

博士論文

流体構造連成とモード同定による  
多自由度翼列フラッター解析の研究

立石 敦

# 目次

第 1 章 序論	1
1.1 研究背景	2
1.1.1 高バイパス比エンジンファンにおける翼振動（フラッター）回避の位置づけと重要性	2
1.1.2 ファン形式・翼構造の変遷について	3
1.2 ターボ機械の空力弾性現象	5
1.2.1 ターボ機械における空力弾性現象の分類	5
1.2.2 翼列フラッターの特徴と発生例	6
1.2.3 軽量な翼列に生じる翼列フラッター	8
1.2.4 翼構造の変遷とフラッター解析手法への要求	9
1.3 翼列フラッターの予測手法	10
1.4 研究目的	12
1.5 論文概要	13
第 2 章 翼振動の記述と解析手法	14
2.1 振動方程式と翼振動形態の分類	15
2.1.1 翼の変形・運動における連成問題の区分	15
2.1.2 翼の振動方程式とその解：翼 1 枚・1 自由度振動	15
2.1.3 翼 1 枚・多自由度の振動（モード合成法）	17
2.1.4 翼列の運動方程式	19
2.1.5 翼列系に対する強制振動応答の評価について	22
2.1.6 翼列の多自由度振動の定式化：複数構造振動モード，複数翼枚数	23
2.2 自由振動を利用した空力・構造連成系のモード同定法	23
2.2.1 連成解析を利用した多自由度翼列における空気力係数推定法	23
2.2.2 固有値解析によるフラッターモード推定	25
2.3 モード同定における不確かさ解析	26
2.3.1 推定値と数値計算結果との誤差の考え方	27
2.3.2 決定係数 $R^2$ 値	28
2.3.3 誤差ベクトルの分散，推定係数の分散	28
2.3.4 推定された空力弾性モード固有値の信頼区間	29
2.4 2 章のまとめ	29
第 3 章 支配方程式	30
3.1 連続体の支配方程式	31
3.1.1 基準配置と現在配置，物質表示と空間表示，輸送定理	31
3.1.2 質量保存則・運動量保存則・エネルギー保存則	32
3.1.3 回転座標系における基礎方程式	32
3.2 流体の支配方程式	33
3.2.1 状態方程式および応力-歪関係式（構成式）	33
3.2.2 一般曲線座標系への変換	34

3.2.3	Favre 平均 Navier-Stokes 方程式 . . . . .	36
3.3	固体の支配方程式 . . . . .	38
3.3.1	仮想仕事式の導出 . . . . .	38
3.3.2	応力-歪関係式 (構成式) . . . . .	39
3.3.3	仮想仕事式の基準配置への書き換え . . . . .	40
3.3.4	固体の基礎式のまとめ . . . . .	41
3.4	3章のまとめ . . . . .	41
<b>第 4 章</b>	<b>数値解析手法</b>	<b>43</b>
4.1	流体の数値解析法 . . . . .	44
4.1.1	有限体積法 . . . . .	44
4.1.2	非粘性項の評価 . . . . .	45
4.1.3	粘性項および拡散項の評価 . . . . .	48
4.1.4	変数変換 . . . . .	49
4.1.5	時間進行法 . . . . .	51
4.1.6	乱流モデル . . . . .	56
4.1.7	境界条件 . . . . .	59
4.2	固体の数値解析法 . . . . .	63
4.2.1	有限要素法 . . . . .	63
4.2.2	有限要素分割 . . . . .	63
4.2.3	増分型定式化 . . . . .	66
4.2.4	変位-歪マトリクス . . . . .	67
4.2.5	接線剛性マトリクスおよび質量マトリクス . . . . .	68
4.2.6	外力ベクトルおよび内力ベクトル . . . . .	70
4.2.7	モード分解 . . . . .	71
4.2.8	製造形状の逆解析法 . . . . .	74
4.3	流体-構造連成法 . . . . .	75
4.3.1	分離型反復解法 . . . . .	75
4.3.2	変位の伝達法 . . . . .	75
4.3.3	流体力の伝達法 . . . . .	78
4.3.4	格子変形の手法 . . . . .	79
4.4	4章のまとめ . . . . .	81
<b>第 5 章</b>	<b>検証計算</b>	<b>82</b>
5.1	平板単独翼のクラシカルフラッター . . . . .	83
5.1.1	問題設定 . . . . .	83
5.1.2	解析的空力微係数を用いたシステムモード求解法: $p-k$ 法 . . . . .	85
5.1.3	近似 Theodorsen 関数を用いた状態空間解法 . . . . .	86
5.1.4	時間領域モード同定法の Verification . . . . .	87
5.1.5	連成解析における数値解析の設定 . . . . .	90
5.1.6	解析結果の比較と考察 . . . . .	91
5.2	平板翼列のクラシカルフラッター . . . . .	95
5.2.1	問題設定 . . . . .	95
5.2.2	境界要素法 (LINSUB) による空力微係数を用いたシステムモード求解法 . . . . .	96
5.2.3	連成解析における数値解析の設定 . . . . .	97
5.2.4	解析結果の比較と考察 . . . . .	97

5.2.5	モード間連成の影響: 複合モードと単一モードの比較, 質量比の効果	106
5.3	5章のまとめ	111
<b>第6章</b>	<b>NASA Rotor 67 に対する連成解析</b>	<b>112</b>
6.1	問題設定	113
6.1.1	解析対象	113
6.1.2	解析対象の作動条件と特性評価法	114
6.1.3	数値解析の設定	114
6.2	構造解析	118
6.3	流体解析の検証と流れ場	119
6.3.1	特性曲線	119
6.3.2	翼間の流れ場と翼後方のフローパターン	119
6.4	静変形を考慮したファン特性の解析	122
6.4.1	連成解析における条件	122
6.4.2	静連成解析と流体解析のみのファン特性解析結果の比較	122
6.4.3	連成/非連成解析間の流れ場の変化	122
6.4.4	特性曲線に沿う翼形状の変化	123
6.4.5	翼形状の変化と特性変化の大きさに関して	123
6.5	連成振動解析によるファン振動特性	126
6.5.1	解析方法	126
6.5.2	連成解析で得られる翼振動時間履歴と非定常流れ場の概観	126
6.5.3	翼列に空力弾性モード同定法を適用して得られる解について	127
6.5.4	翼面上の圧力変動場と局所仕事分布の可視化	128
6.6	6章のまとめ	131
<b>第7章</b>	<b>ファン動翼に生じる遷音速翼列フラッターの解析</b>	<b>135</b>
7.1	解析対象 - ECO-CEFS1 ファン	136
7.1.1	解析対象の概要	136
7.1.2	数値解析の設定	137
7.2	構造解析	140
7.3	定常流れ場の解析	142
7.3.1	乱流モデルの影響	142
7.3.2	乱流モデルの決定	145
7.3.3	ファン特性マップ	146
7.3.4	フラッター境界付近における流れ場の特徴	146
7.4	翼列フラッター解析とフラッター境界	152
7.4.1	解析条件	152
7.4.2	空力弾性モードの固有値分布	152
7.4.3	同定誤差の評価	153
7.4.4	1F モード群の各作動点における空力弾性モード	156
7.4.5	1F モード以外の不安定モード	159
7.4.6	翼負荷パラメータ, 無次元振動数, マッハ数で整理した 1F モードフラッター境界	160
7.5	フラッター境界近傍の非定常空気力特性	162
7.5.1	局所的な自励空気力分布の概観と衝撃波の役割	162
7.5.2	低回転数側のフラッター境界不一致の原因の考察	169
7.6	モード同定の精度悪化の原因の考察	174

7.6.1	流れ自身の変動成分について	174
7.6.2	同定精度の悪化した点で同定された不安定翼振動について	177
7.7	空力弾性モードと翼質量の効果	178
7.7.1	Ti-6Al-4V の翼における空力弾性モード形状	178
7.7.2	翼質量の振動特性への感度	178
7.8	7章のまとめ	181
<b>第8章</b>	<b>結論</b>	<b>183</b>
8.1	結論	184
8.2	今後の展望	186
8.2.1	プロップファンおよび Counter-Rotating Open Rotor への応用	186
8.2.2	システム同定手法の翼振動計測のリグ試験への応用	187
8.2.3	高精度非常常流体解析と翼振動解析を接続するスケール分離型翼振動解析	187
	<b>参考文献</b>	<b>189</b>
<b>付録 A</b>	<b>コードの基礎的な検証</b>	<b>194</b>
A.1	流体ソルバおよび移動境界問題に対する検証	194
A.1.1	流体ソルバおよび移動境界問題に対する検証	194
A.1.2	一様流保存問題	195
A.1.3	乱流モデルに対する検証	196
A.2	固体ソルバに対する検証	201
A.2.1	梁の有限変形	201
A.2.2	張力を有する梁の振動数	201
A.2.3	片持ち板のモード解析	202
A.3	流体-構造連成法に対する検証	202
A.3.1	付加質量効果の再現	202
A.3.2	静空気力による変形	204
A.4	まとめ	207
<b>付録 B</b>	<b>並列計算法</b>	<b>208</b>
<b>付録 C</b>	<b>マルチブロック法</b>	<b>209</b>
<b>付録 D</b>	<b>連立一次方程式と固有値問題の解法</b>	<b>211</b>
<b>付録 E</b>	<b>ミスチューニング</b>	<b>218</b>
	<b>謝辞</b>	<b>224</b>

# 第 1 章 序論

## 1.1 研究背景

### 1.1.1 高バイパス比エンジンファンにおける翼振動（フラッター）回避の位置づけと重要性

これまで民間航空航空機用ターボファンエンジンは、エアラインの運行費削減，化石燃料の節約，環境保護の観点から燃費削減と騒音低減を目的に高バイパス比化とファン翼の大型化が進められ，今後もその傾向は続くものと予想される．

大型化によるエンジン重量増加を緩和するために，翼の設計においては Fig. 1.1(a) や Fig. 1.1(b) に示すような，複合材料や中空・薄翼構造が用いられるようになってきており，軽量化・低剛性が促進されているため，構造健全性評価の重要性が増している．航空用エンジンファン動翼の構造健全性に対する代表的な評価項目は，ファン設計に関する文献 [1] [2] [3] を元にと以下のようにまとめることができる．

- 静荷重に対する制約（過回転でも永久変形を起こさないこと）
- 動荷重に対する制約（低サイクル疲労，高サイクル疲労に対してそれぞれ規定のサイクル以上）
- 異物衝突（Foreign Object Damage, FOD）に対する制約．具体的には，鳥吸い込み
- 設計点およびスロットリング線における固有振動数に対する制約（共振回避のため，回転同期外力と固有振動数の離調）
- 自励振動に関する検討（フラッター）

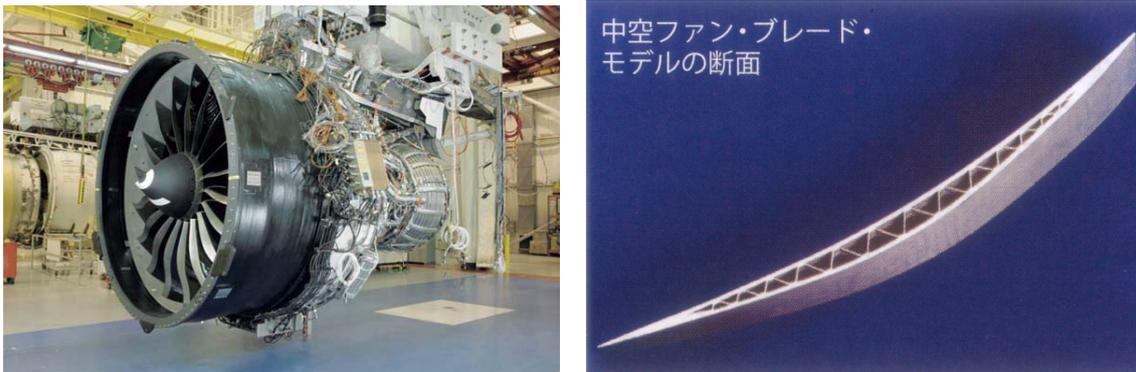
これらが設計中で検討される段階の例が，室岡により [1] で述べられている．典型的なファン動翼設計時のワークフローの例を Fig. 1.2 に示す．高バイパス比のターボファンでは，まずフローパターン設計をし，半径方向の負荷分布（速度三角形）を決定したうえでフローパターンを満たす候補となる翼型を絞り込む．その後，構造成立性を検討しながら詳細な空力設計を行う「空力-構造統合設計」と呼ばれる段階に入る．この段階で，空力性能の検討と上にまとめた様々な破壊モードに対する検討が同時並行でなされ，最終的な形状が決定されることになる．特に高速で回転するファン動翼は，遠心力による変形で大きな圧縮応力が負圧面で生じることがあり，設計上の一つの制約となっている．これは各半径における翼のスタッキング（積重）を工夫することで緩和することができる [2][4] が，積重形式の変更は同時に空力性能の変化ももたらすため，空力性能と構造成立性を同時に検討していかなくてはならない一つの理由となっている．

ファン動翼の破壊モードのうちの 1 つとして，フラッター現象が挙げられる．フラッターは航空機の翼・外板・プロペラ・ファンブレード等，弾性構造が高速の気流に晒される箇所で見られる発散的な自励振動であり，構造物の破壊につながる危険な現象である．そのため航空機や流体機械では，想定されている機器の使用範囲内では決して発生させてはならないと言われている．一般にフラッターは軽量で剛性の低い構造物において発生しやすく，この観点からはフラッターを防止するためには翼の剛性を増すこと，また構造減衰を増すことで全減衰が正にならないことが必要である．

しかしながら，フラッターを抑制するために翼の厚みを増して剛性を大きくすると，

- 重量増加により，ディスクの引張応力が大きくなるため，ディスクをより剛なものにしなければならなくなる
- 万が一ファン動翼が破断した際に機体を損傷しないよう，ファンケースは動翼が貫通しないように設計されるので，ファンケースの重量も増す

ために，軽量化が要求される航空用機器としては望ましくない他の部分の重量増が生じたり，静荷重に対する制約が厳しくなり，他の破壊モードにおける構造成立性が脅かされる．逆に動翼を軽量化できればディスクやファンケースの設計条件が緩和されるので，翼の軽量化はバイパス比のさらなる向上に必要な不可欠な技術であると言える．このようにフラッター回避と高性能を両立するためには，フラッターが起きない範囲で動翼を極力軽量化することが求められており，振動の発生点から過剰でない一定の安全マージンを確保した適切な設計指針を設定するためにも，適切な現象の理解と解析手法の確立は重要である．



