論と施設配置問題

都市の動態あるいはそれと関連する施設配置問題は、古くは紀元前まで遡り、王族の墓や古墳の配置問題から始まり、中世においては城郭や教会の配置、近世に入っては為政者による国家、都市、地域計画の策定と古来より連綿に渡る長い研究の歴史がある。近代に入っては英国で起こった産業革命を背景に社会構造が変革する中で、Von Thünen (1826) の『孤立国』を主に起源とし、Weber (1909) の『工業立地論』、Christaller (1933) の『都市と立地の発展』とLösch (1940) の『レッシュ経済立地論』における中心地論など、経済地理学・空間地理学の分野で発展を遂げてきた。これらは大量生産される製品をいかに安く輸送し、利潤をもたらすかという移動コストの最小化問題の起源であり、農場主でもあったVon Thünenは農地利用の理想形態として、土地利用代を生産量と輸送費に着目し、都市の中心には輸送費が高いものが集中し、生産物に対して輸送費が小さいものが郊外で生産する形態が理想的である

と結論づけた。土地代を L 、生産量を Y 、生産物の価格を p 、生産物の生産費を c 、生産地からの輸送費を F 、生産地からの距離を d とすると、Von Thünen の土地代モデルは次のように書き表される：

$$L = Y(p - c) - YFd. \quad (2.1)$$

また、Weber は Varignon フレーム^[1]と類似したモデルを応用して、工業地において原料とそれから生じる製品の輸送運賃および製造施設から、工場の最適配置を導出するアルゴリズムを組み立てている。『工業立地論』に所収されている Pick による数学的付録 (Mathematischer Anhang) には、「 A_1, A_2, A_3 からなる 3 地点が与えられ、 A_1 が原料供給地、 A_2 が動力原料供給地、 A_3 が消費地とする。 x の原料と y の動力原料から z の生産物を作る工場地点 P を与えたとき、輸送費 R は、

$$R = xA_1P + yA_2P + zA_3P \quad (2.2)$$

で求められる。ではどこに P を配置すれば輸送費 R を最小にできるか」という数理モデルを提案し、都市の幾何学的側面から施設配置問題に取り組んでいる (図 2.1)。

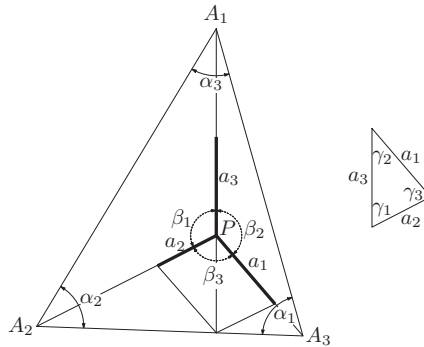


図 2.1 Weber の工場最適配置モデル

Von Thünen や Weber が提案したモデルは、連続平面上の自由な空間における配置問題であったが、都市が明らかな規則をとまって成立することを証明することを目的に、Christaller は都市を規模によって分類した上でその規模分布を理論的に記述した。Christaller や Lössch が中心地論で組み立てようとしたことは、経済地域の経済現象の理論であり、供給原理を主とした供給原理 (補給原則)、交通原理 (交通原則)、行政原理 (行政原則) を基礎として都市の原理が説明付けられている。その中でも最も重要な原理は供給原理であり、供給される財の到達範囲や中心地の規模によって、空間構造が数学的に求められることを記述している。

上述した古典立地論以降、施設の最適配置問題は大きく 2 つの流れとなって現在に至っている。一つは Christaller や Lössch の流れを汲み、経済学的観点から最適施設配置を導出する都市経済であり、立

[1] 最適配置を導出するために重りと滑車を用いた装置であり、生産地を特定するなどのために用いられた。

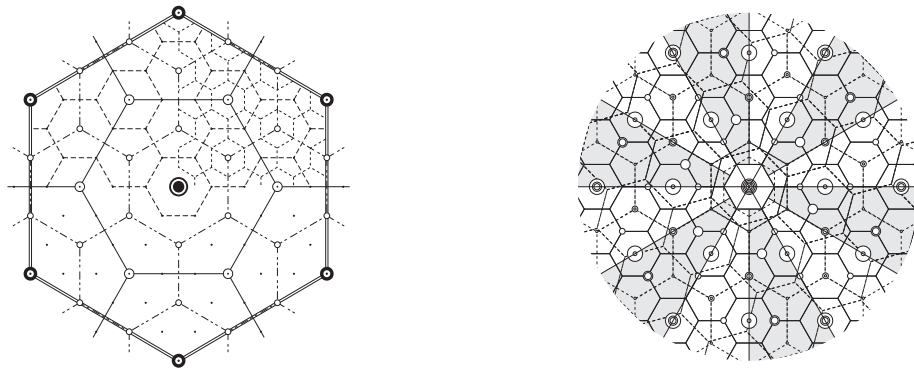


図 2.2 Christaller と Lösch の中心地論の概念図

地理論 (Location Theory) として多くの研究がなされている。もう一つはオペレーションズ・リサーチの分野における立地最適化 (Locational Optimization) の研究である。二つの研究は相互的な関連はあるものの、研究の焦点が少なからず異なり、立地地理論ではおもに連続平面における施設全体での均衡配置や最適配置の導出が主な目的であるのに対し、立地最適化では離散的空間 (ネットワーク上) での部分的な最適配置を導出することを主な目的とする。本研究は立地最適化の系譜に属するものの、平面的な施設全体での均衡配置や最適配置を導出する研究である。数理的手法を用いて複雑な施設配置問題に取り組む際には、施設配置問題の要因関係を抽象化し数学的関係式で記述するが、抽象化を行うにあたり要因数や単純化が必ずしも問題の本質を歪ませるとは限らない。かえって抽象化、単純化を行うことによって問題の本質を明らかにすることがあり、本研究でも単純化によって後述するパラメータの性質を明らかにしている。

現代における施設配置問題について、その概観を記述したい、古典立地論を基に、幾何学を用いて平面上における領域分割や施設配置を行った研究として、藤井 (1983)、宇野 (1983)、鈴木 (1987)、岡部・鈴木 (1992)、今井 (2010) などが挙げられる。これらは主に Voronoi 図とその双対である Delaunay 図を用いた施設配置問題であり、Voronoi 図の諸性質を利用して様々な問題を解いている。Voronoi 図の一般的な定義は次の例の通りである。いま、ある鉄道沿線付近に人々が居住するモデルを与え、駅勢圏を Voronoi 図を用いて考える。ノード p に居住する人の最寄りの駅を p_i とすると、 $p - p_i$ 間の距離 $d(p, p_i)$ は他の駅 p_1, p_2, \dots, p_n (ただし p_i を除く) との距離よりも短い領域が p_i における Voronoi 図による駅勢圏となる。これは、

$$d(p, p_i) \leq d(p, p_j) \quad (1 \leq j \leq n, j \neq i) \quad (2.3)$$

と表される。式 (2.3) の条件をみたすノードの集まりを $V(p_i)$ とすると、 $V(p_i)$ に対応する領域が駅勢圏である。したがって Voronoi 領域は、

$$V(p_i) = \{p \mid d(p, p_i) \leq d(p, p_j), \quad (1 \leq j \leq n, j \neq i)\} \quad (2.4)$$

である。Voronoi 図は式 (2.4) で表される領域の集合からなる全体の幾何学図形であるから、

$$\mathcal{V}^n = \{V_1, V_2, \dots, V_n\} \quad (2.5)$$

となる。式 (2.4) からなる Voronoi 図には多くの性質が知られており、平均距離を細小にする施設配置問題、利用者の制限領域を最小化する施設配置問題、最短 Steiner 問題、Hub-Location 問題などへの発展を遂げている。これらの研究は条件が固定された制約下のもとの理論であり、都市を静的なものとし見なした上で領域や距離によって施設配置問題を解く手法である。一方、都市内の人やものの流動に着目した数理モデルを構築したのが Alonso (1964) である。Alonso は『立地と土地利用』をもって都市化が発達した地域の人口流動に焦点をあて、人口移動と人口分布を結びつけた数理モデルの開発を行った。それまでの農地の地代だけに焦点をあてた研究を都市へと発展させ、都市の領域サイズ、収入、利益、その他のコストなどを考慮したモデルを構築し、立地と居住密度などから土地代と人口分布が導出できるという理論である。これまで供給される財が都市に集中するという概念から、Von Thünen の理論を展開させ人口流動によって都市の立地が形成される Alonso モデルを作成したことで、施設配置問題は何を基準に配置されるかという飛躍を遂げることになる。都市内の流動を取り扱ったモデルは空間相互作用モデルの各種の研究へと引き継がれる。

2.1.3 空間相互作用モデル族

2.1.3.1 空間相互作用モデル

空間相互作用モデルとは、ある領域をもった地域の集合の中で、任意の 2 点間に生じる様々な流動現象を記述するモデルであり、流動現象にはものの流れをはじめ、人、物資、情報、財など様々なものが挙げられる。空間相互作用 (Spatial Interaction) は地理学の有効性を記述するために Ullman (1954) によって初めて用いられ、重力モデル (Gravity Model)、エントロピー最大化モデル、Alonso モデル、介入機会モデルなど種々のモデルが開発されている。本研究では業務移動コストを導出するにあたり、その中でも特に代表的な重力モデルを用いて 2 点間の人の流れに説明を与えている。ここでは主に空間相互作用モデル族の系譜と離散選択モデル、ローリーモデル、その中でも代表的な Harris & Wilson (1978) のバランス・メカニズムについて紹介し、本研究の系譜を明確にする (杉浦 2003)。

2.1.3.2 重力モデル

Ullman によって提唱された取引に関する重力モデルは、相互補完 (Complementarity)、介入機会 (Intervening Opportunities)、商品の移動可能性 (Transferability of Commodities) の 3 現象に基礎をおいており、以下のように記述される：

$$I_{i,j} = \frac{p_i p_j}{d_{i,j}^\beta}. \quad (2.6)$$

ただし、 I は $i-j$ 間の取引量、 p_i は i における人口、 $d_{i,j}$ は $i-j$ 間の距離、 β は抵抗ファクタである。これを本研究の就業地における建物間の人の移動としてとらえると、 I は業務移動人数、 p_i はある就業建物ノードにおける人数と置き換えられ、業務移動コストを重力モデルを用いて記述することが可能である。このアイデアを基にして、空間相互作用に関する研究では、 R_i を発生ゾーン i における放出性の尺度、 S_j を目的ゾーン j における吸収性の尺度、 c_{ij} を発生ゾーン i から目的ゾーン j への移動頻度と定義したとき、移動人数 t_{ij} を、

$$\begin{aligned} t_{ij} &= f(R_i, S_j, c_{ij}) \\ &= \kappa \frac{R_i S_j}{c_{ij}^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

として推定することが試みられた。放出性の尺度 R_i 、吸収性の尺度 S_j は、具体的には都市内における通勤移動を考えた場合には、 R_i を人口、 S_j を就業地の建物数として与えるとよい。しかしながら、式 (2.7) で与えた移動人数は、 R_i 、 S_j が正比例し、 c_{ij} の 2 乗に反比例するという式であり、重力モデルを直接引用したものにはすぎず、何よりも都市モデルにおける移動の種類によって、 t_{ij} を定義する際には R_i 、 S_j 、 c_{ij} の寄与する程度は異なると考えた方が自然である。その考え方に適応するモデルも以下のように提案されている：

$$t_{ij} = \kappa R_i^{\alpha_1} S_j^{\alpha_2} c_{ij}^{\gamma}. \quad (2.8)$$

このとき、 α_1 、 α_2 、 γ は基本的には正定数の寄与の程度を表すパラメータである。式 (2.8) は Newton の重力法則のアナロジーを用いた極めて単純な定式化ではあるが、実空間の流動に対してより良好な再現性を持っていることが数多くの実証研究によって示されている (石川 1988)。

これに対して、1960 年代に入り、個人の行動原理をもとに確率論的に重力モデルを誘導した Huff (1963) や Harris (1964) などのように重力モデルに理論的根拠を与えようとする研究がみられる。例えば Huff モデルでは、消費者がある購買地で買物をする確率を求めるモデルであり、購買地の規模や購買地までの距離をもとに吸引率などを算出できるモデルである。そのような研究の中で、統計力学のエントロピー概念を援用して重力モデルを導出した Wilson (1967) のエントロピー最大化モデルは、空間相互作用モデルの研究に最も大きな影響を与えるものである。ここではその中でエントロピー最大化モデル族と離散的選択モデルおよびローリーモデルを紹介するが、これらの研究はあくまで逐次的にその解を導出するモデルであることに注意されたい。

2.1.3.3 エントロピー最大化モデル

Wilson のエントロピー最大化モデルとは統計力学・物理学の視点から、ある条件下で起こりうる対象のすべての組み合わせの中で最も起こりうる確率が高いものが現実にもおきる、という考えに基づいている。その意味で、上述した空間相互作用に基づけば、マクロ・スケールの状態を制約条件とし、ミ

クロ・スケールの状態のエントロピーが最大になる、メソ・スケールの状態を導出しようとするものである。あるメソ・スケールの状態 T_{ij} でのエントロピー $W(T_{ij})$ は、次式のように定義される：

$$W(T_{ij}) := \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}}. \quad (2.9)$$

Wilson はマクロ・スケールの状態での制約条件の組み合わせから、4つのエントロピー最大化モデル族（総流動制約型モデル、発生制約型モデル、吸収制約型モデル、発生・吸収制約型モデル）を提案している。以下において概観するがそれぞれ用いる用語の記法は次の通りである：ゾーン i, j 間の観察される流動量 T_{ij} 、予測される流動量 \hat{T}_{ij} 、ゾーン i, j 間の距離 d_{ij} 、発地 i の放出性 v_i 、着地 j の吸収性 w_j 、ゾーン i, j の移動コスト c_{ij} 、総移動コスト C 。距離関数 $f(d_{ij})$ に関しては一般的に、距離パラメータを β とするパワー関数 d_{ij}^β や指数関数 $\exp[-\beta c_{ij}]$ を用いる。流動量とは人やもの、物資や情報などを含んでいる。

■総流動制約型モデル

総流動制約型モデルは、総流動量のみが所与として与えられる場合のモデルであり、総流動量 T と予測される流動量 $\hat{T} (= \sum_{ij} \hat{T}_{ij})$ が一致するものである：

$$\left. \begin{array}{l} \text{制約条件：} \\ \sum_{ij} T_{ij} = \sum_{ij} \hat{T}_{ij} \\ C = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} c_{ij} \\ \text{総流動制約型モデル：} \quad \hat{T}_{ij} = \kappa v_i^\gamma w_j^\alpha \exp[-\beta c_{ij}] \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

式 (2.10) における κ は制約条件をみたすための調整項であり、次のように定義される：

$$\kappa := \frac{\sum_{ij} \hat{T}_{ij}}{\sum_{ij} v_i^\gamma w_j^\alpha \exp[-\beta c_{ij}]} \quad (2.11)$$

このとき、パラメータ γ, α に関しては正の値（0.5～2.0 程度）を、距離パラメータ β は負の値（-0.5～-2.0 程度）をとることが知られている。

■発生制約型モデル

発地における発生量 O_i が既知として与えられている場合において、その発生量がどの着地に吸収されるかをモデル化したものが発生制約型モデルである。総流動量は各発地における発生量の総和と一致

することから、観察される流動量と予測される流動量の総和も一致することとなる：

$$\begin{array}{l}
 \text{制約条件：} \\
 O_i = \sum_j T_{ij} = \sum_j \hat{T}_{ij} \\
 C = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} c_{ij} \\
 \text{発生制約型モデル：} \quad \hat{T}_{ij} = A_i O_i w_j^\alpha \exp[-\beta c_{ij}]
 \end{array} \tag{2.12}$$

ただし、 A_i は発地 i の均衡因子である。均衡因子は式 (2.12) の制約条件をみたすための因子であるが、発地 i の着地 j に対する近接性とみなすことが可能である。つまり、均衡因子の値が大きい発地は近接性が高く、逆に均衡因子の値が小さい発地は近接性が低い。発生制約型モデルは小売店舗の販売額予測に有効なモデルであり、居住地の購買に対する可処分所得の統計を推計することなどに用いられる。

■吸収制約型モデル

発生制約型モデルは、着地の吸収量 D_j が既知であり、どの発地からの流入かが分からない場合のモデルのことである：

$$\begin{array}{l}
 \text{制約条件：} \\
 D_j = \sum_i T_{ij} = \sum_i \hat{T}_{ij} \\
 C = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} c_{ij} \\
 \text{吸収制約型モデル：} \quad \hat{T}_{ij} = v_i^\gamma B_j D_j \exp[-\beta c_{ij}]
 \end{array} \tag{2.13}$$

ただし、 B_j は着地 j の均衡因子である。この均衡因子 B_j は A_i と同様に近接性を表す因子であり、均衡因子の値が大きい発地は近接性が高く、逆に均衡因子の値が小さい発地は近接性が低い。吸収性役割型モデルは、都市モデル内に新たな就業地を建設する場合に就業者の居留立地モデルを予測するなど有効なモデルである。発地を居住地に、着地を就業地とした場合には、就業地の就業者数は一定であるため居住地の居住環境や距離によって居住地を配分するモデルとなる。

■発生・吸収制約型モデル

発地の発生量 O_i と着地の吸収量 D_j が既知の場合を発生・吸収制約型モデルといい、二重制約型モデルとも呼ばれる。このモデルは発生制約と吸収制約の2つの条件式を同時にみたすものであり、次のように書き表される：

$$\begin{array}{l}
 \text{制約条件：} \\
 O_i = \sum_j T_{ij} = \sum_j \hat{T}_{ij} \\
 D_j = \sum_i T_{ij} = \sum_i \hat{T}_{ij} \\
 C = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} c_{ij} \\
 \text{発生・吸収制約型モデル：} \quad \hat{T}_{ij} = A_i O_i B_j D_j \exp[-\beta c_{ij}]
 \end{array} \tag{2.14}$$

このとき、均衡因子 A_i と B_j がそれぞれの定義式に含まれていることから、その解の導出には繰り返

し計算を伴ってそれぞれの値を収束させることになる。

2.1.3.4 離散選択モデル

Wilson のエントロピー最大化モデルの意義は、重力モデルに対して理論的根拠を与えたことにあるが、万有引力のアナロジーを統計力学・物理学のアナロジーに置き換えただけであるといった批判もある。つまりエントロピー最大化モデルには個人の意思決定が組込まれていないという批判である。この問題に対して 1970 年代に入ってから個人の意志決定を組み込んだ空間相互作用モデルの定式化を行う試みが行われ、その一つが離散選択モデル (Discrete Choice Model) である。

いま、発地 i から着地 j に移動する場合を考えてみる。このとき移動者はすべての着地に対する情報を持っており、最大の効用を得る着地を選択するものと仮定すると、得られる効用 U_{ij} は測定可能な要素 V_{ij} と測定出来ない要素 μ_{ij} から構成されるものと考えられる。仮にすべての着地に対しての効用 U_{ij} が測定可能であれば、移動者がどの着地を選択するかは精緻に決めることが可能である。ここで、 N 個の選択肢の中から着地 k を選択する場合の確率 p_{ik} は次式の通りとなる：

$$p_{ik} = \text{Prob}[U_{ik} > U_{ij} \quad (\forall j \in N, j \neq k)], \quad (2.15)$$

$$p_{ik} = \text{Prob}[\mu_{ij} < V_{ik} - V_{ij} + \mu_{ik} \quad (\forall j \in N, j \neq k)]. \quad (2.16)$$

ここで、 μ_{ij} と μ_{ik} が独立しているものとして、同一の Gumbel 分布^[2]に従うと仮定すると、離散選択モデル (多項ロジット・モデル) が導出される：

$$p_{ik} = \frac{\exp[V_{ik}]}{\sum_j \exp[V_{ij}]} \quad (2.17)$$

式 (2.17) が示すことは、上述した発生制約型モデルと基本的には同型をとるということである。例えば買物行動を想定した場合、着地である商業地の選択から得られる効用を商業地の属性の関数とするならば、商業地の魅力度と商業地までの距離を測定可能な効用とみなすことができる。

2.1.3.5 ローリーモデル

ローリーモデル (Rowley Model) とは、就業地の拡大によって雇用が促進され、その結果居住者が増加し、それを受けて就業者も増加するという、一連の繰り返しによる都市の均衡解を導出するモデル^[3]であり、就業地を中心就業地 B とし、中心就業地の拡大によって増加する n 種類の任意の地域就

^[2] 極値分布のタイプ I 型であり、極値分布の一般系である $F(x; \alpha, \beta, \gamma) = \exp \left[- \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right) \right]^{-1/\gamma} \right]$ において、 $\gamma = \frac{1}{n}$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ としたうえで $n \rightarrow \infty$ とすると得られる分布関数である。このとき、累積分布関数は $F(x) = \exp \left[- \exp \left[- \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right) \right] \right]$ となり、確率密度関数は $f(x) = \frac{1}{\beta} \exp \left[- \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right) \right] \exp \left[- \exp \left[- \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right) \right] \right]$ となる。

^[3] 一連の繰り返しは計算であって、繰り返しによる都市の発展ではないことに注意する必要がある。

業地を k とすると、ローリーモデルにおける基本的な関係式は、

$$T = \alpha \cdot E \quad (2.18)$$

である。このとき、 T は人口であり、 E は都市モデルにおける総就業者数である。これらから、

$$E^k = \beta^k \cdot T \quad (2.19)$$

が定式化される。総就業者数 T は、中心就業地 E^B の就業者数と地域就業地の就業者の総和であることから、

$$E = E^B + \sum_{k=1}^n E^k \quad (2.20)$$

が導かれる。これらを漸化式として逐次的に計算すると、 E 、 T についての一般式が得られる：

$$E(s) = \{1 + (\alpha\beta) + (\alpha\beta)^2 + \cdots + (\alpha\beta)^s\} E^B, \quad (2.21)$$

$$T(s) = \alpha E(s) = \alpha \{1 + (\alpha\beta) + (\alpha\beta)^2 + \cdots + (\alpha\beta)^s\} E^B. \quad (2.22)$$

式 (2.21), (2.22) において $s \rightarrow \infty$ とすると、

$$E(\infty) = \frac{1}{1 - \alpha\beta} E^B, \quad (2.23)$$

$$T(\infty) = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} E^B \quad (2.24)$$

が得られ、総就業者数、人口ともに一定値に近づくことが明らかとなる。

2.1.3.6 バランス・メカニズム

繰り返し計算を伴う施設配置の研究では主にバランス・メカニズム理論に基づいて理論が構築されている。バランス・メカニズムは Harris & Wilson によって提唱された概念であり、商業発展のダイナミクスを取り込んだ理論である (岡部・鈴木 1992)。バランス・メカニズムは利益が大きければ商業は発展し、そうでない場合は衰退するという資本主義の経済原理を合理的にモデル化したものであり、商業店舗の魅力度が売り上げを決定する要因であり、また売り上げが魅力度を決定するといった相互補完を明示的に取り込んだモデルである。例として本研究における職住形態を導出するモデルとすると、消費流動は移動人数と等価であると考えられる。Harris & Wilson は移動がエントロピー最大化モデルに従うと仮定しており、居住地のノード j における人口を h_j とし、就業地のノード i の規模を W_i 、魅力度を $g(W_i)$ 、ノード j からノード i の移動コストを $f(c_{ij})$ とすると、移動人数 F_{ij} は、

$$F_{ij} = A_j h_j g(W_i) f(c_{ij}) \quad (2.25)$$

となる。ただし、 $A_j = \left(\sum_k g(W_k) f(c_{jk}) \right)^{-1}$ である。このとき、式 (2.25) は $\sum_i F_{ij} = h_j$ の制約条件をみたさなければならない。ここで魅力度に関するパラメータ α 、移動コストに関するパラメータ β を導入し、 $g(W) := W^\alpha$ 、 $f(c) := \exp[-\beta c]$ と定義すると、

$$F_{ij} = A_j h_j W_i^\alpha \exp[-\beta c_{ij}] \quad (2.26)$$

と書き表される。ただし、 $A_j = \left(\sum_k W_k^\alpha \exp[-\beta c_{jk}] \right)^{-1}$ である。

ここで、就業地が移動人数から得る利益（例としては就業地の売上高）とその利益によって決定される就業地の規模（例としては就業地の延床面積）を定式化したい。就業地 i の利益を D_i とし、利益 D_i は以下の制約条件をみたすものと仮定する：

$$D_i = \sum_j F_{ij}. \quad (2.27)$$

すなわち、移動人数によって利益が決定されるという制約条件である。

いま、就業地の規模が定常状態におさまる条件を、

$$D_i = n W_i, \quad n = \text{constant} \quad (2.28)$$

とすると、ある時点 t から時点 $t+1$ へと移行する際の実業地の規模は、

$$W_i^{(t+1)} = W_i^{(t)} + \Delta W_i^{(t,t+1)} \quad (2.29)$$

と表される。ここで、 $\Delta W_i^{(t,t+1)}$ は、 $\Delta W_i^{(t,t+1)} := \epsilon \left(D_i^{(t)} - p_i W_i^{(t)} \right)$ と定義したものである。以上で定式化した移動に伴う規模の変化を繰り返し計算を行うことで、規模の時間発展を追うことが出来る。

2.1.4 職住分布配置問題

Alonso が確立した施設配置の価値基準に、職住分布問題に移動コストという概念を初めて用いたのが Hamilton (1982) である。都市空間内における移動コストを最小化する試みは、全ての就業地がある閉領域の都市に含まれる場合に、平均移動コストを導出することで最小化する試みであり、平均移動コストは次式のように書き表される：

$$A = \frac{1}{P} \int_0^{\bar{x}} x P(x) dx. \quad (2.30)$$

このとき、 x は中心地からの距離を、 P はその都市に住んでいる人口を表している。Hamilton はアメリカの 14 都市および日本の都市を上記の数値モデルを用いて分析し、職住分布を移動コストによって導出する基礎を築いた。Hamilton が求めた移動コストは、通勤移動 (Commuting Travel) に限ったものであったが、日本における職住配置問題は空間相互作用モデルやバランス・メカニズムの研究が進

むにつれて施設配置問題の一角を担い、多くの研究がなされている。例えば、移動コストを最小化する最適配置問題を扱った研究（鈴木 1994b, 1995）に始まり、業務地分散を評価したもの（鈴木 1994a, 2003）都市モデルにおける人口増加を想定した都市形態のあり方を求めたもの（近藤・吉川 2012）、省エネルギー型都市を考慮し、立体用途床配置形態について考察したもの（松橋 1996; 木下・青木 2002）、通勤時などにおける混雑緩和や過剰交通問題を扱ったもの（赤松・桑原 1994; 大津・腰塚 1999; 円山・原田 2003; 横田・室町 2012）、職住の密度等から就業地分布と居住地分布の同時形成をモデル化したもの（本間・栗田 2004）など、その後多くの発展を遂げている。また、職住配置に限らない施設配置問題を多点配置問題から求めた岸本（1998, 1999）の研究では空間相互作用モデルを用いて連続平面における最適配置問題を体系づけている。

ところで、これらの職住分布を導出するモデルは、移動コストを算出する過程において、ランダムに職住配置を選択したり、繰り返し計算によってその収束的な最適解を追求したモデルである。繰り返し計算による求解の特徴として、厳密な解の導出が困難なシステムに対して、計算時間を犠牲にする代わりに、漸化式を導入することによって逐次的に最適解を追求するという点にある。もちろん、本研究では上記で概観した研究で用いられている空間相互作用モデルによる職住分布導出の系譜に属する研究ではあるが、数理計画問題に帰着させて一度の計算によって収束解を導出するものであり、その本質を異とすることを述べておきたい。何よりも、最適職住分布配置を考えるにあたっては、就業地間の結びつきを明示的に考慮することが必須であると考えられる。このアイデアを導入した最適配置ももちろん大津や本間らによって部分的には研究されているものの、平均距離理論や数値シミュレーションなどによって簡便化が図られている。本研究では、これまで考慮されてこなかった業務移動コストを取り込んだ都市モデルを提案し、2次形式として定式化を行っており、Hamilton による通勤移動コストの最小化問題の最も自然な拡張として明解なる数理モデルを構築し、その求解を追求している。

2.2 都市内のコスト配分法に関する研究

一般的に、点（ノード）の集合と、任意の点を結びつける線（エッジ）の集合からなるネットワーク構造によって現実の都市を抽象的に表現する手法があり、建物をノードとそれらを結びつける道路をエッジとすれば都市ネットワークが、駅をノードとそれらをつなぐ線路をエッジとみなせば鉄道ネットワークが形成される。ネットワークに関する研究は大別して2つに分類され、1つはネットワーク上のフローを現象論的に捉えようとするネットワークフローに関する研究であり、もう1つはネットワークを規範的に捉えようとするネットワークの計画に関する研究である。ネットワークフローに関する研究は、主に交通ネットワークフローの分野で中心的に研究され、現実の都市を道路ネットワークに置き換えて交通量配分問題を明らかにするものであり、計画者の意志が反映されるものから、利用者の選択行動を基本とした現象記述的なモデルまで存在する。一方、ネットワークの計画に関する研究は、最短経路問題や最大フロー問題、最小コストフロー問題など、与えられた目的に基づく最適なフローパターンを求めるといった規範的なものであり、現象記述的なネットワークフローの研究とは区別されている。本節ではネットワークフローに関する研究から利用者均衡配分を、ネットワークの計画に関する研究からシステム最適配分を、ともに Wardrop (1952) が提唱した2つの原則に従って記述し、その定式化を行う。両配分モデルは本研究の都市内のコストを配分するモデルとして用いるものである。

2.2.1 利用者均衡配置の導出の意義

職住分布配置の導出は、これまで最適化が目的であり、主に最小化問題として取り扱われてきた。都市内のコストを最小化するためには目的関数を設定すれば良いが、都市内の人々が負担するコストに差異が生じ、人々にとって生活する上では必ずしも最適と言えないモデルである。本研究ではネットワークフローに関する利用者均衡配分を用いることで、都市内で職住を決定する自由を人々に与え、人々が負担するコストをみな等しくする利用者均衡配置を導出する。これは実空間都市においても人々は種々の要因によってなるべく自己の利益となるよう自由に職住配置を選択しており、その状態が利用者均衡配分にしがたった状態だと考えるならば、利用者均衡配置モデルは現状の職住分布配置を再現する手法として有用な手法だと考えられる。その場合においても、システム最適モデルを用いることで、現状と最適配置との比較、総コストの減少率などが算出され、都市計画を行う際の一手法として有意に働くものだと考えられる。

また、容量制約に達した場合にペナルティコストを導入しており、0-1 整数計画問題ではなく数値計画問題としてその均衡解が導出できる点が挙げられ、その際に3次項以下を積分することにより2次計画問題として定式化が可能であることも、本研究で提案する数値モデルの特徴である。

2.2.2 利用者均衡配分

Wardrop が提唱した 2 つの原則のうち、第 1 原則は「利用される経路の移動時間は皆等しく、利用されない経路の旅行時間よりも小さいか、せいぜい等しい」(The journey times in all routes actually used are equal and less than those which would be experienced by a single vehicle on any unused route.) と表現され、本論においては「都市モデル内の人々が負担するコストは皆等しい」と表現することが可能である。第 1 原則はその定義より等コスト原則とも言われ、コスト均衡の基本概念をなすものであり、利用者が自己の経路選択行動を最適化した結果到達する均衡状態を表すものであることから、利用者均衡配分 (UE: User Equilibrium assignment) と呼ばれる。ただしこの等コスト原則が成立するためには、以下の条件をみたす必要がある。

1. すべての利用者は常にコストを最小とすよう行動する
2. 利用者は常に利用可能なネットワークについての完全な情報を得ている

すなわち、都市内の人々は常にコスト最小化という同一の価値基準に従って行動し、またそのコスト情報は完全に正しいということが条件である。これらのことから、Wardrop の第 1 原則は「均衡状態においては、もはやどの人々も就業地・居住地を変更することによって自己のコストをそれ以上短縮することはできない」と書き換えることが可能であり、利用者均衡は N 人ゲームの Nash 均衡 (Nash 1950, 1951) と等価であることが知られている (Charnes & Cooper 1958)。Wardrop が提唱した利用者均衡配分は交通工学の分野でさらに発展し、現在では以下のようなモデル族が開発されている (土木学会 1998)。

■需要固定型利用者均衡配分 (UE/FD: User Equilibrium assignment with Fixed Demand)

OD 間の交通量を固定した (与えられた) モデルであり、Jorgensen (1963) によって定式化が行われた最も基本的な配分手法である。UE/FD では交通量が最短経路以外に配分されることがなく、リンクコスト関数^[4]を連続な増加関数と仮定すると、交通量配分問題は非線形凸計画問題と定式化でき、均衡解が常に一意に決まることが証明されている。

■需要変動型利用者均衡配分 (UE/VD: User Equilibrium assignment with Variable Demand)

OD 間の交通量がネットワークの交通サービス条件によって変動するモデルであり、分布交通量や分担交通量との同時予測を行う統合モデルである。UE/VD モデルの原型は Beckmann (1956) の分布-配分モデルであり、その他に分布-分担モデル、分担-配分モデル、分布-分担-配分モデルなどが開発されている。本モデルは相互依存関係にあるシステム間に応用が可能であり、土地利用と交通の統合モデルなどに適用される。

[4] ネットワークの各リンク交通量とリンク移動時間の関係を与える関数。

■確率的利用者均衡 (SUE: Stochastic User Equilibrium assignment)

UE モデルの前提条件であった、利用者が完全に情報を得ているという条件を拡張させ、利用者の経路選択の多様性や不確実性に注目したモデルである。すなわち本研究では、「もはやどの人々も居住地・就業地を変更することによって自己のコストをそれ以上短縮することができないと信じている均衡状態」と言い表される。SUE ではリンクコスト関数を一般化し、ネットワーク内に複数のリンクコスト関数が存在するモデル (Dafermos 1971, 1972) であるが、問題を数理計画問題として解くことは極めて困難である。

■時間帯別均衡配分 (TUE: Time-of-day User Equilibrium assignment)

静的な利用者均衡配分に、時間変動を取り込んだ半動的配分モデルであり、時間帯別に利用者均衡が成立し、かつ前時間帯の残留交通量も考慮されたモデルである。残留交通量の取り扱いを OD ごとに修正し、需要変動型利用者均衡配分と等価として定式化できることが示されている (藤田ら 1988)。

本研究で用いる利用者均衡配分は、都市モデル内の人口を定数として扱っていることから^[5]需要固定型利用者均衡配分を用いる。

2.2.3 システム最適配分

一方、Wardrop が提唱したもう一つの原則、すなわち第 2 原則は「道路網上の総旅行時間が最小となる」(At equilibrium the average journey time is minimum.) と表現され、本論においては「都市モデル内における総コストが最小となる」と表現される。これはシステム全体の最適化を目指すものであり、システム最適配分 (SO: System Optimum assignment) と呼ばれる。システム最適配分は、平均移動コストを限界移動コストに置き換えることによって利用者均衡配分と等価であることは証明できるが、これは建物ノードに包含される人が容量制約まで達しない場合のみであり、一般的には両原則によるコスト配分結果は異なるのが常である。実際の行動に当てはめて考えると、利用者は利用者均衡配分の原則に基づいて自己の最短経路を選択するが、その際に自分が交通流に加わったことによる利用者全体に与える影響を考慮していない状態であり、その意味においてもシステム最適配分とは異なるのである。

2.2.4 利用者均衡配分とシステム最適配分の定式化

上述した利用者均衡配分とシステム最適配分の基本的な定式化を行う。いま、エッジの集合を E 、OD 間 (O: Origin, D: Destination) の経路の集合を M 、経路 j の交通量を $x_j \geq 0$ とする。ただし

^[5] 詳細は第 3 章にて述べる。

$j \in M$ である。ここで、経路 j を構成するエッジを表すために、

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & : \text{エッジ } i \text{ が経路 } j \text{ に含まれるとき} \\ \delta_{ij} = 0 & : \text{それ以外} \end{cases}$$

とすると、エッジ i の交通量 f_i は、エッジ i を通る交通量の和として、

$$f_i = \sum_{j \in M} \delta_{ij} x_j, \quad i \in E \quad (2.31)$$

と書き表される。エッジ i を移動するのにかかる移動時間を $c_i(f_i)$ とすると、経路 j の移動時間は、

$$C_j = \sum_{i \in E} \delta_{ij} c_i(f_i) \quad (2.32)$$

となる。ここで、総 OD 間の交通量を d とすると、

$$d = \sum_{j \in M} x_j \quad (2.33)$$

である。ここで、経路の添字を移動時間の短い方から順に $1, 2, \dots, |M|$ としたとき、利用者均衡配分 x_j は、

$$C_1(x) = C_2(x) = \dots = C_k(x) \leq C_{k+1}(x) \leq \dots \leq C_{|M|} \quad (2.34)$$

$$x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_k > 0, x_{k+1} = 0, \dots, x_{|M|} = 0 \quad (2.35)$$

をみताす。

ここで、総コストが交通量 \times 移動時間として求められるとすると、システム最適配分の最小化問題としての定式化は、式 (2.31), (2.32) から、

$$\sum_{j \in M} x_j C_j(x) = \sum_{j \in M} x_j \sum_{i \in E} \delta_{ij} c_i(f_i) = \sum_{i \in E} f_i c_i(f_i) \quad (2.36)$$

となる。したがって、システム最適化問題は以下の通りとなる：

$$\left| \begin{array}{l} \text{minimize} \quad Z(x) = \sum_i f_i c_i(f_i) \\ \text{subject to} \quad f_i = \sum_{j \in M} \delta_{ij} x_j, \quad i \in E \\ \sum_{j \in M} x_j = d \\ x_j \geq 0, \quad j \in M \end{array} \right. \quad (2.37)$$

利用者均衡配分を定式化するにあたって、 $f_i c_i(f_i)$ を凸かつ増加関数と仮定し、双対問題の相補条件が式 (2.34), (2.35) と等価であることを示せばよい。式 (2.31) に関するラグランジュ乗数を μ_i 、式

(2.33) に関するラグランジュ乗数を λ とすると、双対問題 (DUAL) は、

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\mu, \lambda} \quad \lambda d - \sum_{i \in E} \phi_i(\mu_i) \\ \text{subject to} \quad \sum_{i \in E} \mu_i \delta_{ij} - \lambda \geq 0, \quad j \in M \\ \phi_i(\mu) = \min_{f \geq 0} \{ \mu f - f c(f) \} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

であり、相補条件は次の通りとなる：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial(f_i c_i(f_i))}{\partial f_i} = \mu_i, \quad i \in E & (\text{if } f_i > 0) \\ f_i = 0, \quad i \in E & \left(\text{if } \frac{\partial(f_i c_i(f_i))}{\partial f_i} \Big|_{f=0} > \mu_i \right) \\ \sum_{i \in E} \mu_i \delta_{ij} = \lambda, \quad j \in M & (\text{if } x_j > 0) \\ x_j = 0, \quad j \in M & (\text{if } \sum_{i \in E} \mu_i \delta_{ij} > 0) \end{array} \right.$$

ここで、システム最適配分で用いた $c(f)$ の代わりに、 $\frac{1}{f} \int_0^f c(\tau) d\tau$ を用いることで、利用者均衡配分を定式化することが可能となる：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \sum_i \int_0^f c_i(\tau) d\tau \\ \text{subject to} \quad \sum_{j \in M} x_j = d \\ h_j \geq 0, \quad j \in M \end{array} \right. \quad (2.39)$$

システム最適配分、利用者均衡配分の詳細な定式化については第3章および第5章にて記述する。

2.2.5 配分原則の数理最適化問題への拡張

Wardrop が提唱した配分原則を、ある種の目的関数を最小化する数理最適化問題と等価であることを最初に明らかにしたのは上述した Beckmann である。しかしながら Beckmann が定式化したのは利用者均衡配分を拡張した需要変動型利用者均衡配分であり、いわゆる利用者均衡配分を需要固定型利用者均衡配分として定式化したのは Jorgensen である。利用者均衡配分は、リンクコスト関数や需要関数に対して条件式を必要とはしないが、2.2.3 で記述したように数理最適化問題として定式化を行うにあたっては、それぞれに適したリンクコスト関数や需要関数を必要とする。

問題の定式化には、変数の取り方が2つあり、1つはOD間の経路交通量を変数としてとる場合であり、もう1つはネットワークの各リンク交通量を変数にとる場合である。Beckmann は各リンク交通量（リンクフロー）を用いて定式化を行い、Jorgensen は経路交通量（パスフロー）を用いて定式化を行った。パスフローによる定式化はリンクフローによる定式化よりも制約条件が簡単であり、また等式制約条件式がリンクフローによる定式化と比べて少ないという利点がある。ちなみにパスフローによる等式制約条件式は [リンク数] × [OD 数] であるのに対し、リンクフローによる等式制約条件式は [リンク