(a) Composite blades (GENx) [5] (b) Hollow titanium blade cutview [6]

Fig. 1.1: Examples of light-weight blade structure being applied to recent aeroengines

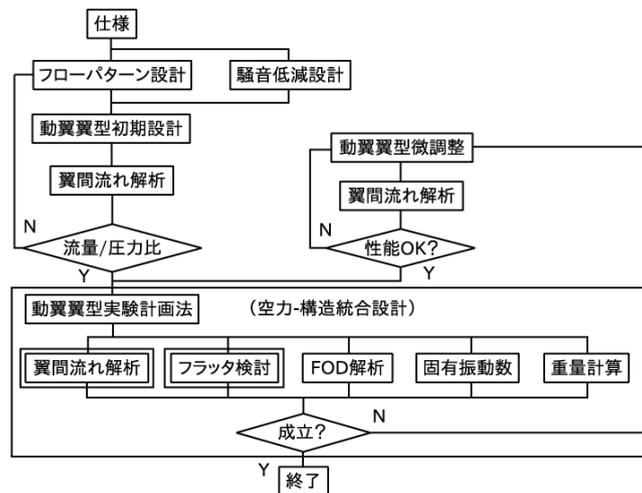


Fig. 1.2: An Example of a Design Workflow of an Aeroengine Fan [1]

### 1.1.2 ファン形式・翼構造の変遷について

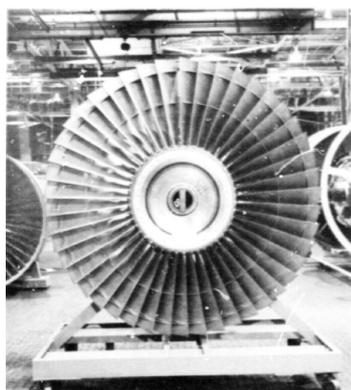
ここでは、航空用エンジンファンが時代の流れと共にどのような進化を遂げてきたか、そしてこの先どのように変わっていくと予想されているかを考えていく。

Table. 1.1 に、代表的な高バイパス比ターボファンエンジンのファンに着目し、スペックや翼構造をまとめる。これらを概観すると、1980 年代以前に型式証明されたエンジンや PW4168 ではそのどれもがバイパス比がおおよそ 5 以下で 30 枚以上の翼枚数を持ち、翼にはミッドスパンシュラウド付きの中実チタン翼が用いられている。90 年台中頃には、それまでのエンジンよりバイパス比が大きく高められた GE90 が登場した。このエンジンでは、翼のアスペクト比を低下させることで剛性を高めミッドスパンシュラウドを廃止する「Wide-chord」な構造が用いられており、以前のエンジンに比べ翼枚数が 22 枚と 10 枚以上も減少している。また材料自体も軽量化のために繊維強化プラスチックが用いられている。2000 年台中頃から 2010 年台にかけてもさらにバイパス比が高められ、最新のギアードターボファンである PW1124G では 12 にも達している。Fig. 1.3 は、高バイパス比ターボファンエンジン黎明期の JT9D と最新の PW1100G シリーズでファン動翼の概観を比較したものであり、スナバ付き高アスペクト比動翼から翼枚数の少ない低アスペクト比翼への変化が明瞭に見て取れる。

このように、高バイパス比エンジンはバイパス比の大幅な向上とともに、翼枚数の削減（現在開発中の GE9x では 16 枚）、複合材や中空構造の適用といった技法により軽量化が推し進められてきた。したがってこのトレンドが続くと、将来的には一層バイパス比が大きく翼枚数の削減された、プロペラに近いファンが実現されていくものと考えられる。また、ナセルを廃した先進的なプロペラ推進器として、NASA では Advanced turbo propeller, GE

Table. 1.1: Specifications of various aeroengine fans (By-pass ratio: from [7])

Name	Approved year	BPR	No. of blades	Material and structure
JT9D-70A	1974	4.9	46	Solid titanium, double mid-span shroud
RB211-524B	1975	4.4	33	Solid titanium, mid-span shroud
CF6-80A2	1981	4.6	38	Solid titanium, mid-span shroud
PW4168	1993	5.1	34	Solid titanium, mid-span shroud
GE90-76B	1995	9	22	CFRP with metal cover, wide-chord
Trent 1000C	2007	11	20	Hollow titanium, swept wide-chord
GE <sub>nx</sub> -1B54	2008	9.2	18	CFRP with metal cover, swept wide-chord
PW1124G	2014	12	20	Hollow aluminium alloy swept wide-chord



(a) JT9D (1974) [8]

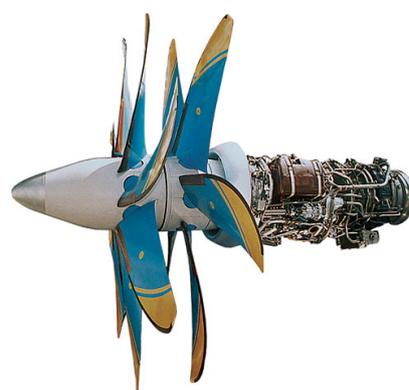


(b) PW1100G (2014) [9]

Fig. 1.3: Comparison of the appearance of fan rotor blades



(a) An-70 cargo aircraft [10]



(b) D-27 engine [11]

Fig. 1.4: A recent application of propfan: An-70 and D-27 engine (BPR=29.25 [7])

社で研究開発された Unducted Fan が精力的に研究されている。近年では Counter-Rotating Open Rotor (CROR) と呼ばれる二重反転プロペラエンジンが Rolls-Royce 社を中心として研究されている。また、これらのコンセプトに近く、現段階で実用化されている推進器として、ウクライナ製の輸送機 An-70 で用いられているプログレス社製の二重反転プロップファンである D-27 エンジンがある。Fig. 1.4 にその概観を示す。直径 4.5m にもなる前方 8 枚・後方 6 枚の大形の動翼によって推進力を得る形式である。巡航速度は通常のターボファンエンジン（およそ 0.8~0.84）に比べ約 0.7 [11] と低速だが、バイパス比は 29 にもなる [7] とされており、騒音が大きいことを除けば高効率で環境負荷の低いエンジン形式として注目されている。

以上より、民間航空機用エンジンの研究開発は、より先進的な高バイパス比エンジンやプロペラ型推進器に向かっていると認識できる。このような推進器の開発に際して必須である「翼振動解析」に求められる事項として、

- 軽量な翼構造の流体中における振動特性が正しく算出できること。
- プロペラに近い構成の推進器動翼の振動解析が行えること。

が挙げられる。次節では、ターボ機械の翼振動の翼振動現象と、ファン翼に生じるフラッター現象、続いてプロペラに近い推進機関の翼に生じるフラッター現象をレビューする。そして、その現象の特徴から将来的な推進器開発で必須となるであろう翼振動解析手法への要求について述べる。

## 1.2 ターボ機械の空力弾性現象

### 1.2.1 ターボ機械における空力弾性現象の分類

一般に、フラッター現象をはじめとする流体-構造連成系（空力弾性系）の挙動は、Fig. 1.5 に示すような、空気力（Aerodynamic force, 図中 A）・弾性力（Elastic force, 図中 E）・慣性力（Inertia force, 図中 I）に示される 3 つの力のバランスによって決まる [12]。航空機分野において、代表的なものを挙げると以下ようになる。

- D：ダイバージェンス。空気力と弾性力の静的な不安定現象を表す。
- R：舵の逆効き。舵面操作に伴い翼のねじれ変形が生じ、舵の効く向きが変化すること。
- F：フラッター。空気力、弾性力、慣性の 3 つのバランスで決まる動的な不安定現象。
- B：パフェッティング。翼面付近の流れの剥離や気流の乱れにより、翼振動が誘起される。

このうち、フラッターは動的な現象であり、空気力・慣性・弾性力全てを考慮することが必要になる。

ターボ機械の場合の空力弾性現象では、まず慣性力を無視して静的な取り扱いが可能な「静変形」と、変動空気力・翼振動双方を考慮しなくてはならない動的なものに分類できる。このうち、動的なものは更に以下の 2 つに分類される。

- 強制振動応答 (Forced response) :  
翼振動と無関係に生じる変動流体力による翼振動応答。
  - 回転同期の加振力
    - \* 空力的要因：前置静翼 (Inlet Guide Vane, IGV), ストラットとのポテンシャル干渉・後流干渉による加振力, 入口流れの不均一 (Inlet Distortion) に起因する変動流体力,
    - \* 構造的要因：軸のアンバランス, ケーシングとの接触 (ラビング)
  - 回転非同期の加振力
    - \* 空力的要因：剥離流れに起因するランダム加振力, 旋回失速による加振力など
- 空力弾性的不安定 (Aeroelastic instability) :  
翼の運動により誘起される変動流体力 (自励空気力, Self-excited aerodynamic force) と翼運動との連成により生じる不安定振動。一般に回転非同期。

試験的に取得されたファンの翼振動振幅を Campbell 線図上に示したものを Fig. 1.6 に示す。Campbell 線図とは、軸回転数と各振動モード振動数の関係を、回転同期力の周波数と合わせて示したもので、共振回避の検討に用いられる。原点から放射状に伸びる直線は回転同期周波数の整数倍を表しており、翼振動モードとこれらの直線の交点で共振が起き、その振動数が共振点である。Fig. 1.6 において横軸方向に筋のように伸びている小振幅の応答は各振動モードの固有振動数であると判断できる。これら固有振動数と回転同期振動数の交点において大きな振幅が生じている箇所が強制振動応答であり、翼が疲労破壊を起こす原因になりうる。また、Fig. 1.6 では共振点以外で大きな振動応答が二箇所確認でき、Kielb [13] はこれらがフラッターによる翼振動応答であると述べている。

フラッターと同様回転非同期の翼振動で主として空力的な要因で生じると考えられているものに、剥離流れに起因するもの (Stalled Flow Vibration, SFV; Non-Synchronous Vibration, NSV), 旋回失速による加振力などがある。SFV, NSV については、General Electric 社の航空用エンジン圧縮機である GE-C1 圧縮機初段動翼にお

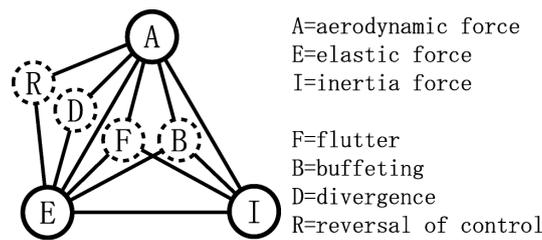


Fig. 1.5: Fundamental aeroelastic phenomena and related forces

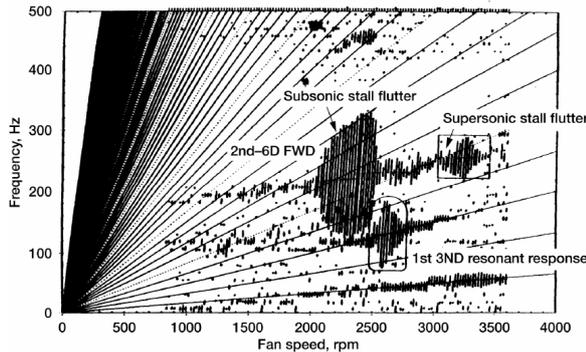


Fig. 1.6: Experimental Campbell diagram [13]

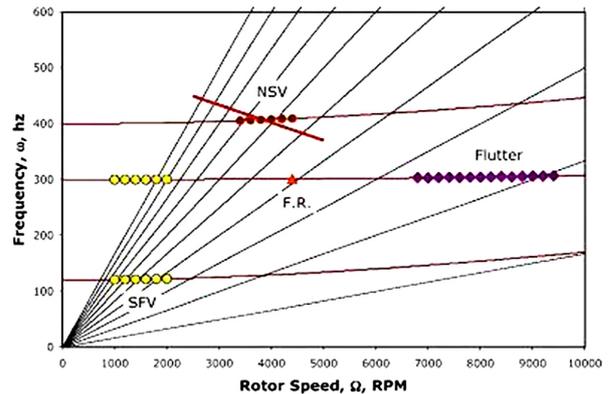


Fig. 1.7: Idealized Campbell diagram and blade vibration phenomena [14]

いて生じたことが Kielb らによって報じられ [15], 発生原因について翼端付近にある前縁剥離域からの渦放出により翼振動応答が大きくなったことが数値解析により考察されているが, フラッターのような自励振動なのか強制振動に近いものなのか, 不安定流れの振動数と翼振動振動数が引き込まれ合い一致してしまう現象である「ロックイン」の有無など, まだよくわかっていないことも多い. なお, このような不安定流れ由来の翼振動が顕在化した例は動翼のみならず静翼でも確認されている [16].

以上をまとめ, 各翼振動現象の Campbell 線図上での発生位置の特徴を模式的に描いた図を Fig. 1.7 に示す. 共振点で顕在化する回転同期振動である強制振動応答の他に, 回転非同期になりうる振動現象のフラッター, NSV, SFV が示されているが, 本研究では流れの不安定や大規模な変動流れを意図的に取り上げることはせず, 空力弾性系の不安定振動であるフラッターに焦点を当てる.

### 1.2.2 翼列フラッターの特徴と発生例

前節では翼列フラッターを他の振動現象と区別するべく, 一般に回転非同期振動であることをキャンベル線図を用いて説明した. 翼列フラッターは航空用エンジンファンだけでなく翼のアスペクト比が大きくなる(長翼となる)航空用エンジン低圧タービンや低圧蒸気タービン後段においても検討の対象となるが, ここでは本研究で対象とするファンに絞って現象の特徴をまとめる.

ファンや圧縮機に生じるフラッターの一般的な特徴は, NASA 空力弾性ハンドブック [13] および AGARD 空力弾性マニュアル [17][18] が詳しい. Sisto [17] によれば, 軸流ファンや圧縮機で生じる翼列フラッターの傾向を特性曲線上に示すと Fig. 1.8 のようになる. 特徴的なのはサージ線近傍で生じる領域 I, V の亜音速失速フラッター, 遷音速失速フラッター, 超音速失速フラッターである. 領域 I は, インシデンスが大きくなり流れの剥離や翼面上で局所的に超音速となった領域付近の衝撃波などがフラッターの発生に関連していると言われている. 領域 V は設計回転数付近の高負荷作動状態で生じるフラッターで, 翼間の流れ場は動翼の背圧が高くなり翼間衝撃波が離脱した不始動状態にあると考えられている. また, ファンが設計回転数より高い回転数で運転している過回転状態において, 流入する気流の相対流速が大きくなる領域 III でもフラッターは生じる. ただし, この図で示されて

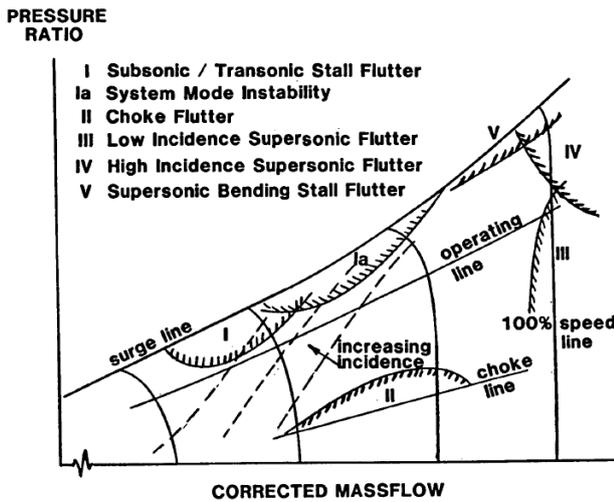


Fig. 1.8: Typical regions and types of the flutter occurrence on the axial flow compressor characteristic map [17]

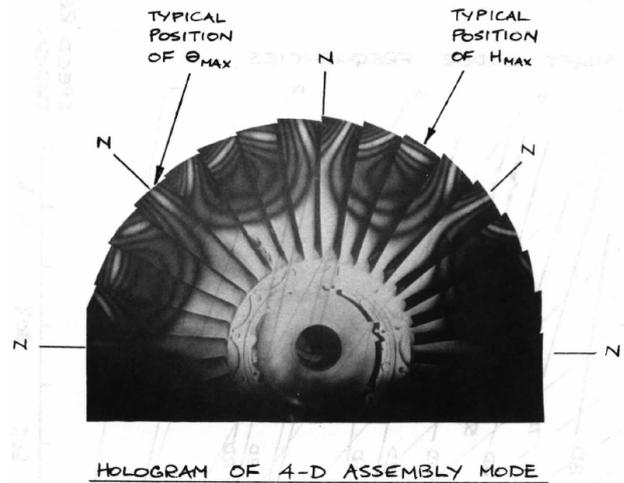


Fig. 1.9: Blade-disk-shroud coupled modeshape of Rolls-Royce fan [25]

いるのは空力的な観点からの傾向であり、構造特性に関しては述べられていない事を注意しなくてはならない。

このように翼列フラッターは様々な流れの条件で観察されており、サージ線に近い大インシデンスの剥離流れや翼列の不始動状態といった、モデル化や数値解析の難しい複雑な流れ場で発生しやすいものであると解釈できる。

これまで、過去のいくつかのファンリグ試験の文献において翼列フラッターの発生が報じられてきており、発生時のファン作動状態はおおまかに Sisto の分類との対応が取れている。

Jeffers ら [19] により、Pratt and Whitney 社の F100 低バイパス比ターボファンエンジンでは、サージ線側の作動点において初段ファン動翼にねじりモードの失速フラッターが生じたことが報じられており、これは Sisto の分類の領域 I に対応する。ここではフラッターが起こらないようにするため、スナバー（パートスパンシュラウドとも言う）の形状と翼端付近の翼厚みを変更して改良がなされた。また、Jeffers らは当時（1970 年台後半）剥離を含む失速側の作動点において使用できる空気力モデルが存在せず、解析的な予測が困難であることを指摘している。

NASA と Honeywell 社が合同で計画したファン試験機である Quiet High Speed Fan (QHSF) [3] [20] [21] の初期設計形状である QHSF1 では、Sisto の分類で領域 I に対応する部分回転数 1 次たわみモード遷音速失速フラッター、およびサージ線近傍の大部分の作動点において変動流れによる過大な翼振動が観察され、CFD による空力弾性解析に基いた設計変更を余儀なくされている。なお、部分回転数で生じる遷音速失速フラッターは IHI 社のファンリグ [22]、Rolls-Royce 社のファンリグ、Honeywell 社の遷音速ファン [23]、General Electric 社 Quiet Engine Fan、Pratt and Whitney [24] でも生じており、2000 年以降の報告例が多い。

Sisto の分類で領域 III の過回転状態に対応する非失速超音速フラッターは、Halliwell [25] による報告がある。このファンはスナバー付きの高バイパスファンであり、Fig. 1.9 に示す節直径 (Nodal Diameter, ND: 周方向の節数を表す) 4 で翼の 2 次たわみ・1 次ねじりの振動モードがディスクとシュラウドを介し構造的に連成した複雑な振動モードでフラッターが生じたとされている。このタイプでは、翼振動の安定性を調べるために、Nagashima と Whitehead により導かれた二次元振動平板翼の非定常空気力に関して微小擾乱の加速度ポテンシャル方程式を核関数法で解く空気力モデル [26] を用い、曲げ振動、捻り振動、曲げ-捻り連成それぞれの空力仕事が検討され、曲げ運動と捻り運動が構造的に連成した振動モード形状がフラッター発生に大きな影響を持つことが明らかにされた。

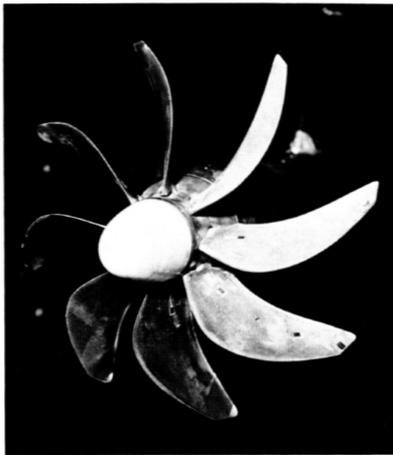


Fig. 1.10: Aeroelastic testing model of NASA Advanced Propfan [28]

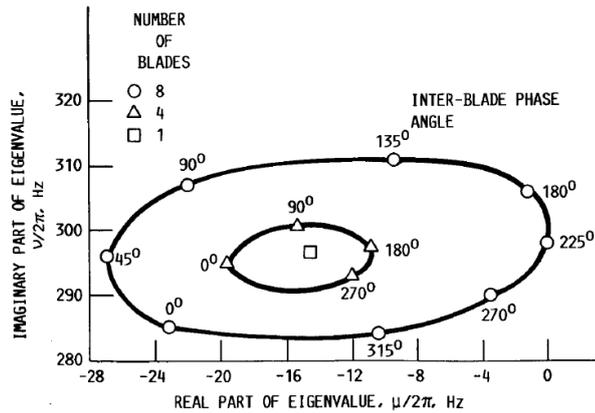


FIGURE 9.- ROOT LOCUS PLOT OF THE MODE WITH LEAST DAMPING:  $M = 0.59, \Omega = 6080 \text{ RPM}, \beta_{0.75R} = 61.6^\circ$ .

Fig. 1.11: Calculated eigenvalue map of propfan test models in an operating condition [29]

### 1.2.3 軽量な翼列に生じる翼列フラッター

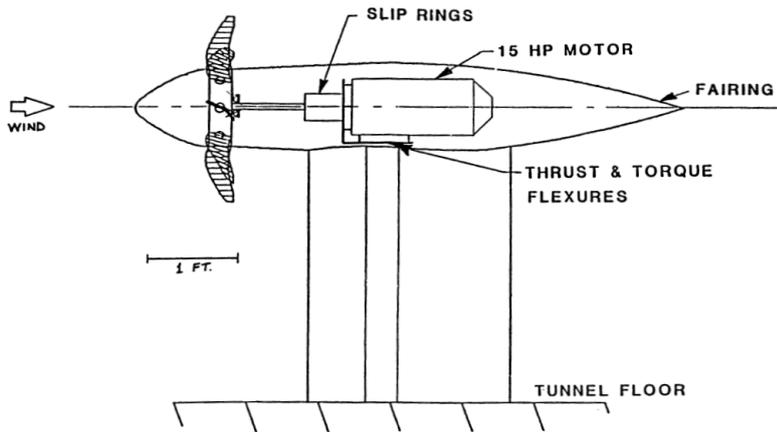
前小節では、航空用エンジンファンに発生するフラッターは流れ場の特徴に強く依存し、特に亜音速・遷音速サージ線付近や過回転非失速域で生じること（ディスクを含む）特定の単一の構造振動モードでフラッターが発生することを述べた。一方で、同じ航空用エンジン推進器であるプロペラ・Advanced Turbo Propeller・オープンローターでもフラッターは発生する。プロペラでは翼列の弾性変形が空力的に連成して生じる翼列フラッターの他に、プロペラ揚力面・軸系のふれまわり運動の不安定として生じるホワールフラッターがある。

プロペラに近い推進器はソリディティが低く振動特性は単独翼に近い性質があり、1枚の翼当たりの受ける流体力が大きくなるため、ファンや圧縮機のようなソリディティの高い翼列とは異なる性質の翼列フラッターが発生することが知られている。ここではNASAが主導して行った、通常のプロペラ機より高い巡航マッハ数を達成することを目的にNASAで1983年から1987年にかけて研究された高速プロペラであるAdvanced Turbo Propeller (ATP)[27]のフラッター現象に焦点を当てて説明する。

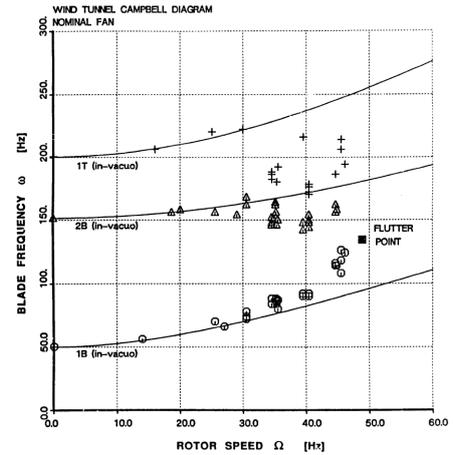
ATPで生じる翼列フラッターの特徴は、Mehmedら[28]により詳細に述べられている。Fig. 1.10のようにATPの形を模擬した4枚・8枚翼仕様のプロペラに対して風洞中で回転数を変化させてフラッター境界（風洞流速および回転数）や振動応答を観察した実験によると、フラッターの生じた振動数は翼の1次モード（曲げ）と2次モード（ねじり）の間であり、振動モード間の空力的な連成が顕著に見られるという、ファンや圧縮機には見られない曲げねじり古典的フラッターの特徴がある。さらに特定の翼間位相差の振動応答が現れるという、翼列フラッターに特有の翼間の空力的干渉に起因する現象も観察されていることから、単独翼と翼列フラッターの中間的な性質をもつフラッター現象であることが推察される。

このように複数の翼振動モードがフラッターに関与する翼列フラッター（以後、多自由度翼列フラッターと呼ぶ）の解析手法は、空気力モデルと構造モデルを含む振動方程式上の安定性解析により行われる。Kazaら[29]は、NASAで構築されたATPのフラッター解析手法として、NASTRANにより算出された振動モードの運動方程式に亜音速非定常揚力面理論に基づく自励空気力を代入し、固有値解析によりプロペラ作動中の振動モードおよび減衰率を算出する周波数領域型的手法を紹介している。この方法によりFig. 1.11のような翼振動の固有値分布が得られる。彼らの報告によると、Mehmedら[28]の試験で取得された翼間位相差とフラッター境界はよく実験を再現するが、周波数を高めに予測していたこと、二次元のストリップ手法は3次元揚力面理論よりも精度が悪いことが述べられている。

また、Ducharme[30]によってMITで行われたUnducted fanと呼ばれるAdvanced turbo propellerに類似した高速プロペラのフラッター試験では、Fig. 1.12(a)のように風洞中に取り付けられた作動中のプロペラに対してフラッター境界となる回転数までのCampbell線図が取得されている。Fig. 1.12(b)に取得されたキャンベル線図



(a) Schematic view of the UDF test stand



(b) Campbell diagram of the blade in operating conditions

Fig. 1.12: Flutter testing of unducted fan conducted by Ducharme in MIT [30]

を示す．空気中における低次 3 モードの回転数による振動数変化が，真空槽内で行われた回転中の振動モード試験と比較するかたちで示されている．回転数が高くなり相対気流の動圧が大きくなると，気流の影響によって一次曲げ・二次曲げモードの振動数が近接し，ある回転数でフラッターに入る挙動が捉えられている．

多自由度翼列フラッターに関連した理論的な研究には，花村および Clark によるものがある．花村らは，圧縮性流れ中の振動翼列の自励空気を非定常揚力面理論により導出 [31] し，2 次元振動翼列モデルの運動方程式と変動空気をを用いて，翼列の種々のパラメータが多自由度翼列系のフラッター速度に及ぼす影響を検討した [32]．翼質量については，軽量なほどフラッター速度が低くなること示されている．しかし，フラッター速度をとる点のみの振動特性について述べられているため，それ以外の減衰特性や振動特性，フラッターに入るまでの振動特性の変化の様子は明記されていない．

Ducharme らは試験に併行して亜音速圧縮性流体・2 次元・迎角 0 の平板翼列に作用する空気を求めるコードである LINSUB をストリップ理論で 3 次元に拡張し，フラッターの解析を行っている．3 次元への拡張に際して，LINSUB 内で用いられている後縁でのクッタ条件に加え，翼端で循環が消失するという条件を導入するために「Load roll off factor」という翼端でゼロになるような係数によって Span 方向の自励空気を分布を修正しているが，その修正の仕方には任意性があると思われる．

近年の類似研究に Clark ら [33] によるものがある．彼らも Ducharme と同様に空気をモデルとして自励空気をの算出に LINSUB を用い，翼質量のフラッター速度への影響やソリディティの効果について調べている．ここでも翼が軽量なほどフラッター速度が低くなること，およびソリディティが広がると，フラッター速度付近での翼の軽量化の影響が大きくなることが述べられている．しかし，彼らは複合モードフラッターに関する簡易診断ツールを作ることが目的であったため，計算コストの高い CFD は使用されておらず，多自由度翼列フラッターにおける局所的な流れ現象の役割はまだよくわかっていない．

### 1.2.4 翼構造の変遷とフラッター解析手法への要求

1.1.2 では近年のファン翼の変遷と将来の展望を，また 1.2.2, 1.2.3 では，それぞれで従来の一般的な航空用エンジンファンで生じるフラッター，高速プロペラで生じるフラッターとその特徴を述べた．改めて，構造特性や振動現象の特徴における違いは，Table. 1.2 のようにまとめられる．

一般的なエンジンファンでは，フラッターの振動数は翼の剛性が十分に高く，翼の自由振動が空気の影響を大きく受けないために，構造振動モード（翼構造の振動モード）に対する振動数でフラッターが発生するとされている．同様に振動モードに関しても，現象として雰囲気流体に影響による変化は一般的にはそれほど大きくないと