数]+[OD 数] \times [ノード数]である。

均衡解が数理計画問題の解と等価であることが明らかになって以降，利用者均衡配分は飛躍的に発展し，Frank & Wolfe (1956) の分解定理の適用によって大規模ネットワークへの拡張が可能となった。Frank-Wolfe 法の特徴は AON (All or Nothing) 法による最適経路探索と一次元上の関数の最小化の反復計算となることであり，プログラムの作成が容易で記憶容量も少なく済むという利点がある。Wardrop の均衡条件は非負条件以外は何の条件もないが，等価な数理最適化問題として定式化を行うには凸型計画問題として解の条件をみたすため，リンクコスト関数や需要関数に条件が付与される。本研究では凸型計画問題への緩和や，リンクコスト関数の設定に独自の手法を用いているが，それについては第 3 章および第 5 章にて詳述する。凸型計画問題に緩和できない場合には利用者均衡をそのままの形で定式化を行う必要があり，変分不等式問題，非線形相補性問題，不動点問題などとして変換する必要がある（土木学会 1998, 2003）。

2.3 距離の算出に関する研究

移動コストの算出にあたっては、建物ノード間の距離が重要な要素となるため、扱う都市モデルによって適切な距離概念を用いなければならない。第 II 部の仮想都市モデルでは、線形都市・平面都市とも簡易な都市モデルであるため、ユークリッド距離を用いて移動コストの算出を行う。第 III 部の実空間データを用いた分析では、領域間距離と領域内距離を用いて近似的な距離によってその算出を行うこととする。第 6 章で後述するように、実都市における建物数は数十万ノードの規模であり、すべての建物間の距離を導出するには計算機に多大な負荷がかかる。そのため、各建物ノードを集合させ、近似的なエリアを構成して解の導出にあっている。エリア間に一様に分布するノードの距離の近似式が領域間距離・領域内距離である。以下にその概要と主な距離概念を整理する。

2.3.1 ユークリッド距離

一般的な数学の分野における距離はユークリッド距離であり、ある平面領域上にある 2 点、 $P = (x_1, x_2)$ 、 $Q = (y_1, y_2)$ 間におけるユークリッド距離 $d(P, Q)$ は、

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (2.40)$$

として求められる。2次元を n 次元に拡張することも可能であり、ある非負整数 n に対する n 次元ユークリッド空間を E^n とすると、空ではなく有界な集合 S と n 次元実内積空間 V の組み合わせ (S, V) を用いてユークリッド距離を定義することが可能である。すなわち、ある任意の点 P と Q の距離 $d(P, Q)$ を、

$$d(P, Q) := \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\langle \vec{PQ}, \vec{PQ} \rangle} \quad (2.41)$$

と定義し、 S 内の点 P と Q の座標をそれぞれ、 $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 、 $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ とすれば、

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (2.42)$$

である。ユークリッド距離を用いた施設配置に関するミニサム問題、ミニマックス問題は Chen (1983, 1984) および Chen & Handler (1987) によってまとめられている。

2.3.2 マンハッタン距離

マンハッタン距離は Minkowski によって考案された距離概念であり、任意の 2 点間の距離を直行する座標軸に沿って測定することで定義される。2 点がグリッド状にある場合には平面領域のみではなく

n 次元空間への拡張が可能であり、2点を P, Q としたときマンハッタン距離 $d(P, Q)$ は次式のように定義される：

$$d(P, Q) := \sum_{k=1}^n |P_k - Q_k|. \quad (2.43)$$

仮想都市モデルにおいてはユークリッド距離を用いることで分析が可能であるが、実空間都市は建物ノード間の距離をユークリッド距離として算出するには現実的ではなく、全ての都市がグリッド状であると考えることも現実的ではない。そのため、第3章から第5章における仮想都市モデルの分析ではユークリッド距離を用いるが、第6章の実空間都市の分析では、ある閉領域を考えた場合の領域間距離、領域内距離を用いて近似的に距離を算出する必要がある。以下にその概要を記述する。

2.3.3 領域間距離と領域内距離

領域間距離とは栗田（1988, 1989, 1991）や腰塚（1983a, 1983b）によって体系づけられた距離概念であり、平面状の2つの領域内に一樣な点が与えられた場合の領域間の直線距離を近似する手法である。ある平面上に2つの領域 A と B を与え、領域 A 内で一樣な点 P から、領域 B 内で一樣な点 Q への直線距離 $r = r(P, Q)$ の ν 次の積率は、

$$\langle r^\nu \rangle = \frac{1}{S_A S_B} \int_A \int_B \{r(P, Q)\}^\nu dP dQ \quad (2.44)$$

として求められ、連続型の重力モデルを用いて距離の特性値を導出する際にも用いられる。ただし、 S_A と S_B は領域の面積を、 $\langle \bullet \rangle$ は平均値である（栗田 2013）。

式 (2.44) の数値を算出するのは極めて困難であり、 $\nu = 1$ （平均距離）に限定しても、算出されるのは2つの重なり合わない円盤領域の場合と、辺を接する2つの合同な矩形の場合のみである。また、前者の平均距離は Appell の超幾何関数に帰着し、数値計算を必要とする。

ここで、二項展開による方法を一般化した、距離の積率の展開法を記述する。まず、領域 A ならびに B の幾何重心を各々 O, O' とし、 $h = r(O, O')$ とおく。領域 A 内の点は O を原点とする直交座標系で $P = (x, y)$ 、領域 B 内の点は O' を原点とする直交座標系で $Q = (u, v)$ とする。 x 軸ならびに u 軸は、 O と O' を結ぶ直線に沿っている。

このとき $p_1 = u - x$ 、 $p_2 = v - y$ 、 $q^2 = p_1^2 + p_2^2$ とおけば、距離 r の ν 乗は次式で表される：

$$r^\nu = \{r(P, Q)\}^\nu = h^\nu \left\{ 1 + \left(\frac{2p_1}{h} + \frac{q^2}{h^2} \right) \right\}^{\nu/2}. \quad (2.45)$$

中括弧の部分、 $1 + (2p_1/h + q^2/h^2)$ の二項級数に展開し（収束半径は $|2p_1/h + q^2/h^2| < 1$ ）、 $1/h$

の冪級数として整理，これに基づき r^ν の期待値を算出する：

$$r^\nu = h^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(\nu)}{h^k} \Rightarrow \langle r^\nu \rangle = h^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle c_k(\nu) \rangle}{h^k}. \quad (2.46)$$

ここで，低次の係数のみを例示する：

$$\begin{aligned} \langle c_0(\nu) \rangle &= 1, \\ \langle c_1(\nu) \rangle &= \nu \langle p_1 \rangle = 0, \\ \langle c_2(\nu) \rangle &= \nu \{ (\nu-1)(\langle x^2 \rangle + \langle u^2 \rangle) + \langle y^2 \rangle + \langle v^2 \rangle \} / 2, \\ \langle c_3(\nu) \rangle &= \nu(\nu-2) \{ (\nu-1)(\langle u^3 \rangle - \langle x^3 \rangle) + 3(\langle uv^2 \rangle - \langle xy^2 \rangle) \} / 6. \end{aligned} \quad (2.47)$$

x, y, u, v の多項式の平均値を適宜計算し式 (2.46) の係数を準備し，適当な次数で打ち切れば積率が近似できる。

式 (2.46) 式において $\nu = 1$ とし，平均距離を書き下すと次式の通りとなる：

$$\langle r \rangle = \left\{ 1 + \frac{\langle y^2 \rangle + \langle v^2 \rangle}{2h^2} + \frac{\langle xy^2 \rangle - \langle uv^2 \rangle}{2h^3} + \frac{\langle c_4(1) \rangle}{h^4} + \dots \right\}. \quad (2.48)$$

式 (2.48) で，最初の 2 項だけを抽出すると，平均距離の近似公式が得られる：

$$\langle r \rangle^* = h + \frac{\langle y^2 \rangle + \langle v^2 \rangle}{2h}. \quad (2.49)$$

式 (2.49) が明らかにしていることは，領域の間の平均距離を考えた場合，最も重要な尺度は重心間の距離 h であり，次に重要な尺度は，各領域の縦方向 (y 軸ならびに v 軸) の周辺分布の 2 次の積率 $\langle y^2 \rangle$ と $\langle v^2 \rangle$ ということである。ここで領域 A, B を面積が同じとなる半径 α と β の円と置き換えることで，各領域の縦方向の周辺分布の積率を半径として考えることが可能となる。このときの積率を式 (2.46) によって求めると次式の通りとなる：

$$\langle r^\nu \rangle_{cc} = h^\nu \left\{ 1 + \frac{\nu^2(\alpha^2 + \beta^2)}{8h^2} + \frac{\nu^2(\nu-2)^2(\alpha^4 + 3\alpha^2\beta^2 + \beta^4)}{192h^4} + \dots \right\}. \quad (2.50)$$

式 (2.50) から $\nu = 1$ とおくことで円盤間の平均距離近似公式が得られる：

$$\langle r \rangle_{cc}^* = h + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{8h}. \quad (2.51)$$

最後に，領域内距離について概観したい。領域間の距離が近似出来ることは上述した通りであるが，領域内における円盤内の直線距離の分布は下記のように求める。半径 r の円盤上で，一様に分布する 2 点間の直線距離を L とすると，その確率密度関数 $f(l)$ は次式で与えられる (腰塚 1977)：

$$f(l) = \frac{4l}{\pi r^2} \arccos \frac{l}{2r} - \frac{l^2}{\pi r^4} \sqrt{4r^2 - l^2} \quad (0 \leq l \leq 2r). \quad (2.52)$$

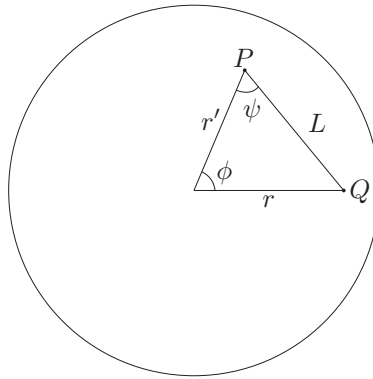


図 2.3 円領域内の距離

また、そのときの平均距離値 $\langle L \rangle$ および 2 乗の平均距離値 $\langle L^2 \rangle$ 、ならびに分散 σ_L^2 は次式となる：

$$\langle L \rangle = \frac{128r}{45\pi} \simeq 0.9054r, \quad (2.53)$$

$$\langle L^2 \rangle = r^2, \quad (2.54)$$

$$\sigma_L^2 = \left\{ 1 - \left(\frac{128}{45\pi} \right)^2 \right\} \simeq (0.4245r)^2. \quad (2.55)$$

式 (2.53)~(2.55) の確率密度関数の導出は困難を伴うが、Crofton の微分方程式にしたがえば比較的容易に導出が可能である。Crofton の微分方程式は、領域のスケールパラメータ r に関する f の微係数を定式化し、その結果得られる 1 階線形微分方程式の解を求めるというものである。Crofton のアイデアは、幾何学的なモデルの上で定義される様々な指標の導出に応用可能である。本研究では領域内距離として式 (2.53) を用いているが、図 2.3 のように 2 点 P, Q をとり、極座標を用いることで導出可能である。ただし導出にあたっては、図 2.3 の円は単位円とする。

$P = (r, \theta)$, $Q = (r', \theta')$ とし、2 点間の距離を L とすると、 $L = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}$ である。このとき領域内平均距離 $\langle L \rangle$ は、

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 dr \int_0^1 dr' \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\theta' rr' L \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 dr \int_0^r dr' \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\theta' rr' L \end{aligned} \quad (2.56)$$

であり, 式 (2.56) において $\phi = \theta' - \theta$ とし, 積分変数を r, r', θ, ϕ とすると,

$$\begin{aligned}
\text{式 (2.56)} &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 dr \int_0^r dr' \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\theta}^{2\pi-\theta} d\phi r r' L \\
&= \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 dr \int_0^r dr' \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\phi r r' L \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^1 dr \int_0^r dr' \int_{-\pi}^{\pi} d\phi r r' L \\
&= \frac{8}{\pi} \int_0^1 dr \int_0^r dr' \int_0^{\pi} d\phi r r' L \\
&= \frac{8}{\pi} \int_0^1 dr \int_0^{\pi} d\phi \int_0^r dr' r r' L
\end{aligned} \tag{2.57}$$

ここで, 積分変数を r' から ψ に変換する. このとき,

$$L = \frac{r \sin \phi}{\sin \psi}, \quad r' = \frac{r \sin(\phi + \psi)}{\sin \psi} \tag{2.58}$$

より,

$$dr' = -\frac{r \sin \phi}{\sin^2 \psi} d\psi \tag{2.59}$$

である. 式 (2.57) における r, ϕ を固定させたまま r' を $0 \sim r$ で動かすとき, ψ は $\frac{1}{2}(\pi - \phi) \sim \pi - \phi$ を動くことから,

$$\begin{aligned}
\text{式 (2.57)} &= \frac{8}{\pi} \int_0^1 dr \int_0^{\pi} d\phi \int_{\frac{1}{2}(\pi-\phi)}^{\pi-\phi} d\psi \frac{r^4 \sin^2 \phi \sin(\phi + \psi)}{\sin^4 \psi} \\
&= \frac{8}{5\pi} \int_0^{\pi} d\phi \int_{\frac{1}{2}(\pi-\phi)}^{\pi-\phi} d\psi \frac{\sin^2 \phi \sin(\phi + \psi)}{\sin^4 \psi} \\
&= \frac{8}{5\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{\pi-2\psi}^{\pi-\psi} d\phi \frac{\sin^2 \phi \sin(\phi + \psi)}{\sin^4 \psi} + \frac{8}{5\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\psi \int_0^{\pi-\psi} d\phi \frac{\sin^2 \phi \sin(\phi + \psi)}{\sin^4 \psi} \\
&= \frac{8}{15\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \frac{2 - \sin^2 \psi + 2 \cos \psi (2 \sin^4 \psi - 1)}{\sin^4 \psi} + \frac{8}{15\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\psi \frac{2 - \sin^2 \psi + 2 \cos \psi}{\sin^4 \psi} \\
&= \frac{128}{45\pi} \simeq 0.9054
\end{aligned} \tag{2.60}$$

となり, 式 (2.53) が導かれることが分かる.

第II部

本論：仮想都市モデルを用いた実証分析

第3章 都市内の移動による職住分布のシステム最適配置

- 3.1 はじめに
- 3.2 移動コストを最小化する職住分布最適配置問題の定式化
- 3.3 2次計画問題としての定式化
- 3.4 線形緩和法による提案問題の導出
- 3.5 数値解析例
- 3.6 本章のまとめ

第3章

都市内の移動による職住分布のシステム 最適配置

3.1 はじめに

本章では、仮想都市モデルを用いて、業務移動を考慮した容量制約付き都市モデルの総移動コストを最小化する職住分布の最適配置を導出したい。都市内の移動は通勤移動に加えて業務移動を考慮し、ともに施設間の移動におけるコストを想定している。そのため、本章において都市モデル内における移動の総コストが定式化されることになる。都市モデルにおける建物ノードには容量制約を付することで、ある一定以上の人口が就業地・居住地ともに集中することを防ぐとともに、実空間の都市にモデルを適用することを考えた場合に、既存の建物群を所与のものとして考えられるという利点もある。

本章の構成は以下の通りである。第2節において都市モデルを与え、通勤移動コストと業務移動コストの定式化を行う。第3節では移動コストを2次計画問題として定式化を行い、半正定値性をみかさなことから非凸2次計画問題となることを明らかにする。続く第4節では、非凸2次計画問題を線形緩和法を用いることにより、線型計画問題へ応用出来ることを記述する。具体的には線型計画問題の実行可能領域を、妥当な2次不等式によって線型化することにより最適解を導出する。また、緩和した線型計画問題から最適解が算出可能となるよう定式化を行う。第5節では仮想的な線形都市モデルならびに平面都市モデルにおいて、就業地と居住地の配置、およびそれぞれにおける建物に容量制約を付することにより数値例を算出し、実証分析を行う。最後に、各都市モデルにおいて用いたパラメータの定性的特性を、数値解析例をもとに考察する。

3.2 移動コストを最小化する職住分布最適配置問題の定式化

3.2.1 都市モデル

いま、仮想都市モデルとして、 I 個の建物ノード ($1 \leq i \leq I$) からなる就業地 (W) と、 J 個の建物ノード ($1 \leq j \leq J$) からなる居住地 (H) を考える。現実の都市では多様な属性をもった建物が存在するが、モデルをより簡潔に定式化することを考慮し、都市モデル内には W と H の 2 属性のみが存在するものと仮定する。また、提案する都市モデルは独立しているものと見なし、 $W - H$ を移動する都市モデル内の総人数は T (=定数)^[1]とし、他の都市間との流入は無いものとみなす。ここで、都市モデル内の移動を考えるにあたって、以下の仮定を導入する。すなわち、都市モデル内の全ての人 T が H から W に通勤移動を行い、また W に勤務する人は W' に必ず業務移動を行う、という仮定である。

いま、上述したように与えた都市モデルにおいて、各建物ノードに容量制約を設定する。容量制約とは建物ノードに内包される人の上限を設定するということであり、ある建物ノード k で容量制約まで人が内包された場合は、当該建物ノードで他の人が就業・居住ができない状態となり、ノード k 以外の建物ノードを選択しなければならない。

さて、与えた都市モデルにおいて通勤移動コストと業務移動コストを最小化する職住分布の最適配置を導出することが、本章の目的である。このとき、移動コストの最小化問題をシステム最適配分 (SO: System Optimum assignment) モデル^[2]に則って定式化を行いたい。

そのための準備として、

$$\begin{aligned} T &= (t_{11}^h + t_{12}^h + \cdots + t_{1J}^h) + (t_{21}^h + t_{22}^h + \cdots + t_{2J}^h) + \cdots + (t_{I1}^h + t_{I2}^h + \cdots + t_{IJ}^h) \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} w_i &= t_{i1}^h + t_{i2}^h + \cdots + t_{iJ}^h \\ &= \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} h_j &= t_{1j}^h + t_{2j}^h + \cdots + t_{Ij}^h \\ &= \sum_{i=1}^I t_{ij}^h \quad (1 \leq j \leq J), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$t_{ij}^h \geq 0 \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J) \quad (3.4)$$

を想定する。ただし、 t_{ij}^h はノード $i-j$ 間の通勤移動人数、 w_i はノード i における就業人数、 h_j はノード

[1] 職住通勤モデルと呼ばれ、空間相互作用モデルの一種である。地域 j に居住し、地域 i の就業地に通勤する就業者数を t_{ij} とすると、地域 i における就業者総数 T がほぼ一定量であることを前提としている。

[2] Wardrop の第 2 原則『都市モデル内の総移動コストが最小となる』と表現されるものである。Wardrop の第 1 原則は第 2 章 既往研究および第 5 章 利用者均衡配分による職住分布の均衡配置で詳述する。

ド j における居住人数をそれぞれ表すものであり、 T は定数であるとする。式 (3.1) は総人数の制約式であり、全ての人が通勤移動を行うという仮定から導出される。式 (3.2), (3.3) は建物ノードにおける制約式であり、通勤移動人数によって定義される。さらに、上述した容量制約のアイデアをモデルに導入するために、以下の不等式群を仮定する：

$$0 \leq w_i \leq W_i \quad (1 \leq i \leq I), \quad (3.5)$$

$$0 \leq h_j \leq H_j \quad (1 \leq j \leq J). \quad (3.6)$$

このとき、 W_i, H_j はそれぞれ W, H における各ノードの容量を表している。式 (3.5), (3.6) は容量制約に対する制約式であり、各ノードにおいて就業・居住する人は容量制約を超えることはない。

3.2.2 都市モデル内の移動コスト

都市モデル内の移動コストは、移動人数 \times 移動距離で算出できるものとする。通勤移動コストを導出するにあたり、通勤移動は $i-j$ 間において往復すると考え、 $i-j$ 間の通勤移動距離を d_{ij}^h とすると、

$$\begin{aligned} \text{【通勤移動コスト】}_{\text{SO}} &= 2 \times ((t_{11}^h \cdot d_{11}^h + t_{12}^h \cdot d_{12}^h + \cdots + t_{1J}^h \cdot d_{1J}^h) \\ &\quad + (t_{21}^h \cdot d_{21}^h + t_{22}^h \cdot d_{22}^h + \cdots + t_{2J}^h \cdot d_{2J}^h) \\ &\quad + \cdots + (t_{I1}^h \cdot d_{I1}^h + t_{I2}^h \cdot d_{I2}^h + \cdots + t_{IJ}^h \cdot d_{IJ}^h)) \\ &= 2 \times \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \cdot d_{ij}^h \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。次に業務移動コストを導出する。業務移動とは、あるノード i で就業している人が、他のノード i' ($1 \leq i' \leq I$) に移動することを表しており、就業地間を移動する人数を $t_{ii'}^w$ 、業務移動頻度を α としたとき、

$$t_{ii'}^w := \alpha \cdot \frac{w_i \cdot w_{i'}}{T} \quad (3.8)$$

と定義する。式 (3.8) において、1日に発生する各ノードからの業務移動は、移動頻度 \times 移動人数 ($\alpha \cdot w_i$) で求められる。一方、移動先の就業人数の比率で重み付けをした平均業務移動距離は、 $i-i'$ 間の業務移動距離を $d_{ii'}^w$ とすると、 $\sum_{i'=1}^I d_{ii'}^w \frac{w_{i'}}{T}$ である。両者を掛け合わせ、かつ各就業地について総和をとったものが総業務移動コストとなるべきであるので、 $t_{ii'}^w$ は式 (3.8) のように定義すべきことが分かる。また、 $t_{ii'}^w$ の定義において空間相互作用モデルの考え方を援用しているが、 $t_{ii'}^w$ は就業地間の距離に

よる減衰を導入していないことに注意する必要がある。したがって、業務移動コストは、

$$\begin{aligned}
 \text{【業務移動コスト】}_{SO} &= ((t_{11}^w \cdot d_{11}^w + t_{12}^w \cdot d_{12}^w + \dots + t_{1I'}^w \cdot d_{1I'}^w) \\
 &\quad + (t_{21}^w \cdot d_{21}^w + t_{22}^w \cdot d_{22}^w + \dots + t_{2I'}^w \cdot d_{2I'}^w) \\
 &\quad + \dots + (t_{I1}^w \cdot d_{I1}^w + t_{I2}^w \cdot d_{I2}^w + \dots + t_{II'}^w \cdot d_{II'}^w)) \\
 &= \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I t_{ii'}^w \cdot d_{ii'}^w \\
 &= \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I w_i \cdot w_{i'} \cdot \frac{\alpha}{T} \cdot d_{ii'}^w \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

となる。本章における都市モデルとゾーンあたりの移動コストの概念図を図 3.1 に示す。

図 3.1 は示唆的である。都市内の移動における起点 (O: Origin) と終点 (D: Destination) のトリップパターンは多様な形態をとり、OD 間のみ直行トリップ以外にも立ち寄りを考慮した OMD 周回トリップが存在するが、業務移動コストを考慮することで直行トリップ以外の移動コストも考慮した都市モデルであると考えられることも可能である。もちろん、周回トリップとした場合には d_{ij}^h としている通勤移動距離が変化することに注意しなければならないが、全ての人 w_i を起点として移動するという意味において、大域的なシステム最適を行う上では捨象できると考えられる。

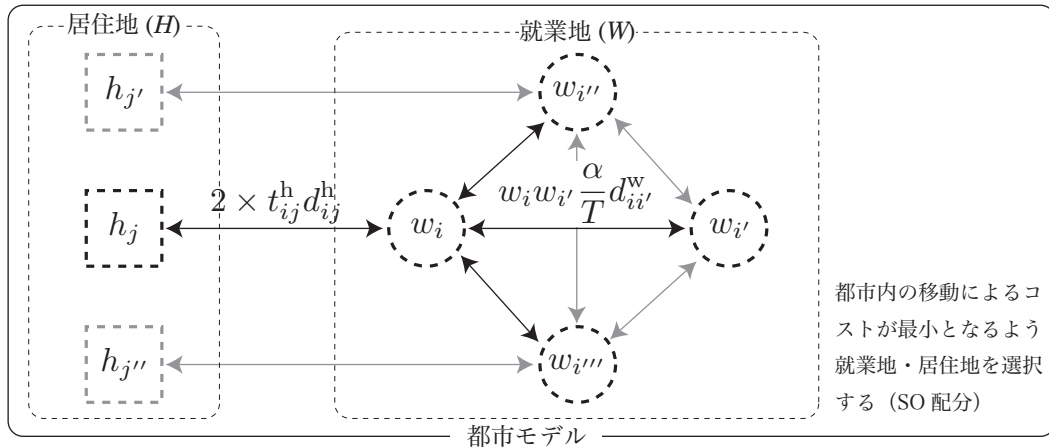


図 3.1 都市モデルとゾーンあたりの移動コストの概念図

3.3 2次計画問題としての定式化

さて、本章の目的は式 (3.7) と式 (3.9) の合計である総移動コストを式 (3.1)~(3.6) の制約のもとで最小化する職住分布配置を求めることである。ここで、 $(I+J+I \times J)$ 次元変数ベクトル \mathbf{x} 、 $(I+J+I \times J)$ 次元定数ベクトル \mathbf{c} 、 $(I+J+I \times J) \times (I+J+I \times J)$ の正方行列 \mathbf{Q} を導入する。ただし、それぞれの要素を、

$$x_k = \begin{cases} w_k & (1 \leq k \leq I) \\ h_{k-I} & (I+1 \leq k \leq I+J), \\ t_{ij}^h & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3.10)$$

$$c_k = \begin{cases} 0 & (1 \leq k \leq I) \\ 0 & (I+1 \leq k \leq I+J), \\ d_{ij}^h & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3.11)$$

$$Q_{kl} = \begin{cases} \frac{\alpha}{T} \cdot d_{kl}^w & (1 \leq k \leq I, 1 \leq l \leq I) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3.12)$$

とする。このとき、式 (3.7) および式 (3.9) はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \text{式 (3.7)} &= 2 \times \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \cdot d_{ij}^h \\ &= 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \text{式 (3.9)} &= \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I w_i \cdot w_{i'} \cdot \frac{\alpha}{T} \cdot d_{ii'}^w \\ &= \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.14)$$

と書き換えられる。したがって求めたい最小化する総移動コストの目的関数 $F(\mathbf{x})$ は、式 (3.13), (3.14) より、

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad (3.15)$$

として定式化することが可能である。さて、式 (3.15) の定式化において次のことを考える。

まず、1変数関数 h に対して、以下の性質が成立する：

$$\begin{aligned} h \text{ が凸関数} &\Leftrightarrow \text{すべての } t \in R \text{ において、} h'(t) \text{ が非減少 } (t_1 < t_2 \Rightarrow h'(t_1) \leq h'(t_2)) \\ &\Leftrightarrow \text{すべての } t \in R \text{ において、} h''(t) \geq 0 \end{aligned}$$

このとき、 R は実数である。この性質は1変数関数のみならず多変数関数の場合でも成立する。多変数関数の場合は一階微分は勾配ベクトルが対応し、連続微分可能な関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ と $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

に対して,

$$\nabla f(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{u}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{u}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{u}) \right) \quad (3.16)$$

と表されるものを f の \mathbf{u} における勾配ベクトルと呼ぶ。また、多変数関数の二階微分は Hesse 行列が対応し、 n 変数関数 f の Hesse 行列は $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ と $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\nabla^2 f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{u}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{u}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{u}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{u}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{u}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{u}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{u}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{u}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

と定義される。

ここで、行列 \mathbf{A} とベクトル $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ に対して、以下で定まる変数 v_1, v_2, \dots, v_n の 2 次式 $\mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v}$ を 2 次形式と呼ぶ。このことから式 (3.15) は明らかに線型制約のもとでの 2 次計画問題^[3]となる。さて、 \mathbf{A} を実数成分を持つ対称行列とし、すべての $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} \geq 0$ が成立するとき、 \mathbf{A} を半正定値行列と呼ぶ。このとき連続微分可能な関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対して以下が成立する：

$$f \text{ が凸関数} \Leftrightarrow \text{任意の } u \in \mathbb{R}^n \text{ に対して、Hesse 行列 } \nabla^2 f(u) \text{ が半正定値である。}$$

これは次のことから証明される。まず、 $a, b \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $h(\lambda) = f((1-\lambda)a - \lambda b)$ とおくと、 f が凸関数 \Leftrightarrow 任意の $a, b \in \mathbb{R}^n$ に対して h が凸が成立する。これは、 $u = (1-\lambda)a + \lambda b$ と $v = b - a$ に対して、 $h''(\lambda) = \mathbf{v}^\top \nabla^2 f(u) \mathbf{v}$ となるからである。

さて、半正定値の判定は行列式から判定できる。いま、例として 2×2 行列を考えてみたい。実対称行列を $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ とすると、任意のベクトル $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して、

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + dy^2 \quad (3.18)$$

$$= a \left(x + \frac{by}{a} \right)^2 + \frac{y^2}{a} (ad - b^2) \quad (3.19)$$

$$= a \left(x + \frac{by}{a} \right)^2 + \frac{y^2}{a} \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

である。したがって、 $a \geq 0, |\mathbf{A}| \geq 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ は半正定値をみだす。

[3] 目的関数が 2 次関数で表現され、制約条件が 1 次関数である最適化問題のことを 2 次計画問題と呼ぶ。式 (3.15) において目的関数 $F(\mathbf{x})$ は 2 次関数であり、制約条件である式 (3.1)~(3.6) は 1 次関数である。

ここで、式 (3.12) で導入した正方行列 Q を展開すると、

$$Q = \frac{\alpha}{T} \begin{bmatrix} 0 & d_{12}^w & \cdots & d_{1I}^w & \vdots & \\ d_{21}^w & 0 & \cdots & d_{2I}^w & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ d_{I1}^w & d_{I2}^w & \cdots & 0 & & \\ \hline & & & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

である。 Q が対称であり、かつ半正定値をみたせば上述したように式 (3.15) は凸 2 次計画問題となるが、 Q の要素には業務移動距離 d_{ij}^w が含まれていることが示すように距離行列を含むため、一般には行列式 $|Q| \geq 0$ とならず半正定値性をみたさない。そのため、本章における都市モデル内の移動コストの最小化問題は非凸 2 次計画問題となる。非凸 2 次計画問題は、組合せ最適化問題に代表される問題であり、最大カット問題、グラフ分割問題、サブセット-サム問題、最大クリーク問題など、離散的な構造の問題を、連続的な変数の最適化問題として扱うことで近似解を得られる（戸川 1977; 今野・山下 1978）。次節において近似解を得るための緩和問題を記述する。

3.4 線形緩和法による提案問題の導出

前節において、移動コストの最小化問題が非凸 2 次計画問題となることが示された。そのため一般には値の異なる複数の局所的最適解が存在するものと考えられる。そこで本節では、真の最適解を導出するために大域的最適化を行い、実行可能解を導出するために線形緩和法を用いて非凸 2 次計画問題を緩和する。

3.4.1 線形緩和法による非凸 2 次計画問題の緩和

まず、以下の 2 次計画問題 (QP: Quadratic Programming Problem) :

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}\mathbf{x} + 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{q} \end{cases} \quad (3.21)$$

を考える。\$\mathbf{Q}\$ は対称行列であるが半正定値性をみだす必要はなく、ゆえに QP には非凸 2 次計画問題も含まれていることに注意されたい。このとき、\$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\$、\$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m_1}\$、\$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{m_2}\$、\$\mathbf{A}\$ は \$m_1 \times n\$ 行列、\$\mathbf{P}\$ は \$m_2 \times n\$ 行列とする。また QP における実行可能領域は空ではなく有界^[4]とする。いま、新たな変数 \$Y_{ij} = x_i x_j\$ (\$1 \leq i \leq j \leq n\$) を導入すると、QP は

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n Q_{ii} Y_{ii} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Q_{ij} Y_{ij} + 2 \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{q} \\ & Y_{ij} = x_i x_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq n \end{cases} \quad (3.22)$$

と書き換えることが可能である。問題 (3.22) における制約：

$$Y_{ij} = x_i x_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq n \quad (3.23)$$

はランク 1 制約と呼ばれるものである。ここで変数 \$Y_{ij}\$ からなる行列を \$\mathbf{Y} \in \mathcal{S}^n\$ とすれば、問題 (3.22) の制約は \$\mathbf{Y} = \mathbf{x}\mathbf{x}^\top\$ と書き換えることが可能であり、また \$\mathbf{Y}\$ はランクが 1 となることを要求している。このとき、\$\mathcal{S}^n\$ は \$n\$ 次実対称行列全体を表す。便宜上、問題 (3.22) の実行可能領域を、

$$\mathcal{D} = \left\{ (\mathbf{Y}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2+n} \mid \mathbf{Y} = \mathbf{x}\mathbf{x}^\top, \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{q} \right\} \quad (3.24)$$

とし、その凸包 (convex hull) を \$co\mathcal{D}\$ と表記することとする。

[4] 制約付きの最適化問題において、制約条件をすべてみたすような点の集合のことを実行可能領域という。実行可能領域が空とは、制約条件が矛盾しており最適化問題において解がないことをいう。したがって本節では QP には解があることを前提としている。

ここで、問題 (3.22) に関連した以下の問題を新たに導入する：

$$\begin{cases} \text{minimize} & g(\mathbf{Y}, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Y} \rangle + 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} & (\mathbf{Y}, \mathbf{x}) \in \text{co}\mathcal{D} \end{cases} \quad (3.25)$$

問題 (3.25) で導入した $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{Y} \rangle$ は、

$$\langle \mathbf{Q}, \mathbf{Y} \rangle := \sum_{i=1}^n Q_{ii} Y_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (Q_{ij} + Q_{ji}) Y_{ij} \quad (3.26)$$

と定義したものであり、すなわち行列同士の内積を意味している。

いま、問題 (3.25) の最適解が存在するものとし、その最適解を $(\mathbf{Y}^*, \mathbf{x}^*)$ とおくと、問題 (3.25) の目的関数が線型であることから、 $(\mathbf{Y}^*, \mathbf{x}^*)$ は $\text{co}\mathcal{D}$ の端点となる。したがって、 $\mathbf{Y}^* = \mathbf{x}^* \mathbf{x}^{*\top}$ となる最適解が存在するため、目的関数の値は 2 次計画問題 QP の値と等しくなる。

いま、Sherali らによって $\text{co}\mathcal{D}$ を近似する線型不等式群が、以下の手法によって効率よく生成できることが示されている (Sherali et al. 1995, 2012; Sherali & Adams 2013)。

まず、 $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ を定める任意の 2 本の線型不等式 $b_i - a_i^\top \mathbf{x} \geq 0$, $b_j - a_j^\top \mathbf{x} \geq 0$ の積から導かれる 2 次不等式：

$$\begin{aligned} q_{ij}(\mathbf{x}) &= (a_i^\top \mathbf{x} - b_i)(a_j^\top \mathbf{x} - b_j) \\ &= \langle (a_i a_j^\top), \mathbf{x} \mathbf{x}^\top \rangle - (b_i a_j + b_j a_i)^\top \mathbf{x} + b_i b_j \\ &\geq 0, \\ &\forall 1 \leq i \leq j \leq m_1 \end{aligned} \quad (3.27)$$

ならびに、任意の変数 x_k と、 $\mathbf{Px} = \mathbf{q}$ を定める任意の線型不等式 $q_l - p_l x_l = 0$ の積から導かれる 2 次等式：

$$\begin{aligned} r_{kl}(\mathbf{x}) &= x_k (q_l - p_l x_l) \\ &= -p_l x_k x_l + q_l x_k \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

そして、

$$\mathbf{Px} = \mathbf{q} \quad (3.29)$$

を考える。これ以降、 $\mathbf{x} \mathbf{x}^\top$ を行列 \mathbf{Y} で置き換えることによって \mathcal{D} の妥当な 2 次不等式・等式から \mathcal{D} の妥当な線型不等式群を得る操作を線型化 (Linearization) と呼ぶこととする。ここで、式 (3.27) の $q_{ij}(\mathbf{x})$ の 2 次の係数行列 $a_i a_j^\top$ のランクは 2 であることから、 $q_{ij}(\mathbf{x}) \geq 0$, $r_{kl}(\mathbf{x}) = 0$ はランク 2 の制約である。

いま、式 (3.27)~(3.29) は実行可能領域の集合 \mathcal{D} に対して、

$$\{\mathbf{x} \mid q_{ij}(\mathbf{x}) \geq 0, r_{kl}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{q}\} \supseteq \mathcal{D} \quad (3.30)$$

となる妥当な不等式・等式群である。したがって、式 (3.27)~(3.29) の項 $\mathbf{x}\mathbf{x}^\top$ を行列 \mathbf{Y} で置き換えた不等式・等式群：

$$[q_{ij}(\mathbf{x})]_L = \langle (a_i a_j^\top), \mathbf{Y} \rangle - (b_i a_j + b_j a_i)^\top \mathbf{x} + b_i b_j \geq 0, \quad (3.31)$$

$$[r_{kl}(\mathbf{x})]_L = -p_l Y_{(kl)} + q_l x_k = 0, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{q} \quad (3.33)$$

は集合 \mathcal{D} の妥当な不等式・等式群である。なお、式 (3.32) における $Y_{(kl)}$ は、

$$Y_{(kl)} = \begin{cases} Y_{kl} & (\text{if } i \leq j) \\ Y_{lk} & (\text{if } i > j) \end{cases} \quad (3.34)$$

とする。以上の不等式・等式群で定まる領域を

$$[\mathcal{D}]_L^2 = \{(\mathbf{Y}, \mathbf{x}) \mid [q_{ij}(\mathbf{x})]_L \geq 0, [r_{kl}(\mathbf{x})]_L = 0, \mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{q}\} \quad (3.35)$$

とすれば、線型計画問題 (RLT-LP: Reformulation-Linearization Technique Linear Programming)：

$$\begin{cases} \text{minimize} & g(\mathbf{Y}, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Y} \rangle + 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} & (\mathbf{Y}, \mathbf{x}) \in [\mathcal{D}]_L^2 \end{cases} \quad (3.36)$$

が得られる。ここで明らかに包含関係 $[\mathcal{D}]_L^2 \supseteq \text{co}\mathcal{D}$ が成立するため、RLT-LP は問題 (3.25) の緩和問題である。

いま、非凸 2 次計画問題の緩和において、次のような定理が示されている (矢島 1999)。

定理 3.1.