Table. 1.2: Summary of the difference in flutter characteristic between typical aeroengine fans and light-weight, high-speed propellers

Characteristics	Conventional fans (1.2.2)	High-speed propellers (1.2.3)
Frequency	Structural frequency including structural coupling with the disk and shrouds)	Different from the structural frequency due to the effect of self-excited aerodynamic force
Modeshape	Structural modeshape coupled with the disk and shrouds, single mode	Aerodynamic coupling between several structural modes can exist (ex: 1st torsion and flexure, multiple modes)

言われている。そのため、実用的な解析においては一般に無視されており、単一構造振動モードに対する解析が行われている。一方で、高速プロペラのような軽量・低剛性、低ソリディティの翼列では振動特性は単独翼的な性質に近く、振動数が雰囲気流体（一般に空気）の影響を受けて大きく変化すると同時に、流体中における自由振動の振動モード形状も自励空気力の影響によって変化する。

したがって、今後予想される現在以上のバイパス比の増大・翼構造の軽量化・プロペラ型推進器の実現にむけて、振動現象の記述や予測という観点からは、一般的なエンジンファンにおける単一モードの解析では不十分であって、構造振動と雰囲気流体が連成した状態の振動を考慮する必要性が近い将来に生じてくると考えられる。このような状況に対処すべく、従来より翼列フラッター検討の大前提であった「単一モード・構造振動モード振動数」の仮定を外した新たな翼列フラッター解析手法が望まれる。

### 1.3 翼列フラッターの予測手法

流体中における物体の振動特性、特にフラッターおよび翼列フラッターを理論的・数値的に予測するには、流体の運動と固体の運動それぞれの数理モデルが必要である。流体の運動や物体に作用する空気を記述するモデルを流体力モデルと呼び、固体の変形・運動・振動を記述するモデルを固体モデルと呼ぶ。流体力モデルにより推定された空気力は、固体モデルである運動方程式に入力される。運動方程式と流体力モデルを用いてこれらを共に満足する振動解（連成解）を見つけ、その安定性を判別することがフラッターを予測することであるといえる。式を用いて表現するならば、 $M$  を質量行列、 $C$  を減衰行列、 $K$  を構造側の剛性行列、 $x$  を全ての翼の振動自由度を含んだ変位ベクトル、 $A$ 、 $B$  を非定常空気力係数行列として、振動方程式

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = Ax + B\dot{x} \quad (1.1)$$

の安定性を求める。左辺の  $M, C, K$  が固体モデル、右辺の  $A, B$  が流体力モデルによって決まる。

振動方程式は Eqn. (1.1) のように単純な形式となるが、固体モデル、流体力モデルは様々な影響因子を含むため、フラッター現象の予測という観点からはそれらをモデルとして含んでいる必要がある。影響因子としては、

- 構造モデル: 翼形状、遠心力、内部応力、構造減衰、ディスクとシュラウド、翼毎の機械的性質のばらつき（ミスチューニング）
- 流体力モデル: 翼形状、流れ場、翼の振動数、振動モード形状、翼上下流での擾乱の反射

が挙げられる。これら全ての影響が影響しあって現実の翼振動現象が発現すると考えられることから、実際の機器をできるだけ忠実に再現した解析が行われるようになってきている [34]。構造モデルとしては汎用有限要素法コードの NASTRAN が開発されたのを皮切りに、現在では非線形有限要素法が広く使用されるようになっており、翼構造のみならず翼根やディスク・シュラウドまでを模擬した構造モデリングがされている。空気力モデルとしては、粘性や乱流の効果も加味した非線形 RANS の時間領域解法をはじめ、線形化 RANS や RANS の調和バランス法（Harmonic balance）といった、周期的現象に特化した周波数領域解法が用いられている。

しかしながら、翼振動への影響因子は非常に多いために、全てを加味した解析は物事の本質を抽出するのに不向きである。これまで学術的な観点からはこれら各々がどのようにフラッター特性に影響するかということが調べられてきた。例えば流れ場の観点からは、失速フラッターに特徴的な、翼面上で生じる剥離泡の挙動や衝撃波の挙動に着目した研究、振動モード形状という観点からは、低圧タービン翼型におけるねじり軸の位置とフラッター限界に関するまとめ方を提案したもの [35]、遷音速ファンフラッターにおけるたわみモード振動方向と衝撃波足元の空力仕事に着目した研究 [36]、翼上下流での擾乱の反射に関しては、多段環境における段間での擾乱の散乱や反射に着目して非定常空力をモデル化した Silkowski [37]、Hall [38] らによる研究、ファンナセルやファンダクトにおける擾乱反射に着目した Vahdati らの研究 [39] [40] がある。また、構造特性の変化に着目した研究として、ディスクと翼が一体となったブリスク (Blisk, Bladed disk) [41] についてミスチューニングを加味したフラッター解析や強制振動応答解析 [42][43][44] が行われている。なお、これらの研究が進んでいる背景として、自励空気を高速に算出するための線形化 RANS, HB 法, 高性能な無反射境界条件が開発されたり、大規模な RANS 解析が可能になったりといったように、非定常 CFD の数値解析手法自体の改良も貢献していると思われる。

このように、翼振動に影響を与えると思われる因子を抽出し非定常空気力への影響を検討するという研究がなされている一方で、実際に発現するのは空気力と構造振動が連成した系であるという観点から、振動方程式 Eqn. (1.1) をどのようなモデルを用い、どのように構築し求解するかという空力弾性解析の手法自体に関する研究も行われている。特に、1.2.2 で紹介したファンや圧縮機において生じるフラッターでは通常単一の翼振動モードのみを考慮してフラッターの検討を行うが、翼が軽量で低ソリディティになると 1.2.3 で述べた ATP のフラッターのように、翼の振動数は真空中のものより大きく変化し、また翼振動モード間の空力的な (Eqn. (1.1) 右辺による) 連成が影響してくるため、流体-構造連成解析が必要になる。

Eqn. (1.1) の連成解を求めるには、大きく分けて以下の 3 つの方法がある。

- 周波数領域解法:  $A, B$  を振動数ごとに求めデータベースを構築し, Eqn. (1.1) の反復的固有値問題を解く。
- 時間領域解法: 流体力モデルと固体モデルを連携させて時間領域で翼振動を解析する。
- システム同定に基づく方法: 制御理論などに基き翼振動の発展方程式をモデル化し, 安定性を評価する。

1 つ目の周波数領域法は、フラッター解析として最も古典的な方法であり、1.2.3 における解析例など揚力面理論を用いたフラッター解析ではほとんどがこれに分類される。それは、空気力モデルが周波数領域で記述されており振動数が入力パラメタであるためである。空気力モデルに CFD を用いた場合では数種の振動数について  $A, B$  を求め多項式モデルを構築するといったことがなされる。利点として、自励空気を加味した空力・構造連成系の振動モード (空力弾性モード) を得られるため、振動数、減衰率、モード形状を即座に把握することができることが挙げられる。しかしながら、空気力データベース構築に CFD を用いる場合膨大な解析量を必要とするため、高コストとなる欠点がある。例えば Mayorca ら [45] らは、一般性をもたせた連成解を求めるためにグアン縮退を利用して翼の有限要素モデル自由度を減少させ連成解を求める方法を提案している。この研究では、翼振動として 22 自由度の一般化変位を導入し、8 つの翼間位相差について解析を行なっている。すると一つの作動点に対して CFD 解析を 500 回以上流す必要があり、非常に複雑な方法となっている。

一方、2 つ目に挙げた時間領域で CFD と翼振動を直接連成させてフラッターを解析する連成解析法もある。主として航空機主翼など単独翼のフラッター解析の分野から発展し、ターボ機械のフラッター解析 [39] [46] や動静翼干渉時の振動状態 [47] を調べるために用いられるなど、応用の幅が広がってきている。これによる振動解析は、流体と固体の間の相互作用が自動的に考慮され、複雑な状態を模擬した解析を一度に行える利点がある。しかしながら、減衰・発散が非常に鈍い場合や、様々な振動数が入り乱れた状態の振動、ターボ機械のように他の翼の運動と干渉しあう場合などに、解析結果を解釈することが困難になる。例えば、20 枚のターボ機械の翼列で、1 枚の翼当たり 5 自由度の連成解析を行った場合を考えると、系全体の振動状態を言い当てるためには、100 自由度の翼振動応答からそれらの相関関係を時間的・空間的に把握し、適切な判断を下さなければならない。このように翼列フラッターを解析する場合、時間領域法単体では周波数領域法で得られるような空力弾性モードという概念の下で定量化された見通しの良い解を得ることは難しい。そのため時間領域の連成解析を用いてターボ機械の空力弾性モードを定量化し示している例は、存在しない。

3 つ目の方法としては、システム同定に基づき空気力モデルの次元縮小モデル (Reduced Order Model, ROM) を構築し、そのモデルの固有値解析に基き安定性を解析する手法がある。ROM の作成方法には様々なものがあり、構造モデルを既知として空気力モデルの発展方程式をブラックボックスとしてモデル化するもの [48]、CFD においていくつかの時間の流れ場と固有直交分解 (Proper Orthogonal Decomposition, POD) を用いて低次元の流体の時間発展方程式を導くもの [49]、自己回帰移動平均モデル (Autoregressive moving average model, ARMA) やボルテラ級数を用いて連成解析の結果を信号として用い系の挙動をモデル化するもの [50] [51] がある。ARMA やボルテラ級数は時間領域の信号にも適用できることから連成解析結果の処理手法として用いることができるが、Eqn. (1.1) の空力弾性方程式に基づいておらず、周波数領域法との互換性があるかは分からない。同定対象が「ブラックボックス」になることを嫌う場合には、空力弾性方程式の空気力部分を未知数として同定したうえで空力弾性モードを得る方法が考えられ、実験的に得られた信号には拡張カルマンフィルタやランダムデックを用いて信号を処理し同定を行う。このような方法は航空宇宙分野における空力弾性試験のみならず土木・橋梁分野 [52] [53] においても行われており、空力弾性系に対するモデル化のアプローチとしては自然なものであると考えられる。しかし、単独翼や橋梁など比較的自由度の小さい系に関する例がほとんどであり、ターボ機械分野のような多くの翼を含む系に対して実験的・数値的問わず時間領域のサンプルデータに基き空力弾性系を同定している研究例は見当たらない。

## 1.4 研究目的

以上の背景を踏まえると、多自由度翼列フラッター解析の必要性は航空用エンジンファンの軽量化とともに高まりを増していると考えられる。しかしながら、これまでの理論解析の結果を踏まえても翼列をどの程度軽量化すれば複合モードの取り扱いが必要になるか未だ十分な結論が得られているとは言えない。また、圧縮性流特有の複雑な流れ場、実際の翼形状、構造仕様を反映できず実問題に対応できないため、非定常空力・構造振動双方に対する数値解法自体の高度化に対応することも求められる。さらに、翼の剛性が低下し空気力による翼変形が大きくなるとファン性能にも変形の影響が現れるようになるが、翼変形を考慮して各作動点のファン性能を推算している例は非常に少ない。

したがって、実際の機器を忠実に模擬した数値解析手法に基き、作動中の翼変形や多自由度翼列フラッターに対する検討が行えるようになれば、機器の作動状態における振動状態が迅速に把握できるようになる。すると翼剛性に対する安全マージンや設計クライテリアを適切に設定でき、更なる軽量化の余地が生まれ、航空エンジンの高性能化につながると考えられる。

本研究では上記のようなモチベーションのもと、「流体と構造間の相互作用が大きく、双方が連成した状態を考慮する必要のあるターボ機械」において性能や翼振動の解析を可能にすることを目指したい。そのために、連成現象の把握に不可欠といえる数値解析技法である流体-構造連成解析に着目し、フラッター解析法の構築を行う。

時間領域の流体-構造連成解析法は周波数領域法で必要な空気力データベースを構築することなく、詳細な流路形状や構造特性、さらには連成の効果を加味した解析を一度の CFD の解析で行える利点を持つ。しかしながら、空力弾性解析の見通しの良さという観点からは周波数領域法に劣る。そこで本研究では、フラッター解析における時間領域の流体-構造連成解析法の長所を活かしたままその短所を克服するために、システム同定の視点を取り入れることにする。そして流体中における翼振動を振動工学的な観点から記述したうえで、連成解析により得られる時間領域解を用いて空力弾性システムを同定する手法を提案し、フラッターに対する理論解との比較検証から解析手法の妥当性を検証する。

さらに二次元のモデル解析から実機に近い形状をもつファン翼列へと解析のレベルを引き上げるため、典型的なファン翼列に対して静変形を伴う性能解析やフラッター解析を実施し、流体・構造間の連成がどのように性能や振動特性に影響を与えているかを具体例を通じて示す。また、実際にフラッターが生じたファンを対象とした連成解析を通じて、本研究で提案するモード同定法が使用可能な条件を実用的な観点から明らかにする。その上で、フラッター境界付近の幅広い作動点で得られた解析結果からフラッターの発生状況を詳細に調べるとともに、空力弾性モードの構成といった、連成解析でなくては得ることの出来ない知見を得ることを目指す。

## 1.5 論文概要

本論文は全 8 章より成る．以下にその概要を述べる．

2 章ではターボ機械に生じる翼振動を数値的に解析するための運動方程式と，その振動解の性質を述べる．まず基礎的な振動現象であるフラッターと強制振動応答について述べ，フラッター解析で求める解を明確にする．複数構造自由度を含む翼列の振動方程式や周期系である翼列特有の振動状態を説明したのち，章後半では自励空気力項を翼変位の時間履歴から同定し空力弾性モードを求める手法，およびその誤差解析法を提案する．

3 章，4 章は本研究で用いる数値計算手法について説明する．まず 3 章では保存則を出発点とした基礎方程式を数値解析で用いる形に変形する．また，流体部分については移動格子系に対する定式化や乱流を取り扱う際の基礎方程式の変換についても述べている．4 章は 3 章の基礎方程式を解く数値解析手法について述べる．流体は圧縮性流体の有限要素法，固体は非線形有限要素法，またそれらを組み合わせるための連成解析法を説明している．

5 章では本研究で提案する空力弾性モードを同定する翼列フラッター解析法について検証を行った結果を示す．ここでは，流れ中に零迎角で置かれた平板翼・翼列という，理論解の存在する基礎的な問題を題材として空力弾性モードの同定結果を評価することで，流れ中に置かれた翼および翼列の空力弾性モードの同定が正しく行えることを示した．