$(\mathbf{Y}, \mathbf{x}) \in [\mathcal{D}]_L^2$ ならば $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ である。特に \mathbf{x} が \mathcal{D} の端点となっていれば、 $\mathbf{Y} = \mathbf{x}\mathbf{x}^\top$ をみताす。

つまり、 $(\mathbf{Y}^*, \mathbf{x}^*)$ を RLT-LP の最適解とすれば、 $g(\mathbf{Y}^*, \mathbf{x}^*) = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Y}^* \rangle + 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^*$ はもとの QP の下界値となり、また同時に $\mathbf{x}^* \in \mathcal{D}$ より $f(\mathbf{x}^*)$ は上界値を与え、また \mathbf{x}^* が \mathcal{D} の端点であれば、その値が 2 次計画問題 QP の最適解である。以上のことから、非凸 2 次計画問題を線型計画問題に帰着させ、最適解を算出可能な定式化を行うことが明らかとなる。

3.4.2 提案モデルの最適解導出

3.4.1 において、非凸 2 次計画問題を緩和することで最適解が追求できることが示された。そこで本項では式 (3.15) における移動コストの目的関数 $f(\mathbf{x})$ を最小化する職任分布の最適配置へと応用する。

3.3において提案した都市モデル内の移動コストの目的関数 $F(\mathbf{x})$ を最小化する問題は、

$$\begin{array}{l}
 \text{minimize} \quad F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}\mathbf{x} + 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
 \text{subject to} \quad 0 \leq w_i \leq W_i \quad (1 \leq i \leq I) \\
 \quad \quad \quad 0 \leq h_j \leq H_j \quad (1 \leq j \leq J) \\
 \quad \quad \quad T = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J) \\
 \quad \quad \quad w_i = \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I) \\
 \quad \quad \quad h_j = \sum_{i=1}^I t_{ij}^h \quad (1 \leq j \leq J) \\
 \quad \quad \quad 0 \leq t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J)
 \end{array} \tag{3.37}$$

である。問題 (3.37) は 2 次計画問題 QP の構造をみたしているため、3.4.1 で導出した線形緩和法が成立する。したがって、本章で取り扱う都市モデルにおいて、目的関数 $f(\mathbf{x})$ の最小化問題を 3.4.1 の線形緩和法を用いて算出することで、都市モデルにおける業務移動コストを考慮した職住分布の最適配置が導出できることになる。

次節の 3.5 の数値解析例では、実行可能領域の緩和の際に生じる誤差によって $f(\mathbf{x}^*) \neq g(\mathbf{Y}^*, \mathbf{x}^*)$ となる場合も起こりうるが、その場合においても、

$$\text{gap} := \frac{f(\mathbf{x}^*) - g(\mathbf{Y}^*, \mathbf{x}^*)}{f(\mathbf{x}^*)} \tag{3.38}$$

と定義した gap 値を計算することで、得られた解の精度が保証される。

本章にて取り扱う都市モデルにおける、 I, J の組み合わせによる変数と制約式の総数を表 3.1 に示す。

表 3.1 I と J の組み合わせによる変数と制約式の総数 (基本モデル)

| I | J | 変数 | 制約式 | 3.5 数値解析例における都市モデル |
|-----|-----|-----------|-----------|---|
| 5 | 5 | 665 | 1,431 | |
| 10 | 10 | 7,380 | 12,411 | 3.5.1.1 H - W - H 線形都市モデル |
| 10 | 15 | 15,575 | 24,676 | 3.5.1.2 H - W - H - W - H 線形都市モデル |
| 9 | 40 | 84,254 | 125,611 | 3.5.1.3 H - W - H 平面都市モデル |
| 50 | 50 | 3,383,900 | 3,909,051 | |

3.5 数値解析例

本節では、前節 3.4 で提案した手法を用いて、都市モデルへの応用を試みる。具体的には、(i) W を H で挟み込んだ H - W - H 線形都市モデル、(ii)(i) の拡張である H - W - H - W - H 線形都市モデル、および (iii) W を H で包み込んだ H - W - H 平面都市モデルを対象モデルとし、各々の都市モデルにおける職住分布の最適配置を導出する。

求解にあたっての計算機環境は、CPU: Intel(R) Core(TM) i7-5820K(3.30GHz)、実装メモリ (RAM): 32.0GB の計算機で、IBM ILOG CPLEX 12.6^[5]を用いた。当該ソフトウェアは数理計画法および制約プログラミングを使用した線型計画問題に特化したソルバーであり、本研究のモデルを適用するにあたり最適であると判断した。

3.5.1 移動コストを最小化する職住分布の最適配置

3.5.1.1 H - W - H 線形都市モデル

W における建物ノード数 $I = 10$ 、 H における建物ノード数 $J = 10$ 、各ノードにおける容量制約を 1.00 と設定し、各建物ノードを線形に配置した計 20 ノードからなる線形都市モデルを図 3.2 に示す。 H を $J_1 = 5$ 、 $J_2 = 5$ と 2 つに分割し、 W を挟み込む構造になっている。

都市モデルにおける人口 T 、業務移動頻度 α をそれぞれ変化させた場合における職住分布の最適配置が図 3.3 である。まず、 T を 4.5, 5.5, 6.5 の 3 パタンとし、 $\alpha = 0.00$ 、つまり業務移動コストを考慮に入れず、通勤移動コストのみが都市モデルに存在する状態を基準とする (図 3.4 (a)~(c))。容量制約は 1.00 と設定しているため都市モデルに入りきる人口は 10 であり、 W 、 H それぞれにおいて 45~

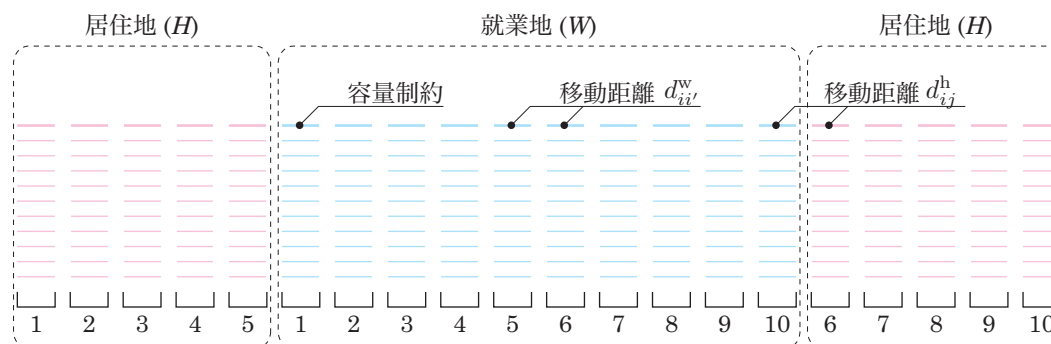


図 3.2 H - W - H 線形都市モデル

[5] Research Professor Robert E. Bixby(Rice University) によって開発され、1988 年に CPLEX Optimization Inc. によって提供された。1997 年に ILOG に吸収されたのち、2009 年には ILOG の親会社である IBM に吸収され、数理計画問題を解く最適化ソフトウェアとして開発が続けられている。これより以降、本研究における線型計画問題はここで述べた計算機環境で求解を行っている。

65%の人が都市モデルに存在するという設定である。

いま、 $\alpha = 0.00 \sim 1.25$ においては、 T , α の値に依らず W は 2 つに分かれ、中心部に人が配置されることはない。 H と接する境界のノードに人が配置され、あるノードが容量制約まで達すると、一つ内側のノードに人が配置されていく状態が示されている。 $\alpha = 0.00$ と $\alpha = 1.00, 1.25$ の最適配置が同じであるということは、総コストにおける業務移動コストが占める割合が低く、職住形態に影響を及ぼしていないことが予想される。これは W と H の境界線をもって対称に人が配置されていることから分かり、特に $\alpha = 0.00$ の場合には H - W - H 都市モデルの中に 2 つの独立した就業・居住地の集合が入り子状のように形成されている。

α が 1.25~1.50 まで上昇すると、総コストに占める業務移動コストの比率が高くなり、職住分布に変化が起きる (図 3.4 (j)(k)(o))。このとき W のすべてのノードに人が配置され、通勤移動コストと業務移動コストがバランスしている状態になるが、 H - W - H の線形都市のため自由度が低く、 W , H とどちらかに振れた職住配置をとる。その場合には少なからず gap が生じ、 $T = 4.5, 5.5, 6.5$ においてそれぞれ $\text{gap}(j)=0.189660$, $\text{gap}(k)=0.019210$, $\text{gap}(o)=0.074265$ を生じさせている。さらに α を高くすると業務移動コストが重視される都市モデルとなり、 W は一極に集中するよう変化する。ただし注目すべきは $T = 4.5$ の場合、つまり J_1 もしくは J_2 にすべての人が包含される場合においても (J_1, J_2 とも $T = 5.0$ まで包含可能である) H は一極に集中することはない。これは移動コストの算出において、業務移動コストのみによって職住分布が決まる訳ではなく、通勤移動コストと業務移動コストの双方が必ず影響を及ぼしていることを示しており、移動コストを考える場合において業務移動コストが必要であることを明らかにしている。例として図 3.4 (m) の場合を考えてみると、5 ノード目には容量制約まで人が居住し、20 ノード目には居住者が 0 の場合であるが、就業地への距離を考えると 20 ノードと比べて 5 ノード目の方が距離が小さいため、 W は一極に集中するものの H は一極に集中しないことが明らかとなっている。さらに α を高くしても H - W - H 線形都市モデルにおける職住分布は変化せず、最適配置の終局状態であることが分かる。

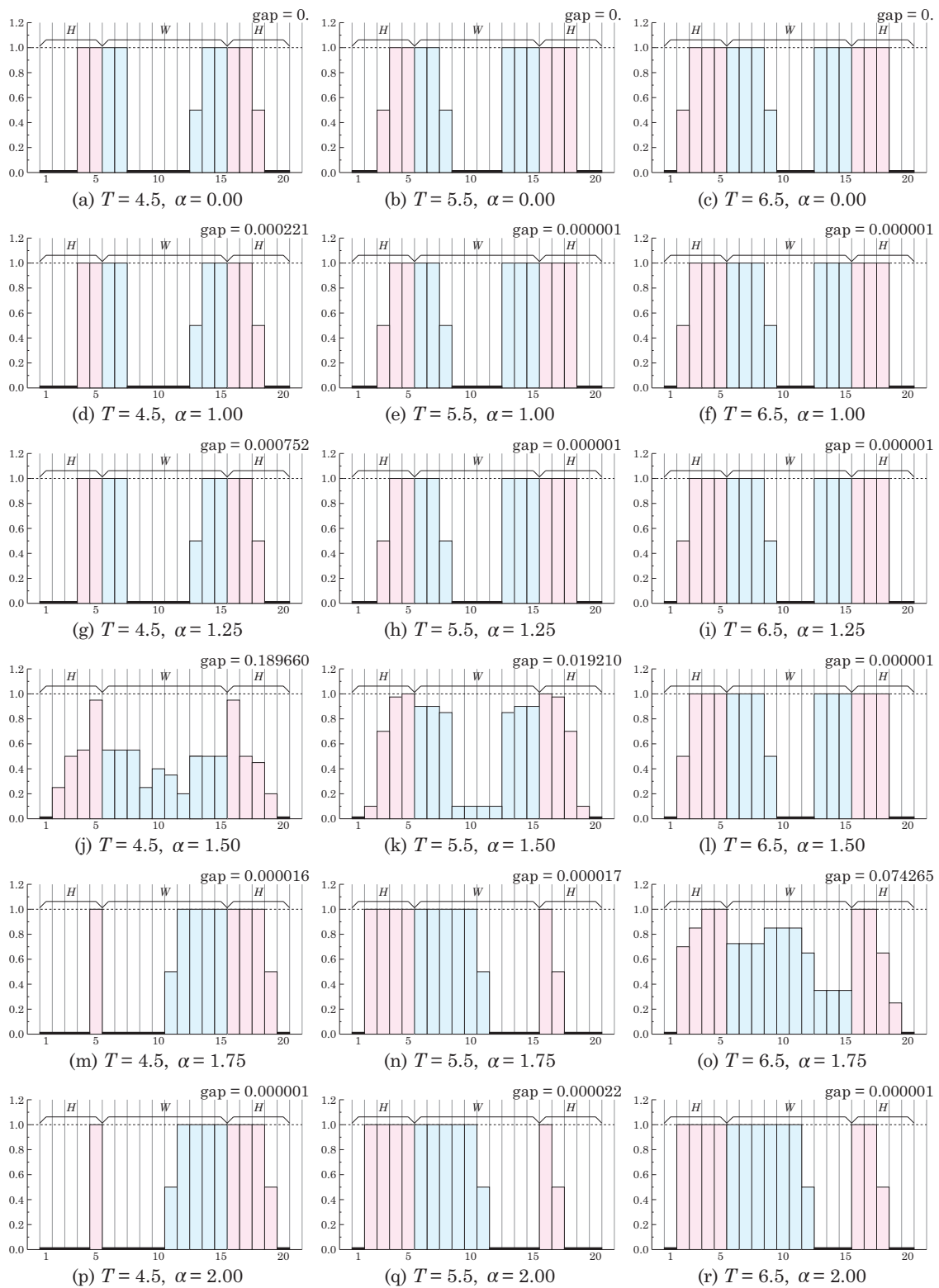


図 3.3 H - W - H 線形都市モデルにおける最適配置

3.5.1.2 H-W-H-W-H 線形都市モデル

W における建物ノード数 $I = 10$, H における建物ノード数 $J = 15$, 各ノードにおける容量制約を 1.00 と設定し, 各建物ノードを線形に配置した計 25 ノードからなる線形都市モデルを図 3.4 に示す. H を $J_1 = 5, J_2 = 5, J_3 = 5$ と 3 つに, W を $W_1 = 5, W_2 = 5$ と 2 つに分割し, W と H が交互に配置される構造になっている.

都市モデルにおける人口 T , 業務移動頻度 α をそれぞれ変化させた場合における職住分布の最適配置が図 3.5 である. 3.5.1.1 と同様に, T を 4.5, 5.5, 6.5 の 3 パタンとし, $\alpha = 0.00$ の通勤移動コストのみが都市モデルに存在する状態を基準とする (図 3.5 (a)~(c)). $\alpha = 0.00, 0.25$ の場合は業務移動コストが小さく, W_1, W_2 と H との境界ノードに容量制約まで人が配置され, 溢れ出た人が内側のノードへと配置されている. この職住形態は図 3.4 (a)~(c) と同じ形態をとり, $\alpha = 0.00$ のとき $H-W$ の繰り返しが複数回行われた場合でも, 職住近接配置をとることが示されている. ここで, α の値を大きくしていくと, 3.5.1.1 でも生じたバランス状態 (図 3.5 (g)(h)(l)) を経て, W の就業地分布は一極に集中し, $T = 5.5, 6.5$ の場合には W_2 に取りきれなかった人が, W_1 に溢れ出して配置されることが分かる. 3.5.1.1 と 3.5.1.2 の都市モデルにおいて最も異なる点は, $H-W-H$ の繰り返しがあるかどうかであるが, α 値が低い場合はどちらの就業地分布の分散配置され, α が大きくなればなるほど T に関わらず一極集中の配置をとり, 居住地分布は就業地を囲うように配置される. このことから推察されるのは, 線形都市モデルにおいては職住分布の最適配置に大きく関与するパラメータは T ではなく α だということである.

また, 図 3.5 (g)(l) において少なからず gap が生じ, $\text{gap}(g)=0.166874, \text{gap}(l)=0.083558$ をとった.

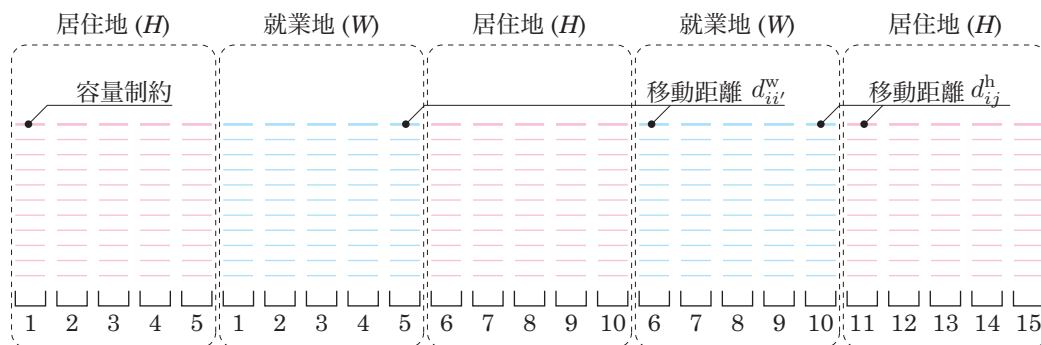


図 3.4 H-W-H-W-H 線形都市モデル

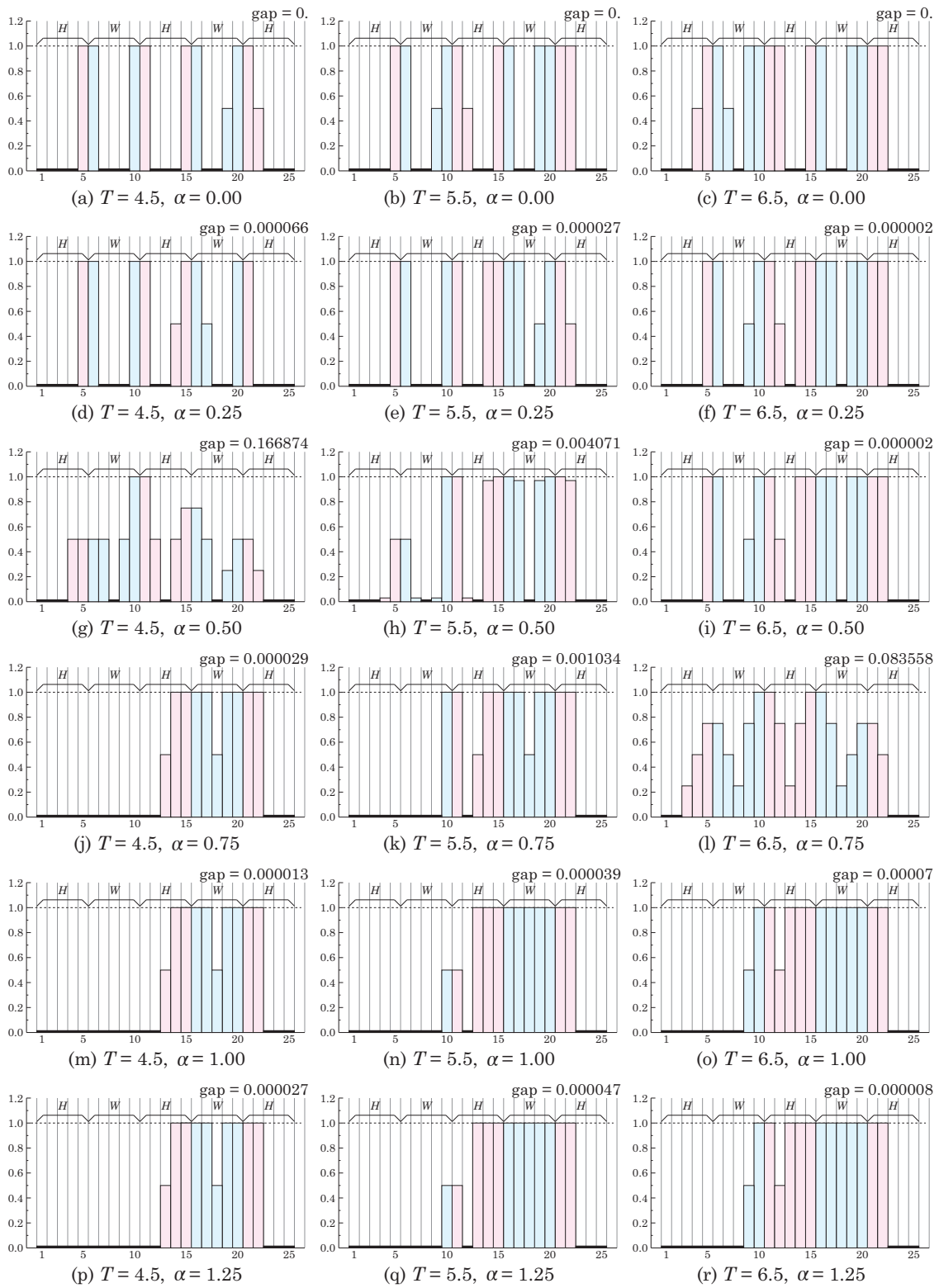


図 3.5 H - W - H - W - H 線形都市モデルにおける最適配置

3.5.1.3 H-W-H平面都市モデル

都市モデルを線形都市から平面都市へと拡張して、職住分布の最適配置を導出する。またここで扱う平面都市モデルは、実空間の都市を街路ネットワークに置き換えたノードとエッジからなるモデルではなく、建物ノードと建物ノード間のエッジしかない平面都市モデルであるため、コストの最小化問題を解くにあたっては、3.3で導入した定数ベクトル \mathbf{c} および正方行列 \mathbf{Q} の決定要因である d_{ij}^h , $d_{i'i'}^w$ はそれぞれユークリッド距離^[6]を用いることとする。平面都市モデルは、中心部に W を配置し、その周辺に H を配置させるモデルであり、49 ノード (7×7) からなるグリッド都市モデルとする (図 3.6)。

平面都市モデルとして、 W における建物ノード数 $I = 9$ (3×3), H における建物ノード数 $J = 40$ (7×7 - 3×3), W における容量制約を 1.00, H における容量制約を 0.25 と設定した。 W と H の容量制約が異なるのは、 I と J が大きく異なるためであり、 W の全ての建物ノードに容量制約まで人が配置された場合は $T = 9.00$, H においては $T = 10.00$ として標準化を行っている。 T 値, α 値をそれぞれ変化させた場合における職住分布の最適配置を図 3.7 に示す。

3.5.1.1, 3.5.1.2 と同様に、 $\alpha = 0.00$ の通勤移動コストのみが都市モデルに存在する場合を基準とする (図 3.7 (a)~(c))。 $\alpha = 0.00$ の場合は W の中心には人が配置されず、 H と 3 点で接している W の端ノードに容量制約まで人が配置される。このとき業務移動コストが都市モデル内に存在せず通勤移動コストのみが存在するため、 H においては W を囲う一列目には全ての建物ノードにおいて容量制約まで

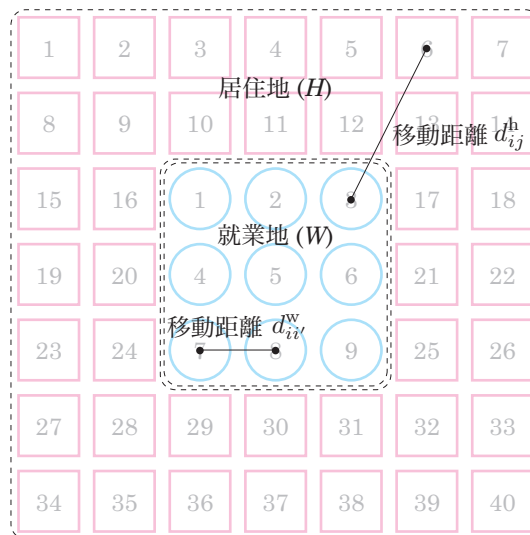


図 3.6 H-W-H平面都市モデル

[6] ノード $w_i(x_i, y_i)$ とノード $h_j(x_j, y_j)$ を考えたとき、 $d_{ij}^h = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ である。これは H-W-H 平面都市モデルにおいてすべてのノードの大きさが同じであることからユークリッド距離を用いた移動コストの算出に問題がないと判断できるからである。実空間の分析の際には各エリアによって領域の規模が異なるため、空間相互作用モデルで用いられる領域間距離によって数値解析を行うが、詳細は第 2 章を参照されたい。

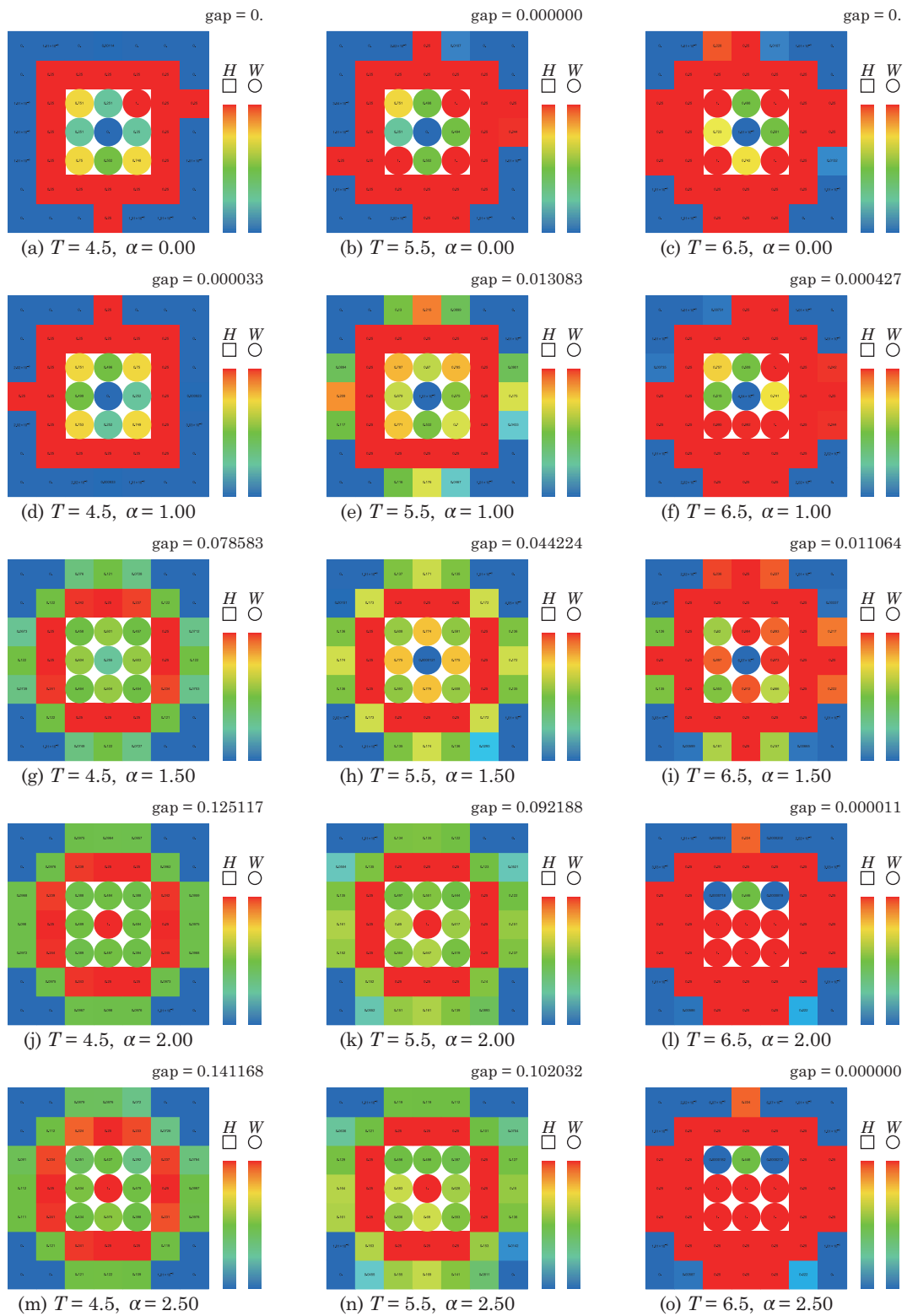


図 3.7 H - W - H 平面都市モデルにおける最適配置

人が配置される。 $\alpha = 1.00$ まで α を上昇させると、 W の中心は空のままであるが、残りの 8 ノード間の業務移動コストが増加し、 $T = 4.5$, $\alpha = 1.50$ においては W の就業者の配置はほぼ同じ状態となる (図 3.7 (g))。 $\alpha = 2.00, 2.50$ までさらに増加させると、職住分布は変化せず最適配置の終局状態を示すようになる。このとき、線形都市モデルでは低かった W の中心部の人の配置が、平面都市モデルでは容量制約まで人が配置され周辺部において低い値をとつ凸型の職住形態をとる。また、 T が大きい場合は W の最適配置は対称性をもたず、いずれかの方向に偏向して配置され、その配置に追従するように H も配置されることが読みとれる。 T がどの辺りから偏向配置されるかについては、繰り返し計算などによる職住配置の導出であれば、 T の変化を追いかけることによって可能であるが、図 3.7 は一度の計算で求められた厳密解による数値解析例であり、具体的な T の値を求めることは困難である。

平面都市モデルにおいて対称性をとらずに偏向凸型の職住形態をとるということは、都市内の移動から職住形態を考えるにあたっては幾何学的な同心円上の都市を形成しない方が最適であるということであり、これは実空間と照らし合わせた場合においても直感と合致する結果を示している。

3.5.2 最適配置における T 値, α 値の定性的特性

線形都市, 平面都市それぞれにおいて, T , α の変動により最適分布配置が変動することが示された. ここでは, 職住分布における T , α のそれぞれの特性を記述する.

T は都市モデルにおける総人数であることから, T が増加することは都市人口が増加することと同義である. しかしながら, 既述したように我が国では過疎化が進む地域の人口は減少することが推定されており, 多くの都市において T は減少傾向にあると言える. 図 3.3, 図 3.5, 図 3.7 が示すように, T が減少すると, 都市の拡がりが縮小することが分かり, 移動コストを最小化する視点から見た場合には, 都市構造をコンパクトシティ型へ変化させることが最適な職住分布配置であると考えられる. ここで重要なのは α の推定である. α が低い場合, つまり業務移動が少ない場合は, 移動コストを最小化する職住分布は分散配置され, 都市は広域にわたると考えられる. 人口の増減や就業形態の変化がもたらす都市の時間変化を考える場合において, 考慮しなければならない事項として, 今後ますます情報化社会が加速するということが挙げられる. 情報化により通勤移動の交通形態が変化することは, 生田 (1990) や今田 (2012) らによって示されており, 本章で取り扱った都市モデルのように必ずしも全ての人が $W-H$ の通勤移動を行うことは考えにくい. また, 今田によると,

情報と交通が補完関係にある場合には, 人や物のモビリティは増加する.

ことが示されている. つまり, 人や物が α に包含されると考えるならば, 都市における α は増加すると予想される. したがって, 実空間の分析に本章の SO モデルを用いる際には, T の減少と α の増加を考慮し, 今後の職住形態のあり方を考察しなければならないであろう. 本章では業務移動頻度として α を一定として定義したが, 移動の重要度や緊急性などを付加して再定義し直すことで, すべてを等価に扱っていた業務移動を, 移動の種類ごとに重みをつけて評価し, 新たな職住分布の最適配置を求めることが可能になると考えられる.

3.6 本章のまとめ

本章では、就業地と居住地から構成される容量制約付き都市モデルにおいて、通勤移動と業務移動からなる移動コストの最小化問題が非凸2次計画問題であることを記述し、線形緩和法を用いることで線型計画問題へと帰着させ、最適解を導出する新たな手法を提案している。具体的には空間相互作用モデルの考え方を援用して業務移動コストを定式化し、さらに非凸2次計画問題の場合でも実行可能領域を妥当な2次不等式・等式群によって線型化を行い、職住分布の最適解を算出することを試みた。加えて算出した最適解から T および α の定性的特性を示し、最適配置を導出することで時間変化を追いかけるとして効果的である知見を得ている。

本章の3都市モデルにおける最適配置においてほぼ最適解 ($\text{gap} \simeq 0.000$) が得られたが、少なからず gap を生じた。これは線形緩和を行った際に、式 (3.35) で定めた実行可能領域 $[\mathcal{D}]_L^2$ が、導入した問題 (3.22) の実行可能領域 \mathcal{D} よりも明らかに大きく緩和され、そのために生じた最適解導出の gap だと推察される (図 3.8 参照)。しかしながら gap が生じる職住形態は通勤移動コストと業務移動コストがバランス状態であるときに限られるため、本章で提案した都市モデルおよび数理モデルは、職住分布の最適配置を導出する手法としては有効であると考えられる。

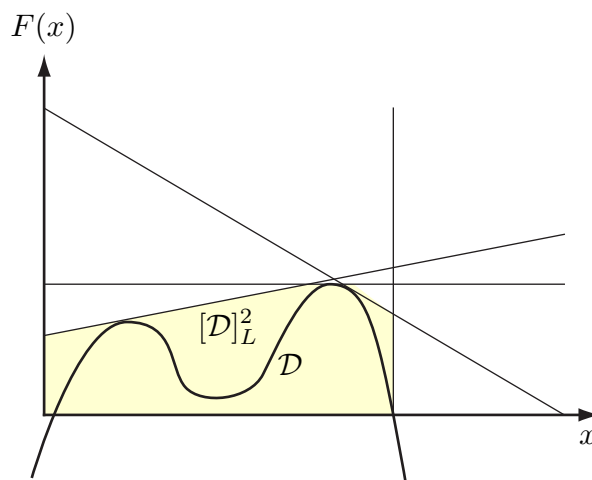


図 3.8 実行可能領域 $[\mathcal{D}]_L^2$ と \mathcal{D} の概念図

第 4 章 都市内の移動と集積による職住分布の システム最適配置

- 4.1 はじめに
- 4.2 移動・不快感コストを最小化する職住分布最適問題の定式化
- 4.3 2次計画問題としての定式化
- 4.4 提案モデルの最適解導出
- 4.5 数値解析例
- 4.6 本章のまとめ

第4章

都市内の移動と集積による職住分布のシステム最適配置

4.1 はじめに

本章では、第3章で定式化した移動コストを最小化する数理モデルを拡張し、移動コストに加え不快感コストを考慮した職住分布の最適配置を導出する。不快感コストは建物ノード自体にかかるコストとして考えられるものであり、施設間の移動によって発生する移動コストとは根本的に性質を異とするコストである。不快感コストはあるノードにおける容量制約から定まる密度から算出出来るものとする。あるノード k における不快感は、密度 \times そのノードに包含される人数と定義される。

本章の構成は以下の通りである。第2節において都市モデルを与え、第3章の移動コストに加えて【不快感コスト】 s_0 を導出する。第3節では【不快感コスト】 s_0 を考慮した2次計画問題としての定式化を行う。本節においても線形緩和法を用いるが、その詳細は前章3.4を参照されたい。第4節では提案モデルの最適解導出を行い、続く第5章において仮想的な都市モデルにおける数値解析例を算出し、実証分析を行う。また新たに導入した不快感パラメータ β の特性を記述する。

4.2 移動・不快感コストを最小化する職住分布最適配置問題の定式化

4.2.1 都市モデル

いま、仮想都市モデルとして、 I 個の建物ノード ($1 \leq i \leq I$) からなる就業地 (W) と、 J 個の建物ノード ($1 \leq j \leq J$) からなる居住地 (H) を考える。現実の都市では多様な属性をもった建物が存在するが、モデルをより簡潔に定式化することを考慮し、都市モデル内には W と H の 2 属性のみが存在するものと仮定する。また、提案する都市モデルは独立しているものと見なし、 $W - H$ を移動する都市モデル内の総人数は T (=定数) とし、他の都市間との流出入はないものとみなす。

いま、与えた都市モデルにおいて、各建物ノードに容量制約を設定する。その上で、通勤移動コスト・業務移動コストおよび不快感コストを最小化する職住分布の最適配置を導出したい。そのための準備として、

$$T = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J), \quad (3.1 \text{ 再掲})$$

$$w_i = \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I), \quad (3.2 \text{ 再掲})$$

$$h_j = \sum_{i=1}^I t_{ij}^h \quad (1 \leq j \leq J), \quad (3.3 \text{ 再掲})$$

$$t_{ij}^h \geq 0 \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J) \quad (3.4 \text{ 再掲})$$

を想定する。ただし、 t_{ij}^h はノード $i-j$ 間の通勤移動人数、 w_i はノード i における就業人数、 h_j はノード j における居住人数をそれぞれ表すものであり、 T は定数であるとする。さらに、容量制約のアイディアをモデルに導入するために、以下の不等式群を仮定する：

$$0 \leq w_i \leq W_i \quad (1 \leq i \leq I), \quad (3.5 \text{ 再掲})$$

$$0 \leq h_j \leq H_j \quad (1 \leq j \leq J). \quad (3.6 \text{ 再掲})$$

このとき、 W_i 、 H_j はそれぞれ W 、 H における各ノードの容量を表す。

4.2.2 都市モデル内の移動・不快感コスト

ここで、通勤移動コスト、業務移動コスト、不快感コストからなるコストの定式化を行う。不快感コストは、各ノードにおける就業・居住密度に比例するものと仮定する。システム最適配分モデルにおける通勤移動コスト、業務移動コストは前章において導出した。不快感コストは上述の通り、就業・居住密度に比例するものであり、就業地において任意のノード i における容量制約を W_i とし、そのノードに就業する総人数を w_i としたとき、密度は $\frac{w_i}{W_i}$ である。このとき、ノード n で就業する人々の不快感

コストは w_i と密度を掛け合わせたものとなり、居住地においても同様である。したがってノードの集合である都市モデル全体の不快感コストを求めれば良いので、それぞれのコストは次式の通りとなる：

$$\text{【通勤移動コスト】}_{\text{SO}} = 2 \times \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \cdot d_{ij}^h, \quad (3.7 \text{ 再掲})$$

$$\text{【業務移動コスト】}_{\text{SO}} = \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I w_i \cdot w_{i'} \cdot \frac{\alpha}{T} \cdot d_{ii'}^w, \quad (3.9 \text{ 再掲})$$

$$\begin{aligned} \text{【不快感コスト】}_{\text{SO}} &= \beta \left(\frac{w_1}{W_1} w_1 + \frac{w_2}{W_2} w_2 + \cdots + \frac{w_I}{W_I} w_I \right) \\ &\quad + \beta \left(\frac{h_1}{H_1} h_1 + \frac{h_2}{H_2} h_2 + \cdots + \frac{h_J}{H_J} h_J \right) \\ &= \sum_{i=1}^I \beta \cdot \frac{w_i}{W_i} \cdot w_i + \sum_{j=1}^J \beta \cdot \frac{h_j}{H_j} \cdot h_j. \end{aligned} \quad (4.1)$$

このとき、 α は業務移動頻度、 $d_{ii'}^w$ は業務移動距離、 β は不快感パラメータを表す。本章における都市モデルとゾーンあたりの移動・不快感コストの概念図を図 4.1 に示す。

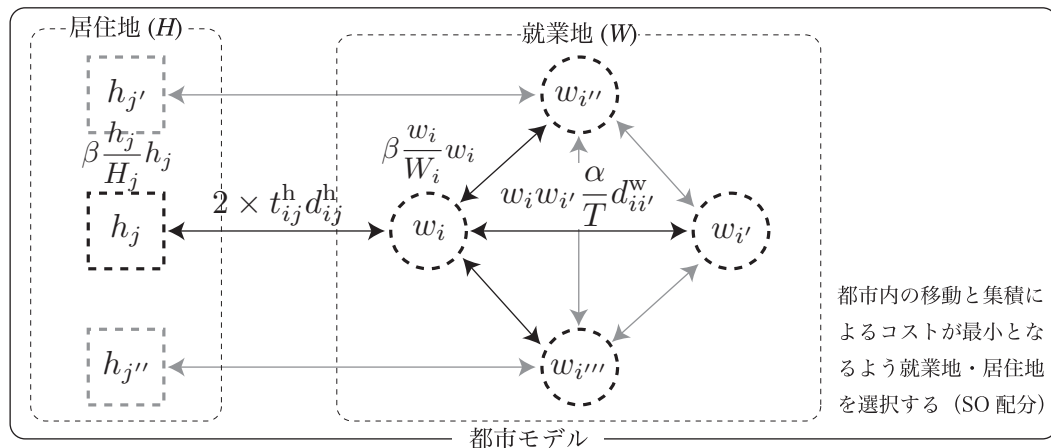


図 4.1 都市モデルとゾーンあたりの移動・不快感コストの概念図

4.3 2次計画問題としての定式化

さて、式 (3.7), (3.9), (4.1) の合計である都市内コストを式 (3.1)~(3.6) の制約のもとで最小化する職住分布配置を求めたい。ここで、 $(I + J + I \times J)$ 次元変数ベクトル \mathbf{x} , $(I + J + I \times J)$ 次元定数ベクトル \mathbf{c} , $(I + J + I \times J) \times (I + J + I \times J)$ の正方行列 \mathbf{Q} を導入する。ただし、それぞれの要素を、

$$x_k = \begin{cases} w_k & (1 \leq k \leq I) \\ h_{k-I} & (I + 1 \leq k \leq I + J), \\ t_{ij}^h & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4.2)$$

$$c_k = \begin{cases} 0 & (1 \leq k \leq I) \\ 0 & (I + 1 \leq k \leq I + J), \\ d_{ij}^h & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$Q_{kl} = \begin{cases} \frac{\alpha}{T} \cdot d_{kl}^w + \delta_{kl} \frac{\beta}{W_k} & (1 \leq k \leq I, 1 \leq l \leq I) \\ \frac{\beta}{H_k} & (I + 1 \leq k = l \leq I + J) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4.4)$$

とする。式 (4.4) における δ_{kl} は Kronecker のデルタ^[1]である。したがって、都市モデルにおける総コストの目的関数 $F(\mathbf{x})$ は式 (3.7), (3.9), (4.1) より、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= \text{式 (3.7)} + \text{式 (3.9)} + \text{式 (4.1)} \\ &= 2 \times \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \cdot d_{ij}^h + \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I w_i \cdot w_{i'} \cdot \frac{\alpha}{T} \cdot d_{ii'}^w + \sum_{i=1}^I \beta \cdot \frac{w_i}{W_i} \cdot w_i + \sum_{j=1}^J \beta \cdot \frac{h_j}{H_j} \cdot h_j \\ &= \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.5)$$

となる。式 (4.5) によって定式化された都市モデルにおける総コストは、式 (3.15) と同じ線型制約のもとでの2次計画問題となる。

[1] 集合 \mathbf{N} を構成する i, j に対して、 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ の性質をもつ関数であり、 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ の対角成分の特性関数である。例として単位行列は $\delta_{ij} = 1$ である。

4.4 提案モデルの最適解導出

以上のことにより，4.3において提案した都市モデル内の移動コストと不快感コストの目的関数 $F(x)$ を最小化する問題は，

$$\begin{array}{l}
 \text{minimize} \quad F(x) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
 \text{subject to} \quad 0 \leq w_i \leq W_i \quad (1 \leq i \leq I) \\
 \quad \quad \quad 0 \leq h_j \leq H_j \quad (1 \leq j \leq J) \\
 \quad \quad \quad T = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J) \\
 \quad \quad \quad w_i = \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I) \\
 \quad \quad \quad h_j = \sum_{i=1}^I t_{ij}^h \quad (1 \leq j \leq J) \\
 \quad \quad \quad 0 \leq t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J)
 \end{array} \tag{3.37 再掲}$$

となる．不快感コストを導入した都市モデルにおいても，最小化問題が2次計画問題として定式化が可能であることが示されている．

さて，第3章において，2パタンの線形都市において最適解を導出したが，その数値解析例および分析において $H-W-H$ 都市モデル， $H-W-H-W-H$ 都市モデルともパラメータの変化による職住分布構造が同じような変化を表すことが明らかとなっている．そのため本章では (i) $H-W-H$ 線形都市モデルと (ii) $H-W-H$ 平面都市モデルの2モデルを扱って実証分析を行う．2モデルにおける， I, J の組み合わせによる変数と制約式の総数を表4.1に示す．

表4.1 I と J の組み合わせによる変数と制約式の総数 (SO モデル)

| I | J | 変数 | 制約式 | 4.5 数値解析例における都市モデル |
|-----|-----|--------|---------|-------------------------|
| 10 | 10 | 7,380 | 12,411 | 4.5.1.1 $H-W-H$ 線形都市モデル |
| 9 | 40 | 84,254 | 125,611 | 4.5.1.2 $H-W-H$ 平面都市モデル |

表4.1と表3.1を比べてみると，変数，制約式とも同じであることが分かる．つまり I と J が同じであり，2次項が2次計画問題として定式化が可能であれば，目的関数を求める問題規模は同じであるということである．

4.5 数値解析例

本節では前節までに提案した都市モデルにおいて、数値解析例として、(i) $H-W-H$ 線形都市モデルと、(ii) $H-W-H$ 平面都市モデルを対象モデルとし、最適配置を導出する実証分析を試みる。

4.5.1 移動・不快感コストを最小化する職住分布の最適配置

4.5.1.1 $H-W-H$ 線形都市

W における建物ノード数 $I = 10$ 、 H における建物ノード数 $J = 10$ 、各ノードにおける容量制約を 1.00 とし、各建物ノードを線形に配置した計 20 ノードからなる線形都市モデルを図 4.2 に再掲する。 H を $J_1 = 5$ 、 $J_2 = 5$ と 2 つに分割し、 W を挟み込む構造となっている。都市モデルにおける人口 $T = 5.5$ と固定し、すなわち H 、 W において 55% の人が都市モデルに存在するとした上で、業務移動頻度 α 、不快感パラメータ β をそれぞれ変化させた場合における職住分布の最適配置が図 4.3 である。 α は 1.00~3.00 までを、 β は 1.00~6.00 までを変化させている。

$\beta = 1.00$ のときに α を変動させると (図 4.3 (a)~(c))、 α が大きくなれば就業地が 1 つにまとまること分かる。これは業務移動コストが大きくなれば、就業地が分散しているよりも集中している方が都市モデル全体のコストが低くなることが示されている。ここで、図 3.3(e), (q) と比較すると、不快感コストを考慮しているために容量制約まで人が含まれる就業地分布にならないことを示している。 β を大きくすると、不快感コストが増加するため、容量制約まで人が配置されていた就業地が分散され、就業地密度が平均化される。業務移動コスト、不快感コストが増大しても、通勤移動コストが存在するために、就業地と接している居住地ノードには容量制約まで人が配置される (図 4.3 (d)~(i))。さらに不快感コストを増加させると、通勤移動コスト、業務移動コストよりも不快感コストが占める割合が大きくなり、就業地・居住地とも容量制約まで人が配置されることがない。 $\beta = 4.00$ 以降、 β を増加させても、職住分布の最適配置は変化せず、各 α における収束解が導出されていると考えられる。

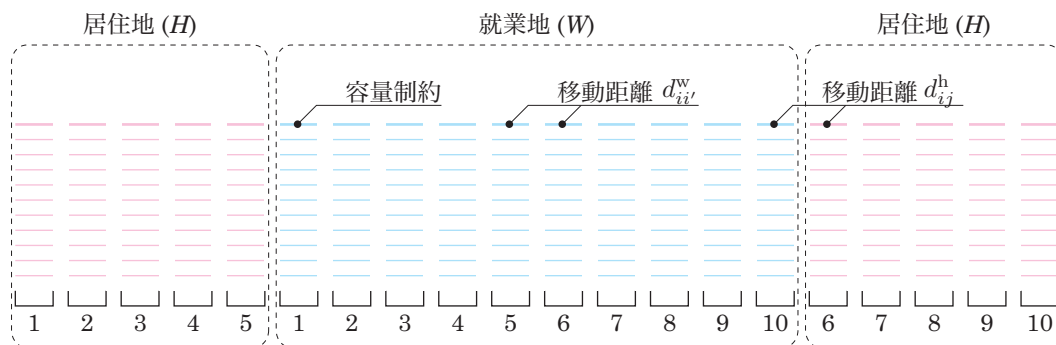


図 4.2 $H-W-H$ 線形都市モデル

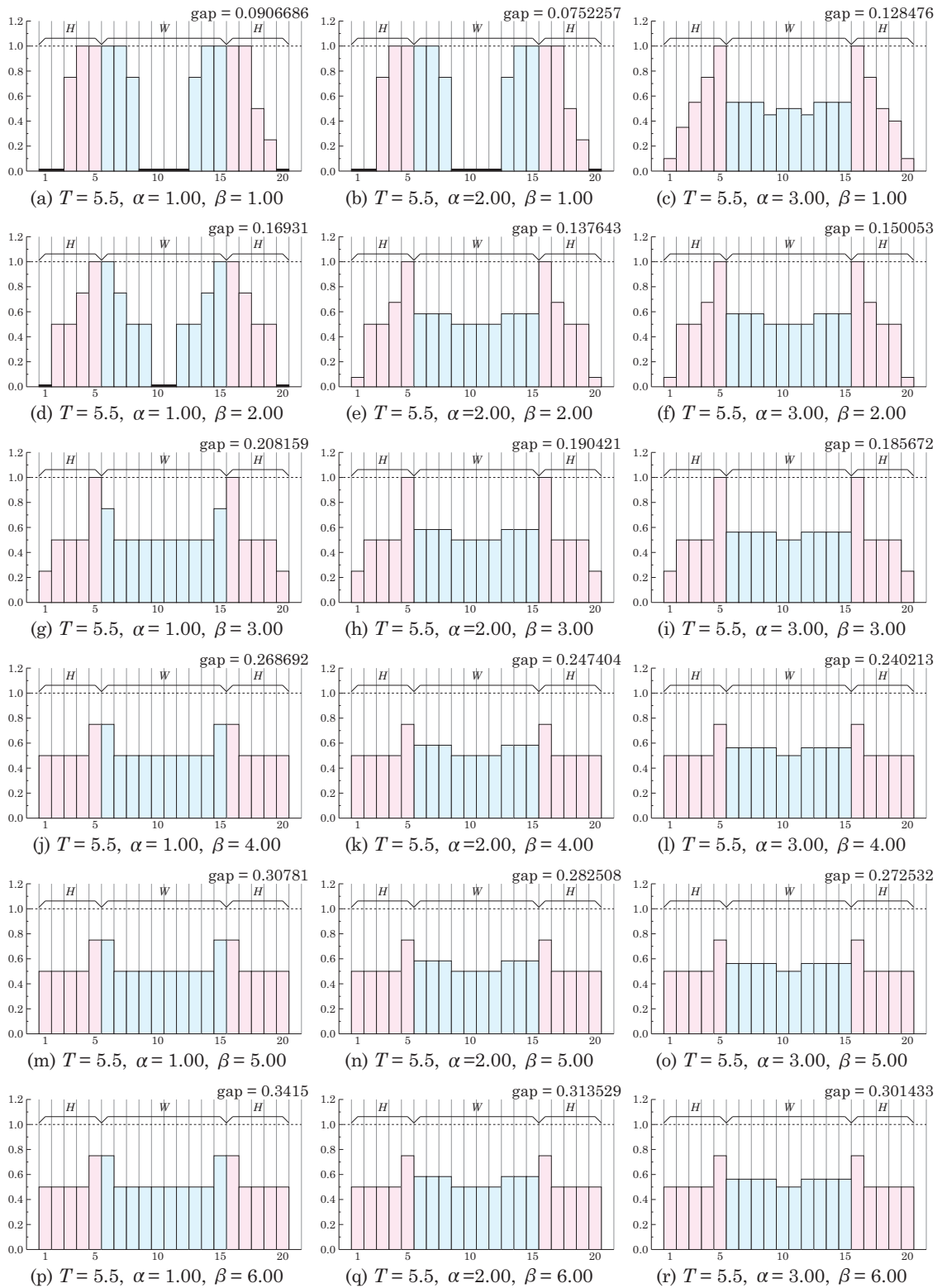


図 4.3 H - W - H 線形都市モデルにおける最適配置

4.5.1.2 $H-W-H$ 平面都市

都市モデルを $H-W-H$ 平面都市モデルに拡張して、職住分布の最適配置を導出したい。また、第3章で既述したように移動コストの算出における距離はユークリッド距離を用いることとする。

平面都市モデルとして、 W における建物ノード数 $I = 9(3 \times 3)$ 、 H における建物ノード数 $J = 40(7 \times 7 - 3 \times 3)$ 、 W における容量制約を 1.00、 H における容量制約を 0.25 と設定したときに職住分布の最適配置が図 4.5 である。図 4.5 (a) は図 3.7 (k) に不快感コストを考慮した最適配置であるが、不快感コストを考慮することで就業地の中心部には人が配置されず、居住地では就業地を囲むノードにすべて容量制約まで人が配置されている。 $\beta = 0.50$ のまま $\alpha = 4.00$ にすると業務移動コストが増加するため、就業地の中心部には逆に容量制約まで人が配置される変化を示す (図 4.5 (c))。 α が増大すれば就業地の中心部は容量制約まで人が配置される挙動は、図 3.7 でも示されているが、図 4.5 では $\beta = 0.50$ の場合にのみその挙動を示し、 $\beta = 1.00$ 以上になると総コストに占める不快感コストが大きくなるため就業地において容量制約まで人が配置されることがない。 β が 2.00 以上になると α の値によらず職住分布の最適配置は収束的な状態を示し、就業地においてはほぼ全てのノードに配置される人口が平均化し、居住地が 4 ノードを除いて平均化される。これは $H-W-H$ 線形都市の結果 (図 4.3 (j)~(r)) と同様の結果を示しており、現実との比較を考えると、都市内のコストを考慮する際にはノード自体がもつコスト (不快感コスト) を考慮する必要があることを明らかにしている。

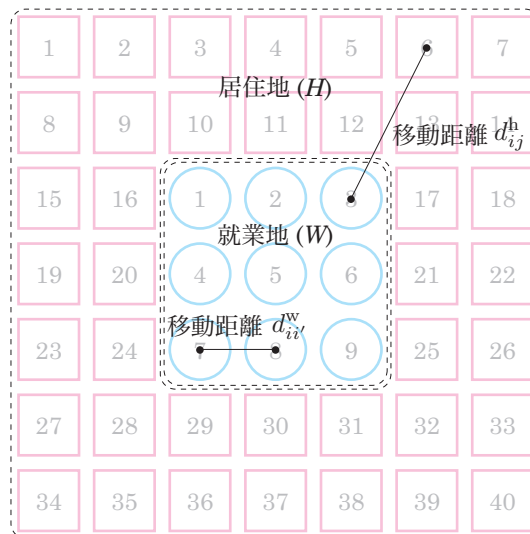


図 4.4 $H-W-H$ 平面都市モデル

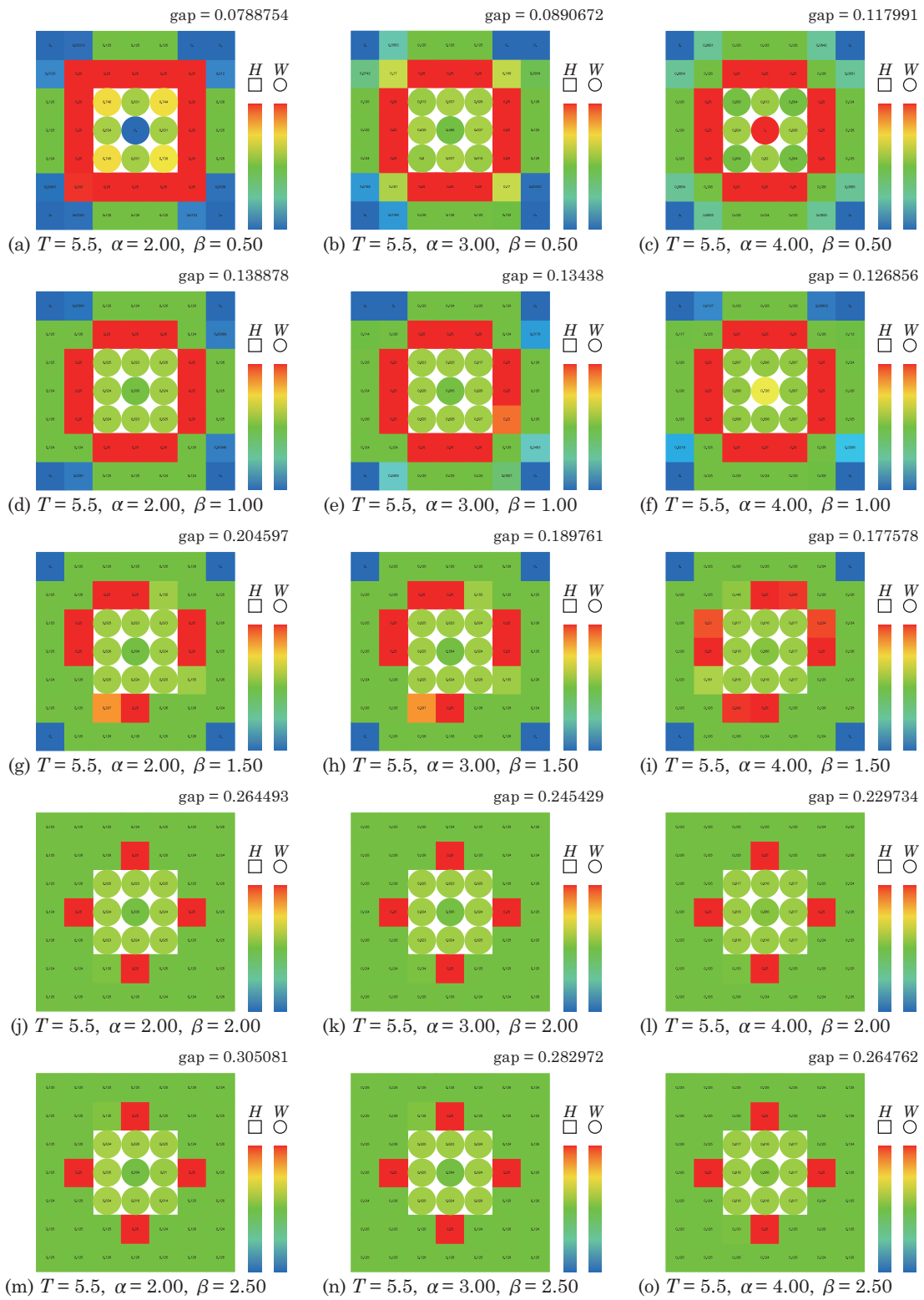


図 4.5 H - W - H 平面都市モデルにおける最適配置

4.5.2 最適配置における β 値の定性的特性

線形都市モデル、平面都市モデルとも、 α を増大させると就業地は集中し平均化され、 β を増大させると居住地は広がりを持つ分布となることが示されている。

ここで改めて移動コストと不快感コストを算出する式 (3.7), (3.9), (4.1) をみると、式 (3.7), (3.9) は距離要素が含まれているが式 (4.1) には距離要素が含まれていない。【通勤移動コスト】 s_0 、【業務移動コスト】 s_0 の単位は [人数]×[距離] であるから、本章におけるコストの単位は [人数]×[距離] である。そのため、業務移動頻度を表す α の単位はなく、強いて挙げるとするならば [回] である。同様に【不快感コスト】 s_0 の単位を求めると、 β の単位は [距離] ということになる。

不快感コストを算出する際に導入した不快感パラメータがもつ性質が [距離] というのは、ノード自体がもつコストを距離の概念で表されるということであり、 β が大きくなれば都市モデルは広がりをもつ分布となることから距離要素として扱うのは妥当であると考えられる。もちろん、 β が距離の性質を含むからといって、 α を固定し β を増大させたときの最適配置は、3.5 の数値解析から導出された図 3.3 や図 3.7 と同様の職住分布の挙動を示すものではない。 β は距離の性質を含んだパラメータであると同時に、容量制約を本質的に含んだパラメータでもある。第 3 章で求めた職住分布の最適配置でも容量制約を考慮してはいたが、容量制約まで人が配置されるノードが多かったのも事実であり、直感的に就業地はまだしも居住地において容量制約まで人が配置されているノードとまったく配置されない空のノードがあるという状態は現実的ではない。その意味において、都市モデル内のコストによって職住分布配置を導出する際には、容量制約を考慮し、ノード自体の集積による不快感コストを考慮する必要があることを数値解析例は明らかにしている。

4.6 本章のまとめ

本章では、就業地と居住地から構成される容量制約付き都市モデルにおいて、通勤移動コスト、業務移動コストに加え、不快感コストを新たに導入した都市内の総コストの最小化問題が第3章と同じく2次計画問題として定式化することが可能であることを明らかにした。また、数値解析例によって β が容量制約を本質的に含んだパラメータであると同時に、距離の要素を含むパラメータであることを示し、 α 、 β のどちらを変化させても職住分布の最適配置が変化することから、パラメータ調整によって実空間都市の分析に供せられるモデルであることを示した。第3章と同じく、本都市モデルは人口を定数($T = 5.5$)として扱っており、他の都市間との人口流動によるシステムダイナミクスを考慮していないモデルである。しかしながら都市モデルの収束解が導出できるという意味において、 T を変化させた場合の数値解析も可能であり、時間変化を追いかける手法としても効果的であると考えられる。

数値解析例をみると、線形都市モデル、平面都市モデルの両モデルで多くのgapが生じ、gap値は第3章と比べると大きく算出されている。ここで3.4.1の定理3.1で示しているように、 \mathbf{x} が \mathcal{D} の端点となっていれば $\mathbf{Y} = \mathbf{x}\mathbf{x}^*$ をみたし、gapを生じることはない。しかしながら本章における数値解析では、都市内のコストがバランスした状態のために下界値が最適解よりも低く算出されており、その結果gapが生じていると考えられる。そのため、導出した職住分布の $\text{gap} = 0.30$ としても、導出した解が最適解から30%離れているわけではなく、数値解析例の結果はある程度保証されていると考えられる。

第 5 章 都市内の移動と集積による職住分布の 利用者均衡配置

- 5.1 はじめに
- 5.2 移動・不快感コストを均衡配分する職住分布配置問題の定式化
- 5.3 均衡配分モデルの数理計画問題への定式化
- 5.4 提案モデルの均衡解の導出
- 5.5 数値解析例
- 5.6 本章のまとめ

第5章

都市内の移動と集積による職住分布の利用者均衡配置

5.1 はじめに

第3章および第4章ではシステム最適配分の原則に基づき、職住分布の最適配置を導出した。本章では Wardrop の第1原則である『均衡状態においては、もはやどの利用者也経路を変更することによって自己の旅行時間をそれ以上短縮することはできない』と表現される利用者均衡配分の概念に基づいて職住分布の均衡配置を導出することを試みる。

利用者均衡配分 (UE: User Equilibrium assignment) モデルの均衡配分とは、都市モデルにおけるコストの均衡配分を意味しており、都市モデルにおける人がそれぞれ負担するコストをみな等しくなるよう配分する概念である。実空間に照らし合わせて考えると、人々が移動コストを低減させるために職住が近接している建物ノードを就業地・居住地として選択すると、その建物ノードは自ずと密度が高くなることから、就業・居住環境は悪くなり、不快感コストが増大する。また建物ノードには容量制約を付していることから建物ノードにおける賃貸料が高くなることなどが考えられる。各ノードにおいて容量制約を超えた場合のコストをペナルティコストとして与えると、コストを低減し利益を享受する経済原理から、移動コストの増加以上に不快感コストやペナルティコストを低減しうる場合には、就業地・居住地ノードにおける人々の移動が生じ、最終的に人々が負担するコストがみな等しい状態に落ち着くことが考えられる。そのような職住分布の収束状態を本章では均衡配置と呼ぶこととする。

本章の構成は以下の通りである。第2節において都市モデルを与え、利用者均衡配分における通勤移動コスト、業務移動コスト、不快感コストを導出する。第3節では均衡配分問題を数理計画問題として定式化を行い、第4節では数理計画問題を2次計画問題として定式化を行い、求める均衡解について記述を行った上でラグランジュ乗数値の導出を行う。第5節では仮想的な都市モデルを用いて数値解析例を行い、職住分布の均衡配置を導出する。最後に、均衡配置と最適配置について比較・分析を行い、実空間都市分析への拡張化を図る。

5.2 移動・不快感コストを均衡配分する職住分布配置問題の定式化

5.2.1 都市モデル

本章にて用いる都市モデルは、第3章および第4章と同じく就業地 (W) と居住地 (H) からのみ構成される都市モデルとし、 W は I 個の建物ノード ($1 \leq i \leq I$), H は J 個の建物ノード ($1 \leq j \leq J$) からなる。建物ノードには容量制約を付することも同様であり、提案する都市モデルは独立しているものと仮定し、 $W-H$ 間を移動する総人数は定数 (T) であり、他の都市間との流出入はないものとする。その上で、人々が等コスト原則がみたされるよう、 W, H を同時選択した場合の職住分布の均衡配置を導出したい。第3章、第4章において定式化した総人数の制約式、建物ノードにおける制約式、容量制約に対する制約式は以下の通りである：

$$T = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J), \quad (3.1 \text{ 再掲})$$

$$w_i = \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I), \quad (3.2 \text{ 再掲})$$

$$h_j = \sum_{i=1}^I t_{ij}^h \quad (1 \leq j \leq J), \quad (3.3 \text{ 再掲})$$

$$t_{ij}^h \geq 0 \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J), \quad (3.4 \text{ 再掲})$$

$$0 \leq w_i \leq W_i \quad (1 \leq i \leq I), \quad (3.5 \text{ 再掲})$$

$$0 \leq h_j \leq H_j \quad (1 \leq j \leq J). \quad (3.6 \text{ 再掲})$$

5.2.2 都市モデル内の移動・不快感コスト

都市モデル内の人が負担するコストはみな等しいという原則に則って考えると、あるノード i で就業する人があるノード j に居住する場合の総コストを求めることで、都市内のコストが定式化される。そのとき、移動コストは距離によって、不快感コストは任意のノードの密度によって求まるが、移動距離は二点間距離であることから対称性が成り立つものと仮定する。不快感コスト関数を就業地、居住地においてそれぞれ $z_i^w(w_i)$, $z_j^h(h_j)$ とし、容量制約に達した場合のペナルティコストをそれぞれ g_i^w , g_j^h とすると、それぞれのコストは次式の通りとなる：

$$\text{【通勤移動コスト】}_{\text{UE}} = 2d_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J), \quad (5.1)$$

$$\text{【業務移動コスト】}_{\text{UE}} = \sum_{i'=1}^I \alpha \frac{w_{i'}}{T} d_{ii'}^w \quad (1 \leq i' \leq I), \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \text{【不快感コスト】}_{\text{UE}} &= \beta \frac{w_i}{W_i} + g_i^w + \beta \frac{h_j}{H_j} + g_j^h \\ &= z_i^w(w_i) + g_i^w + z_j^h(h_j) + g_j^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J). \end{aligned} \quad (5.3)$$

以上のことから、本章における都市モデルの職住分布の均衡配置は式 (5.1)~(5.3) を用いて定式化することが可能である。本章における都市モデルと 1 人あたりの移動・不快感・ペナルティコストの概念図を図 5.1 に、不快感コストとペナルティコストの概形図を図 5.2 に示す。

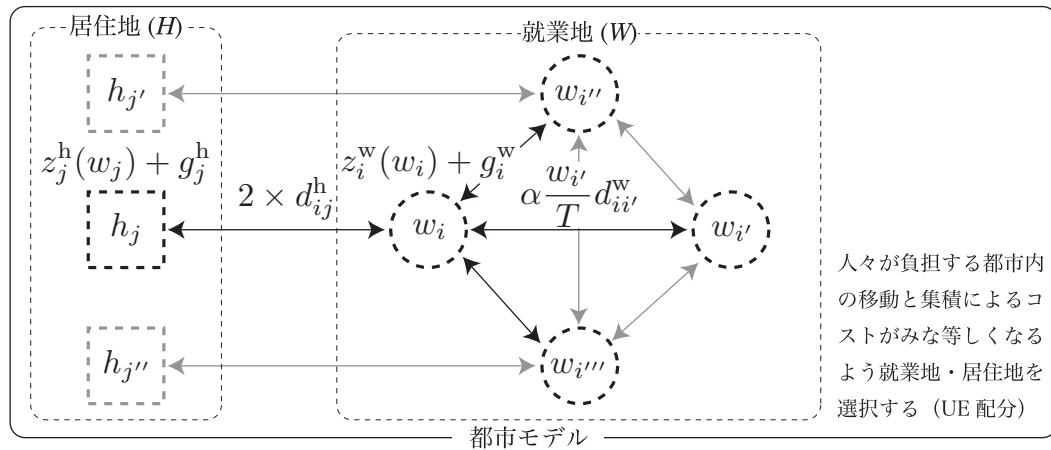


図 5.1 都市モデルと 1 人あたりの移動・不快感・ペナルティコストの概念図

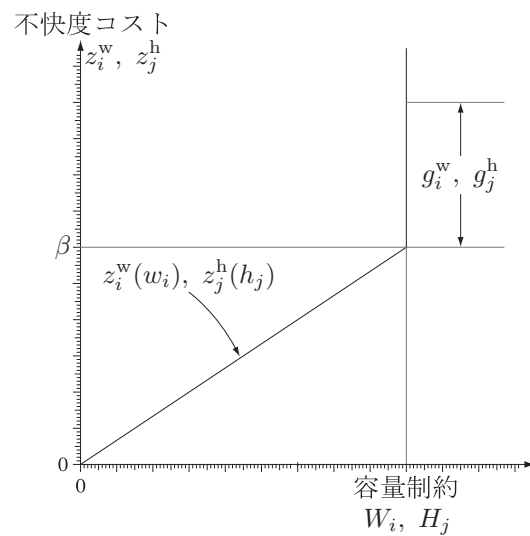


図 5.2 不快感コストとペナルティコストの概形図

5.3 均衡配分モデルの数理計画問題への定式化

いま、ノード i で就業し、かつノード j で居住する人の総コストを C_{ij} とすると、 C_{ij} は式 (5.1)～(5.3) より、

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \text{式 (5.1)} + \text{式 (5.2)} + \text{式 (5.3)} \\ &= 2d_{ij}^h + \sum_{i'=1}^I \alpha \frac{w_{i'}}{T} d_{ii'}^w + z_i^w(w_i) + g_i^w + z_j^h(h_j) + g_j^h \end{aligned} \quad (5.4)$$

と表される。このとき、都市内の人々の均衡状態がみたされる場合には、以下の条件式 (5.5)～(5.14) が成立しなければならない (井上 1986; Larsson & Patriksson 1993, 1995)。

$$C_{ij} - C \geq 0 \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J), \quad (5.5)$$

$$t_{ij}^h(C_{ij} - C) = 0 \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J), \quad (5.6)$$

$$t_{ij}^h \geq 0 \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J), \quad (5.7)$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h - T = 0 \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J), \quad (5.8)$$

$$w_i = \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I), \quad (5.9)$$

$$w_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq I), \quad (5.10)$$

$$h_j = \sum_{i=1}^I t_{ij}^h \quad (1 \leq j \leq J), \quad (5.11)$$

$$h_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq J), \quad (5.12)$$

$$\begin{cases} g_i^w = 0 & (w_i \leq W_i) \\ g_i^w \geq 0 & (w_i = W_i) \end{cases} \quad (1 \leq i \leq I), \quad (5.13)$$

$$\begin{cases} g_j^h = 0 & (h_j \leq H_j) \\ g_j^h \geq 0 & (h_j = H_j) \end{cases} \quad (1 \leq j \leq J). \quad (5.14)$$

ただし、式 (5.5), (5.6) における C は都市モデルにおける最小移動・不快感コスト、式 (5.8) は均衡条件式、式 (5.7), (5.9)～(5.12) は容量制限式、式 (5.13), (5.14) はペナルティコストに関する条件式である。

ここで、式 (5.4) および条件式 (5.5)～(5.14) を満足する変数値を求めることは、次に示す数理計画問題 (P) と等価である：

数理計画問題 (P)

$$\begin{aligned} \text{minimize } F = & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J 2d_{ij}^h \cdot t_{ij}^h + \frac{\alpha}{T} \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I \frac{1}{2} d_{ii'}^w \cdot w_i \cdot w_{i'} \\ & + \sum_{i=1}^I \int_0^{w_i} z_i^w(x) dx + \sum_{j=1}^J \int_0^{h_j} z_j^h(x) dx \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\text{subject to } w_i = \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I) \quad (5.16)$$

$$h_j = \sum_{i=1}^I t_{ij}^h \quad (1 \leq j \leq J) \quad (5.17)$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h - T = 0 \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J) \quad (5.18)$$

$$0 \leq w_i \leq W_i \quad (1 \leq i \leq I) \quad (5.19)$$

$$0 \leq h_j \leq H_j \quad (1 \leq j \leq J) \quad (5.20)$$

$$0 \leq t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J) \quad (5.21)$$

なぜならば、制約式 (5.18)~(5.20) に関するラグランジュ乗数をそれぞれ、 γ , λ_i , μ_j とし、数理計画問題 (P) に対するラグランジュ関数を、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t_{ij}; \gamma, \lambda_i, \mu_j) = & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J 2d_{ij}^h \cdot t_{ij}^h + \frac{\alpha}{T} \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I \frac{1}{2} d_{ii'}^w \cdot w_i \cdot w_{i'} \\ & + \sum_{i=1}^I \int_0^{w_i} z_i^w(x) dx + \sum_{j=1}^J \int_0^{h_j} z_j^h(x) dx \\ & + \gamma \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h - T \right) + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left(\sum_{j=1}^J t_{ij}^h - W_i \right) \\ & + \sum_{j=1}^J \mu_j \left(\sum_{i=1}^I t_{ij}^h - H_j \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

とすると、 \mathbf{t}^* が数理計画問題 (P) の最適解であるための必要条件は、Karush (1939) と Kuhn & Tucker (1951) によって、Karush-Kuhn-Tucker 条件としてまとめられている (小島 1987)。

まず、以下のような不等式制約付き最適化問題を考える。

$$\left| \begin{array}{l} \text{minimize } f(\mathbf{x}) \\ \text{subject to } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{array} \right. \quad (5.23)$$

ここで、制約付き最適化問題の許容領域を F とし、点 \mathbf{x}^* に対して F における \mathbf{x}^* の近傍で $f(\mathbf{x}^*)$ が最小になるとき、 \mathbf{x}^* を極小解であるという。

Karush-Kuhn-Tucker 条件 (KKT 条件) とは、以下の定理で説明される。

定理 5.1. \mathbf{x}^* が極小解であるならば, ある $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ が存在して

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad (5.24)$$

$$\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (5.25)$$

$$g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (5.26)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.27)$$

が成立する. KKT 条件の証明のために, 以下の補題 (Farkas の補題) を導入する.

補題 5.1. $m \times n$ 行列を \mathbf{A} とすると, 次のいずれか一方が成立する.

補題 5.1.(1) $\mathbf{Ax} = 0, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \neq 0$ をみたす $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在する.

補題 5.1.(2) $\mathbf{A}^\top \mathbf{y} < 0$ をみたす $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ が存在する.

ここで, Farkas の補題の証明のために, 分離定理を用いる. すなわち,

定理 5.2. F を \mathbb{R}^n 内の閉凸集合, \mathbf{z} を F に含まれない点としたとき, あるベクトル \mathbf{a} と実数 θ が存在して任意の $\mathbf{x} \in F$ に対して, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{z} < \theta < \mathbf{ax}$ が成立する.

まず上記の補題に関して, 補題 5.1.(1) かつ補題 5.1.(2) はあり得ない. なぜならば, 補題 5.1.(1) かつ補題 5.1.(2) とした場合,

$$0 > \mathbf{x} \mathbf{A}^\top \mathbf{y} = 0^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{y} = 0 \quad (5.28)$$

となり, 矛盾する.

次に, 補題 5.1.(1) が成り立たない場合を考える. 閉凸集合である C を $C = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} > 0\}$ とおき, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ を $\mathbf{u} \leq 0, \mathbf{u} \neq 0$ とおく. 仮に $\mathbf{Au} \in C$ とすると, $\mathbf{Au} = \mathbf{Ax}$ より, $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{u}) = 0$ となる. ここで, $\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{u} \leq 0, \mathbf{u} \neq 0$ より, $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u}$ は補題 5.1.(1) の解である. これは, 補題 5.1.(1) が成り立たない場合と矛盾するから, 仮定は不成立であり, $\mathbf{Au} \notin C$ となる. いま, 分離定理によってあるベクトル $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ と実数 θ が存在して,

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{Au} > \theta > \mathbf{y}^\top \mathbf{Ax} \quad (5.29)$$

が成立する. $\mathbf{x} = 0$ とすると, $\theta > 0$ が導かれる. したがって, $\mathbf{y}^\top \mathbf{Au} > 0$ である. このとき, $\mathbf{u} \leq 0, \mathbf{u} \neq 0$ は任意であるので, $\mathbf{y}^\top \mathbf{A} < 0$ となり, \mathbf{y} は補題 5.1.(2) をみたす.

以上のことから，式 (5.22) に対して t^* が数理計画問題 (P) の最適解であるための必要条件は，

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = 0, \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} \leq 0, \quad \lambda_i = 0, \quad \lambda_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq I), \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_j} \leq 0, \quad \mu_j = 0, \quad \mu_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq J), \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{ij}^{h*}} \geq 0, \quad t_{ij}^{h*} \geq 0, \quad t_{ij}^{h*} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{ij}^{h*}} = 0 \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J) \quad (5.33)$$

が成立すればよい．式 (5.30)～(5.33) に対して式 (5.22) はそれぞれ，

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h - T = 0, \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^J t_{ij}^h - W_i \leq 0, \quad \lambda_i = 0, \quad \lambda_i \left(\sum_{j=1}^J t_{ij}^h - W_i \right) = 0 \quad (1 \leq i \leq I), \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_j} = \sum_{i=1}^I t_{ij}^h - H_j \leq 0, \quad \mu_j = 0, \quad \mu_j \left(\sum_{i=1}^I t_{ij}^h - H_j \right) = 0 \quad (1 \leq j \leq J), \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{ij}^{h*}} &= \frac{\partial}{\partial t_{ij}^{h*}} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J 2d_{ij}^h \cdot t_{ij}^h + \frac{\partial}{\partial t_{ij}^{h*}} \frac{\alpha}{T} \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I \frac{1}{2} d_{ii'}^w \cdot w_i \cdot w_{i'} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t_{ij}^{h*}} \sum_{i=1}^I \int_0^{w_i} z_i^w(x) dx + \frac{\partial}{\partial t_{ij}^{h*}} \sum_{j=1}^J \int_0^{h_j} z_j^h(x) dx \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t_{ij}^{h*}} \gamma \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h - T \right) + \frac{\partial}{\partial t_{ij}^{h*}} \sum_{i=1}^I \lambda_i \left(\sum_{j=1}^J t_{ij}^h - W_i \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t_{ij}^{h*}} \sum_{j=1}^J \mu_j \left(\sum_{i=1}^I t_{ij}^h - H_j \right) \\ &= 2d_{ij}^h + \frac{\alpha}{2T} \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I \frac{\partial}{\partial t_{ij}^{h*}} \int_0^{\frac{1}{2} d_{ii'}^w w_i w_{i'}} x dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^I \frac{\partial w_i}{\partial t_{ij}^{h*}} \frac{\partial}{\partial w_i} \int_0^{w_i} z_i^w(x) dx + \sum_{j=1}^J \frac{\partial h_j}{\partial t_{ij}^{h*}} \frac{\partial}{\partial h_j} \int_0^{h_j} z_j^h(x) dx \\ &\quad + \gamma + \lambda_i + \mu_j \\ &= 2d_{ij}^h + \frac{\alpha}{2T} \sum_{i=1}^I \underbrace{\sum_{i'=1}^I \frac{\partial(\frac{1}{2} d_{ii'}^w w_i w_{i'})}{\partial t_{ij}^{h*}}}_{i'=i \text{ のとき } i \text{ 回だけ } \frac{1}{2} d_{ii'}^w w_i} \frac{\partial}{\partial(\frac{1}{2} d_{ii'}^w w_i w_{i'})} \int_0^{\frac{1}{2} d_{ii'}^w w_i w_{i'}} x dx \\ &\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^I \frac{\partial w_i}{\partial t_{ij}^{h*}} z_i^w(w_i)}_{i \text{ のときのみ } 1} + \underbrace{\sum_{j=1}^J \frac{\partial h_j}{\partial t_{ij}^{h*}} z_j^h(h_j)}_{j \text{ のときのみ } 1} + \gamma + \lambda_i + \mu_j \\ &= 2d_{ij}^h + \frac{\alpha}{2T} \cdot d_{ii'}^w \cdot w_i^* \cdot w_{i'}^* + z_i^w(w_i^*) + \gamma + \lambda_i + z_j^h(h_j^*) + \mu_j \geq 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

となることから,

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^{h*} - T = 0, \quad (5.38)$$

$$\sum_{j=1}^J t_{ij}^{h*} - W_i = w_i^* - W_i \leq 0, \quad (5.39)$$

$$\sum_{i=1}^I t_{ij}^{h*} - H_j = h_j^* - H_j \leq 0, \quad (5.40)$$

$$t_{ij}^{h*} \geq 0, \quad (5.41)$$

$$\begin{cases} 2d_{ij}^h + \frac{\alpha}{2T} \cdot d_{ii'}^w \cdot w_i^* \cdot w_{i'}^* + z_i^w(w_i^*) + \lambda_i + z_j^h(h_j^*) + \mu_j = -\gamma & (t_{ij}^* > 0) \\ 2d_{ij}^h + \frac{\alpha}{2T} \cdot d_{ii'}^w \cdot w_i^* \cdot w_{i'}^* + z_i^w(w_i^*) + \lambda_i + z_j^h(h_j^*) + \mu_j \geq -\gamma & (t_{ij}^* = 0) \end{cases}, \quad (5.42)$$

$$\begin{cases} \lambda_i = 0 & (w_i^* < W_i) \\ \lambda_i \geq 0 & (w_i^* = W_i) \end{cases}, \quad (5.43)$$

$$\begin{cases} \mu_j = 0 & (h_j^* < H_j) \\ \mu_j \geq 0 & (h_j^* = H_j) \end{cases} \quad (5.44)$$

を得る。ただし、式 (5.42) の導出においては、二点間距離の対称性から $d_{ii'}^w = d_{i'i}^w$ を用いた。式 (5.38) ~ (5.44) において、 $h_j^* = h_j$, $w_i^* = w_i$, $t_{ij}^{h*} = t_{ij}^h$, $-\gamma = C$, $\lambda_i = g_i^w$, $\mu_j = g_j^h$ とすると、これらは式 (5.5) ~ (5.14) と等しくなる。したがって、容量制約が付された都市モデルにおける移動・不快感コストの均衡条件 (5.5) ~ (5.14) は数理計画問題 (P) と等価であることが示される。また、容量制約を超えた場合に付加されるペナルティコスト g_i^w , g_j^h は、条件式 (5.19), (5.20) に対するラグランジュ乗数値に等しい。

計画問題として記述することが可能である。

5.4.2 求める均衡解について

5.4.1 において総コストの均衡配分問題が非凸 2 次計画問題となることが示された。したがって、式 (5.48) で示す目的関数 F は非凸であることから均衡解は一点には定まらず複数あると考えられる。ここで、目的関数 F を最小化して求められる均衡解は、条件式 (5.5)~(5.14) をすべてみたすと同時に、数理計画問題 (P) の最適化問題の解である。よって数理計画問題 (P) の解=本章の都市モデルにおける職住分布の均衡解の基準になると考えられる。

5.4.3 ラグランジュ乗数値の導出

本章の都市モデルの特徴は、単に容量制約を付するだけでなく、容量制約に達した場合のペナルティコストを考慮した上で、職住分布の均衡配置を導出する点にある。そのために変数値とともに制約条件、特に容量制約に対するラグランジュ乗数値を求めることが重要となる。

本章では数理計画問題 (P) を解くにあたり、線型計画問題 (RLT-LP) (問題 (3.36)) に緩和することでその解の導出を行っている。しかしながら線型計画問題 (RLT-LP) には式 (5.19), (5.20) の条件式が明示的に含まれておらず、したがって式 (5.22) のラグランジュ乗数値 λ_i, μ_j を求めるためには、“冗長ではあるが” 線型計画問題 (RLT-LP) に式 (5.19), (5.20) を付与した双対問題 (RLT-LP DUAL) を考えることによってラグランジュ乗数値を導出することが必要であり、また双対問題 (RLT-LP DUAL) を解くことによってラグランジュ乗数値が求まる (Nering & Tucker 1993)。

ここで用いる双対問題とは線型計画問題における主問題の補問題であり、主問題と補問題の関係は次の通りである。すなわち、主問題の目的関数（線型による n 個の変数の組み合わせ）は、 m 個の制約条件が n 個の変数の線型な組み合わせの上限を定めており、補問題の目的関数（線型による m 個の変数の組み合わせ）は、主問題の m 個の制約条件に対応している。このとき n 個の双対制約条件が存在し、それぞれが m 個の双対変数の線型な組み合わせの下限を定めている。また、双対問題が存在するときには以下の定理が成立する：

定理 5.3. 主問題と双対問題のいずれか一方が最適解をもつならば、もう一方も最適解をもち、また主問題の最小値と双対問題の最大値は一致する。

さて、続く 5.5 では数値解析例として 2 種類の都市モデルにおいて均衡配置例を提示するが、その問題サイズは表 5.1 の通りである。変数は第 3 章、第 4 章と同じであるが、制約式の数がノードの総数分増えている (5.5.5.1 では 20, 5.5.5.2 では 49)。これは容量制約に関する制約式がノード数だけ追加されるからである。表 5.1 が示すように、制約式の数が増えるため、求めたラグランジュ乗数