6 章，7 章では実用的なファン形状に近い系の連成解析を行う．6 章では典型的な遷音速ファンの NASA Rotor 67 に対して空気力による翼変形が性能に与える影響を調べた．次いで行ったフラッター解析では，空力弾性モード同定結果と局所的な自励空気力の挙動を調べる方法についても述べている．7 章では実際にフラッターが生じたファン翼列についてフラッター解析を行う．フラッター解析の結果と統計誤差の解析より，モード同定が正しく行える条件を計算結果の流れ場と関連付けて考察した．またフラッターが生じる流れ場の特徴と翼励振力との関連を考察した．また，翼質量がフラッター発生点に与える影響についても検討した．

最後に 8 章で本研究の結論を述べる．

## 第 2 章 翼振動の記述と解析手法

## 2.1 振動方程式と翼振動形態の分類

### 2.1.1 翼の変形・運動における連成問題の区分

流体中に置かれた弾性体の翼は、流体力によって変形が生じ、ある力学的平衡点まわりに振動する。このような状態を流体・固体間の相互作用を考慮し解析するためには、

1. 静的連成問題：幾何非線形を考慮した変形解析と共に、静的な流れの状態を求める
2. 動的連成問題：線形化された運動方程式を用い、流体と構造の支配方程式を同時に時間発展させる

という 2 つの問題を解かねばならない。どちらも「変位（・速度）が流体力を変化させ、それにつられて固体の変位（・速度）も変化する」という関係になっており、静的問題に限っても釣り合い時の変形や空気力を求めるのは連成問題であることがわかる。本章では、このうち翼振動に対応する動的な連成問題について考える。

### 2.1.2 翼の振動方程式とその解：翼 1 枚・1 自由度振動

ターボ機械の翼 1 枚について、翼には Fig. 2.1 に示すように翼面上の各点に流体力  $F$  が作用し、同時に各点で変位  $u$  をもって振動している。このような構造を有限要素法で離散化した場合に、平衡点まわりの微小振動は以下のように書ける。ここで、 $M, C, K$  はそれぞれ質量行列、減衰行列、剛性行列であり、それぞれ加速度、減衰力、弾性復元力を表す。また右辺は変動流体力である。なお、微小振動の運動方程式は弾性体・剛体という区別や自由度の取り方によらず一般にこの形式に帰着する。

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F_{FR} + F_{SE} \quad (2.1)$$

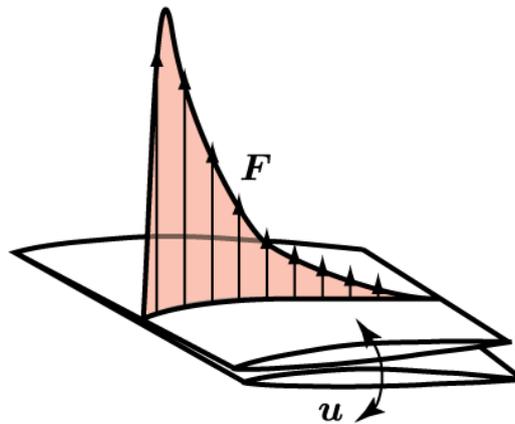


Fig. 2.1: Aerodynamic force and displacement of a blade

ここで、変動流体力は以下のようにして分類できる。

- $F_{FR}$ ：翼振動によらず作用する強制空気力で、これによる応答を強制振動応答（Forced response）と呼ぶ。回転同期力（動静翼列・ストラット後流等）、非同期（剥離流による振動、旋回失速等）。
- $F_{SE}$ ：翼の運動によって生じる自励空気力（Self-excited aerodynamic force）。

これら 2 種類の流体力はそれぞれ異なった振動解に寄与するため、翼振動を解析する上では強制振動応答の解析と自励振動に対する解析では別々の取り扱いをする必要がある。以下、それぞれについて簡単な 1 自由度振動系を例にとって説明する。

## 強制振動応答の解（強制外力の特殊解）

強制振動応答の解は、一定の振幅の変動外力が加わっている際の定常応答として考えることが出来る．Eqn. (2.1) において自励空気を考えず系を 1 自由度とし、強制空気を  $F_{FR} = F_0 e^{i\omega t}$  とすれば、変位応答および外力に対する位相角はそれぞれ振動方程式の特解として次のように求まる．

$$u = \frac{F_0 e^{i(\omega t + \phi)}}{M \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega_0\omega)^2}} \quad (2.2)$$

$$\tan \phi = \frac{2\mu\omega_0\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}, \quad 2\mu\omega_0 = \frac{C}{M} \quad (2.3)$$

応答振幅は外力周波数と構造減衰によって決まるが、より正確には次で議論するように自励空気力による空力減衰や付加的な剛性・付加質量を考慮して求める必要がある．また、多自由度の場合でも、後述するように翼振動モード座標に変換することで 1 自由度系としての取り扱いが可能になる．

## フラッターの解（自励空気力を含む空力弾性方程式の同次解）

フラッターの解は、振動方程式の不安定解として解釈できる．ここでも 1 自由度の振動系を考え、自励空気力  $F_{SE}$  が振動変位  $u$ 、速度  $\dot{u}$ 、加速度  $\ddot{u}$  の関数として

$$F_{SE} = \frac{\partial F}{\partial u} u + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial F}{\partial \ddot{u}} \ddot{u} + O(u^2) \quad (2.4)$$

$$= -(K_{aero} u + C_{aero} \dot{u} + M_{aero} \ddot{u}) + O(u^2) \quad (2.5)$$

のように展開できるとき、変位、速度、加速度に対する 1 次の微係数たちはそれぞれ

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -K_{aero}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = -C_{aero}, \quad \frac{\partial F}{\partial \ddot{u}} = -M_{aero} \quad (2.6)$$

と、自励空気力に由来する剛性係数  $K_{aero}$ 、減衰係数  $C_{aero}$ 、付加質量  $M_{aero}$  と読み替えて解釈することができる．これらを用いて 1 自由度の Eqn. (2.1) は

$$(M + M_{aero})\ddot{u} + (C + C_{aero})\dot{u} + (K + K_{aero})u = F_{FR} + O(u^2) \quad (2.7)$$

のように、質量項、減衰項、剛性項に自励空気力の効果が加わった振動系として解釈できる．ここで減衰項の係数  $C + C_{aero}$  は構造減衰と空力減衰の総和だが、物体の周りに流れが存在する場合の空力減衰は常に正であるとは限らず、負の減衰力が生じる場合もある．構造減衰と空力減衰の総和が負となる場合には、減衰振動の逆で振幅が指数関数的に発散する振動が生じ、これがフラッターである．指数関数的な発散振動解が現れることは、一般解  $e^{\lambda t}$  を仮定し得た Eqn. (2.7) の固有方程式の解の実部の正負が減衰係数の逆符号になることから理解できる．即ち、フラッターの解は振動方程式の一般解のうち、不安定な振動解のことを指す．

## エネルギー的な安定性評価

以上のようにフラッターの解は空気力の翼の運動に対する微係数を求め、運動方程式の安定性解析を行うことで導けるが、本当に変動空気力が運動に対する微係数を用いて Eqn. (2.5) のように表せるかは定かではなく、翼の運動が微小であり、空気力は翼の運動に対して線形に近似できるという仮定を置いている．このような仮定から外れる場合には Eqn. (2.5) の表現は使えず、翼の運動に対して直接振動方程式の安定性を評価する必要がある．

一般の周期運動に対する振動方程式の安定性は、流体力が 1 周期中に翼にする仕事  $W_{cy}$  から判断でき、 $W_{cy} < 0$  ならば振動は安定、 $W_{cy} > 0$  ならば振動は不安定となる．ここでは振動を扱うため変位、空気力は複素数で扱い、その実部を取るものとする．翼が単振動  $u = u_0 e^{i\omega t}$  ( $u_0$  は実数) をしているときの変動空気力応答を、基本各周波数  $\omega$  とその  $N$  次までの高調波

$$F_{SE}(t) = \sum_{n=1}^N F_n e^{in\omega t} = \sum_{n=1}^N (\text{Re}(F_n) + i\text{Im}(F_n)) e^{in\omega t} \quad (2.8)$$

で表したとき，翼振動 1 周期あたりにする仕事  $W_{cy}$  は，

$$W_{cy} = \int_t^{t+T} \operatorname{Re}(F_{SE}(t)) dx \quad (2.9)$$

$$= \int_t^{t+T} \left[ \sum_{n=1}^N (\operatorname{Re}(F_n) \cos n\omega t - \operatorname{Im}(F_n) \sin n\omega t) \right] (-u_0 \omega \sin \omega t) dt \quad (2.10)$$

$$= \pi \operatorname{Im}(F_1) u_0 \quad (2.11)$$

と，翼振動数成分の虚部のみが空力仕事に寄与することになる．これは運動方向と同じ方向に変動空気が作用するとき，翼にエネルギーが流入することを示している．Eqn. (2.5) で表した空気の翼振動に対する線形化表現との関係は，同様に仕事を計算することにより

$$W_{cy} = \int_t^{t+T} [-K_{aero} u - C_{aero} \dot{u} - M_{aero} \ddot{u}] dx \quad (2.12)$$

$$= \int_t^{t+T} [-K_{aero} u_0 \cos \omega t + C_{aero} u_0 \omega \sin \omega t + M_{aero} u_0 \omega^2 \sin \omega t] (-u_0 \omega \sin \omega t) dt \quad (2.13)$$

$$= -\pi u_0^2 \omega^2 C_{aero} \quad (2.14)$$

との関連から，線形化空気の速度微係数と空力仕事とは次の関係式で結び付けられる．

$$\operatorname{Im}(F_1) = -C_{aero} u_0 \omega \quad (2.15)$$

このことから，翼の周期運動を仮定してエネルギー的に安定性を評価することと，空気の運動により線形化された微係数を適切に得ることで安定性を評価することは，振動振幅が微小な範囲において等価であることがわかる．同様に空気の変位比例成分に関しても，

$$\operatorname{Re}(F_1) = -K_{aero} u_0 + M_{aero} u_0 \omega^2 \quad (2.16)$$

という関係式で結び付けられることがわかる．

### 2.1.3 翼 1 枚・多自由度の振動（モード合成法）

これまでは 1 自由度系の振動を考えてきたが，実際の構造物では自由度が複数あったり，有限要素法で離散化された振動方程式は多くの自由度（ソリッド要素だと数千～数万）になるので，これらの構造自由度を対象とする現象に合わせて選択し，見通しよく解析を行うことが望ましい．本研究で対象とするターボ機械の翼振動・特にフラッターではたわみ・ねじりといった低次の翼振動モードが関与する場合が多い．そのため，運動方程式を各振動モードに対する変位であるモード座標を用いた表現に書き換える．

ここでは構造減衰を 0 として考える．まず，Eqn. (2.1) は左辺で自由度が質量マトリクス・剛性マトリクスの非対角項を介して構造的に連成している（左辺）=0 として  $u = \phi e^{i\omega t}$  と，モード形状ベクトル  $\phi$  の単振動を仮定すると，一般化固有値問題

$$\omega^2 M \phi = K \phi \quad (2.17)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{\omega^2} \right) \phi = K^{-1} M \phi \quad (2.18)$$

が得られる．実用上は，標準固有値問題に帰着させ低次振動モードから解くために，振動数の逆数を固有値と見た 2 番目の形式で固有値問題を解くが，問題としては元の形式と等価である．

固有値問題の解である固有角振動数  $\omega$ ，モード形状  $\phi$  には，以下の関係が成り立つ．

$$\text{直交性: } \phi_i^T M \phi_j = \delta_{i,j} \quad , \quad \phi_i^T K \phi_j = \omega_i^2 \delta_{i,j} \quad (2.19)$$

$$\text{行列表現: } \Phi^T M \Phi = I \quad , \quad \Phi^T K \Phi = \Lambda = \operatorname{diag}[\omega_i^2] \quad , \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi & \cdots & \phi_{N_f} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

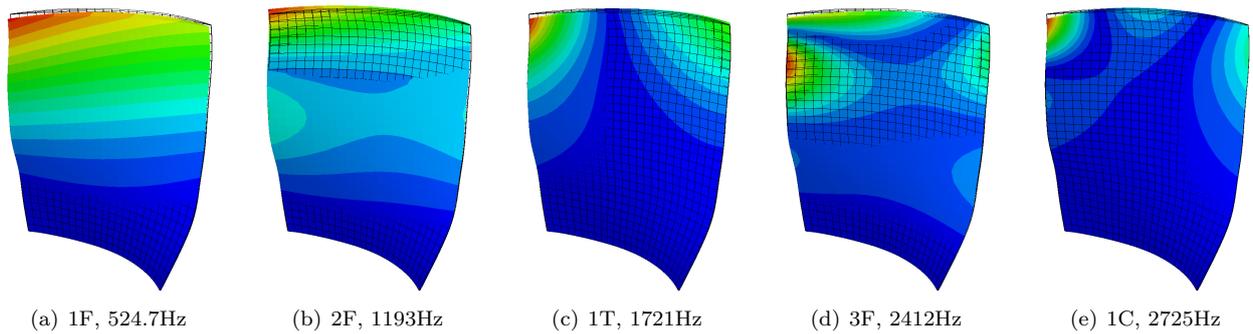


Fig. 2.2: Examples of structural modes of a fan blade (NASA Rotor 67)

Fig. 2.2 に、固有値解析により求められた典型的な構造振動モード形状を示す．翼にはたわみモード (Flexure, 1 ~ 3F), ねじりモード (Torsion, 1T), 翼弦方向曲げモード (Chordwise Bending, 1C) といった, 様々な形の振動モードがあり, それぞれ固有の振動数をもつ．高次のモードほど節が多くなり, また振動数も高くなってゆく．固有値解析により低次の振動モードを  $N_f$  個求め, 翼振動をこれらの振動モードの重ね合わせで表現する．これはモード合成法と呼ばれ, 振幅が十分小さい場合の構造振動の解析によく用いられる方法である．変位につく上付き文字は翼振動モードの番号を表すものとし,  $i$  番目振動モードに対応するモード変位を  $q^i$  として, 振動変位を

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N_f} \phi^i q^i = \begin{bmatrix} \phi^1 & \dots & \phi^{N_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^{N_f} \end{bmatrix} = \Phi \mathbf{q} \quad (2.21)$$