値に少なからず誤差が含まれることは避けられない。そのため、上述した双対問題 (RLT-LP DUAL) で求めたラグランジュ乗数値の候補を初期値とし、以下の関数 $s(\gamma, \lambda_i, \mu_j)$ を最小化するように、最小二乗法を用いて γ, λ_i, μ_j のラグランジュ乗数値を補正する^[1]：

$$\begin{aligned} s(\gamma, \lambda_i, \mu_j) &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h (C_{ij}(\lambda_i, \mu_j) - C)^2 \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h (C_{ij}(\lambda_i, \mu_j) + \gamma)^2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

式 (5.49) は高々 $(I + J + I \times J)$ 変数の最小化問題であるので、表 5.1 の問題サイズと比べてもその求解は極めて容易である。

表 5.1 I と J の組み合わせによる変数と制約式の総数 (UE モデル)

| I | J | 変数 | 制約式 | 5.5 数値解析例における都市モデル |
|-----|-----|--------|---------|---------------------------------|
| 5 | 5 | 665 | 1,431 | |
| 10 | 10 | 7,380 | 12,431 | 5.5.1.1 H - W - H 線形都市モデル |
| 9 | 40 | 84,254 | 125,660 | 5.5.1.2 H - W - H 平面都市モデル |

[1] $(x, y) = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ という数値の組合せを考え、 (x, y) の分布が $y = f(x)$ の関数に従うと仮定したとき、最小二乗法による誤差の分散 s は $s = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$ である。本章で導出した式 (5.37) において、 $C_{ij}(\lambda_i, \mu_j) = 2d_{ij}^h + \frac{\alpha}{2T} \cdot d_{ii'}^w \cdot w_i^* \cdot w_{i'}^* + z_i^w(w_i^*) + \lambda_i + z_j^h(h_j^*) + \mu_j$ であり、 $C = -\gamma$ であるため、式 (5.49) の通り計算することが分かる。

5.5 数値解析例

5.5.1 等コスト原則による職住分布の均衡配置

第4節までに提案した手法を用いて都市モデルにおける数値解析を試みる。都市モデルとして表5.1で示した (i) $H - W - H$ 線形都市モデル, (ii) $H - W - H$ 平面都市モデルの2モデルを取り扱い, 各モデルにおける職住分布の均衡配置を導出する。

5.5.1.1 $H - W - H$ 線形都市

W において $I = 10$, H において $J = 10$ の計 20 ノードからなる線形都市モデルを与え, 容量制約を 1.00 と設定する。 $T = 5.5$ と固定した上で, α 値および β 値をそれぞれ変化させた場合の職住分布の均衡配置が図 5.3 である。都市モデルは H を $J_1 = 5$, $J_2 = 5$ と分割し, W を包み込む構造である。

就業地間の移動頻度を 1.00 とし, 不快感コストを考慮しない $\alpha = 1.00$, $\beta = 0.00$ を基本とし (図 5.3 (a)), それぞれパラメータ α , β を変化させて職住分布の均衡配置の変化を導出する。いま, α 値を 1.00~10.00 まで増加させる, つまり就業地間の移動頻度が増えると, β 値に依らず J_1 , J_2 の境界に分割されていた就業地分布が一つのまとまりとなる変化が見て取れる。これは総コストに占める業務移動コストの割合が増加するためと考えられ, 特に $\beta = 0$ の場合は通勤移動コストおよび業務移動コストのみがコストとして計算されるため, W は容量制約まで人が配置される分布となる (図 5.3 (c))。 $\alpha = 1.00$ の場合は業務移動コストと通勤移動コストのコスト比率が均衡状態におさまっていると考えられ, β の値によらず就業地は分散配置される。ここで, β 値を 0.00~3.50 の間で変化させると, 就業地・居住地とも不快感コストが増大し, 各建物ノードの容量制約まで配置されていた人が, 他ノードへ移動する変化が見て取れる。特に $\beta = 3.50$ まで増大させると都市モデルの端部のノードまで人が居住し, 都市に広がりが生じた職住分布となる (図 5.3 (p)~(r))。 α 値, β 値とも変化させても通勤移動コストがあるため, 均衡配置においても W と接する J_1 , J_2 の境界ノードには容量制約まで人が居住し, 不快感コストやペナルティコストが考慮されても移動することはない。 β が 2.25 以上になると, α に関係なく均衡配置は収束状態を迎え, $H - W - H$ 線形都市における最終的な職住分布が導出される。なお, ラグランジュ乗数値の補正関数 $s(\gamma, \lambda_i, \mu_j)$ の最大値は 6.179 (図 5.3 (r)) である。

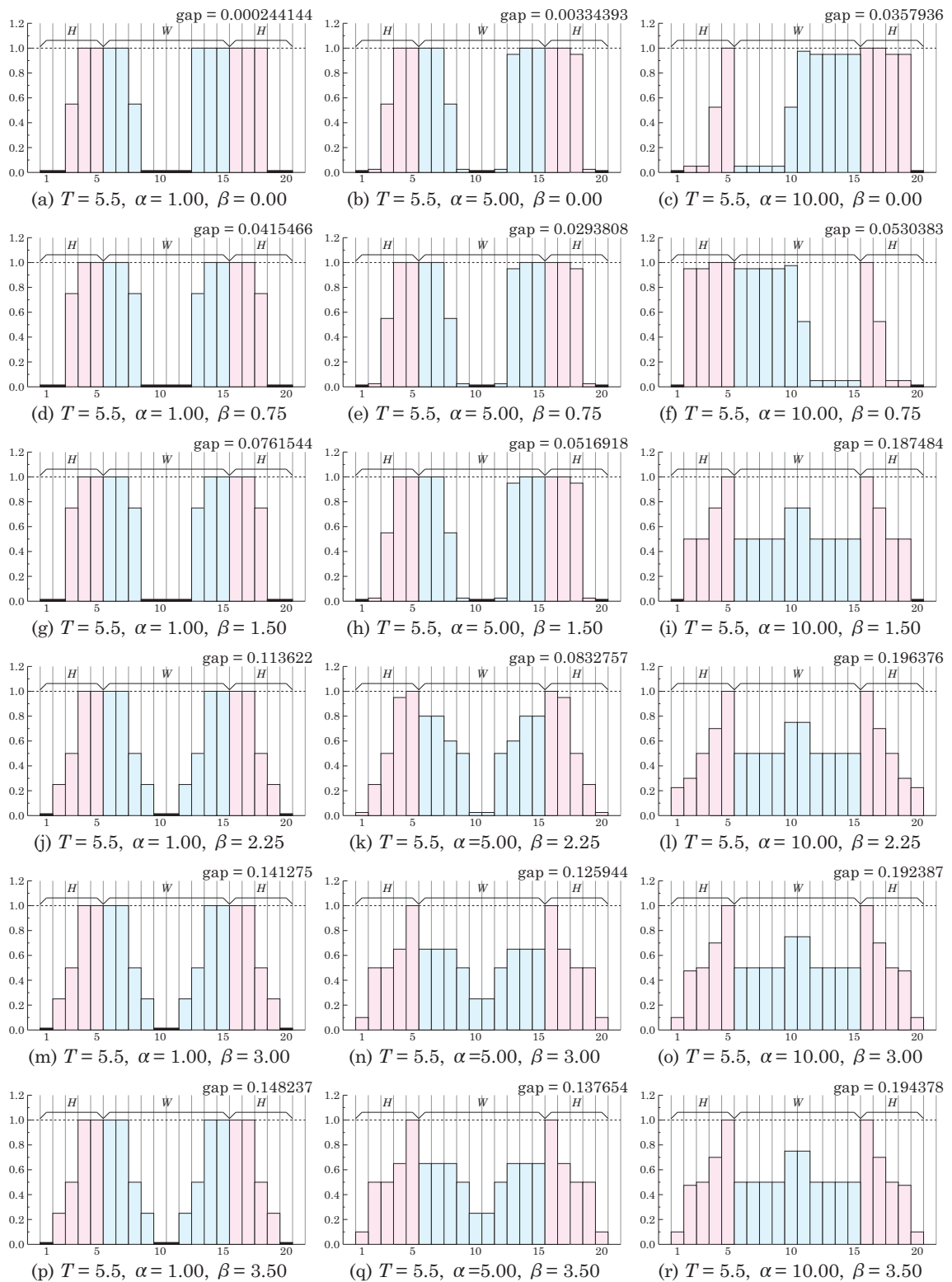


図 5.3 H - W - H 線形都市モデルにおける均衡配置

5.5.1.2 H-W-H平面都市

W において $I = 9$, H において $J = 40$ の計 49 ノードからなる 7×7 の $H-W-H$ 平面都市モデルを与え, 5.5.1.1 と同様に容量制約を 1.00 と設定する. また平面都市モデルと比較するために $T = 5.5$ と同様の設定をした上で, α 値および β 値をそれぞれ変化させた場合の職住分布の均衡配置が図 5.4 である. 平面都市モデルは W を中心とし, その周辺を H が包み込む構造である.

平面都市モデルにおいても, 業務移動頻度 $\alpha = 1.00$ とし, 不快感コストを考慮しない $\alpha = 1.00$, $\beta = 0.00$ を基本配置形態とし (図 5.4 (a)), それぞれパラメータを変化させて職住分布の均衡配置の変化を導出する. いま, α 値を 1.00~10.00 まで増加させると, 図 5.4 (a) では人が就業していなかった中心のノードにおいて容量制約まで人が配置され, これは β 値によることなく同様の職住分布をとる. $\alpha = 1.00$ の状態で β を変化させた場合の職住分布の変動をみると, β が大きくなれば不快感コストも大きくなるため, 容量制約まで人が配置されるノードが減少し, 居住地においては 8 ノード, 就業地においては 0 となる. 居住地の人口分布は図 4.5 と異なり, 平面的に広がりを持つことなく, 多くのノードで容量制約まで人が配置されるのが均衡配置の特徴である. これは就業地に関しても同様に, システム最適配分に基づいた就業地分布は, 9 ノードにおいて平均化された分布形態であるが, 利用者均衡配分に従った場合には中心ノードに高く配置される傾向にあり, 分散・集中の度合いが異なることを示している. なお, ラグランジュ乗数値の補正関数 $s(\gamma, \lambda_i, \mu_j)$ の最大値は 0.580 (図 5.4 (m)) である.

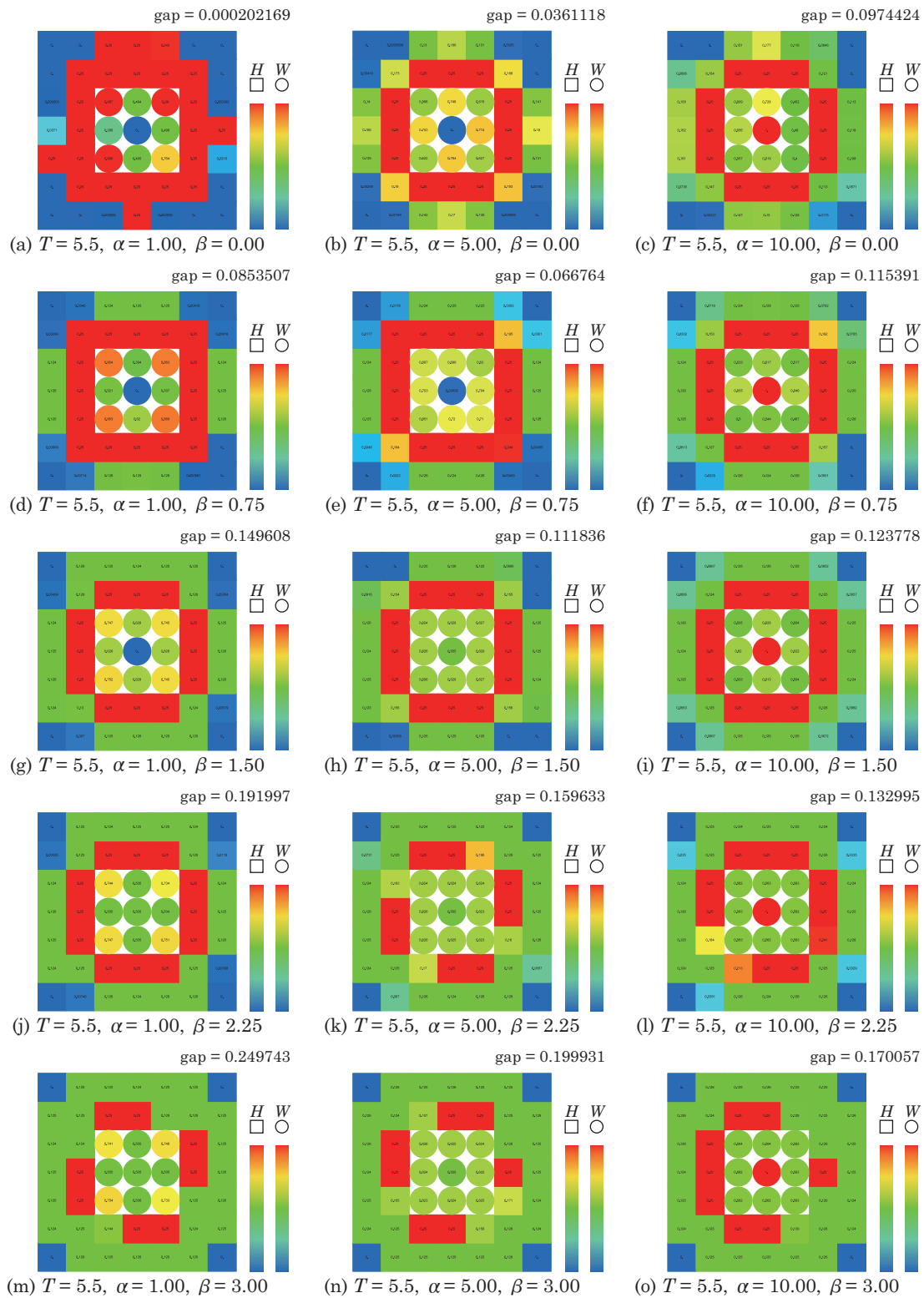


図 5.4 H - W - H 平面都市モデルにおける均衡配置

5.5.2 均衡配置における α 値, β 値の定性的特性

線形都市モデル, 平面都市モデルとも α 値を増大させると就業地はコンパクト化し, β 値を増大させると都市モデルは広がりをもつ分布となる. 本章における都市モデルの数値解析例からは, 都市を縮小させるためには業務移動頻度 α を増大し, 不快感パラメータ β を低く設定することが必要であることが示されている. 情報化社会においては人や物のモビリティは増加すると考えられることから, 職住分布の均衡配置の広がりには β の設定が大きく関わる. 第 4 章において β が距離の概念をもつパラメータであることは既に述べた. β を小さくする, つまり不快感パラメータを小さく抑えるためには, 就業・居住密度が増大しても不快感を与えない都市にする必要がある. そのためには, 距離という定量的に把握できる指標, たとえば居住地においては緑化率や日影, 騒音問題に配慮した空間形成が重要になり, 就業地においては公開空地の確保や D/H の設定など考えなければならず, α, β 以外にも多くのパラメータを与えることで, より人々に快適な職住分布配置を導出する必要がある. 加えて, 本稿では W と H において等価に扱っていた β をノードごとに設定することで, 各ノードの重要度を考慮に入れることも可能となり, 実空間の都市モデルへと拡張して施設の再配置などを検討する際には有効なツールとなる可能性がある.

5.5.3 最適配置と均衡配置における α 値, β 値の違い

第 4 章の SO モデルにおける目的関数 $F(\mathbf{x})_{\text{SO}}$ と第 5 章の UE モデルにおける目的関数 $F(\mathbf{x})_{\text{UE}}$ を書き並べてみると,

$$F(\mathbf{x})_{\text{SO}} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J 2d_{ij}^h \cdot t_{ij}^h + \frac{\alpha}{T} \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I w_i \cdot w_{i'} \cdot d_{ii'}^w + \sum_{i=1}^I \beta \cdot \frac{w_i}{W_i} \cdot w_i + \sum_{j=1}^J \beta \cdot \frac{h_j}{H_j} \cdot h_j \quad ((4.5 \text{ 再掲}))$$

$$F(\mathbf{x})_{\text{UE}} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J 2d_{ij}^h \cdot t_{ij}^h + \frac{\alpha}{2T} \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I w_i \cdot w_{i'} \cdot d_{ii'}^w + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \beta \cdot \frac{w_i}{W_i} \cdot w_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \beta \cdot \frac{h_j}{H_j} \cdot h_j \quad (5.48 \text{ 再掲})$$

であり, 通勤移動コスト以外の 2 次項が異なっていることが分かる. $F(\mathbf{x})_{\text{UE}}$ では, 業務移動コストと不快感コストが $F(\mathbf{x})_{\text{SO}}$ の半分となっているため, 総コストにおける通勤移動コストの比率が高く, そのため α, β が同じ場合には就業地と居住地の結びつきが強く反映される職住分布となる. UE モデルでは, 都市モデル内の人々が自由な行動原理に従った上で等コスト原則がみたされるモデルであるため, 就業地と居住地の結びつきが SO モデルに比して強くなるというのは, 現実のモデルと合致していると考えられる. 以上のことから, 第 3 章から本章にかけて整理した SO モデル, UE モデルを用いることで, 職住分布の最適配置, 均衡配置を導出するモデルが構築された.

5.6 本章のまとめ

本章では、就業地と居住地からなる都市モデルにおいて、通勤移動コスト、就業地間移動コスト、不快感コストの等コスト原則による均衡配置問題が非凸2次計画問題であることを明らかにし、線形緩和法を用いて線形計画問題へと緩和し、職住分布の収束的な均衡配置を導出する新たな手法を提案した。その上で、 α 値、 β 値の変化によって職住分布配置が大きく変化することを数値解析例によって明らかにし、実空間へと適用する際にはパラメータ調整によって可能となる知見を得た。

本章ではパラメータ数が多くなるため、都市モデルにおける人々を定数 ($T = 5.5$) として扱っており、他の都市間との人々の流出入や、時間変化による職住分布の変化など、そのシステムダイナミクスを考慮していない。都市経済学の分野では Alonso が時間発展による土地利用の均衡分布を Alonso モデルとしてモデル化し、Harris & Wilson が購買地の時間発展を予測するバランス・メカニズムを提唱している。ただし本章の実証分析では、人々が負担する各々のコストが均衡状態におちいる収束解が求められるという意味において、都市の最終状態の均衡配置が導出可能な点に意義がある。また、均衡解を算出するにあたり 5.5.1.1, 5.5.1.2 ともほぼ均衡解が得られたが、少なからず誤差が生じた。しかしながら線形都市モデルに比べて平面都市モデルの方が自由度が高くなっているがために誤差は小さく抑えられており、今後は本章の手法を用いて移動・不快感コストを算出し比較検討を行うことが可能となり、より現実の諸条件を考慮した均衡配置を追求できる可能性がきわめて高いと考えられる。また、提案した手法によって求められた均衡解に誤差があった場合においても、これまで行われている繰り返し計算によって収束解が求められることは自明である。繰り返し計算のみで計算を行う場合はある初期値から逐次的に計算を行い最適解を導出するが、ある誤差の範囲における均衡解を初期値として導出することで、数%の誤差であればその誤差の範囲のみでの計算によって最適解を導出できるため、その後の繰り返し計算による計算機への負荷を抑えることが可能となり意義がある手法と考えられる。

第III部

本論：実空間データを用いた実証分析

第6章 実空間データを用いた職住分布の 均衡・最適配置問題

- 6.1 はじめに
- 6.2 2次計画問題としての定式化
- 6.3 実空間データ操作
- 6.4 10都市における実証分析
- 6.5 手法の取扱い範囲と今後の数学的展開
- 6.6 本章のまとめ

第6章

実空間データを用いた職住分布の均衡・最適配置問題

6.1 はじめに

本章では第3章から第5章によって構築した独自の数理モデル（SOモデル，UEモデル）を用いて，実空間に展開して各都市の職住形態について分析する．これまでに構築したSOモデル，UEモデルは仮想都市モデルにおける実証分析であったが，本章では実空間データに基づいて全国10都市に着目し，現状の職住形態や最適職住形態を導出することにより，都市内のコストやパラメータの性質を明らかにする．具体的な分析対象都市として，政令指定都市の中から三大都市圏に属する都市を除いた，札幌市，仙台市，新潟市，静岡市，岡山市，広島市，熊本市と，三大都市圏に属する都市として神戸市，さらに徳島市，高松市を加えた計10都市に着目し実証分析を行う．

本章の構成は以下の通りである．第2節においてこれまで構築したモデルを整理し，本章における2次計画問題として定式化を行う．第3節において実空間データの操作を行い，UEモデル，SOモデルによって数値解析が可能な都市モデルを構築する．第4節において10都市における実証分析を行い，パラメータの散布図や三角座標を用いて都市の大局的特徴，ならびにパラメータ変動による都市の変化を既述する．最後に実証分析によって得られた知見をまとめ，構築した都市モデルの概要を既述する．

6.2 2次計画問題としての定式化

第4章および第5章にかけて構築した、容量制約付き都市モデルの条件式、制約式、SOモデル、UEモデルの定式は以下の通りである：

$$\begin{aligned} \text{minimize } F_{\text{SO}} = & 2 \times \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h d_{ij}^h + \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I w_i w_{i'} \frac{\alpha}{T} d_{ii'}^w \\ & + \sum_{i=1}^I \beta \frac{w_i}{W_i} w_i + \sum_{j=1}^J \beta \frac{h_j}{H_j} h_j, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} F_{\text{UE}} = & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J 2d_{ij}^h t_{ij}^h + \frac{\alpha}{T} \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I \frac{1}{2} d_{ii'}^w w_i w_{i'} \\ & + \sum_{i=1}^I \int_0^{w_i} z_i^w(x) dx + \sum_{j=1}^J \int_0^{h_j} z_j^h(x) dx. \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\text{subject to } w_i = \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I), \quad (6.3)$$

$$h_j = \sum_{i=1}^I t_{ij}^h \quad (1 \leq j \leq J), \quad (6.4)$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h - T = 0 \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J), \quad (6.5)$$

$$0 \leq w_i \leq W_i \quad (1 \leq i \leq I), \quad (6.6)$$

$$0 \leq h_j \leq H_j \quad (1 \leq j \leq J), \quad (6.7)$$

$$0 \leq t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J). \quad (6.8)$$

また、2次計画問題として定式化を行う際に導入した変数ベクトル \mathbf{x} 、定数ベクトル \mathbf{c} 、正方行列 \mathbf{Q} は、以下の通りである：

$$x_k = \begin{cases} w_k & (1 \leq k \leq I) \\ h_{k-I} & (I+1 \leq k \leq I+J), \\ t_{ij}^h & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (6.9)$$

$$c_k = \begin{cases} 0 & (1 \leq k \leq I) \\ 0 & (I+1 \leq k \leq I+J), \\ d_{ij}^h & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (6.10)$$

$$Q_{kl}^{\text{UE}} = \begin{cases} \frac{\alpha}{2T} d_{kl}^w + \frac{\delta_{kl} \beta}{2W_k} & (1 \leq k \leq I, 1 \leq l \leq I) \\ \frac{\beta}{2H_k} & (I+1 \leq k = l \leq I+J), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (6.11)$$

$$Q_{kl}^{\text{SO}} = \begin{cases} \frac{\alpha}{T} d_{kl}^w + \frac{\delta_{kl} \beta}{W_k} & (1 \leq k \leq I, 1 \leq l \leq I) \\ \frac{\beta}{H_k} & (I+1 \leq k = l \leq I+J). \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (6.12)$$

したがって、本章の実空間データを用いた分析において用いる SO モデル、UE モデルは次の最小化問題の通りとなる：

$$\begin{array}{l}
 \text{minimize} \quad F(\mathbf{x})_{\text{SO}} = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}^{\text{SO}} \mathbf{x} + 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
 \quad \quad \quad F(\mathbf{x})_{\text{UE}} = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}^{\text{UE}} \mathbf{x} + 2\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
 \text{subject to} \quad 0 \leq w_i \leq W_i \quad (1 \leq i \leq I) \\
 \quad \quad \quad 0 \leq h_j \leq H_j \quad (1 \leq j \leq J) \\
 \quad \quad \quad T = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J) \\
 \quad \quad \quad w_i = \sum_{j=1}^J t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I) \\
 \quad \quad \quad h_j = \sum_{i=1}^I t_{ij}^h \quad (1 \leq j \leq J) \\
 \quad \quad \quad 0 \leq t_{ij}^h \quad (1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J)
 \end{array} \tag{6.13}$$

これ以降、問題 (6.13) の各式を用いて実証分析を行うこととする。

6.3 実空間データ操作

6.1 で述べたように、指令して意図しの中から三大都市圏に属する都市を除いた札幌市、仙台市、新潟市、静岡市、岡山市、広島市、熊本市と、三大都市圏に属する神戸市、および四国地方の徳島市、高松市を加えた計 10 都市に着目し、実証分析を行う。三大都市圏に属する都市を除いた理由として、わが国における人口減少は三大都市圏を除いて大きく減少し、今後 35 年で 24% 減少すると推測されている。将来予測される人口減少と超高齢化社会を考慮すると、都市の再構築の必要性は極めて高く、また地方都市にとって持続可能な地域発展は検討しなければならない重要な課題である。三大都市圏の中でも大阪圏は全国平均と同様の減少率が予測されているため、大阪圏の中から神戸市を選定した（表 6.1）。今後の都市の再構築を考えるにあたって職住複合化の建物が増加することが考えられるが、人口減少の問題が取り扱われる三大都市圏以外の都市においては近い将来に都市構造が大きく変化することは考えにくく、既存の建物群のように職住分離が続くと考えられるため、所与のものとして取り扱うこととする。

表 6.1 圏域ごとの人口推移の推計値

| | 圏 域 | | | | | | | | | | | 三大都市圏 | | |
|---------------|------------|--------------|--------------|--------------|------------|--------------|------------|------------|--------------|------------|---------------|--------------|--------------|--------------|
| | 北海道 | 東北圏 | 首都圏 | 中部圏 | 北陸圏 | 近畿圏 | 中国圏 | 四国圏 | 九州圏 | 沖縄県 | 全 国 | 東京圏 | 名古屋圏 | 大阪圏 |
| 1970 年 | 518 | 1,139 | 3,026 | 1,374 | 278 | 1,740 | 700 | 390 | 1,207 | 95 | 10,467 | 2,411 | 869 | 1,547 |
| 2005 年 | 563 | 1,207 | 4,238 | 1,722 | 311 | 2,089 | 768 | 409 | 1,335 | 136 | 12,777 | 3,448 | 1,123 | 1,848 |
| 2010 年 | 548 | 1,168 | 4,291 | 1,728 | 306 | 2,074 | 754 | 397 | 1,313 | 139 | 12,718 | 3,510 | 1,135 | 1,834 |
| 2015 年 | 534 | 1,135 | 4,282 | 1,707 | 299 | 2,038 | 736 | 386 | 1,285 | 141 | 12,543 | 3,514 | 1,126 | 1,802 |
| 2020 年 | 513 | 1,091 | 4,246 | 1,675 | 290 | 1,989 | 709 | 371 | 1,248 | 142 | 12,273 | 3,498 | 1,111 | 1,759 |
| 2025 年 | 487 | 1,040 | 4,183 | 1,635 | 278 | 1,927 | 678 | 353 | 1,203 | 143 | 11,927 | 3,461 | 1,092 | 1,706 |
| 2030 年 | 458 | 983 | 4,101 | 1,588 | 265 | 1,856 | 642 | 334 | 1,153 | 143 | 11,522 | 3,408 | 1,069 | 1,645 |
| 2035 年 | 425 | 922 | 4,001 | 1,537 | 250 | 1,777 | 604 | 314 | 1,097 | 142 | 11,068 | 3,343 | 1,044 | 1,577 |
| 2040 年 | 390 | 858 | 3,885 | 1,480 | 234 | 1,690 | 563 | 292 | 1,037 | 141 | 10,569 | 3,265 | 1,016 | 1,502 |
| 2045 年 | 355 | 792 | 3,758 | 1,419 | 218 | 1,597 | 522 | 271 | 974 | 139 | 10,044 | 3,178 | 987 | 1,424 |
| 2050 年 | 319 | 727 | 3,628 | 1,359 | 201 | 1,503 | 481 | 250 | 911 | 137 | 9,515 | 3,090 | 958 | 1,343 |
| 2015 年との差 | -215 | -408 | -654 | -348 | -98 | -535 | -255 | -136 | -374 | -4 | -3,028 | -424 | -168 | -459 |
| 対 2015 年増減率 | -40.3% | -36.0% | -15.3% | -20.4% | -32.8% | -26.3% | -34.6% | -35.2% | -29.1% | -2.9% | -24.1% | -12.1% | -14.9% | -25.5% |

（出典）総務省「国勢調査報告」、国土交通省国土計画局推計値（都道府県別将来人口）をもとに、筆者作成
推計値単位（万人）

分析に供するデータとして以下の 3 種類のデータを用いている。

- (i) 平成 22 年国勢調査（総務省統計局）：各都市の町丁目別の面積、座標、居住人口データ
- (ii) 平成 24 年経済センサス（総務省統計局）：各都市の町丁目別の従業者データ
- (iii) ZmapTownII 2008/09 年度（株式会社ゼンリン）：各都市の建物データ（延床面積、建物中心座標、建物種別）

後述する容量制約の導出に際しては、各都市における人口を一定にするために、経済センサスの従業者数データを国勢調査の居住人口データに基準化することで人口の補正^[1]を行っている。

[1] 居住人口データには労働人口以外にも高齢者、児童が含まれているため、一般的に従業者数データよりも大きい。

6.3.1 容量制約の導出

ZmapTownII 2008/09 年度のデータを用いて、容量制約を導出する。建物データは SHP ファイルで提供されているため、データの操作には QGIS 2.8.1-Wien^[2]を用いて処理を行った。これ以降、本章で述べる居住地は一戸建て及び集合住宅を、就業地は事業所をそれぞれ指すものとする。

各都市の建物データの重心座標をそれぞれ求め、ポリゴンデータの町丁目ごとに内外判定を行い、各建物がどの町丁目内に存在するかを割り出し、建物データと町丁目データを統合する。ZmapTownII 2008/09 年度のデータには階数が 2 以下の建物に関しては階層データが割り振られていないため、算出に当たっては空データは階数を 1.5 階と近似して延床面積を算出している。ここで、建築計画における集合の密度と形式から、1 人あたりに必要な面積を、居住地に関しては $25\text{m}^2/\text{人}$ 、就業地に関しては $15\text{m}^2/\text{人}$ と設定し（長澤・西出ら 2011）、町丁目ごとの建物データの容量制約を算出する。就業地の容量制約については、人口の補正を行うことで、居住地・就業地の人口総数を一定にしている：

$$[\text{容量制約}]_i^w = \frac{\text{町丁目毎の事業所総延床面積}}{15\text{m}^2} (\text{人}), \quad (6.14)$$

$$[\text{容量制約}]_j^h = \frac{\text{町丁目毎の住居総延床面積}}{25\text{m}^2} (\text{人}). \quad (6.15)$$

図 6.1 に、各都市における就業地および居住地の建物分布を示す（赤：居住地、青：就業地）。

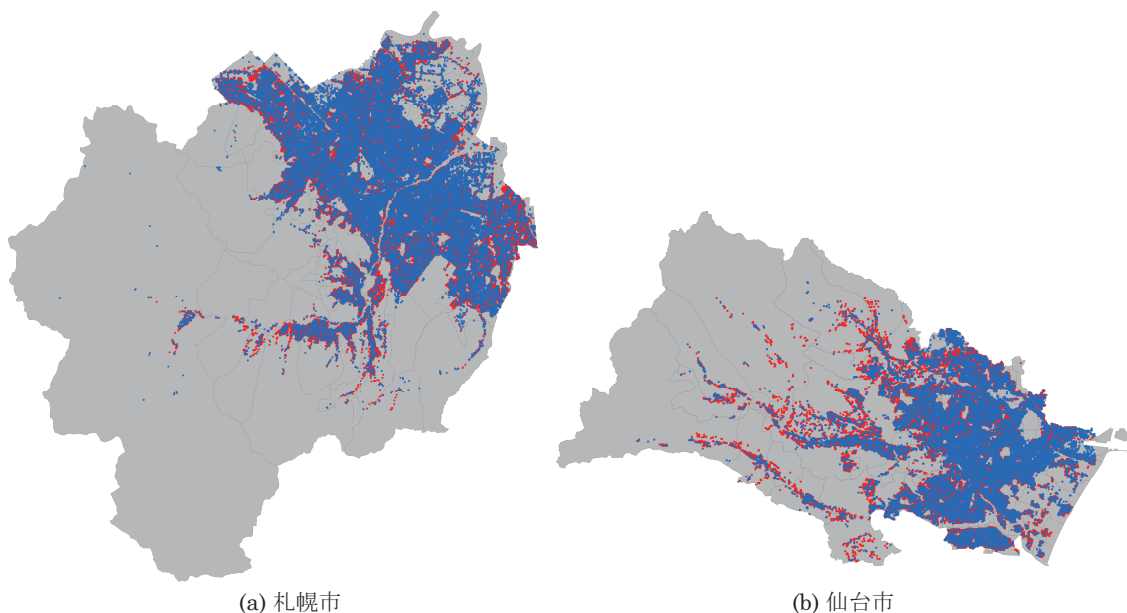
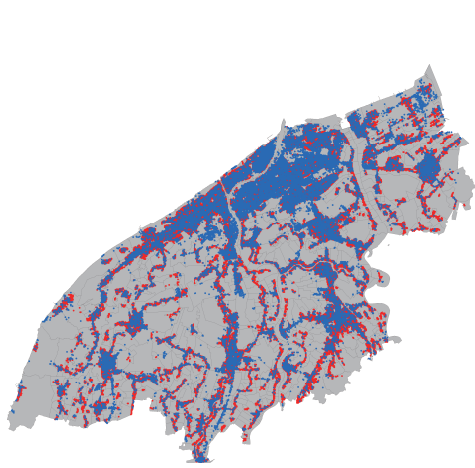
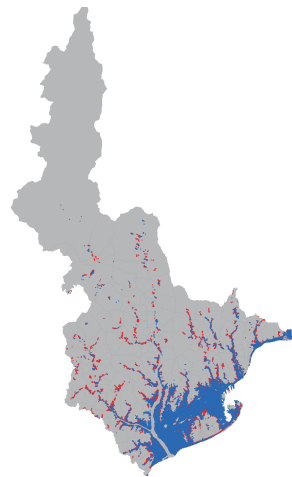


図 6.1 現状の居住地ノード（赤）と就業地ノード（青）

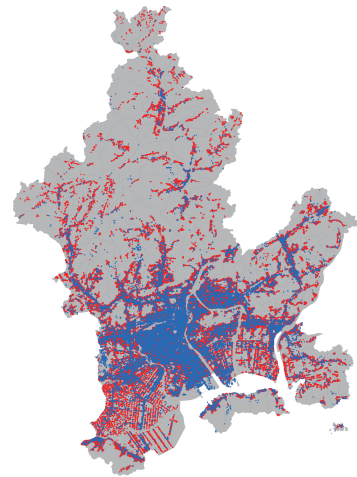
[2] オープンソースソフトウェアの GIS (Geographic Information System) であり、GNU GPL ライセンス方式で頒布されている。



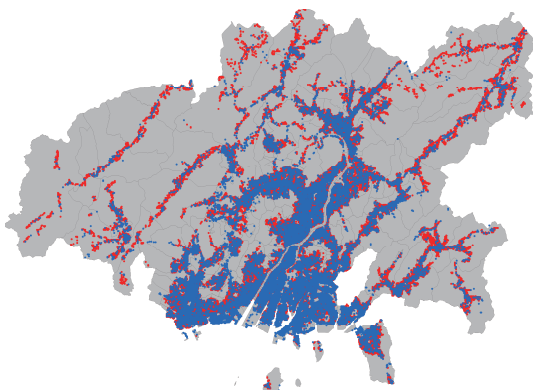
(c) 新潟市



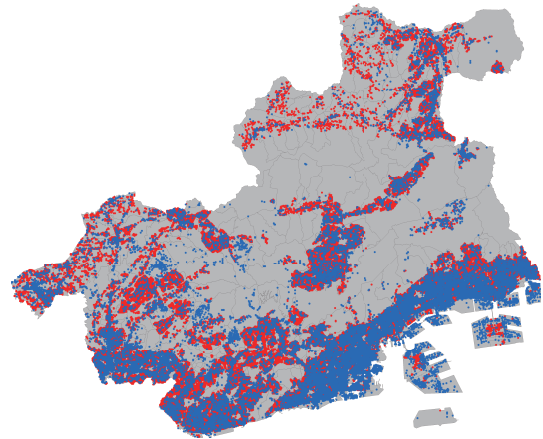
(d) 静岡市



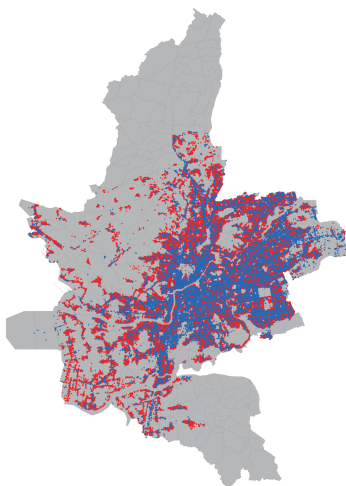
(e) 岡山市



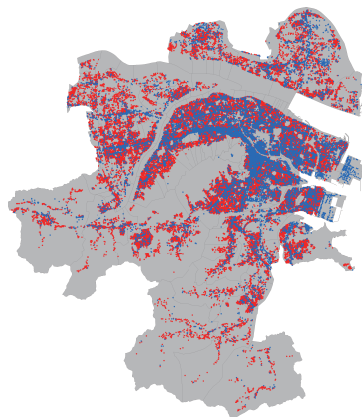
(f) 広島市



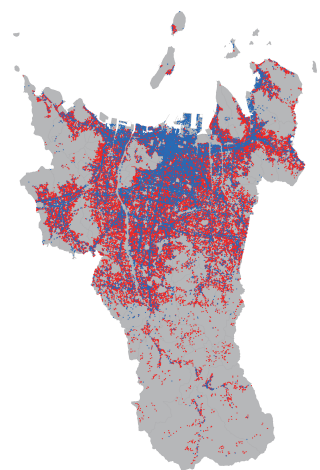
(g) 神戸市



(h) 熊本市



(i) 徳島市



(j) 高松市

6.3.2 都市内の領域統合

各都市の町丁目別の領域数は数百から数千の規模であり、そのままでは変数および制約式が数千万規模となって解の導出が極めて困難である。そのため町丁目別に分類されている都市データの問題サイズを小さくし、データを統合して分析を行う必要がある。都市内の領域統合の具体的な手順は以下の通りである。

Step1 ZmapTownII の町目コードを用いて、町丁目別から町目別への統合を行う

Step2 町目領域の中で、領域面積が最小の町目を選出し、当該領域と接している他領域の中で領域面積が最小の町目と統合して複合町目領域を作成する

Step3 Step2 で行った操作を領域数が 20 になるまで繰り返し行い、各都市における領域数を 20 に設定する

Step2, Step3 で行う操作において、建物ノードの属性は初期の町丁目コードに紐づけられているため、領域統合における建物データの属性は、領域統合を行っても保証される。上記の操作は領域間の距離をなるべく等しくなることを前提に、20 領域の面積がなるべく等しくなるよう行った操作である。領域間の距離は 6.3.3 にて詳述する。図 6.2 に、各都市において 20 領域に統合した図を示す。

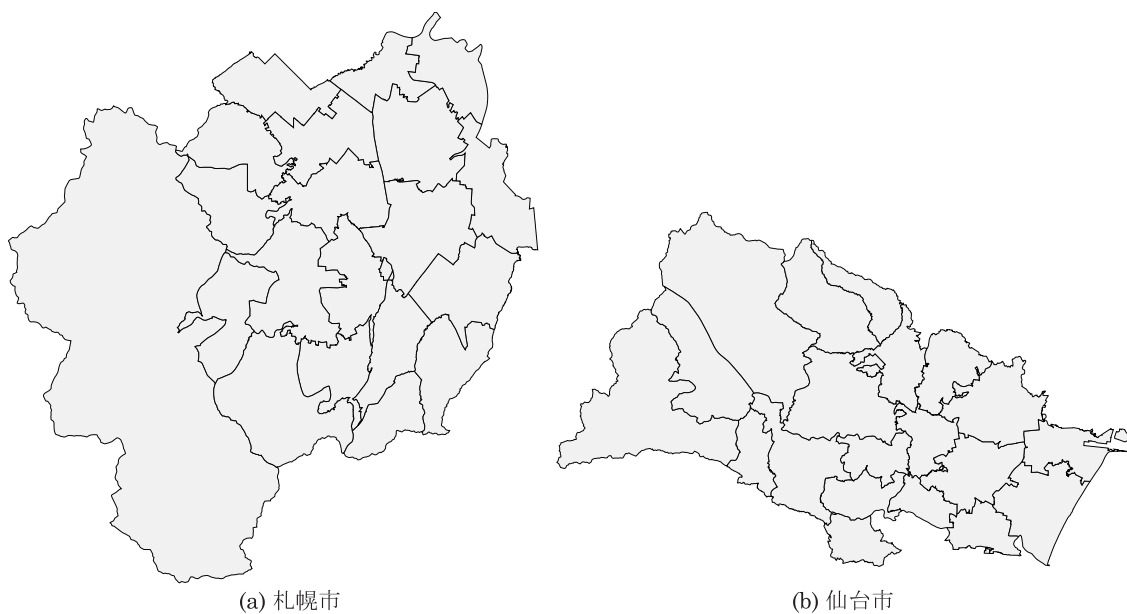
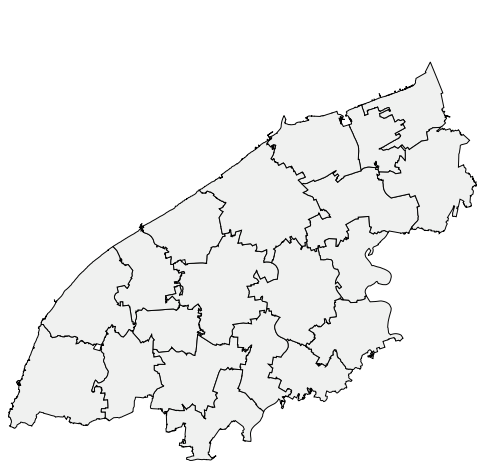


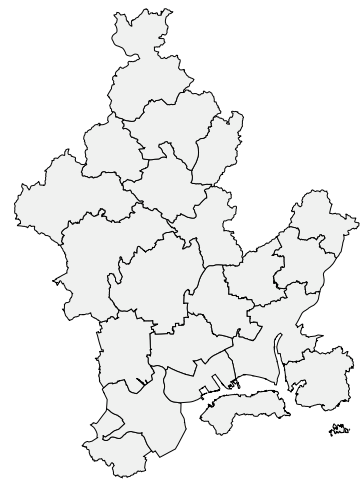
図 6.2 都市の 20 領域への統合



(c) 新潟市



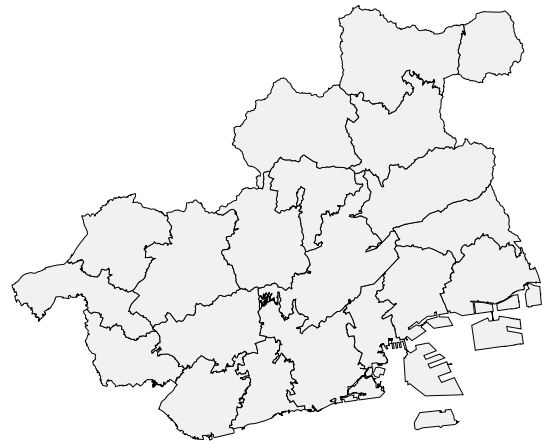
(d) 静岡市



(e) 岡山市



(f) 広島市



(g) 神戸市



(h) 熊本市



(i) 徳島市



(j) 高松市

6.3.3 領域間距離と領域内距離

本章で分析に用いる SO モデルおよび UE モデルは、ノード間の距離が重要な要素となるため、領域統合を行った上で領域間距離と領域内距離を導出する必要がある。

いま、統合した領域の重心を中心として、領域面積と等面積の重なり合わない円盤領域を考える（図 6.3）。それぞれの中心を $c_1(x_1, y_1)$, $c_2(x_2, y_2)$ とし、それぞれの半径を r_1 , r_2 としたとき、領域間平均距離の近似式 $\langle L_1 \rangle_{cc}^*$ は、

$$\langle L_1 \rangle_{cc}^* = h + \frac{r_1^2 + r_2^2}{8h} \quad (6.16)$$

と表される（栗田 2013）。ただし h は c_1 , c_2 間の距離であり、本章では異なる領域間距離の算出にあたり、式 (6.16) を適用する。

領域内距離の導出においては、半径 r_1 の円内に一様に分布する建物の 2 点間の直線距離を $\langle L_2 \rangle$ とすると、次式のように定義される：

$$\langle L_2 \rangle = \frac{128r}{45\pi} \simeq 0.9054r \quad (6.17)$$

本章では同一領域内にあるノード間の距離の算出にあたっては、領域を等面積の円と見なした上で式 (6.17) を適用する。

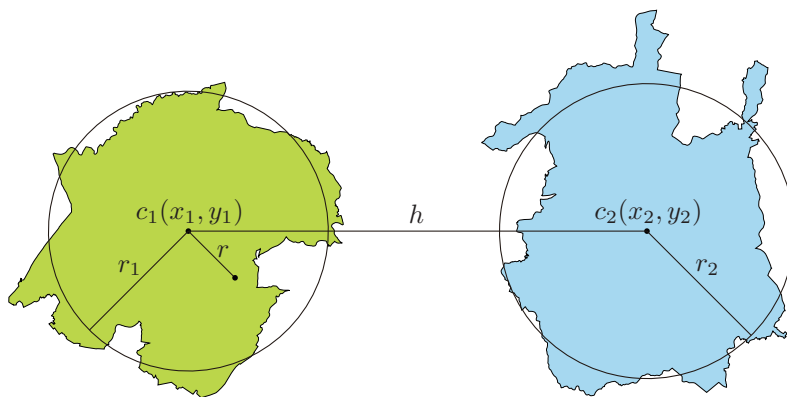


図 6.3 領域間距離と領域内距離

6.4 10 都市における実証分析

6.4.1 各都市のパラメータの散布図

以上の準備のもと、上述の 10 都市において SO モデル，UE モデルによる実証分析を行った。10 都市において現状の職住分布を推定するために、UE モデルによるパラメータ α ， β の推定を行った。パラメータの推定方法は、 α を 10.0 から 40.0 の間で 5 刻みに、 β は 150 から 450 の間で 50 刻みで計算を行い、その残差平方和 (RSS : Residual Sum of Squares) が最小となるパラメータの周囲で、さらに α は 1 刻み、 β は 10 刻みで計算を行うことで推定値を算出した。残差平方和は、各ノードにおける現状の就業者と UE モデルにおける就業者の差、および現状の居住者と UE モデルにおける居住者の差から求めることとし、

$$RSS = \sum_{i=1}^I (w_i^{\text{real}} - w_i^{\text{UE}})^2 + \sum_{j=1}^J (h_j^{\text{real}} - h_j^{\text{UE}})^2 \quad (6.18)$$

と表される。図 6.4 は高松市におけるパラメータ推定の例である。 $\alpha = 30.0$ ， $\beta = 250$ のときに RSS が最小となるため、その周囲において再度パラメータ推定を行い、 $\alpha =$ ， $\beta =$ を高松市の現状を再現するパラメータとして用いることとしている。

| β | α 10.0 | 15.0 | 20.0 | 25.0 | 30.0 | 35.0 | 40.0 |
|---------|---------------|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 150 | 181.506 | 155.998 | 214.146 | 258.429 | 268.459 | 268.459 | 268.459 |
| 200 | 1079.35 | 188.356 | 177.814 | 165.642 | 167.449 | 238.425 | 238.037 |
| 250 | 3237.04 | 2525.1 | 192.324 | 182.375 | 157.7 | 162.061 | 166.781 |
| 300 | 3238.9 | 3231.4 | 3089.3 | 334.384 | 187.905 | 178.742 | 162.065 |
| 350 | 3242.76 | 3232.54 | 3229.79 | 3162.75 | 2684.53 | 189.368 | 186.854 |
| 400 | 3249.46 | 3236.62 | 3233.44 | 3230.73 | 3168.84 | 3015.01 | 257.582 |
| 450 | 3259.48 | 3244.02 | 3237.88 | 3233.6 | 3238.35 | 3177.78 | 3018.86 |

↓

| β | α 12.0 | 13.0 | 14.0 | 15.0 | 16.0 | 17.0 | 18.0 |
|---------|---------------|---------|---------|----------------|----------------|---------|---------|
| 170 | 207.548 | 207.867 | 217.291 | 225.914 | 227.342 | 236.15 | 263.757 |
| 180 | 157.003 | 189.197 | 191.254 | 208.515 | 218.398 | 225.796 | 227.354 |
| 190 | 155.79 | 155.998 | 156.101 | 166.096 | 189.76 | 214.146 | 215.259 |
| 200 | 175.072 | 154.436 | 155.744 | 155.998 | 156.101 | 157.896 | 189.216 |
| 210 | 179.516 | 177.865 | 150.631 | 153.913 | 155.756 | 155.998 | 156.449 |
| 220 | 183.023 | 180.116 | 177.973 | 177.686 | 147.292 | 155.89 | 155.728 |
| 230 | 189.794 | 185.634 | 180.116 | 178.695 | 177.822 | 176.574 | 151.86 |

図 6.4 パラメータ推定の手法 (例：高松市)

上記の操作を UE モデルを用いて 10 都市において行い、各都市におけるパラメータ α , β をまとめたものが図 6.5 である。図 6.5 における都市名と併記した数字は、10 都市の総人口の順位である。また、各都市の 20 領域の現状の H , W の人口分布と、パラメータ推定を行った H , W の人口分布を図 6.6～図 6.15 に示す。図 6.5 からは都市の規模が大きくなればなるほど α , β とも大きくなり右上に分布する傾向を示し、規模が小さくなればなるほど α , β とも小さくなり左下に分布する傾向を示している。

都市の規模が大きくなれば業務移動頻度が大きくなるというのは示唆的である。都市の規模が大きいということは人が集中して就業・居住しているということであり、そのため移動の重要度も他の都市と比べて高くなると考えられる。UE モデルを用いたパラメータ推定によってある程度現状を再現でき、またその際のパラメータが都市規模と関連していることは、UE モデルの信頼性ととも、人々は利用者均衡の状態就業・居住していることを明らかにしている。

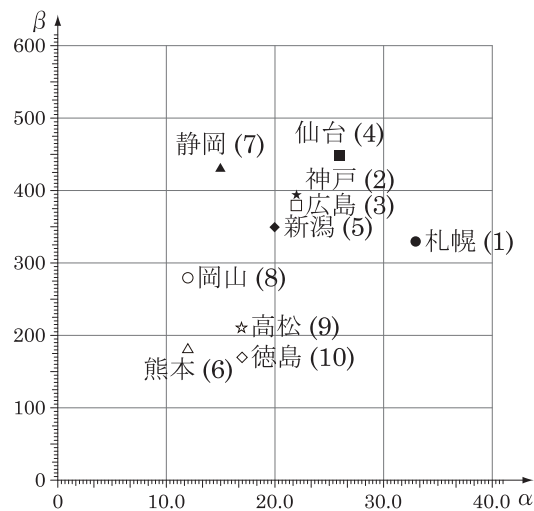


図 6.5 コストパラメータの散布図

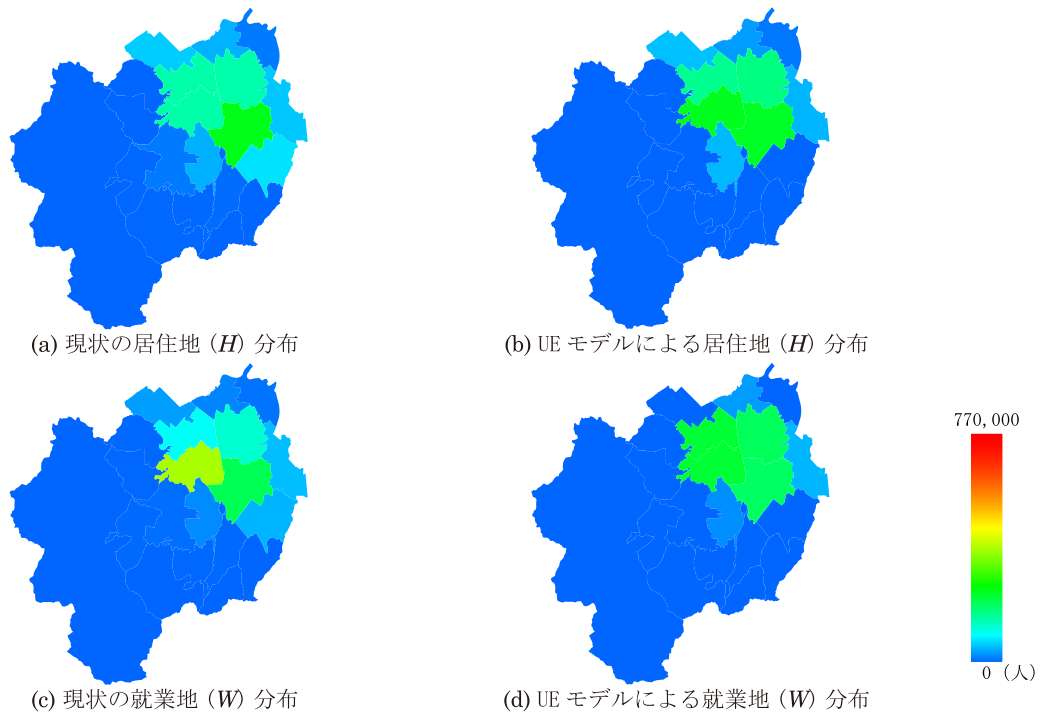


図 6.6 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (札幌市)

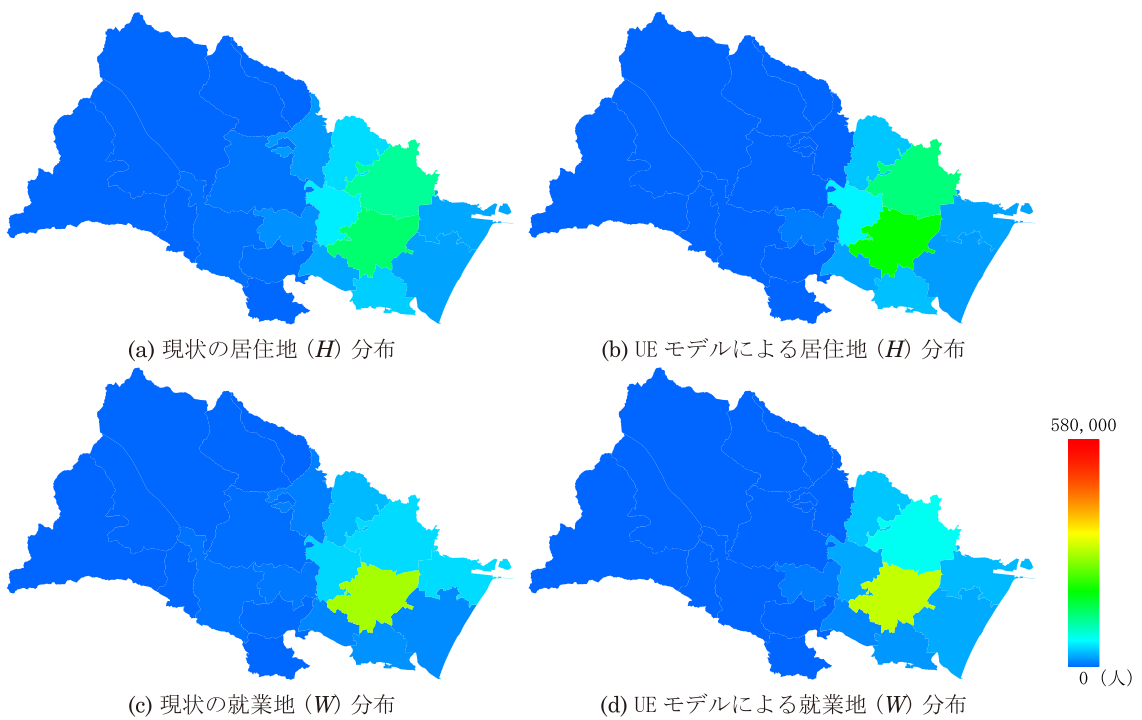


図 6.7 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (仙台市)

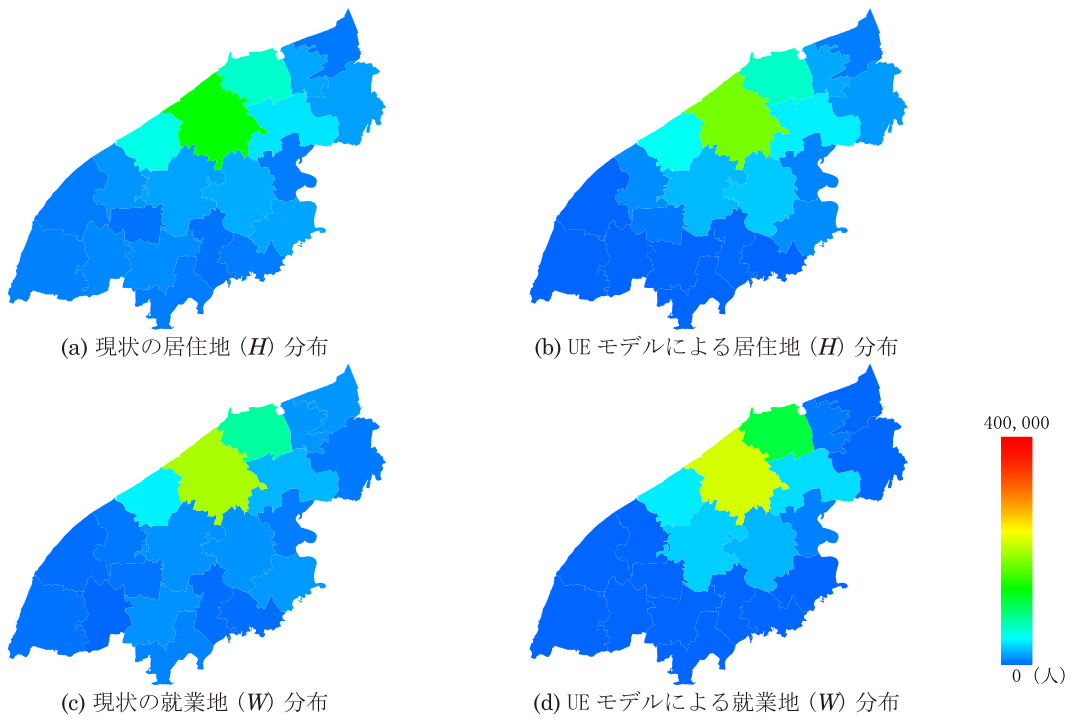


図 6.8 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (新潟市)

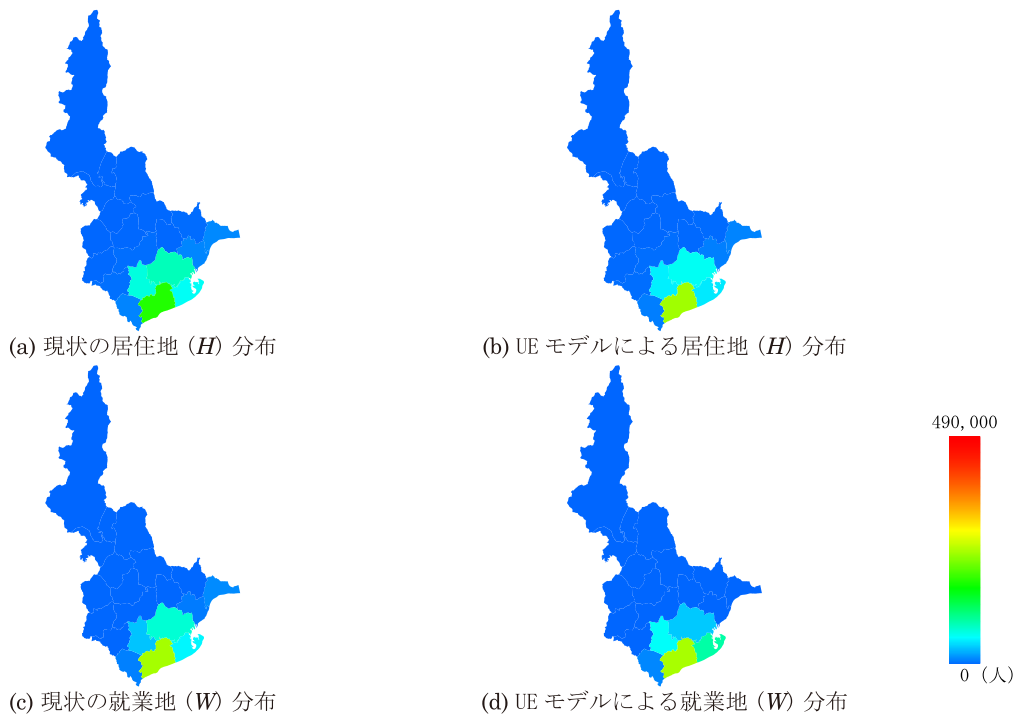


図 6.9 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (静岡市)

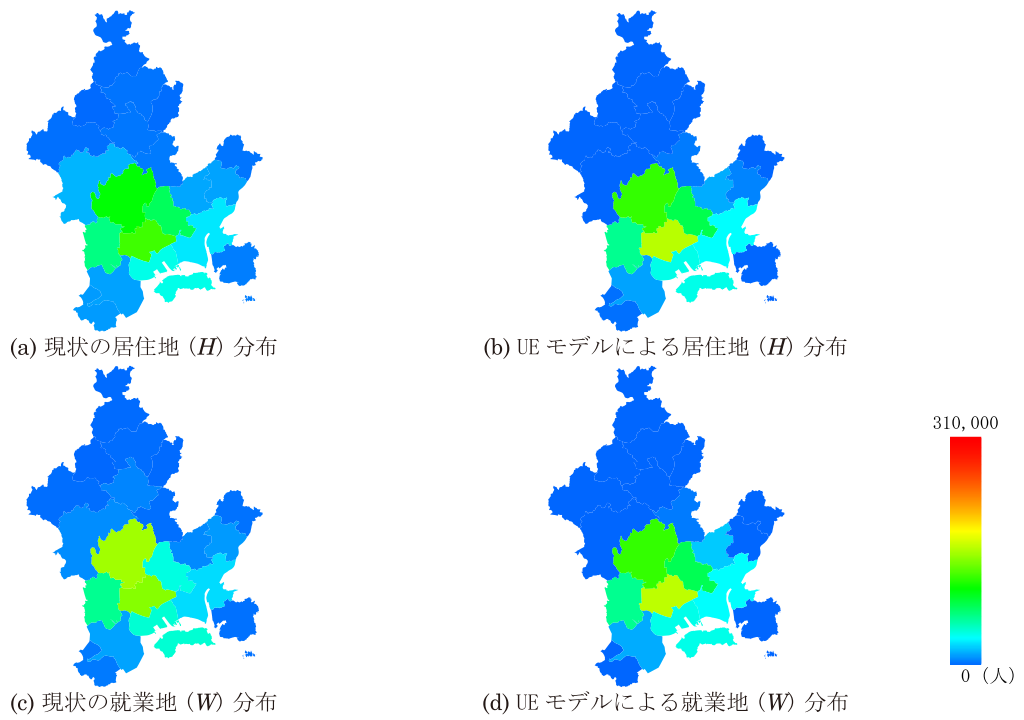


図 6.10 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (岡山市)

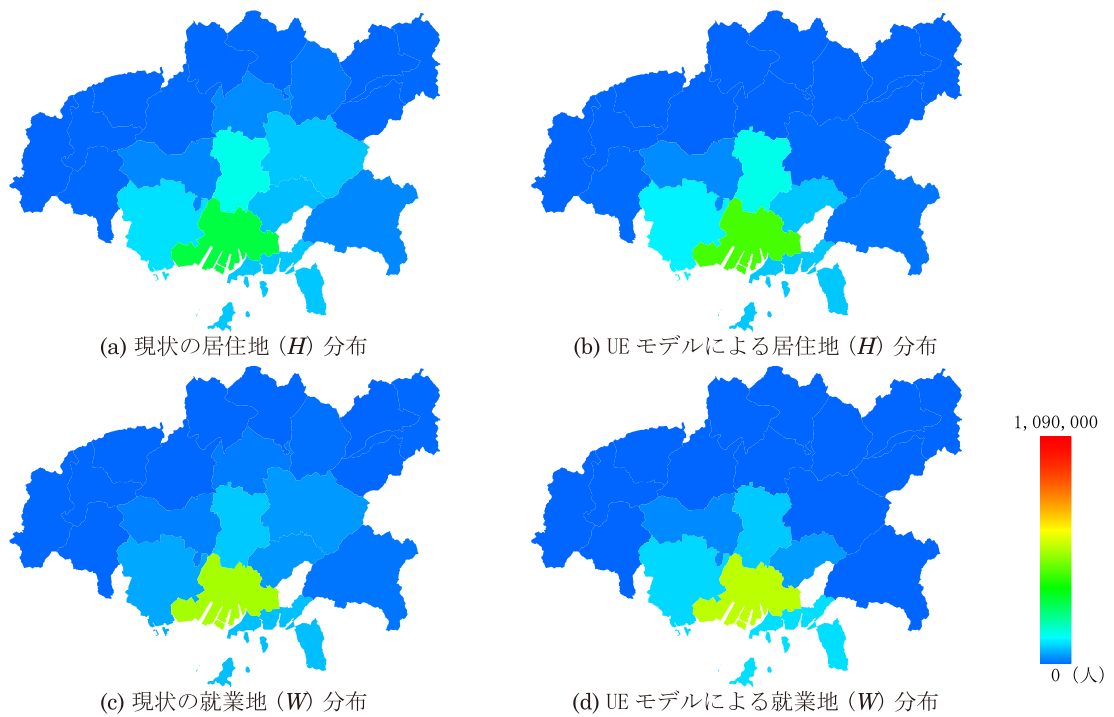


図 6.11 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (広島市)

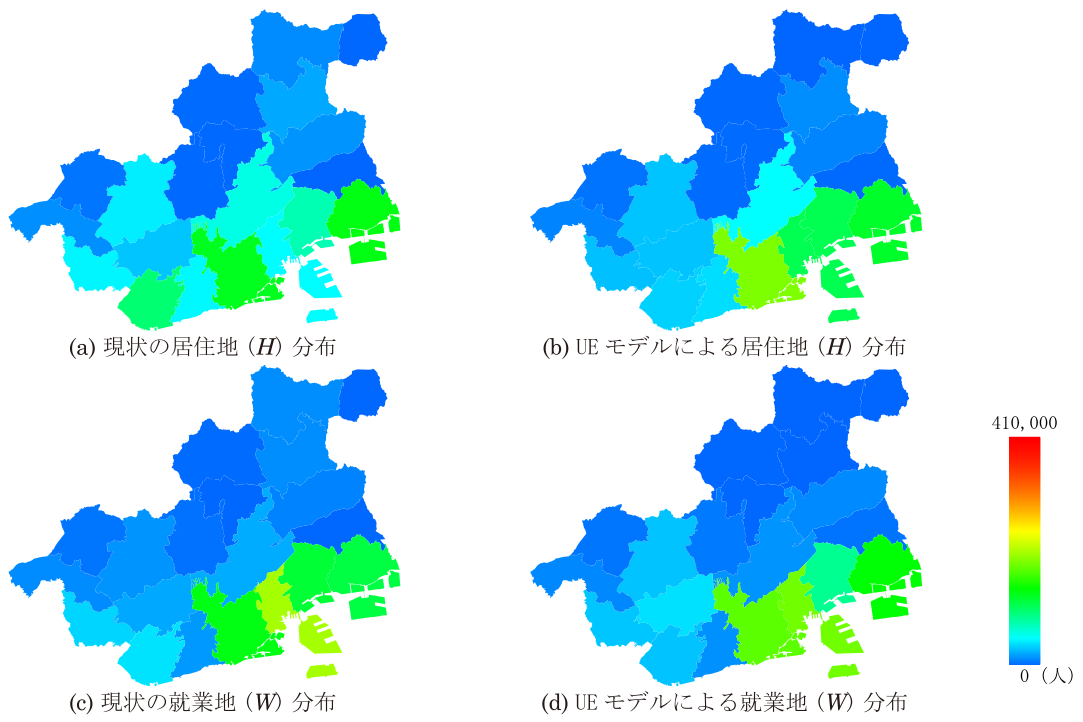


図 6.12 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (神戸市)

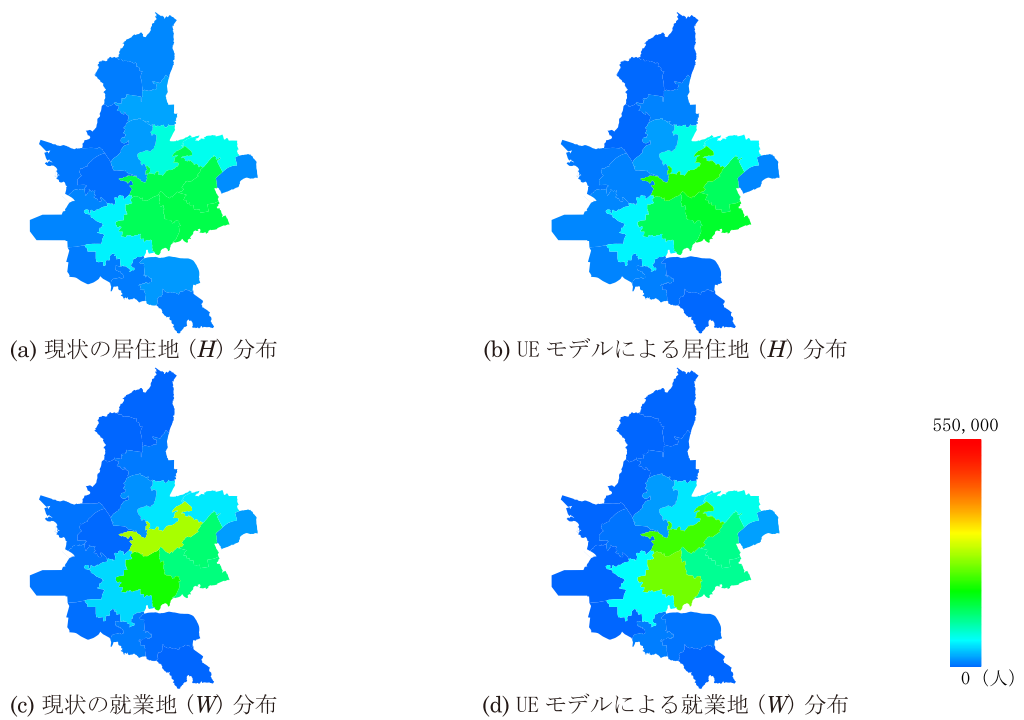


図 6.13 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (熊本市)

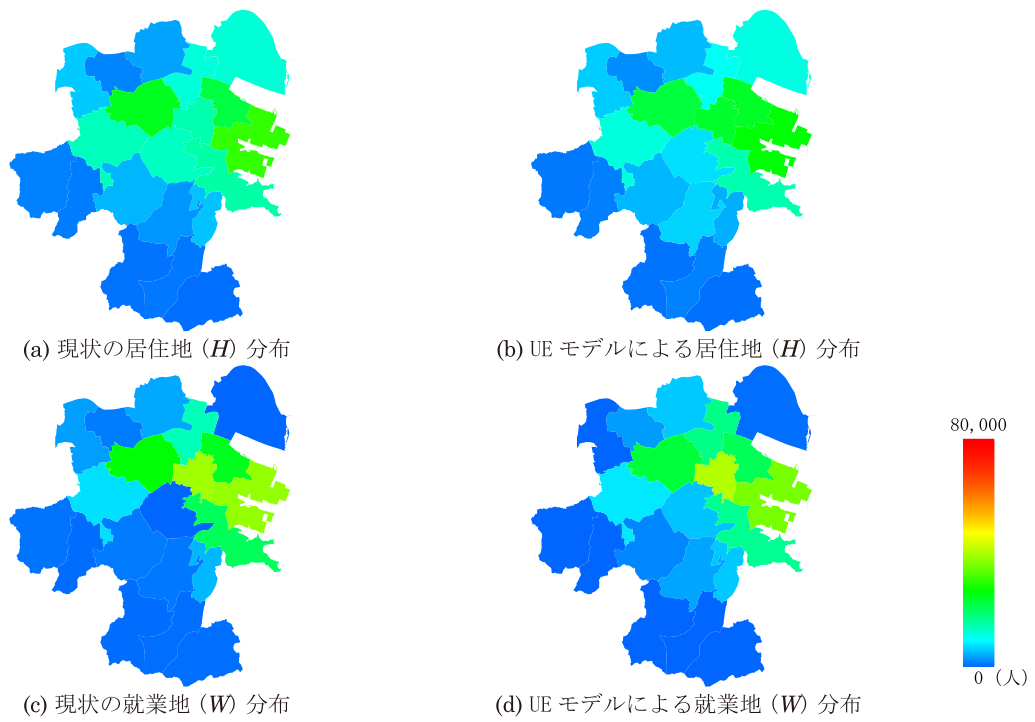


図 6.14 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (徳島市)

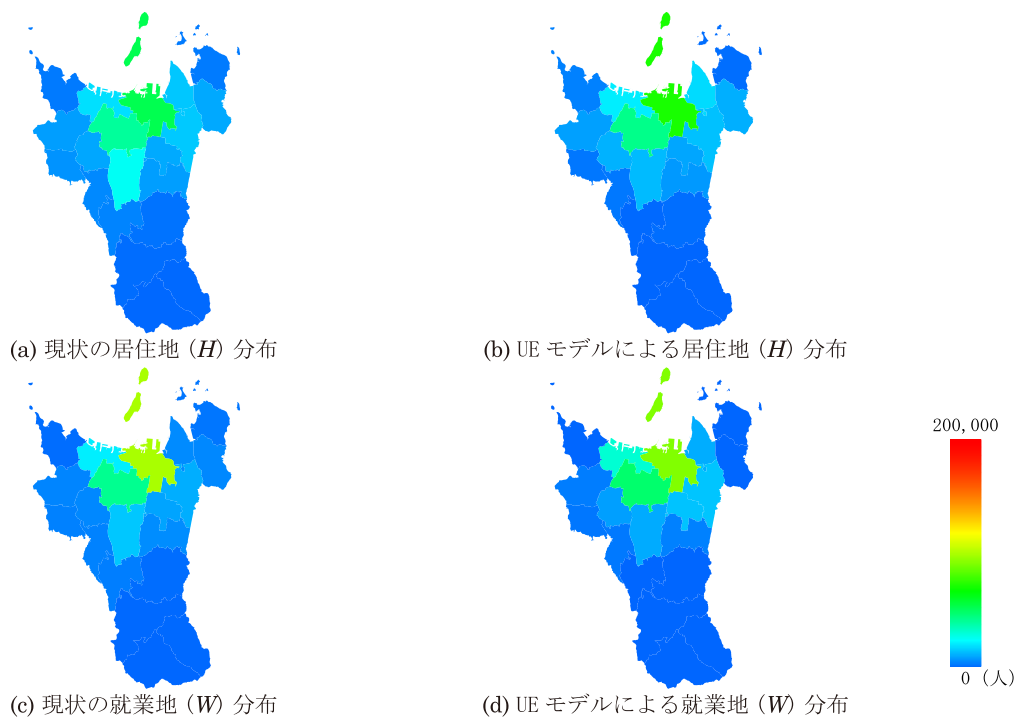


図 6.15 現状の職住分布と UE モデルによる再現の職住分布 (高松市)

6.4.2 領域面積の違いによるパラメータ

UE モデルによって各都市の現状の職住分布を再現したが、各都市において領域面積が異なるため、領域面積の違いによってパラメータが変化するかを検証する。UE モデルによる目的関数は、

$$F(\mathbf{x})_{UE} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J 2d_{ij}^h \cdot t_{ij}^h + \frac{\alpha}{2T} \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I w_i \cdot w_{i'} \cdot d_{ii'}^w + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \beta \cdot \frac{w_i}{W_i} \cdot w_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \beta \cdot \frac{h_j}{H_j} \cdot h_j \quad (5.48 \text{ 再掲})$$

である。

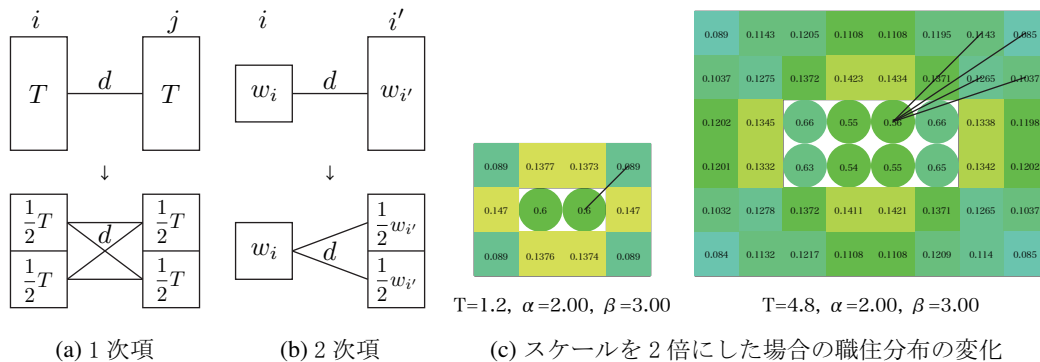


図 6.16 領域面積の違いによるパラメータ変化の検証

ここで式 (5.48) について領域を半分としたモデルを考える。領域が半分となるため T は $\frac{1}{2}T$ となり、距離に関しては d のままのモデルである。図 6.16 (a), (b) から、理論上はスケールの違いによるパラメータの差分が表れないことが分かる。 $I = 2, J = 10$ から $I = 8, J = 40$ とスケールを変化させた仮想都市モデルを用いた検証 (図 6.16 (c)) においても、スケールの違いによるパラメータの差異はほとんど見られないことが示されている。以上のことから 10 都市間の領域面積の違いによるパラメータへの影響を考慮しなくてもよいことが示されたため、現状を再現したパラメータ α, β を用いて都市の大局的特徴を捉えたい。

6.4.3 三角座標による都市の大局的特徴

各都市における UE モデルにおける通勤移動コスト、業務移動コスト、不快感コストの割合を三角座標によってまとめたものが図 6.17 である。図 6.17 において各都市における 1 人当たりの【総コスト】 UE の値を円状にて示している。図 6.17 が示していることは、都市内の人々がそれぞれ負担するコストが等コスト原則に従った場合において、業務移動コストと不快感コストの割合が、通勤移動コストに比べて高いことであり、業務移動コスト > 不快感コスト \gg 通勤移動コスト となる。特に日本の都市においては一般に、業務移動コストの比率が高く、通勤移動コストは職住形態の形成において大きな要因

とはならない。 α は業務移動頻度を表しているが、“頻度”として考えると推定された α の値として通勤移動と業務移動がこれほど大きな差が生じるとは考えにくい。したがってやはり α は移動の重要度を表していると考えられ、都市はその移動の重要度によって形成されていると考えるのが妥当であろう。これまで考慮されていなかった業務移動コストが、職住分布の形成において非常に大きな比率を占めていることが明らかになり、また不快感コストにおいても通勤移動コストよりも重要な要素であることが示されている点において、本章で提案している 2 次項を考慮した都市内のコストを定式化する手法は有益なツールとなることが分かる。

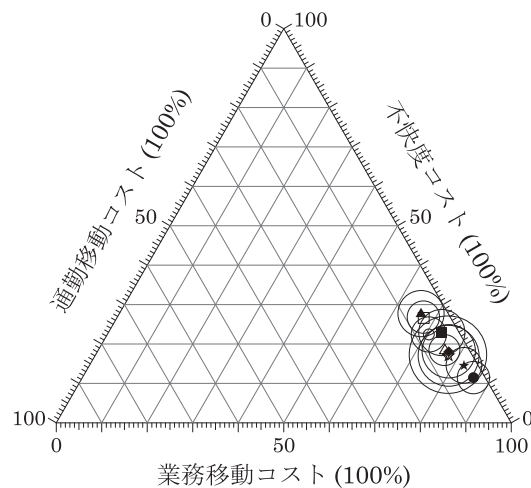


図 6.17 三角座標におけるコストの評価

6.4.4 最適職住形態とパラメータ変動による都市の変化

UE モデルを用いて現状の職住分布を推測されたパラメータ値を用いて、SO モデルによる職住分布の最適配置を導出する。UE モデルでは都市内の人々が各々の利益を追求した状態を作り出しているが、SO モデルでは都市全体のコストの総和を最小化するため、各都市において今後都市構造を改変させる際の指標となることと思われる。具体的な例として、図 6.18～図 6.27 に各都市の現状を再現した UE モデルによる職住分布と SO モデルによる最適職住分布を示す。また表 6.2 に UE モデルにおいて km 換算した各コストと 1 人あたりの総コスト、および SO モデルにおける 1 人あたりの総コストを示す。なお、これから求められる 10 都市の平均減少率は 2.11% である。