と表すと, 振動モードの直交性より, 左辺の構造自由度間の連成を解いた運動方程式の表現を得ることが出来る．モード座標を用いて書きなおした運動方程式は, Eqn. (2.1) に Eqn. (2.21) を代入し,  $\phi$  との内積を取ることで得られる． $f_i$  はモーダル力と呼ばれ, 変動空気力と振動モード形状の内積で定義される．これはモード座標に構造振動自由度を取った際の一般化力と考えることができる．

$$\ddot{q}^i + \omega_i^2 q^i = f^i \quad , \quad f^i = (\phi^i)^T \mathbf{F} \quad (i = 1, 2, \dots, N_f) \quad (2.22)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\mathbf{q}} + \Lambda \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad , \quad \mathbf{f} = \Phi^T \mathbf{F} \quad (2.23)$$

Eqn. (2.23) より, 各構造振動モードは右辺の空気力を介してのみ連成していることがわかる．そのため, 翼 1 枚あたり数千 ~ 数万自由度の, 全格子自由度を採用した FEM モデルを用いて翼振動解析を行う計算コストに比べると, 圧倒的に低い自由度数 (数個の振動モード) で翼振動に対する解析を行うことが可能になる．

このようなモードごとの振動方程式においてフラッター解析を行う場合には, 自由度間が空気力により連成しているため, Eqn. (2.23) の同次解とその安定性を固有値解析から求める必要がある．それには, モーダル力  $\mathbf{f}$  を自励空気力と考えて空力微係数行列  $A, B$  を用いて

$$\ddot{\mathbf{q}} + \Lambda \mathbf{q} = A \mathbf{q} + B \dot{\mathbf{q}} \quad , \quad A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \quad , \quad B = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.24)$$

と書き直し, Eqn. (2.24) の固有値問題を解けばよい．ここで,  $A, B$  は空気力モデルより与える必要がある．求めた流体力と翼構造が連成した振動モードは「空力弾性モード」と呼ばれ, 固有値から時間の情報である翼の振動数・減衰率が, 固有ベクトルからは空間方向の情報である自由度間の連成状態が求まる．

## 2.1.4 翼列の運動方程式

さて、本小節からは本研究の対象である翼列の振動特性に話題を移す．ターボ機械の翼列は周方向に複数の翼が並んだ構造をしているため、単一の翼にはない特徴的な振動特性が現れる．ターボ機械特有の振動状態を説明するために、簡単のためここでは単一の翼振動モードのみを対象とし、さらに以下の仮定を置く．

1. 翼は十分剛なディスクに植え付けられており、ディスクやシュラウドを介した翼振動の連成は無い（ディスクモードと翼振動モードは連成しない．）
2. 全ての翼は同一形状で同一の機械的性質を持つ（構造的ミスチューニングはない．）
3. 全ての翼は空力的にも同一の状態下に置かれている（空力的状態に対して完全に周期的である．）

これらの仮定のもとで、Eqn. (2.23) のうち 1 つのモード  $q$  を取り出した運動方程式を翼列全体で書き下すと、次のようになる．なお、ここから先は変位について上付き文字は振動モード番号、下付き文字は翼番号を表すことにする．

$$\ddot{q}_i + \omega^2 q_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, N_b) \quad (2.25)$$

全ての翼について運動方程式を連立すると、翼同士は仮定 (1) のもとで空気力を介してのみ連成する．Eqn. (2.5) と同様の作業により、 $i$  番目の翼が受けるモーダル力  $f_i$  が自励空気力のとき、各翼の運動で表せるとすれば、

$$\ddot{q}_i + \omega_0^2 q_i = \sum_{j=1}^{N_b} \left[ \frac{\partial f_i}{\partial q_j} q_j + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] \quad (2.26)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_i + \omega_0^2 q_i = \sum_{j=1}^{N_b} [a_{ij} q_j + b_{ij} \dot{q}_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N_b) \quad (2.27)$$

ここで、 $a_{ij}, b_{ij}$  はモード運動方程式における空力微係数であると見ることが出来る．Eqn. (2.5) のように変動空気力の加速度比例項を考えず、変位比例項と速度比例項のみで定式化したのは、Eqn. (2.16) で示されるように、変動空気力の加速度比例項は変位比例項とちょうど逆位相であり、符号まで含めれば変位比例項に含めることが出来るためである．

次に仮定 (3) を用いると、空力微係数  $a_{ij}, b_{ij}$  は翼同士の位置関係にのみ依存し、以下のようにして係数の数を減らすことが出来る．このとき、整数  $m$  は  $1 \leq m \leq N_b$  の値を取る．

$$a_{ij} = a_m, \quad b_{ij} = b_m, \quad m = \begin{cases} j - i + 1 & (j \geq i, \text{ upper diagonal}) \\ N_b - (i - j - 1) & (j < i, \text{ lower diagonal}) \end{cases} \quad (2.28)$$

これを用いると、全ての翼が空力的に連成した状態の運動方程式は、次のように空気力の係数行列が各行で等しくなった巡回行列として表わされる．

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_{N_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \omega_0^2 & \\ & & & \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{N_b} \\ a_{N_b} & a_1 & \cdots & a_{N_b-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_2 & \cdots & a_{N_b} & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{N_b} \\ b_{N_b} & b_1 & \cdots & b_{N_b-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_2 & \cdots & b_{N_b} & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_{N_b} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

巡回行列を係数行列にもつ場合には、振動系は周期境界条件を課されていることと等価になり、周期系特有の性質が現れる．最も重要な特徴は振動系の固有ベクトルの空間的性質である．Eqn. (2.29) の変位ベクトル  $[\cdots q_i \cdots]^T$  に隣接翼と  $\sigma$  だけ位相がずれている状態を仮定する、即ち翼列全体の変位を  $q_n = e^{i(n-1)\sigma} s$  という単一の複素変位  $s$  で表す．ここで  $\sigma$  を翼間位相差と言う．さらに翼間位相差について  $N_b$  自由度おきの周期性

$$\sigma = \frac{2\pi(n-1)}{N_b} \quad (n = 1, 2, \dots, N_b) \Rightarrow e^{i(N_b+j)\sigma} = e^{ij\sigma} \quad \text{for all } j \quad (2.30)$$

を仮定する．このようにベクトル形状を仮定し変位ベクトルに代入すると，Eqn. (2.29) の右辺の変位同期項は

$$\begin{bmatrix} a_1 e^{i \cdot 0 \cdot \sigma} + a_2 e^{i \cdot 1 \cdot \sigma} + \cdots + a_{N_b} e^{i(N_b-1)\sigma} \\ a_{N_b} e^{i \cdot 0 \cdot \sigma} + a_1 e^{i \cdot 1 \cdot \sigma} + \cdots + a_{N_b-1} e^{i(N_b-1)\sigma} \\ a_{N_b-1} e^{i \cdot 0 \cdot \sigma} + a_{N_b} e^{i \cdot 1 \cdot \sigma} + \cdots + a_{N_b-2} e^{i(N_b-1)\sigma} \\ \vdots \\ a_2 e^{i \cdot 0 \cdot \sigma} + a_3 e^{i \cdot 1 \cdot \sigma} + \cdots + a_{N_b-1} e^{i(N_b-1)\sigma} \end{bmatrix} = (a_1 e^{i \cdot 0 \cdot \sigma} + a_2 e^{i \cdot 1 \cdot \sigma} + \cdots + a_{N_b} e^{i(N_b-1)\sigma}) \begin{bmatrix} e^{i \cdot 0 \cdot \sigma} \\ \vdots \\ e^{i(N_b-1)\sigma} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

のように，同じベクトルが現れることから， $[\dots e^{i(n-1)\sigma} \dots]^T$  で表わされる複素モード形状が運動方程式の固有ベクトルとなっていることがわかる [54][55]．このように翼間位相差が一定の翼列全体の空間モードを，翼列内を波が伝播しているような振動形状をしていることから「Traveling wave mode」と呼ぶ．Traveling wave mode のモード形状を，翼枚数  $N_b = 22$  枚の場合について Fig. 2.3 に示す．ND (Nodal Diameter) は節直径と呼ばれ，周方向に入る節の本数を示す．例えば ND=1 は周方向に 1 本節が入る翼間位相差 IBPA= $\pm 16.3$ deg の Traveling wave mode を示している．また，ND=0 は周方向に節が 0 個である，翼列全体が同方向に運動するモードを表す．このモードは傘をひっくり返す際の変形状況のようであることから，Umbrella mode とも呼ばれる．また，Traveling wave mode は翼枚数ぶんだけ，すなわち周方向の自由度の数だけ存在する．

さて，Traveling wave mode が翼列全体の運動方程式の固有ベクトルである場合には，Traveling wave mode ごとに振動自由度を再定義することで自由度を非連成化することができる．Traveling wave mode を横に並べた行列  $W$  により，各 Traveling wave mode に対応する変位自由度  $s$  との  $q$  の変換

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N_b} \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{N_b} \end{bmatrix}, [W]_{mn} = [e^{i(m-1)(n-1) \cdot 2\pi/N_b}] \quad (2.32)$$

を定義できる．ここで変換行列  $W$  は，まさに離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform, DFT) に用いられる行列そのものである．運動方程式を Traveling wave mode 変位に対するものに変換すると， $n$  番目の Traveling wave mode に対し次のように 1 自由度振動系に帰着する．

$$\ddot{s}_n + \omega_0^2 s_n = \left[ \sum_{m=1}^{N_b} a_m e^{i(m-1)\sigma} \right] s_n + \left[ \sum_{m=1}^{N_b} b_m e^{i(m-1)\sigma} \right] \dot{s}_n, \quad \sigma = \frac{2\pi(n-1)}{N_b} \quad (n = 1, 2, \dots, N_b) \quad (2.33)$$

以上まとめると，仮定 2,3 の下では翼列全体の運動方程式を周方向に DFT し，自由度を Traveling wave mode 変位に変換すると各自由度が独立した運動方程式の取り方をすることができ，したがって Traveling wave mode の 1 自由度運動方程式上で空力減衰や振動数変化などの時間方向の振動特性の変化を議論することが可能となる．特に安定性 (フラッター) については，1 自由度のときと同様に Traveling wave mode 変位の運動方程式上における空気力の速度同期成分の正負で判断することが出来る．

しかしながら，Traveling wave mode が周方向の固有モードとなるのは仮定 2, 3 が成り立つ場合のみであり，例えば各翼の固有振動数に製造誤差などのばらつき (ミスチューニング) がある場合には，もはや Traveling wave mode は運動方程式の固有モードではなくなる．例えば，May [56] は，翼列フラッター解析で製造時の不均一性を考慮するよう構造モデルを実測データに更新して用いるために，翼・ディスク一体構造 (ブリスク, Bladed disk, Bdisk) の振動モード形状を計測している．Fig. 2.4 に，計測された振動モードにおける翼変位形状とその振動数を示す．各振動モードで振動数が若干異なっているのが Fig. 2.4(b) からわかると同時に，翼ごとに機械的特性がばらばらについているとき，ディスク・翼結合系の周方向振動モード形状は Fig. 2.4(a) に示すような Mode localization と呼ばれる局所的に振幅の大きい振動モード形状をとっており，もはや理想的な Traveling wave mode に見られるような翼も一定の振幅で振動するという仮定が崩れている．ここに自励空気力の影響が加わった時にも，すでに構造モデルの段階でシステムの周方向均一性が崩れているため，ある翼と隣接する翼の間の位相差は翼毎に異なり，翼間位相差一定の仮定が崩れる．

したがって、翼毎の機械的特性のばらつきにより運動方程式自体の周期性が大きく崩れるような系では、発現する振動形態が翼間位相差が一定の Traveling wave mode であることを仮定して空力減衰を算出することの妥当性はもはや無く、空力減衰はばらつきを含んだ実際の振動モードについて検討される必要があることを注意しなくてはならない。

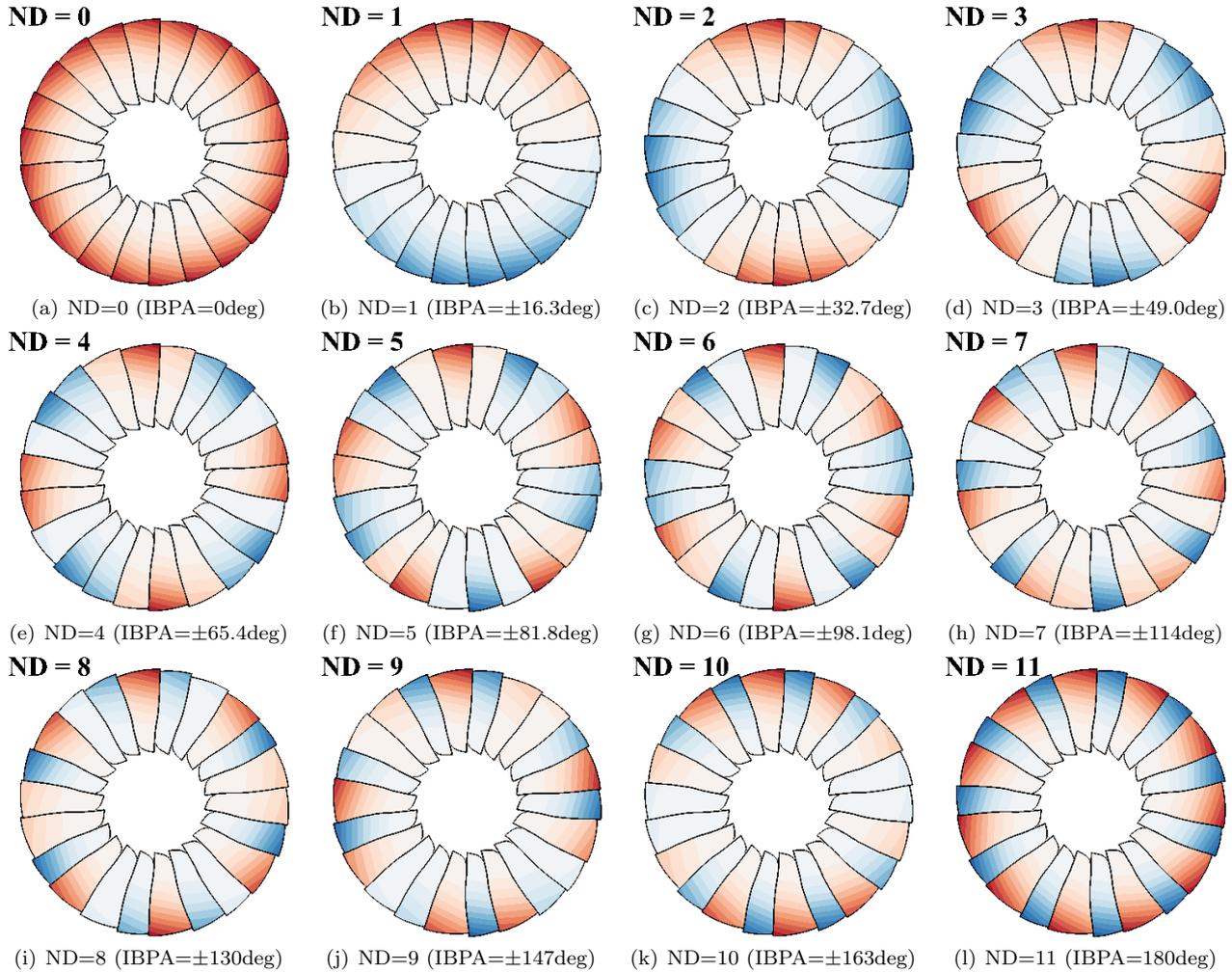


Fig. 2.3: Circumferential modeshape of traveling wave modes ( $N_b = 22$ , 1st Flexure). Color shows axial displacement; Red: positive, Blue: negative

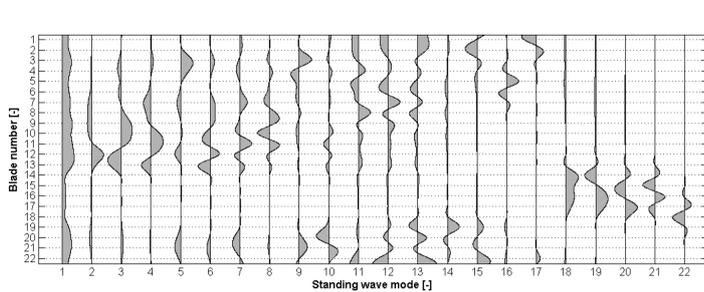


Figure 13: System mode shapes from experimental modal analysis

$n$	$f_n^{ema}$	$\zeta_{Sn}^{ema}$	$M_n^{ema}$	$n$	$f_n^{ema}$	$\zeta_{Sn}^{ema}$	$M_n^{ema}$
[-]	[Hz]	[%]	[kgm <sup>2</sup> ]	[-]	[Hz]	[%]	[kgm <sup>2</sup> ]
1	123.74	0.032	0.69	12	124.94	0.054	0.30
2	124.44	0.051	0.12	13	124.99	0.014	1.03
3	124.47	0.010	3.14	14	125.00	0.016	0.10
4	124.56	0.016	0.24	15	125.13	0.013	0.19
5	124.58	0.026	0.22	16	125.15	0.016	0.14
6	124.67	0.014	0.22	17	125.29	0.026	0.09
7	124.74	0.019	0.44	18	125.71	0.035	0.23
8	124.76	0.024	0.01	19	125.89	0.029	0.24
9	124.77	0.021	0.26	20	126.13	0.039	0.20
10	124.80	0.012	0.12	21	126.21	0.031	0.16
11	124.94	0.037	0.35	22	126.47	0.052	0.14

Table 1: Identified modal properties of standing wave modes

(a) Circumferential modeshape of mistuned blisk

(b) Modal frequency

Fig. 2.4: Experimentally measured structural modeshapes of mistuned blisk [56]

2.1.5 翼列系に対する強制振動応答の評価について

翼振動モード間の連成を考えなければ、完全に周期的な翼列は、Eqn. (2.33) により 1 自由度振動系に帰着することが示された。ここで「空力減衰」を評価することで行われる「フラッター解析」と基礎的な解析枠組みが密接に関わっている強制振動応答の評価についてもふれておく。強制振動応答振幅に対しては Eqn. (2.3) に示すように、減衰力の大きさが振動振幅に大きく関わってくることから、構造減衰と同様に空力減衰を正しく推定できることが応答振幅の予測に非常に重要である。フラッター解析は流体中における空力減衰を算出することであるから、空力減衰は Eqn. (2.33) の右辺速度同期成分より 1 自由度系のものであるとして評価できるため、強制加振力の翼間位相差さえ判明すれば応答振幅がわかることになる。

ここでは、各エンジンオーダーの擾乱を受ける場合の翼間位相差の選択について述べる。Fig. 2.5 に、固定系における空力的な擾乱を受ける動翼の模式図を示す。Campbell 線図のあるエンジンオーダー線と翼振動数線の交点付近の状況を想定し、このとき翼の角回転数  $\omega_r$  [rad/s]、動翼枚数  $N_b$  の動翼が、固定系にあるエンジンオーダー（周方向波数） $N_{EO}$  の周方向の流れ擾乱を受けている。このような周方向の擾乱源として、ストラットやパイロン、前置静翼のつくる後流や動翼とのポテンシャル干渉、インレットディストーション（入口偏流）が考えられる。このとき  $n$  番目の動翼の回転角  $\theta_n$ 、固定系に存在する擾乱の関数  $f$  の周方向分布はそれぞれ、

$$\theta_n = \omega_r t + \frac{2\pi(n-1)}{N_b}, \quad f = F \cos(N_{EO}\theta) \tag{2.34}$$

などと表せる。したがって  $n$  番目の翼の受ける擾乱は、

$$f_n = F \cos(N_{EO}\omega_r t + \frac{2\pi(n-1)N_{EO}}{N_b}) \tag{2.35}$$

となることから、隣接翼との擾乱の位相差  $\sigma$  は、これが翼振動の翼間位相差になるが、

$$\sigma = \frac{2\pi N_{EO}}{N_b} \Rightarrow \sigma = \frac{2\pi \text{mod}(N_{EO}, N_b)}{N_b} \tag{2.36}$$

となる。この式は、動翼に流れ込む流れの擾乱はそれ固有のエンジンオーダーの強制空気を動翼に与えるが、強制振動応答評価においては、考えるエンジンオーダーによって異なる翼間位相差の空力減衰を用いる必要があるということを意味している。さらに、考えなくてはならない翼間位相差は中途半端なものではなく、翼列全体の運動方程式における、動翼枚数によって決まる Traveling wave mode のいずれかを考えれば良いことがわかる。しかしながら、注意すべき点として、あるエンジンオーダーの振動の高調波に対する空力減衰値は基準のエンジンオーダーと同一のものではなく異なる翼間位相差になりうることを、ミスチューニングがある場合には当然翼間位相差一定の場合の空力減衰を用いることの妥当性は保証されず、強制振動応答の評価には翼毎の機械的性質のばらつきを含んだかたちで翼列全体の運動方程式が必要となること、が挙げられる。

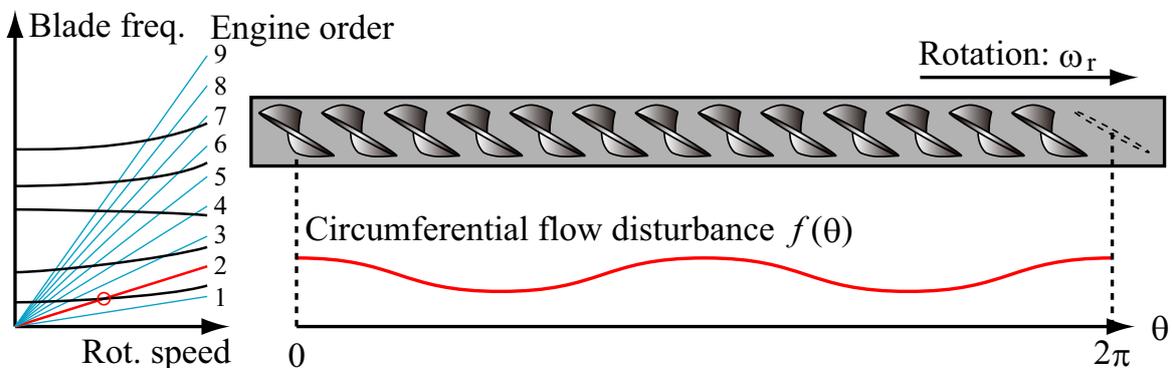


Fig. 2.5: Forced response of the rotor by the flow disturbance ( $N_b = 13, N_{EO} = 2$ )

### 2.1.6 翼列の多自由度振動の定式化：複数構造振動モード，複数翼枚数

最後に，本研究で対象としたい「複数構造振動モードが連成する翼列の振動」の運動方程式を定式化する．これは非常に単純で，先に述べた単一振動モード・翼列の運動方程式 Eqn. (2.29) のモード変位  $q$  を，Eqn. (2.23) で用いられているモード変位ベクトル  $q$  に，モード剛性  $\omega_0^2$  をモード剛性行列  $\Lambda$  に，変動空気力係数  $A_i, B_i$  を変動空気力係数行列として取り扱えばよい．すると，全ての翼・振動モードに対して立てた運動方程式

$$M\ddot{\mathbf{u}}_i + K\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{N_b} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{u}_j} \mathbf{u}_j + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \dot{\mathbf{u}}_j} \dot{\mathbf{u}}_j \right] \quad (i = 1, 2, \dots, N_b) \quad (2.37)$$

を，モード変位ベクトルに変換した形

$$\ddot{\mathbf{q}}_i + \Lambda \mathbf{q}_i = \sum_{j=1}^{N_b} [A_{ij} \mathbf{q}_j + B_{ij} \dot{\mathbf{q}}_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N_b) \quad (2.38)$$

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{q}, \quad \Lambda = \Phi^T K \Phi, \quad A_{ij} = \Phi^T \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{u}_j} \Phi, \quad B_{ij} = \Phi^T \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \dot{\mathbf{u}}_j} \Phi \quad (2.39)$$

が得られる．さらに Eqn. (2.30) を用いて空力的な項に対して周期性を仮定すれば，Eqn. (2.29) の多自由度版，

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{q}}_{N_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{N_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{N_b} \\ A_{N_b} & A_1 & \cdots & A_{N_b-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_2 & \cdots & A_{N_b} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{N_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_{N_b} \\ B_{N_b} & B_1 & \cdots & B_{N_b-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_2 & \cdots & B_{N_b} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}_{N_b} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

が得られる．ここに， $\mathbf{q}_i$  は  $i$  番目の翼のモーダル変位ベクトルで大きさは  $(N_f \times 1)$ ， $A_i, B_i$  は  $i$  個目の影響係数行列であり  $(N_f \times N_f)$  の大きさをもつ非対称密行列， $\Lambda_0$  はモーダル剛性行列で  $(N_f \times N_f)$  の対角行列である．翼列全体で見た時に，トータルの自由度数は  $N_b N_f$ ，空気力行列の要素数は  $2N_b N_f^2$  である．自励空気力係数行列  $A_m$  の  $(i, j)$  成分は，ある翼の  $i$  番目の振動モードの運動方程式に対するある翼が  $m-1$  個だけ隣にいる翼の  $j$  番目の振動モードの変位に同期して生じる自励空気力の係数を表している． $B_m$  についても同様に，自励空気力の速度同期成分を表している．

Eqn. (2.40) に示す翼列の空力弾性方程式は， $N_b = 1$  とすることで単独翼に対する空力弾性方程式の定式化 Eqn. (2.24) を包含していることが容易に確認できる．また，全ての翼に対して空力的・構造的に同一の条件下であることを仮定しているので，Eqn. (2.40) の空力弾性モードは Eqn. (2.30) の翼間位相差をもつことは自明である．しかしながら，各構造振動モード間の振幅や位相差については任意性があるため，空力弾性モードを求める際には翼 1 枚の際と同様に，固有値問題を解く必要がある．本研究では，Eqn. (2.40) の自由振動特性を流体-構造連成解析を用いて算出することでフラッター解析を行っている．

## 2.2 自由振動を利用した空力・構造連成系のモード同定法

### 2.2.1 連成解析を利用した多自由度翼列における空気力係数推定法

流れ中に弾性支持された物体の非定常空気力係数を推定する方法は，強制振動法と自由振動法に分類される．強制振動法は流れの中で物体に強制振動変位を与え，誘起される空気力を計測し係数を算出する方法であり，一方で自由振動法では流れの中に支持された弾性模型の自由振動の時系列波形から，何らかの処理を行い空気力係数を推定する方法である．本研究では複数のモードを考慮した自由振動波形を連成解析によって取得し，その波形から空気力係数を推定する．さらにそれを固有値解析にかけることにより空力弾性モードを求め，流体中で発現する減衰率や振動数に関する情報も得る．

Eqn. (2.40) の係数行列  $A, B$  の全ての成分を自由振動波形から推定することを考える．構造振動モードはフラッター解析を行う前に求めることができるから既知であるが，自励空気力係数は流体解析によらねばならず，フラッターの解析を行う段階では未知となっている．これを求めるために，1 列の未知ベクトルとして再定義して空気力項の書き換えを行う．すると，空気力係数行列の項  $Aq$  は，次のように書き換えられる．

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{N_b} \\ A_{N_b} & A_1 & \cdots & A_{N_b-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_2 & \cdots & A_{N_b} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 q_1 + A_2 q_2 + \cdots + A_{N_b-1} q_{N_b-1} + A_{N_b} q_{N_b} \\ A_1 q_2 + A_2 q_3 + \cdots + A_{N_b-1} q_{N_b} + A_{N_b} q_1 \\ \vdots \\ A_1 q_{N_b} + A_2 q_1 + \cdots + A_{N_b-1} q_{N_b-2} + A_{N_b} q_{N_b-1} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$(N_b N_f \times N_b N_f) \quad (N_b N_f)$

$$= \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{N_b-1} & Q_{N_b} \\ Q_2 & Q_3 & \cdots & Q_{N_b} & Q_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ Q_{N_b} & Q_1 & \cdots & Q_{N_b-2} & Q_{N_b-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{N_b} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$(N_b N_f \times N_b N_f^2) \quad (N_b N_f^2)$

$$= \tilde{Q} \tilde{A} \quad (2.43)$$

ここで，部分行列  $Q_{n_b}$ ，部分ベクトル  $A_{n_b}$  は次のように定義される．

$$Q_{n_b} = \begin{bmatrix} q_{n_b}^T & & \\ & \ddots & \\ & & q_{n_b}^T \end{bmatrix}, \quad A_{n_b} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N_f} & A_{21} & \cdots & A_{2N_f} & \cdots & A_{N_f 1} & \cdots & A_{N_f N_f} \end{bmatrix}_{n_b}^T \quad (2.44)$$

$(N_f \times N_f^2) \quad (N_f^2)$

このように，モード変位からつくった部分行列  $Q_{n_b}$  を巡回させてつくった行列と空気力係数行列の成分から成るベクトル  $\tilde{A}$  にしたものの積で空気力項が表せる．