表 6.2 10 都市のコストデータ

| km 換算した各コスト (1人当たり) | 分析対象都市 | | | | | | | | | |
|-------------------------|-----------|-----------|---------|---------|-----------|---------|-----------|---------|---------|---------|
| | 札幌 | 仙台 | 新潟 | 静岡 | 神戸 | 岡山 | 広島 | 高松 | 徳島 | 熊本 |
| 【通勤移動コスト】 _{UE} | 2.2 | 8.2 | 3.3 | 4.4 | 4.9 | 4.6 | 3.8 | 1.3 | 4.8 | 2.7 |
| 【業務移動コスト】 _{UE} | 141.3 | 191.1 | 225.7 | 195.5 | 145.6 | 148.9 | 133.8 | 257.6 | 320.5 | 128.1 |
| 【不快感コスト】 _{UE} | 5.2 | 13.0 | 16.3 | 12.5 | 13.7 | 9.3 | 11.1 | 21.1 | 30.8 | 11.5 |
| 【総コスト】 _{UE} | 148.7 | 212.3 | 245.3 | 212.4 | 164.2 | 161.8 | 148.7 | 280.0 | 356.1 | 142.3 |
| 【総コスト】 _{SO} | 135.8 | 208.6 | 240.8 | 203.6 | 163.4 | 160.5 | 148.7 | 276.1 | 343.6 | 142.3 |
| 総人口 (人) | 1,913,545 | 1,045,986 | 811,901 | 716,197 | 1,544,200 | 709,584 | 1,173,843 | 419,429 | 264,548 | 734,474 |

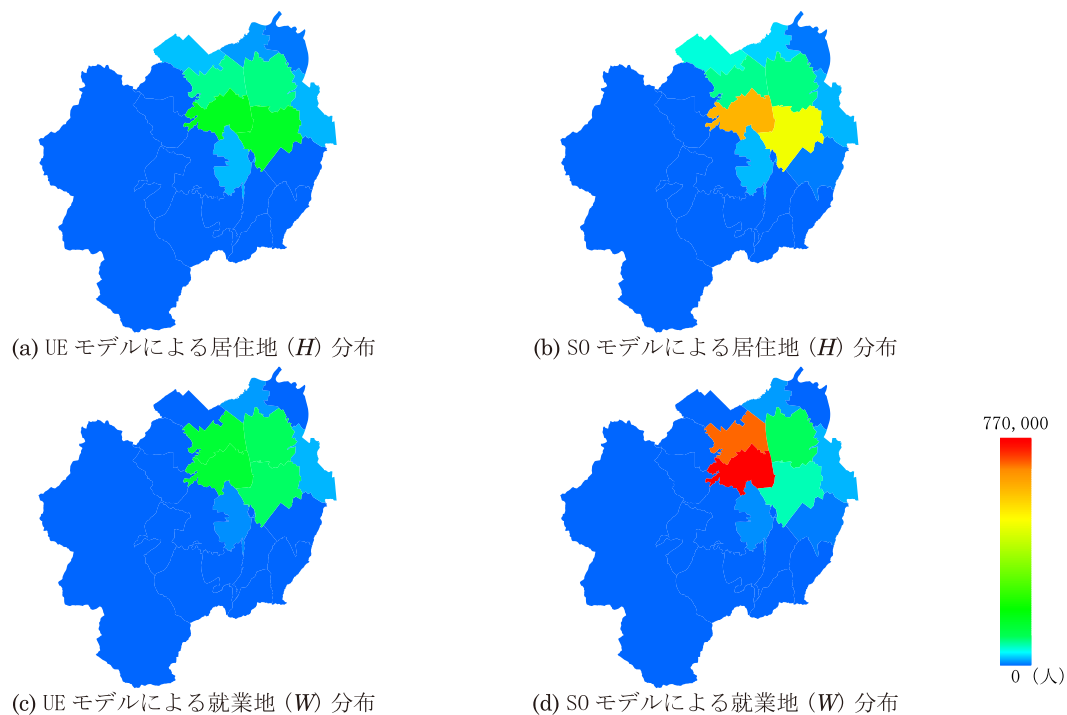


図 6.18 UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (札幌市)

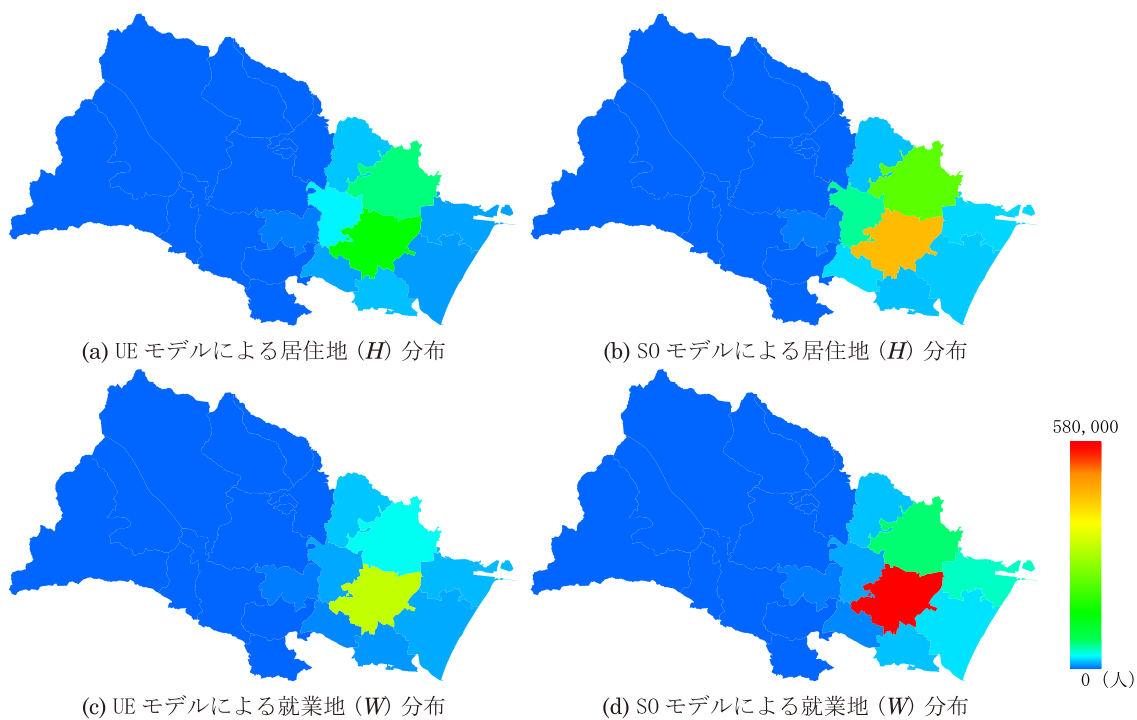


図 6.19 UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (仙台市)

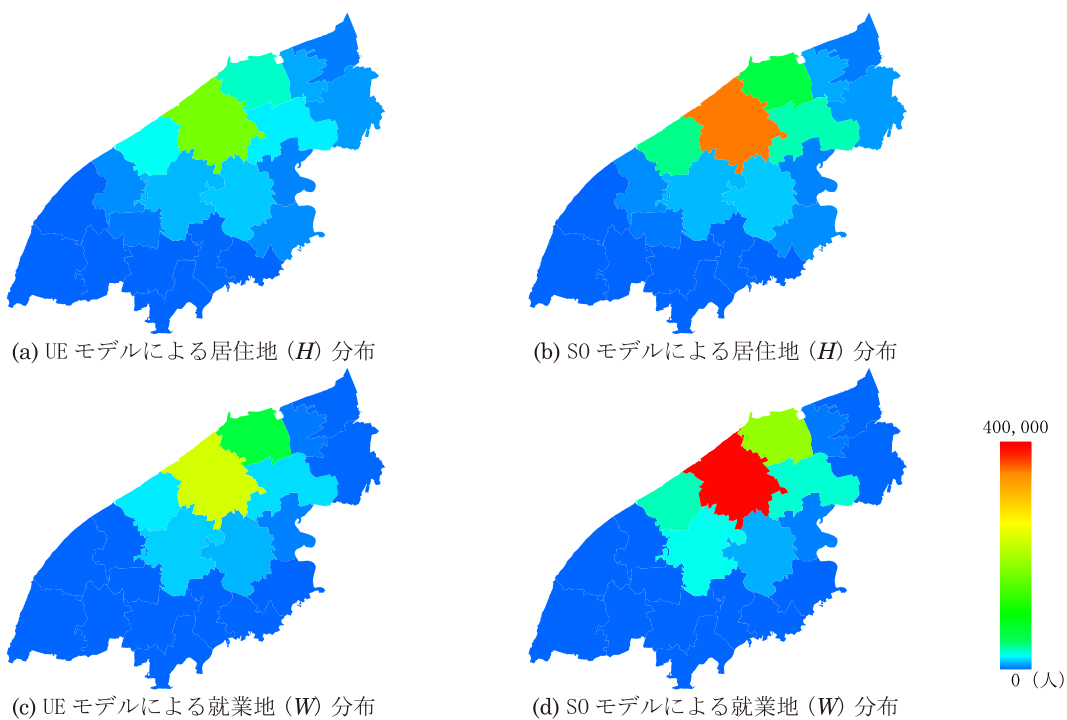


図 6.20 UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (新潟市)

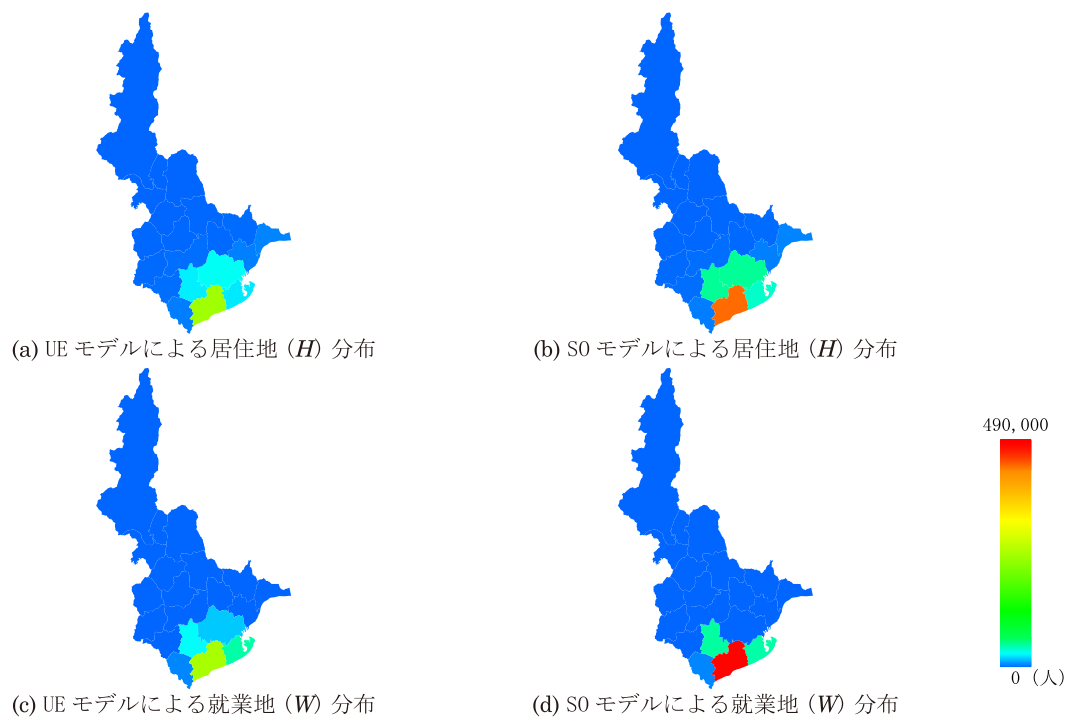


図 6.21 UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (静岡市)

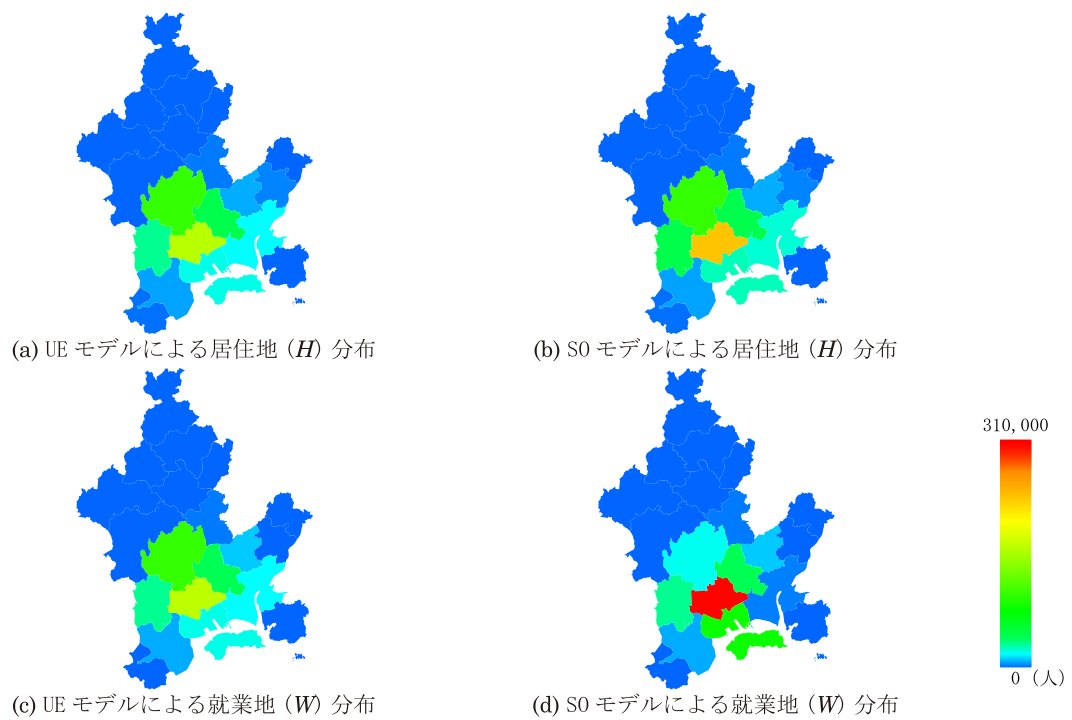


図 6.22 UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (岡山市)

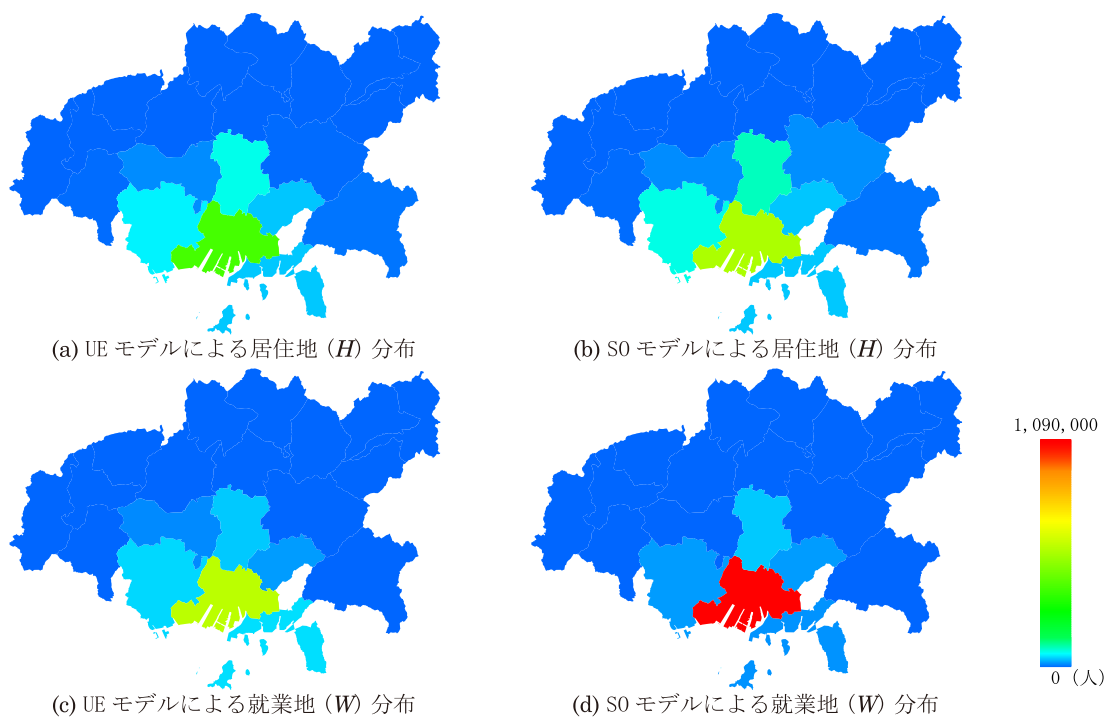


図 6.23 UEモデルによる均衡職住分布と SOモデルによる最適職住分布 (広島市)

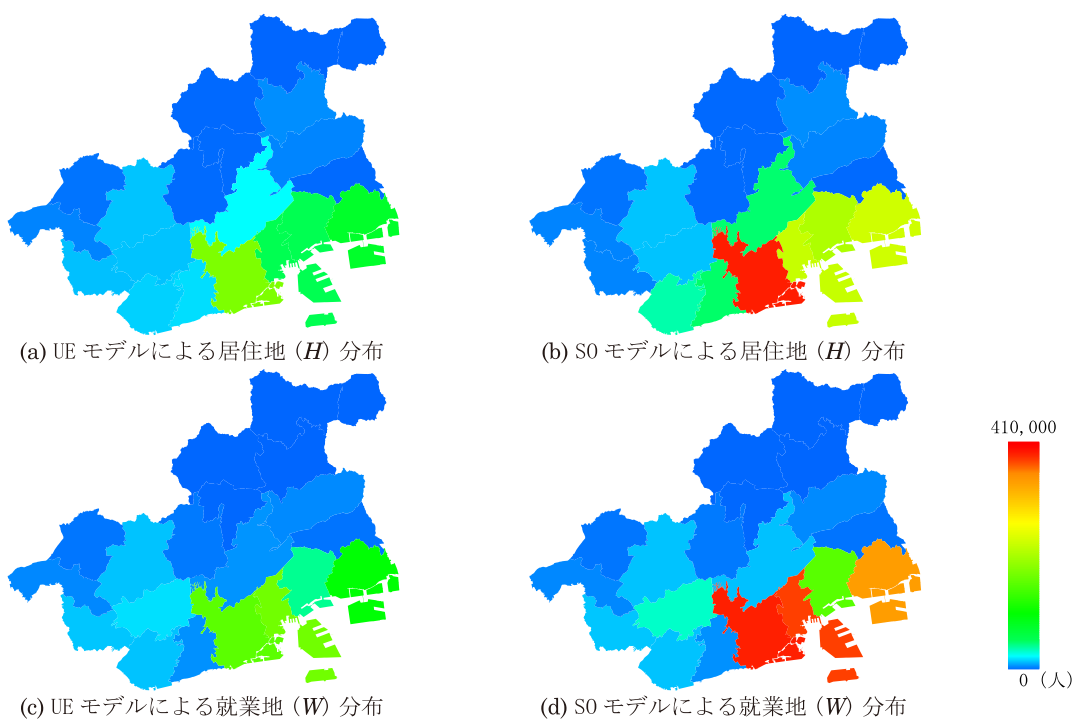


図 6.24 UEモデルによる均衡職住分布と SOモデルによる最適職住分布 (神戸市)

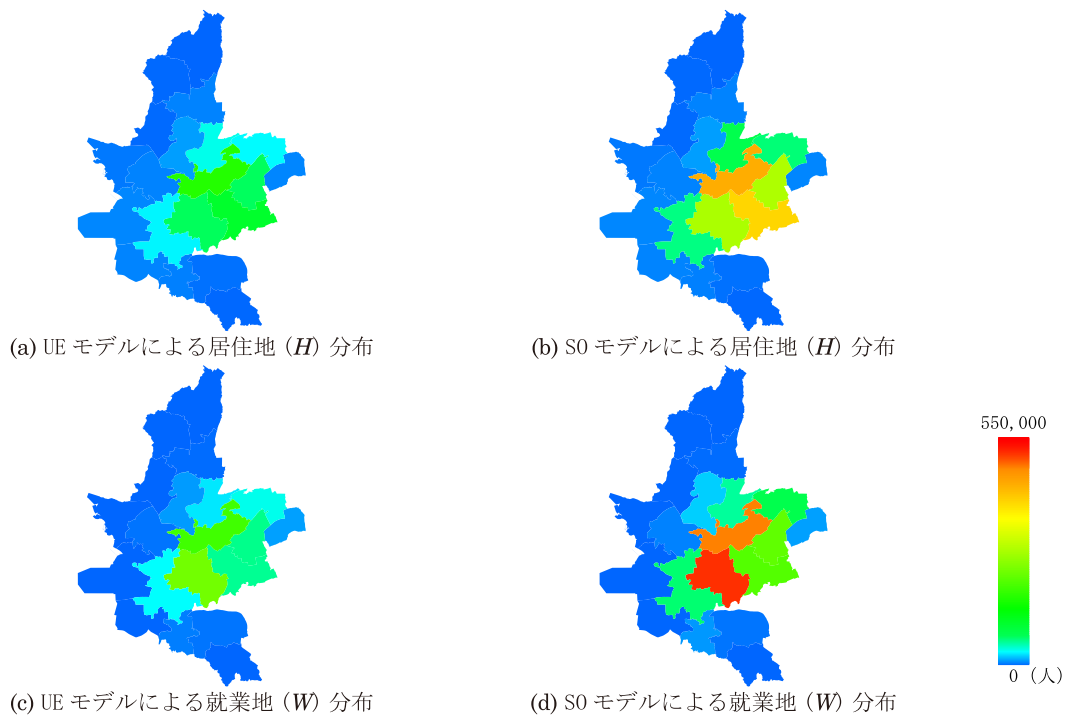


図 6.25 UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (熊本市)

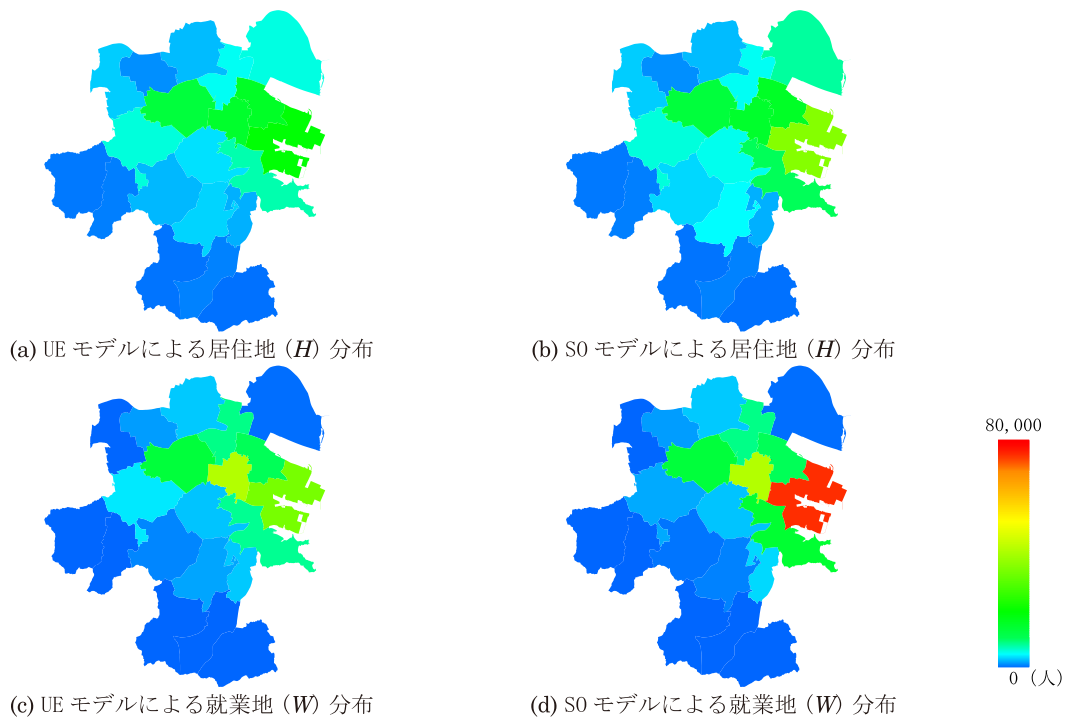


図 6.26 UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (徳島市)

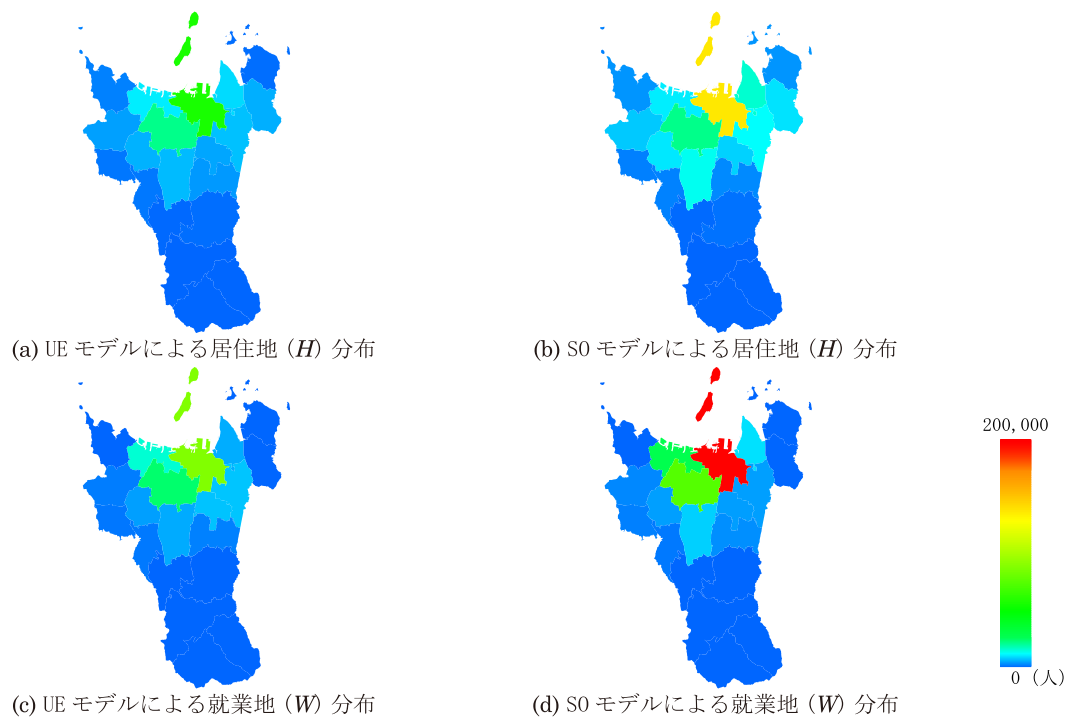


図 6.27 UE モデルによる均衡職住分布と SO モデルによる最適職住分布 (高松市)

職住分布の最適配置では、就業地、居住地ともに市内に分散して配置されていたものが集中することが分かり、都市はコンパクトシティ型へと移行することが分かる。特に就業地に関しては容量制約が大きな領域に集中して配置され、その周囲を囲うように形成されている。居住地分布は就業地ほど一極集中することはないが、すべての領域に分散することはなく、不快感コストによる居住環境が居住地形成の要因になっていることが分かる。

最適配置で用いたパラメータを変動させることにより、都市の変化を記述することも可能である。今後ますます情報化社会が進展すると α は増大すると予想され、既に高齢化社会に突入した今後の地方都市の人口減少や、13.5%にのぼる空き家率の問題を勘案すると、 β は減少すると考えられる。都市内のパラメータ変動による職住分布の挙動を追いかけることで、今後重点的に施設整備を進めるべき領域などを導き出す上でも有効な手法であると考えられる。具体的な例として10都市の中から大規模、中規模、小規模の都市におけるパラメータを変動させた場合の居住地・就業地の変化を図6.28～6.33に示す(図6.28, 図6.29:神戸市, 図6.30, 図6.31:新潟市, 図6.32, 図6.33:徳島市)。どの都市においても、居住地の容量制約が大きいために人口分布変動はあまりみられないが、就業地の容量制約は居住地に比べて小さいために人口分布変動が大きく表れ、 α が大きくなれば就業地の集中が、 β が大きくなれば分散状態に変化することが示されている。

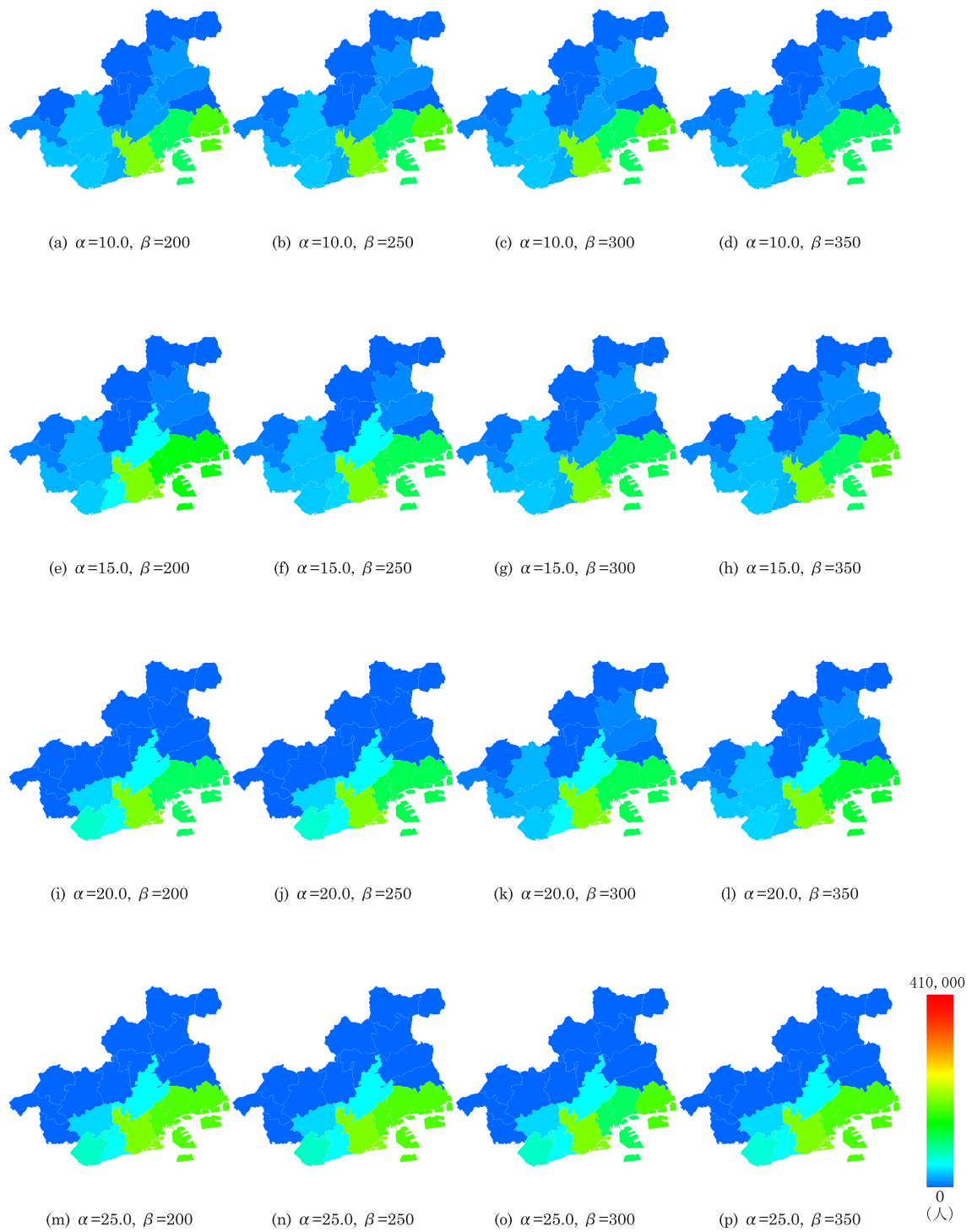


図 6.28 パラメータ変動による居住地の変化 (神戸市)

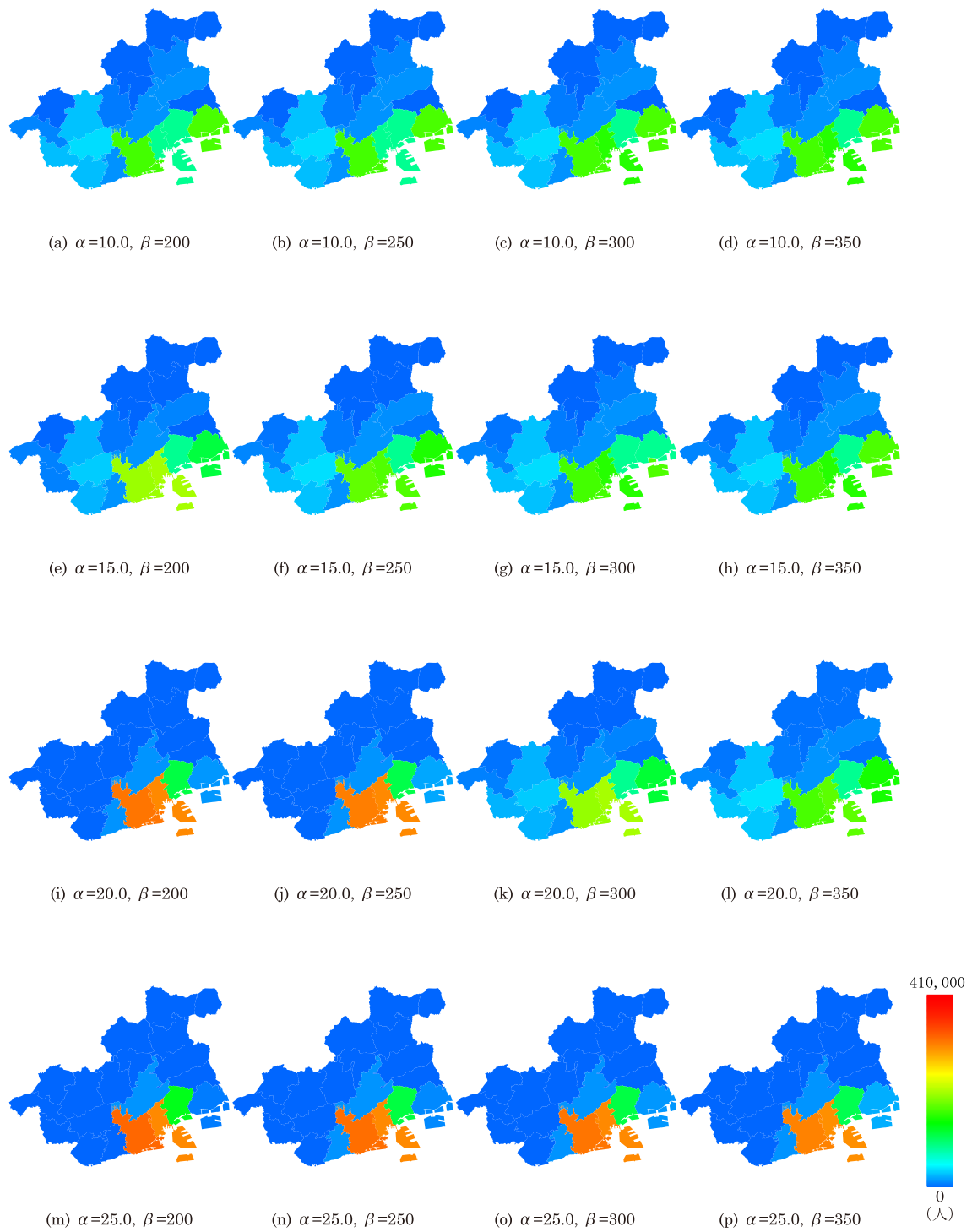


図 6.29 パラメータ変動による就業地の変化 (神戸市)

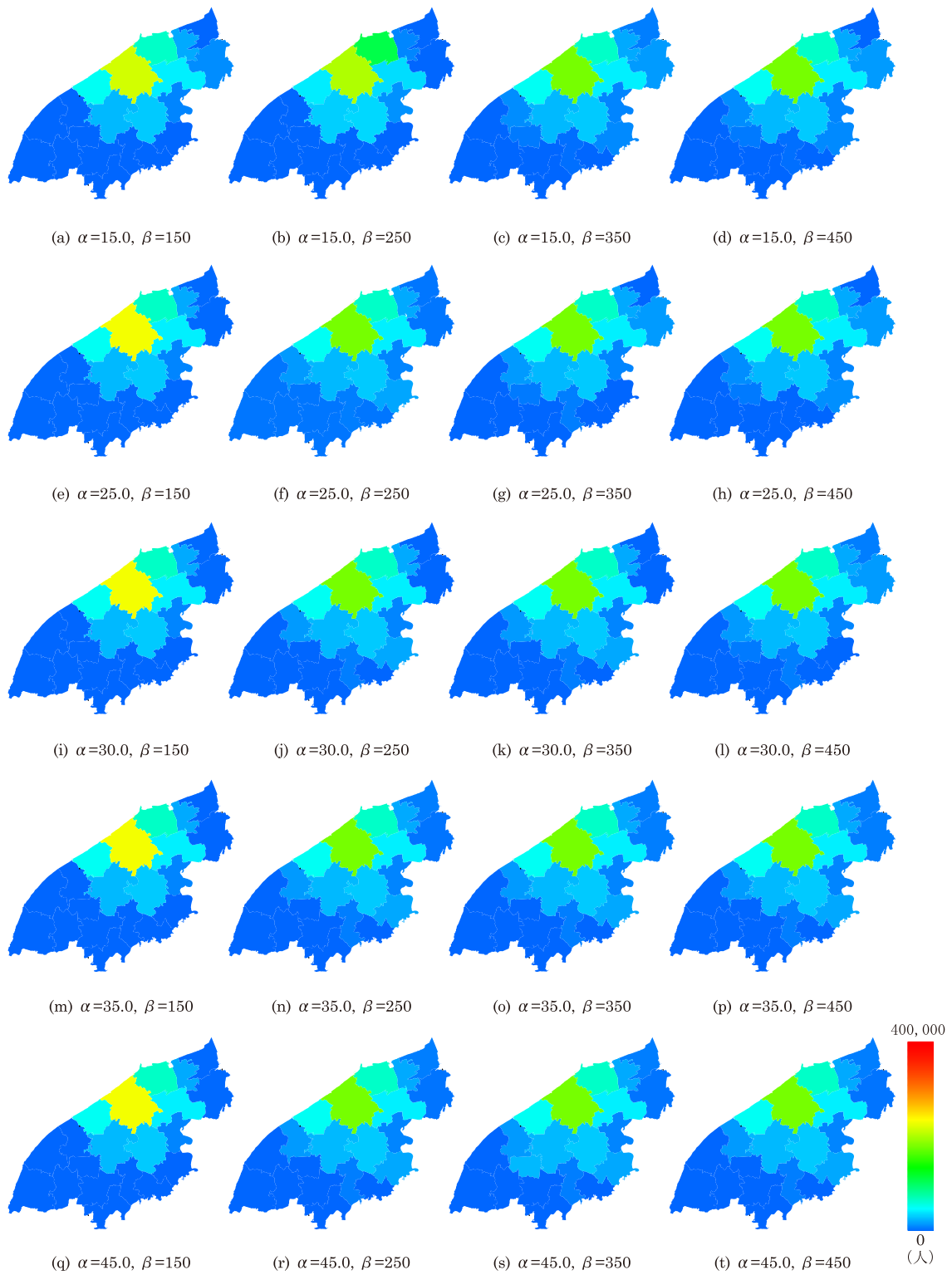


図 6.30 パラメータ変動による居住地の変化 (新潟市)

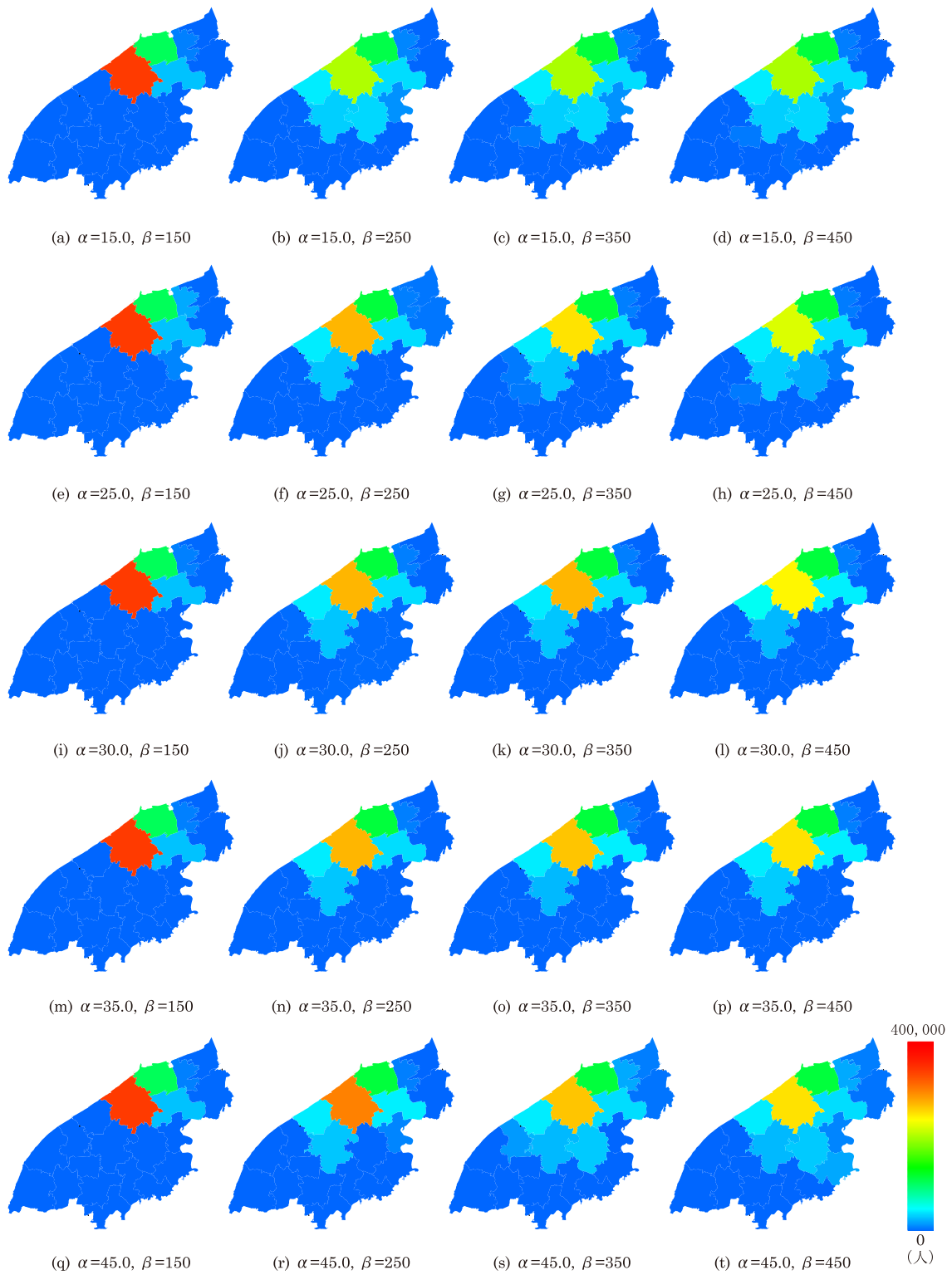


図 6.31 パラメータ変動による就業地の変化 (新潟市)

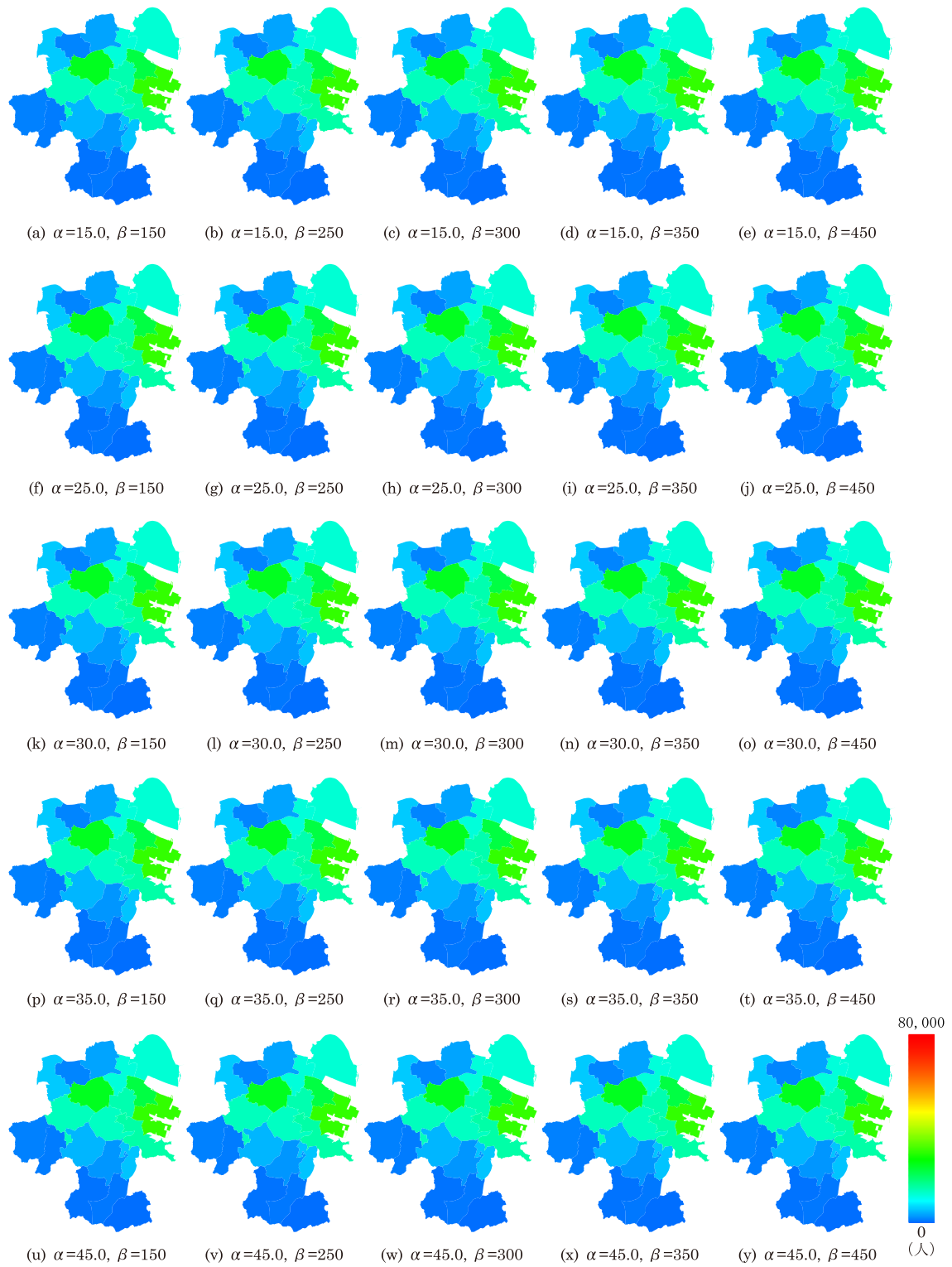


図 6.32 パラメータ変動による居住地の変化 (徳島市)

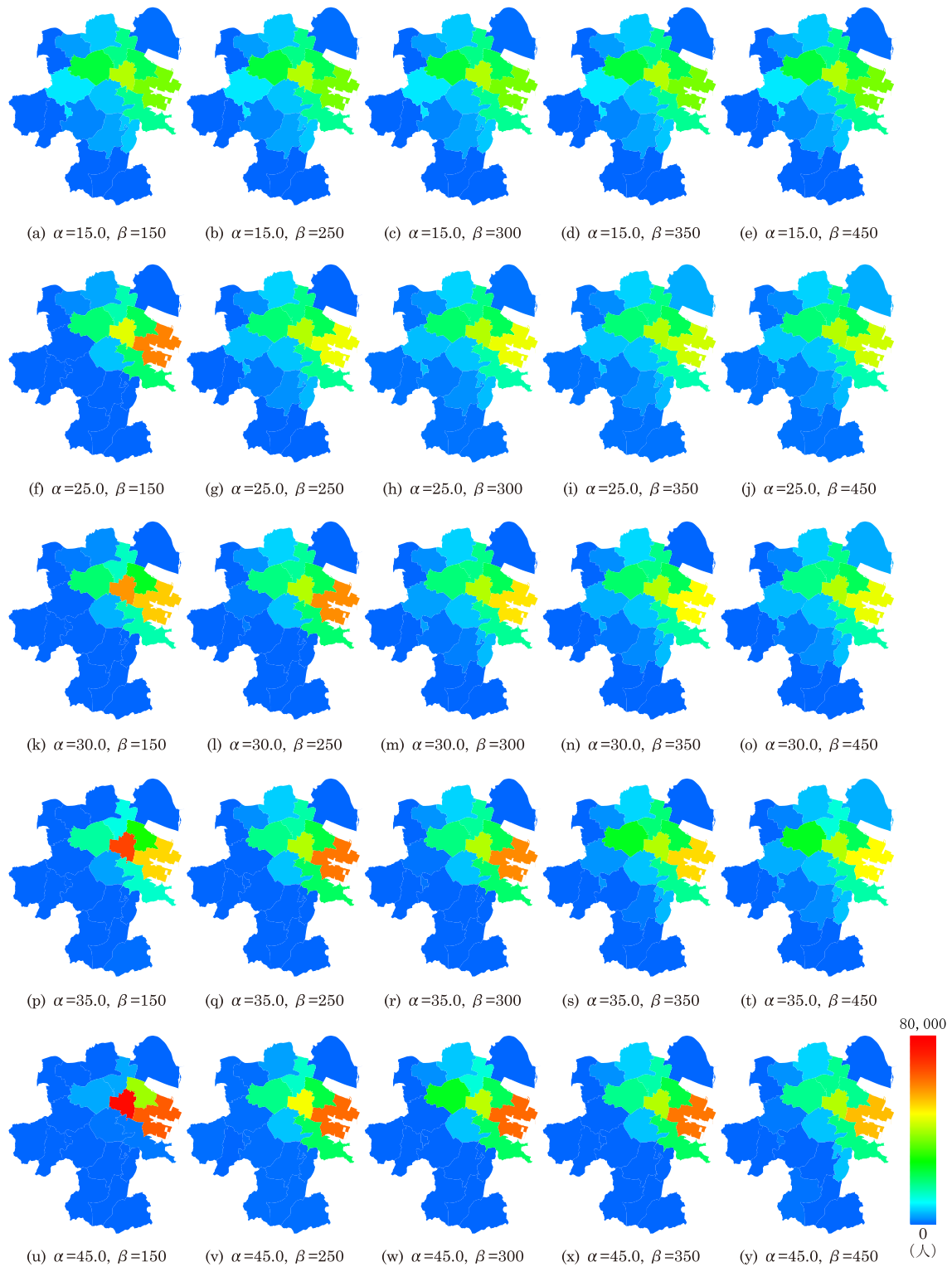


図 6.33 パラメータ変動による就業地の変化 (徳島市)

6.4.5 他指標との比較

UE モデルを用いて推定したパラメータを他指標と比較してみたい。α は業務移動頻度でありながら移動の重要度を表すことから、業務移動の重要度を表す他指標として、本社数、事業所数および売上金額を（すべて平成 24 年経済センサスより）、β は不快感パラメータであることから β と各都市における平均地価を比較する（表 6.3）。これらの相関係数（CC: Correlation Coefficient）は、2 組の数値からなるデータ $\{(x_i, y_i)\} (i = 1, 2, \dots, n)$ が与えられたとき、

$$CC = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (6.19)$$

で求められる。表 6.3 からは、α と本社数との相関係数が 0.7647、事業所数との相関係数が 0.7657、売上金額との相関係数が 0.8161 と相関が強く出ており、パラメータ α を考慮した都市モデルが現実の指標になることを表している。また、β と平均地価の相関係数は 0.6191 であり、β に関してもある程度の強い相関があることが分かる。α、β とも【総コスト】_{UE} との相関も強く出ており、これらのことから、業務移動頻度や不快感を求めるパラメータが、実空間の他指標との相関があることが分かり、本研究で用いるパラメータの有意性は明らかである。

表 6.3 他指標との比較

| α, β 他指標 | 分析対象都市 | | | | | | | | | | 相関係数 |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|
| | 札幌 | 仙台 | 新潟 | 静岡 | 岡山 | 広島 | 神戸 | 徳島 | 熊本 | 高松 | |
| α | 33.0 | 26.0 | 20.0 | 15.0 | 12.0 | 22.0 | 22.0 | 17.0 | 13.0 | 17.0 | |
| 【総コスト】 _{UE} | 284 * 10 ⁶ | 222 * 10 ⁶ | 199 * 10 ⁶ | 152 * 10 ⁶ | 116 * 10 ⁶ | 189 * 10 ⁶ | 253 * 10 ⁶ | 94 * 10 ⁶ | 104 * 10 ⁶ | 117 * 10 ⁶ | 0.88156 |
| 本社数 | 3,617 | 2,264 | 1,877 | 1,837 | 1,609 | 2,796 | 3,341 | 746 | 1,438 | 1,106 | 0.76469 |
| 事業所数 | 64,093 | 40,661 | 33,337 | 33,302 | 27,447 | 48,106 | 59,227 | 12,886 | 27,567 | 20,825 | 0.76570 |
| 売上金額（百億円） | 1,386 | 1,063 | 577 | 588 | 520 | 1,211 | 1,204 | 183 | 369 | 339 | 0.81614 |
| β | 330 | 450 | 350 | 430 | 280 | 380 | 380 | 170 | 180 | 210 | |
| 【総コスト】 _{UE} | 284 * 10 ⁶ | 222 * 10 ⁶ | 199 * 10 ⁶ | 152 * 10 ⁶ | 116 * 10 ⁶ | 189 * 10 ⁶ | 253 * 10 ⁶ | 94 * 10 ⁶ | 104 * 10 ⁶ | 117 * 10 ⁶ | 0.68373 |
| 平均地価（m ² ） | 99,517 | 149,000 | 69,824 | 157,201 | 90,413 | 182,203 | 208,417 | 93,234 | 110,857 | 69,996 | 0.61909 |

6.5 手法の取扱い範囲と今後の数学的展開

本章では、第3章から第5章にかけて構築した都市モデルを実空間都市へと応用させて分析を行っており、主に移動頻度 α と不快感パラメータ β の変化によって、現状の職住分布の再現と最適化状態への変化を導出した。しかしながら都市人口 T は国勢調査の値をもとに一定とし、人口変化による動的過程を扱っていない。特に人口が減少すればパラメータも変化することが考えられるため、将来の職住分布を予測するという観点からは詳細な結果を求めることは困難である。しかしながら、人口 T の変化によって収束的な職住分布は導出可能であり、その点において意義があると考えられる。

既存の建物群を所与のものとして扱っていることも本章および本研究の特徴であり、数十万ノードの建物ノードを20領域に統合して分析を行った。10都市すべてにおいて20領域に設定することで、都市の規模によって解像度の違いが生じることもあり、大都市などで見られる副都心現象が本モデルでは生じない。これはバランス・メカニズムのような人々の選択行動を考慮せず、一意のものとして扱っているためであり、またそのような扱い方でなければ2次計画問題に帰着しないという技術的な限界もある。都市内の人々に複数の行動パターンを設定することで職住配置問題をより詳細に解くことが可能であると思われるが、その際には本研究で構築した数理モデルに確率項が付与されることから、新たな数理モデルを開発する必要があると考えられる。

6.6 本章のまとめ

本章では、建物ノードに容量制約を付したうえで構築したSOモデル、UEモデルを用いて10都市における実証分析を行った。実証分析では、各都市における現状の職住形態を導くパラメータ推定がUEモデルを用いることである程度可能である結果を得た。また、その際の各コストの割合を比較することで、職住分布の導出においては2次項として業務移動コストと不快感コストを考慮することが不可欠であるという知見を得た。推定されたパラメータをもって、SOモデルによる職住分布の最適配置を導出すると、都市の人口分布は集中し、かつ都市内のコストも減少する。都市内の人々はUEモデルで示されるような行動をとるが、都市計画を施策する立場からはSOモデルが最適であり、職住分布を導出する上では両モデルを組み合わせることが必要であると考えられる。パラメータ α 、 β を他指標と比較することで、ある程度の相関関係が得られている。この結果が示すことは、本章で提案した都市モデルに様々な指標を2次項として組み込むことが可能であるということであり、業務移動コストや不快感コスト以外にも種々のコストを勘案した都市モデルを構築し、都市のさまざまな施設配置問題に展開できる可能性がある。

第7章 結

7.1 結論

7.2 今後の課題と展望

第7章

結

7.1 結論

本研究は、都市内の職住形態を導出するにあたり、都市内の移動と集積から導出する方法論を独自に構築した。具体的には、Hamilton による移動コストの最小化問題を拡張し、業務移動コスト、不快感コストおよび各ノードに容量制約を与える新たな都市モデルを構築した。また、(i) 業務移動頻度の推定およびその性質、ならびに (ii) 不快感パラメータの導出という2つの視点から実空間都市への応用を試みた。

施設配置、特に職住配置に関する既往研究では、領域内で発生する人やものの流動に対して、数理モデルを用いてその再現や将来の予測を行う数多くの手法が提案されており、Harris & Wilson のバランス・メカニズムをはじめとして一連の空間相互作用モデルの系譜がそれにあたる。また、都市内の移動を対象とした研究に目を向けると、主に交通配分量問題を主とした交通ネットワークフローに関する一連の研究が存在する。これらの分野では、交通網を抽象化したネットワークを対象として、交通量と様々な配分原則を与えることでネットワークの各リンクに流れる交通量を予測する分析が数多くなされてきた。

本研究は、上記の系譜には属するものの、数理計画問題に帰着させることで繰り返し計算に頼ることなく一度の計算によって収束解を導出する手法を構築した。特に各ノードに容量制約を付すという条件下において、2次計画問題を直接分析するための基礎を築いた点は、本研究の理論的な貢献として最も重要なものである。

本研究の第3章以降で構築した各配分モデルによって得られた知見を以下にまとめる。

第3章

第3章では、通勤移動に加えて業務移動を考慮することにより職住分布を導出する都市モデル (SO モデル: System Optimum model) を提案した。SO モデルは都市モデル全体のコストを最小化するモデルであり、制約条件の影響や、2次計画問題として定式化を行った最小化問題が非凸2次計画問題と

なることを示した上で、線形緩和法を用いて線型計画問題へと帰着できる手法も記述した。加えて、各ノードに容量制約を付することにより、仮想都市モデルでの実証のみならず、実空間都市の分析など一般性を失うことなく拡張できる都市モデルであることを示した。

第4章

第4章では、第3章で構築したSOモデルを拡張し、各ノードにおける集積がもたらすコストとして不快感コストを考慮したSOモデルを提案した。容量制約が付された任意のノードにおいて就業・居住する人数によって不快感が変化するという制約のもと、ノード間に発生するコストとノード自体がもつコストを同時に扱い、それらを2次計画問題として追求したのは、本研究が初めてだと思われる。不快感コストを導入することで容量制約のもつ性質が明らかとなり、実証分析を行うことで職住形態の最適配置においては容量制約まで人が配置されることがないことを明らかにした。

第5章

第5章では、第3章および第4章のSOモデルとは異なる、都市モデルにおける人々が負担するコストをみな等しくする新たな都市モデル（UEモデル：User Equilibrium model）を提案した。UEモデルでは前章までの容量制約、通勤移動コスト、業務移動コスト、不快感コストの条件は一定のもと、都市モデル内の人々が自由に流動すると仮定した上で、あるノードにおける容量制約に達した場合のペナルティコストを導入することで、都市モデルのコスト均衡配分問題が数理計画問題と等価であることを示した。また、第4章の数値解析例と比較して業務移動頻度や不快感パラメータのもつ性質を明らかにした。

第6章

第6章では、第4章で提案したSOモデルと第5章で提案したUEモデルを組合せ、国内10都市の職住形態の実証分析を展開した。具体的にはUEモデルを用いて各都市の現状の職住形態を再現するパラメータを推定し、そのパラメータをもってSOモデルへ組込むことで、現状の職住形態と最適職住形態の違いや、1人あたりが負担するコスト（km換算したコスト）を比較した。解析結果からは職住形態を導出するにあたり、業務移動コスト及び不快感コストが占める比率が非常に高く、本研究で導入した2つのコストを2次項として考慮することが必須であるという結果を得た。このとき、業務移動コストを求める際の移動頻度のパラメータが、“頻度”としてではなく“重要度”として扱うにふさわしいという新たな知見を得た。推定した各パラメータを変動させることにより、都市の職住形態の変化を示すことができ、今後の職住活動分布が記述出来ると考えられる。

7.2 今後の課題と展望

本研究のモデルの均衡解および最適解の算出にあたっては、線形緩和法を用いることでその求解を行ったが、緩和した領域 $[D]_L^2$ が明らかに実行可能領域 $[D]$ よりも大きいため、厳密な解が求まらなかった例もみられた。この問題に関しては、凸計画問題の一種として知られている半正定値計画問題 (SDP: Semidefinite Programming) を扱い、SDP を用いた非凸 2 次計画問題の緩和 (小島 2004) の手法をモデルに導入することも考慮する必要がある。本研究では、現状の職住形態を推定する際に用いた不快感パラメータを、就業地・居住地ともに同値として扱っているが、現実的には就業形態と居住形態における不快感が同じであることは考えにくい。したがって、就業地・居住地それぞれの特性を考慮したパラメータの設定が必要であると考えられる。パラメータの設定によって将来の都市像が大きく変化することは第 6 章の分析から明らかである。ここでいくつかのシナリオが考えられる。

- (1) 人口減少によって都市の集積が低減され、不快感パラメータ β が減少する
- (2) 情報化社会がすすむことにより、都市内の移動が増加するため α が増大する
- (3) 都市がコンパクトシティ化され、 β が増大する
- (4) 情報化の加速度が収束し、 α が減少する

など、どの時点での職住分布を求めるかによってパラメータの設定が異なる。現状の都市を再現したり、今後の都市像を予測するパラメータは、どの時点の均衡・最適配置か、または政策提言として都市計画の立場、人々 (利用者) の立場によっても異なるであろう。本研究で提案したシステム最適配置、利用者均衡配置の長所・短所を用いながらパラメータ推定を行うことで、政策策定の一手法として考慮すべき点は多岐にわたる。

加えて、本研究で導出した α のパラメータ値は、国勢調査や経済センサスから導出されている。言い換えると定期的に調査されている指標を用いて α や β の推定を行うことで、近い将来の都市像を予測することも可能である。

一方、今後の展開に目を転じると、本都市モデルを基礎とした更なる都市分析への応用を行うべきと考えられる。特にモデル内の移動を 2 種類として定式化し、かつノードや領域における集積に着目した施設配置問題は魅力的なテーマである。その際には大きくは 2 つの可能性があると考えられる。

1 つは、施設配置問題に対する数理計画手法の更なる研究である。本研究は容量制約付き職住配置を導出する新たな手法を提案した。しかしながら施設配置問題は職住配置のみならず、非常に複雑で大規模な問題であり、考慮すべき制約条件も多岐にわたる。本都市モデルにおいて仮定した制約条件を様々に変化させることにより、建物内においては利用者と従業員の移動を同時に考慮することが可能となり、市庁舎などの公共施設の建物内の配置問題においては、使われ方を考慮した利用者・従業員ともに

快適な部署の配置などが数値解析をもとに導出できると考えられる。さらに都市内においても緊急を有しかつ相互連携が必要な複数公共施設（警察、消防、病院）の同時配置問題、複合施設の再開発問題などへと応用が可能である。これらは SO モデル、UE モデルのどちらかのモデルによって解を導出するのではなく、両モデルの長所を組合わせたモデルによって求解するのが必要であろう。上記の配置問題は第 6 章で得られた「業務移動頻度は移動の重要度を表す」という知見から、単に移動コストから施設配置を導出するのではなく、移動や集積の重み付けを行うことでより精緻な施設配置問題へと拡張され、都市を再構築する際の基準になると考えられる。もう 1 つは大規模な問題サイズに関するものである。本研究で提案した都市モデルを実空間都市の分析に展開する際に、その制約式・条件式の規模が極めて大きくなることから領域統合を行うことで解の導出を行った。これは領域のもつ形態的特性や職住形態を犠牲にした上で、解の厳密さを重視し大域的な最適解を導出するために行った手法である。ここで領域をさらに細かく設定し、領域を町丁目単位で分析を行えば新たな知見が得られるものと考えられる。その場合には組合せ最適化問題に強みを持つ遺伝的アルゴリズムなどを援用して都市モデルに組み込むことで、多数の計算が必要とはなるが都市の現状の形態を犠牲にすることなく効率的に解が導出できる可能性があり、また解の精度を比較する際には本研究で提案した手法が有益となるであろう。

参考文献

- [1] Von Thünen, J.H. (1826): *The Isolated State*.
- [2] Weber, A. (1909): *Über den Standort der Industrie: Reine Theorie des Standorts*.
- [3] Reilly, W.J. (1931): *The law of retail gravitation*, Knickerbocker-Press, New York.
- [4] Christaller, W. (1933): *Die Zentralen Orte in SüdDeutschland*, Gustav Fischer. (『都市の立地と発展』(1969), 訳: 江沢譲爾, 大明堂).
- [5] Karush, W. (1939): Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints, *M.Sc. Dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago*, Chicago.
- [6] Lösch, A. (1940): *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Gustav Fischer. (『レッシュ経済立地論』(1991), 訳: 篠原泰三, 大明堂).
- [7] Nash, J.F. (1950): Equilibrium Points in n-Person Games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol.36, No.1, pp.48–49.
- [8] Nash, J.F. (1951): Non-cooperative Games, *Annals of Mathematics*, 54, pp.286–295.
- [9] Kuhn, H.W. and Tucker, A.W. (1951): Nonlinear programming, *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium*, Berkeley, University of California Press, pp.481–492.
- [10] Wardrop, J.G. (1952): Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, *ICE Proceedings: Engineering Divisions*, Vol.1, Issue 3, pp.325–362.
- [11] Wardrop, J.G. and Whitehead, J.I. (1952): Correspondence. Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, *ICE Proceedings: Engineering Divisions*, Vol.1, Issue 5, pp.767–768.
- [12] Ullman, E. (1954): Geography as Spatial Interaction, *Interregional Linkages (Proceedings of the Western Committee on Regional Economic Analysis)*, Berkeley, pp.63–71.
- [13] Frank, M. and Wolfe, P. (1956): An algorithm for quadratic programming, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.3, Issue 1-2, pp.95–110.
- [14] Beckmann, M., McGuire, C.B. and Winsten, C.B. (1956): *Studies in the Economics of Transportation*, Yale University Press.
- [15] Charnes, A. and Cooper, W.W. (1958): Extremal Principles for Simulating Traffic Flow in a Network, *National Bureau of Standards, J.Res.*, 73B, pp.91–118.

- [16] Dijkstra, E.W. (1959): A note on two problems in connexion with graphs, *Numerische Mathematik*, Vol.1, Issue 1, pp.269–271.
- [17] Jorgensen, N.O. (1963): Some Aspects of the Urban Traffic Assignment Problem, *M.Sc. Dissertation, Institute of Transportation and Traffic Engineering, University of California, Berkeley, CA*.
- [18] Alonso, W. (1964): *Location and land use*, Harvard University Press.
- [19] Cooper, L. (1964): Heuristic Methods for Location-Allocation Problems, *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, Vol.6, Issue 1, pp.37–53.
- [20] Cooper, L. (1967): Solutions of Generalized Location Equilibrium Models, *Journal of Regional Science*, Vol.7, Issue 1, pp.1–18.
- [21] Cooper, L. (1974): A Random Locational Equilibrium Problem, *Journal of Regional Science*, Vol.14, Issue 1, pp.47–54.
- [22] Wilson, A.G. (1967): A Statistical Theory of Spatial Distribution Models, *Transportation Research*, Vol.1, Issue 3, pp.253–269.
- [23] Wilson, A.G. (1970): *Entropy in urban and regional modelling*, Pion.
- [24] Mangasarian, O.L. (1969): *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York. (『非線形計画法』(1972), 訳：関根智明, 培風館).
- [25] Dafermos, S.C. (1971): An Extended Traffic Assignment Model with Applications to Two-way Traffic, *Transportation Science*, 5, pp.366–389.
- [26] Dafermos, S.C. (1972): The Traffic Assignment Problem for Multiclass-user Traffic Networks, *Transportation Science*, 6, pp.73–87.
- [27] Williams, H.C.W.L. (1976): Travel Demand Models Duality Relation and User Benefit Analysis, *Journal of Regional Science*, Vol.16, Issue 2, pp.147–166.
- [28] Daganzo, C.F. (1977a): On the traffic assignment problem with flow dependent cost—I, *Transportation Research*, Vol.11, Issue 6, pp.433–437.
- [29] Daganzo, C.F. (1977b): On the traffic assignment problem with flow dependent cost—II, *Transportation Research*, Vol.11, Issue 6, pp.439–441.
- [30] Daganzo, C.F. (1980): An equilibrium algorithm for the spatial aggregation problem of traffic assignment, *Transportation Research*, Vol.14, Issue 3, pp.221–228.
- [31] 戸川隼人 (1977) : 共役勾配法 (シリーズ新しい応用の数学 (17)), 教育出版.
- [32] 腰塚武志 (1977) : 都市平面の基礎的研究, 東京大学博士学位論文.

- [33] 腰塚武志, 大澤義明 (1983a): 距離分布による施設配置の分析, 日本都市計画学会 都市計画論文集 No.18, pp.25-30.
- [34] 腰塚武志, 小林純一 (1983b): 道路距離と直線距離, 日本都市計画学会 都市計画論文集 No.18, pp.43-48.
- [35] 腰塚武志 (1985): 時間圏域の面積について, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 秋期研究発表会アブストラクト集, 2-D-3, pp.176-177.
- [36] 今野浩, 山下浩 (1978): 非線形計画法, 日科技連出版社.
- [37] Leonardi, G. (1978): Optimum facility location by accessibility maximizing, *Environment and Planning A*, Vol.10(11), pp.1287-1305.
- [38] Karlqvist, A., McFadden, D., et al. (1978): *Modeling the Choice of Residential Location, Spatial Interaction Theory and Planning Models*, North-Holland Pub. Co., pp.75-96.
- [39] Harris, B. and Wilson, A.G. (1978): Equilibrium Values and Dynamics of Attractiveness Terms in Production-Constrained Spatial-Interaction Models, *Environment and Planning A*, Vol.10(4), pp.371-388.
- [40] Larson, R.C. and Odoni, R. (1981): *Urban Operations Research*, Prentice-Hall, NJ.
- [41] 宮城俊彦 (1982): 交通ネットワーク均衡の理論と計算法に関する基礎的研究, 京都大学博士学位論文.
- [42] Hamilton, B.W. (1982): Wasteful Commuting, *Journal of Political Economy*, Vol.90, No.5, pp.1035-1053.
- [43] Hamilton, B.W. (1989): Wasteful Commuting Again, *Journal of Political Economy*, Vol.97, No.6, pp.1497-1504.
- [44] Chen, R. (1983): Solution of Minisum and Minimax Location-Allocation Problems with Euclidean Distances, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.30, pp.449-459.
- [45] Chen, R. (1984): Location Problems with Costs Being Sums of Powers of Euclidean Distances, *Computers & Operations Research*, Vol.11, Issue 3, pp.285-294.
- [46] Chen, R. and Handler, G.Y. (1987): Relaxation Method for the Solution of the Minimax Location-Allocation Problem in Euclidean Space, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.34, pp.775-788.
- [47] 藤井明 (1983): 地域分析における幾何学的領域モデル, 日本都市計画学会 都市計画 (126), pp.93-98.
- [48] 宇野求 (1983): 地域空間における領域分割に関する研究, 東京大学博士学位論文.
- [49] 河上省吾, 磯部友彦, 仙石忠広 (1986): 時間制約を考慮した1日の交通・活動スケジュール決定プロセスのモデル化, 土木計画学研究・論文集 No.4, pp.189-196.

- [50] 井上博司 (1986) : 混雑した道路網における交通均衡およびその数値解法, 土木学会 土木学会論文集 第 365 号 IV-4, pp.125-133.
- [51] 小島政和 (1987) : Kuhn-Tucker の最適性条件, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 オペレーションズ・リサーチ : 経営の科学 32(6), pp.360-362.
- [52] 鈴木敦夫 (1987) : 平面上の施設配置決め問題の研究, 東京大学博士学位論文.
- [53] 田淵隆俊 (1987) : 企業と住宅の動学的立地モデル, 日本都市計画学会 学術研究論文集 No.22, pp.259-264.
- [54] Vaughan, R.J. (1987): *Urban Spatial Traffic Patterns*, Pion Ltd.
- [55] 藤田泰弘, 松井寛, 溝上章志 (1988) : 時間帯別交通量配分モデルの開発と実用化に関する研究, 土木学会論文集 389, pp.111-119.
- [56] 朝倉康夫 (1988) : 利用者均衡を制約とする交通ネットワークの最適計画モデル, 土木学会 土木計画学研究・論文集 No.6, pp.1-19.
- [57] 栗田治, 腰塚武志 (1988) : 領域間平均距離の近似理論とその応用, 日本都市計画学会 都市計画論文集 No.23, pp.43-48.
- [58] 栗田治 (1989) : 領域間平均距離の近似理論と都市分析への応用, 筑波大学博士学位論文.
- [59] 栗田治 (1991) : 面的施設の最適配置モデル, 日本都市計画学会 学術研究論文集 (26-B), pp.535-540.
- [60] 栗田治 (1997) : 施設配置モデル : 配置問題と社会の公平さ, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 オペレーションズ・リサーチ : 経営の科学 42(12), pp.782-784.
- [61] 栗田治 (1999) : 都市施設の適切な数に関する数理モデル : 政令指定都市の区数に関する分析例, 日本建築学会 計画系論文集 (524), pp.169-176.
- [62] 栗田治 (2013) : 都市と地域の数理モデル—都市解析における数学的方法, 共立出版.
- [63] Drezner, Z. and Wesolowsky, G.O. (1989): The Asymmetric Distance Location Problem, *Transportation Problem*, Vol.23, Issue 3, pp.201-207.
- [64] Drezner, Z. (1995): *Facility Location: A survey of applications and methods*, Springer.
- [65] Hodgson, J.M. (1990): A Flow-capturing Location-allocation Model, *Geographical Analysis*, No.22, pp.270-279
- [66] 生田保夫 (1990) : 情報化社会と交通 : 私的交通の問題を中心として, 流通問題研究 16, pp.1-54.
- [67] 岡部篤行, 鈴木敦夫 (1992) : 最適配置の数理, 朝倉書店.
- [68] 大澤義明 (1992) : 施設配置理論モデル 『建築・都市計画のためのモデル分析の方法』, 井上書院.

- [69] Nering, D.E. and Tucker, W.A. (1993): *Linear Programs and Related Problems*, Academic Press Professional, San Diego.
- [70] 鈴木勉 (1990) : 施設の最適な階層構造に関する考察, 日本都市計画学会 学術研究論文集 No.25, pp.331-336.
- [71] 鈴木勉 (1994a) : Tanner-Sherratt 型職住分布に従った業務地分散の評価, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 秋季研究発表会アブストラクト集, pp.148-149.
- [72] 鈴木勉 (1994b) : 職住割当の最適化による通勤交通エネルギーの削減効果, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 オペレーションズ・リサーチ, 5月号, pp.11-16.
- [73] 鈴木勉 (1995) : 移動費用最小化による最適配置問題に関する一連の研究, 東京大学博士学位論文.
- [74] 鈴木勉 (2003) : 同時密度関数を用いた通勤流動モデルと業務分散が通勤・業務距離に及ぼす影響, 日本応用数学会論文誌 Vol.13, No.3, pp.403-415.
- [75] 赤松隆, 桑原雅夫 (1994) : 渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分-1 起点・多終点および多起点・1終点 OD ペアの場合, 土木学会 土木学会論文集 No.488, pp.21-30.
- [76] Sherali, H.D. and Tuncbilek, C.H. (1995): A Reformulation-Convexification Approach for Solving Nonconvex Quadratic Programming Problems, *Journal of Global Optimization* 7(1), pp.1-31.
- [77] Sherali, H.D., Dalkiran, E. and Liberti, L. (2012): Reduced RLT Representations for Nonconvex Polynomial Programming Problems, *Journal of Global Optimization* Vol.52, Issue 3, pp.447-469.
- [78] Sherali, H.D. and Adams, W.P. (2013): *A Reformulation-Linearization Technique for Solving Discrete and Continuous Nonconvex Problems*, Springer.
- [79] Larsson, T. and Patriksson, M. (1993): An Augmented Lagrangean Scheme for Capacitated Traffic Assignment Problems, *Proceedings of the 2nd Meeting of the EURO working Group on Urban Traffic and Transportation*.
- [80] Larsson, T. and Patriksson, M. (1995): An Augmented Lagrangean Dual Algorithm for Link Capacity Side Constrained Traffic Assignment Problems, *Transportation Research*, Vol.29, No.6, pp.433-455.
- [81] Brimberg, J. and Wesolowsky, G.O. (1996): The Rectilinear Distance minimum Problem with Minimum Distance Constraints, *Location Science*, Vol.3, Issue 3, pp.203-215.
- [82] 奥野隆史 (1996) : 都市と交通の空間分析, 大明堂.
- [83] 松橋啓介 (1996) : 省エネルギー型都市の立体都市空間形態に関する一考察, 日本都市計画学会 学術研究論文集 No.31, pp.43-48.
- [84] 石川義孝 (1998) : 空間的相互作用モデル - その系譜と体系, 地人書房.

- [85] 藤田宏, 今野浩, 田邊國士 (1998): 岩波講座 応用数学 15 [方法 7] 最適化法, 岩波書店.
- [86] 土木学会 土木計画学研究委員会 (1998): 交通ネットワークの均衡分析 —最新の理論と解法—, 丸善.
- [87] 土木学会 土木計画学研究委員会 (2003): 道路交通需要予測の理論と適用 第 I 編 利用者均衡配分の適用に向けて, 丸善.
- [88] 大津晶, 腰塚武志 (1999): 移動費用を最小にする職住分布モデル, 日本都市計画学会 学術研究論文集, pp.775-780.
- [89] 岸本達也 (1998): 連続空間における施設の最適配置問題に関する研究, 東京大学博士学位論文.
- [90] 岸本達也 (1999): 距離のべき乗和を最小化する施設群の最適配置問題とその解法, 日本建築学会 計画系論文集 (521), pp.301-308.
- [91] 矢島安敏 (1999): 非凸 2 次計画問題と組合せ最適化, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 機関誌 Vol.44, No.5, pp.237-242.
- [92] 高梨敬子 (2000): 地方都市の市街地整備, 技報堂出版.
- [93] 桑原雅夫, 吉井稔雄, 熊谷香太郎 (2001): 動的システム最適配分とランプ流入制御に関する研究—簡略ネットワークにおける基礎的分析—, 土木学会 土木学会論文集 No.667, pp.59-71.
- [94] 田村一軌, 腰塚武志, 大澤義明 (2001): 道路ネットワーク上の道路距離と直線距離, 日本都市計画学会 都市計画論文集 Vol.36, pp.877-822
- [95] 木下芳郎, 青木義次 (2002): 都市内の移動を最小にする立体的職住構成, 日本建築学会 関東支部 研究報告集 II (72), pp.393-396.
- [96] Barabási, Albert-László (2002): LINKED: *The New Science of Networks*, Perseus Pub. (『新ネットワーク思考—世界のしくみを読み解く』(2002), 訳: 青木薫, NHK 出版).
- [97] 田村明久, 村松正和 (2002): 最適化法 (工系数学講座 17), 共立出版.
- [98] 杉浦芳夫 (2003): 地理空間分析 (シリーズ人文地理学 3), 朝倉書店.
- [99] 円山琢也, 原田昇 (2003): ネットワーク上での混雑を考慮した最適職住配置手法の構築とその実証研究, 日本都市計画学会 都市計画論文集 Vol.38, No.3, pp.517-522.
- [100] 小島政和, 脇隼人 (2004): 多項式最適化問題に対する半正定値計画緩和, システム制御情報学会誌 48(12), pp.477-482.
- [101] 本間裕大, 栗田治 (2004): ランダム効用理論に基づく職住分布の同時形成モデル, 日本都市計画学会 都市計画論文集 Vol.39, No.3, pp.769-774.
- [102] 本間裕大, 栗田治 (2007): トリップの連結構造に着目した空間相互作用モデル, 形の科学会誌, 22(1), pp.59-60.

- [103] 青木義次 (2006) : 建築計画・都市計画の数学—規模と安全の数理, 数理工学社.
- [104] 梶谷有三, 藤井勝, 田村亨ほか (2008) : 職住分布の再配置が通勤トリップ長に及ぼす影響について, 北海道都市地域学会 都市学研究, Vol.45, pp.3-10.
- [105] 今井公太郎 (2010) : 障害付ポロノイ図を用いた施設の圏域策定と最適配置に関する研究, 東京大学博士学位論文.
- [106] 国土交通省国土審議会政策部会長期展望委員会 (2011) : 国土の長期展望 中間とりまとめ, p.7.
- [107] 長澤泰, 西出和彦, 在塚礼子 (2011) : 建築計画, 市ヶ谷出版社.
- [108] 横田裕也, 室町泰徳 (2012) : 東京都市圏における鉄道通勤を対象とした居住地誘導による過剰通勤交通削減に関する研究, 日本都市計画学会 都市計画論文集 Vol.47, No.3, pp.853-858.
- [109] 近藤赳弘, 吉川徹 (2012) : 移動コストを最小化する立体都市形態, 日本建築学会 計画系論文集 第 77 巻 第 675 号, pp.1087-1093.
- [110] 今田寛典 (2012) : 社会情報学と交通, 社会情報学 第 1 巻 1 号, pp.81-88.
- [111] Chen, J. and Burer, S. (2012): Globally solving nonconvex quadratic programming problems via completely positive programming, *Mathematical Programming Computation*, Vol.4, Issue 1, pp.33-52.
- [112] 宗政由桐, 本間裕大, 今井公太郎 (2015) : 移動コストを最小化する制約付き職住分布最適配置形態, 日本建築学会 計画系論文集 第 80 巻 第 712 号, pp.1373-1380.