空気力の速度比例成分についても変位比例成分と同様に書き換える．

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_{N_b} \\ B_{N_b} & B_1 & \cdots & B_{N_b-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_2 & \cdots & B_{N_b} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_{N_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \dot{q}_1 + B_2 \dot{q}_2 + \cdots + B_{N_b-1} \dot{q}_{N_b-1} + B_{N_b} \dot{q}_{N_b} \\ B_1 \dot{q}_2 + B_2 \dot{q}_3 + \cdots + B_{N_b-1} \dot{q}_{N_b} + B_{N_b} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ B_1 \dot{q}_{N_b} + B_2 \dot{q}_1 + \cdots + B_{N_b-1} \dot{q}_{N_b-2} + B_{N_b} \dot{q}_{N_b-1} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$(N_b N_f \times N_b N_f) \quad (N_b N_f)$

$$= \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 & \dot{Q}_2 & \cdots & \dot{Q}_{N_b-1} & \dot{Q}_{N_b} \\ \dot{Q}_2 & \dot{Q}_3 & \cdots & \dot{Q}_{N_b} & \dot{Q}_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \dot{Q}_{N_b} & \dot{Q}_1 & \cdots & \dot{Q}_{N_b-2} & \dot{Q}_{N_b-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{N_b} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$(N_b N_f \times N_b N_f^2) \quad (N_b N_f^2)$

$$= \tilde{Q} \tilde{B} \quad (2.47)$$

$$\dot{Q}_{n_b} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{n_b}^T & & \\ & \ddots & \\ & & \dot{q}_{n_b}^T \end{bmatrix}, \quad B_{n_b} = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1N_f} & B_{21} & \cdots & B_{2N_f} & \cdots & B_{N_f 1} & \cdots & B_{N_f N_f} \end{bmatrix}_{n_b}^T \quad (2.48)$$

$(N_f \times N_f^2) \quad (N_f^2)$

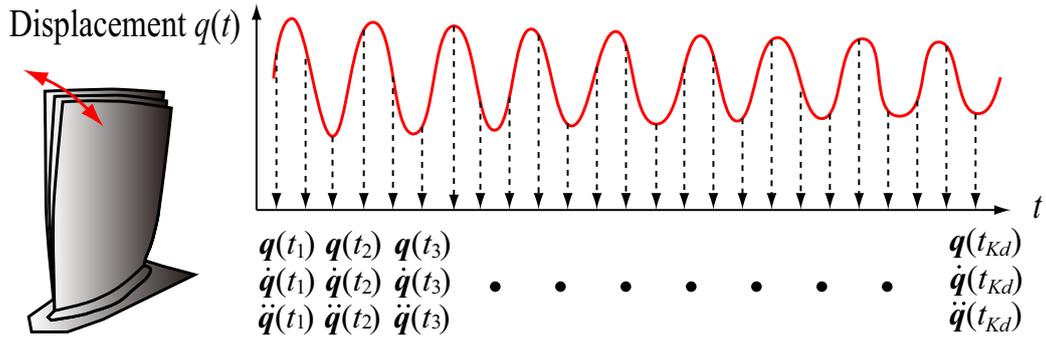


Fig. 2.6: Sampling of blade vibration from time history by FSI

本研究で用いていく時間領域の流体-構造連成解析においては、各時刻におけるモード変位、速度、加速度の情報が全て求まっている。そこで、翼振動の時間履歴から翼列全体の振動系を同定する手続きを考えることが出来る。いま、Fig. 2.6 に示すように、連成解析で得られた自由振動履歴から  $K_d$  個の変位、速度、加速度のデータ  $q(t_k)$ 、 $\dot{q}(t_k)$ 、 $\ddot{q}(t_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, K_d$ ) が取得できたとする。また、このとき各サンプル時刻のステップ  $k$  (時刻  $t_k$ ) で以下の運動方程式が成立していると考える。

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{\dot{Q}} \end{bmatrix} (t_k) \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix} = \underbrace{\ddot{q}(t_k) + \begin{bmatrix} \Lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_0 \end{bmatrix} \dot{q}(t_k)}_{(N_b N_f)} \quad (2.49)$$

$(N_b N_f \times 2N_b N_f^2)$     $(2N_b N_f^2)$     $(N_b N_f)$

$$\Leftrightarrow \tilde{X}(t_k) \partial \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{R}}(t_k) \quad (2.50)$$

ここに  $\tilde{X}(t_k)$  は未知空気力係数ベクトルの係数行列でモード変位・速度から成る。またベクトル  $\partial \mathbf{F}$  は未知空気力係数ベクトルを 1 次元に落とし込んだもの、 $\tilde{\mathbf{R}}(k)$  はある時間ステップにおける慣性力と弾性力の和である。

運動方程式をこのように書き換え、サンプルした全時刻、即ち  $t_1 \sim t_{K_d}$  まで  $K_d$  個の時系列データをまとめれば、次式のように、自励空気力係数  $\partial \mathbf{F}$  に対する過剰決定連立方程式が導ける。

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(t_1) \\ \vdots \\ \tilde{X}(t_{K_d}) \end{bmatrix} \partial \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}(t_1) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{R}}(t_{K_d}) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$(N_b N_f K_d \times 2N_b N_f^2)$     $(2N_b N_f^2)$     $(N_b N_f K_d)$

$$\Leftrightarrow \hat{X} \partial \mathbf{F} = \hat{\mathbf{R}} \quad (2.52)$$

最後に、最小二乗法を適用することでサンプリングデータを最も良く説明する空気力係数  $\partial \mathbf{F}$  を次のようにして求めることができる。

$$\partial \mathbf{F} \underset{(2N_b N_f^2)}{\simeq} \underset{(2N_b N_f^2 \times 2N_b N_f^2)}{(\hat{X}^T \hat{X})^{-1}} \underset{(2N_b N_f^2)}{\hat{X}^T \hat{\mathbf{R}}} \quad (2.53)$$

### 2.2.2 固有値解析によるフラッターモード推定

Eqn. (2.40) の係数行列  $A, B$  の全ての成分を自由振動波形から推定できたら、この微分方程式の固有値・固有ベクトルを求めることで、翼列流れ中で翼列系が振動するばあいの振動パターン・振動数・減衰比が推定できる。

翼列全体の自由度をまとめた変位ベクトルを  $q$ 、固有値を  $\lambda$ 、 $s = [q \ \dot{q}]^T$  として、Eqn. (2.40) の固有値問題

は次のように書ける．

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} O & I \\ -\text{diag}(\Lambda_0) + A & B \end{bmatrix} \mathbf{s} \quad (2.54)$$

$(2N_b N_f)$                        $(2N_b N_f \times 2N_b N_f)$                        $(2N_b N_f)$

上式を複素固有値問題として解くと、空力弾性システムの固有ベクトルは次の形で求まる [57]．

$$\begin{bmatrix} \psi \\ \lambda \psi \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$(2N_b N_f)$

また、振動の時間方向の情報は固有値  $\lambda$  から求まり、空力弾性モード振動数  $f_{AE}$ 、空力弾性モード減衰率  $\mu_{AE}$  はそれぞれ以下で計算できる．

$$2\pi f_{AE} = |\text{Im}(\lambda)|, \quad \mu_{AE} = -\text{Re}(\lambda) \quad (2.56)$$

また、振動の空間方向の情報は固有ベクトル  $\psi$  から求まる．自由度間の振幅比は各自由度の複素振幅の絶対値の比を取ることで求めることができる．また、翼間位相差 (Inter Blade Phase Angle, IBPA) (第一自由度に対する) モード間位相差 (Inter Mode Phase Angle, IMPA) は固有ベクトルの各成分から内積を取ることで、次のようにして求められる．固有ベクトルのうち、正回転モード ( $\text{Im}(\lambda) > 0$ ) に対して、 $n_b$  翼の  $n_f$  自由度の変位成分を  $\psi_{n_b}^{n_f}$  と表わすと、

$$\cos(\text{IBPA}) = \frac{\text{Re}(\psi_{n_b+1}^{n_f} \bar{\psi}_{n_b}^{n_f})}{|\psi_{n_b+1}^{n_f}| |\psi_{n_b}^{n_f}|}, \quad \sin(\text{IBPA}) = \frac{\text{Im}(\psi_{n_b+1}^{n_f} \bar{\psi}_{n_b}^{n_f})}{|\psi_{n_b+1}^{n_f}| |\psi_{n_b}^{n_f}|}, \quad (2.57)$$

$$\cos(\text{IMPA}) = \frac{\text{Re}(\psi_{n_b}^{n_f} \bar{\psi}_{n_b}^1)}{|\psi_{n_b}^{n_f}| |\psi_{n_b}^1|}, \quad \sin(\text{IMPA}) = \frac{\text{Im}(\psi_{n_b}^{n_f} \bar{\psi}_{n_b}^1)}{|\psi_{n_b}^{n_f}| |\psi_{n_b}^1|} \quad (2.58)$$

逆回転モード ( $\text{Im}(\lambda) < 0$ ) に対してはこれらの演算の後、角度に-をかければよい．

以上のようにして、単独翼または翼列に対して振動モードを推定することで、連成解析で発現した振動がどのような成分から成り立っているか、またどのような運動現象かを定量的に説明することが可能となる．

特に、推定した減衰率が正のものを含むならば、発散傾向にあるモードが存在し、フラッターが生じていると判断できる．このとき、推定された固有ベクトルが、発現したフラッター特有の振動形 (フラッターモード) である．また減衰率が全て負ならば、系の振動は安定であり、振幅は時間が経つとともに収束すると判断できる．

## 2.3 モード同定における不確かさ解析

前節で定式化した自由振動を利用したモード同定法においては、最小二乗法を用いて空気力係数を同定する過程を含む．そのため、同定結果には多かれ少なかれ最小二乗法によって同定した空気力係数により説明できない運動成分が存在する．本研究ではこれを同定誤差と呼ぶことにする．

本研究で用いる空力弾性方程式のモード同定において、最小二乗法がどの程度シミュレーション結果を説明しているのか、同定された空力弾性モードはどの程度「正しい」ものなのかといった解析結果の妥当性について述べた上で、翼振動の背後にある物理現象について考察するためには、システム同定の同定誤差を明確に示すことが必要不可欠であると考えられる．そこで本節では、統計学的な観点からモード同定法による誤差解析法を定式化する．また、定式化を行う上で用いた仮定についても付記しておく．

### 2.3.1 推定値と数値計算結果との誤差の考え方

自由振動による  $K_d$  個の時系列データ  $q(t_k), \dot{q}(t_k), \ddot{q}(t_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, K_d$ ) を取得しているとする．各時刻で以下の運動方程式が成立していると考ええる．

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{\dot{Q}} \end{bmatrix} (t_k) \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix} = \ddot{q}(t_k) + \begin{bmatrix} \Lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_0 \end{bmatrix} \ddot{q}(t_k) \quad (2.59)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{X}(t_k) \partial \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{R}}(t_k) \quad (2.60)$$

とかき， $K_d$  個の時系列データをまとめれば，

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(t_1) \\ \vdots \\ \tilde{X}(t_{K_d}) \end{bmatrix} \partial \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}(t_1) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{R}}(t_{K_d}) \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\Leftrightarrow \hat{X} \partial \mathbf{F} = \hat{\mathbf{R}} \quad (2.62)$$

上式を過剰条件の連立方程式とみなし，最小二乗法を適用して空気力係数  $\partial \mathbf{F}$  を求めれば，

$$\partial \mathbf{F} \simeq (\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \hat{X}^T \hat{\mathbf{R}} \quad (2.63)$$

となる．

最小二乗法による推定値を

$$\partial \bar{\mathbf{F}} \quad (2.64)$$

と書き，推定元データに代入する．Eqn. (2.60) は「(右辺：加速度と弾性力 内力) は (左辺：線形化された変動空気力) により生じる」という因果律を表している．したがって，翼構造側から見ると外力である変動空気力を同定することは「翼振動」という結果を見てその原因となる「外力」を推定していることになる．これは空力弾性系における自励空気力項を，系の運動状態を表す何らかの説明変数を用いて「モデル化していく」という観点から考えれば，翼の運動を「説明変数」，モデル化されるべき自励空気力を「被説明変数」ととっていることになる．

本研究では，フラッターの有無は微小振幅振動の安定性で判定できるという考え方から，自励空気力の説明変数としては各振動自由度に対して 1 次までを取っている．このとき運動方程式が厳密に時々刻々成立し，「空気力が固体の運動状態に対して完全に線型」ならば，すなわち連成解析で生じている「全ての変動空気力が翼の運動に線形な関数で説明できる」ならば，Eqn. (2.60) は常に厳密に満たされるであろう．よって，ここでは取得した (右辺：加速度と弾性力) のうち「線型化空気力モデルで説明できない部分」を考える．同定された係数  $\partial \bar{\mathbf{F}}$  を用いた空気力で翼の運動を説明しきれなかった分  $\hat{\epsilon}$  を計算すると次のようになる．

$$\hat{\epsilon}_{(N_b N_f K_d)} = \hat{\mathbf{R}} - \hat{X} \partial \bar{\mathbf{F}} \quad (2.65)$$

これを誤差ベクトルと呼ぶことにする．最小二乗法の定式化から分かる通り， $\hat{\mathbf{R}}$  が各サンプリング時刻における (慣性力+弾性力) を 1 次元に並べたベクトルであり，全てのサンプリング時刻の情報を含んでいるように，誤差ベクトルは，同定された空気力係数を用いた際の，全てのサンプリング時刻における運動方程式の満たされ具合の情報を有している．

### 2.3.2 決定係数 $R^2$ 値

最小二乗法の当てはまりの良さを表す一般的な指標に決定係数  $R^2$  値がある．これは  $\hat{R}$  (慣性力+弾性力) の全変動のうち、同定された係数により説明されなかったぶんの割合を考慮することで、次のように定義される．

$$R^2 = 1 - \frac{(\hat{R} - \hat{X}\partial\bar{F})^2}{\hat{R}^2} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{\hat{R}^2} \quad (2.66)$$

最小二乗法を行い、ひとたび空気力係数が同定されれば、 $R^2$  値は複雑な手続きを経ずすぐに計算することができる．したがって、同定に用いたシグナルの質やノイズレベルを知るのに非常に有効な値であると考えられる． $R^2$  値の意味であるが、連成解析結果で生じた「全変動空気力」のうち何割が翼振動の時間履歴と、それによって線形に表わされた自励空気力によって説明されたかを表している．表現を変えれば、同定した自励空気力係数を用いた時の運動方程式の残差を規格化したものであるとも言える．

しかしながら、ノイズがランダムならば、サンプル数を増やせば増やすほど最小二乗法により同定される値は真の値に近づくため、実際に同定に用いたサンプル数における、同定された量の不確かさレベルを統計的に知ることが、同定結果の不確かさを知る上で非常に重要であると考えられる．したがって、次に同定された諸量や振動特性の不確かさを考えていく．

### 2.3.3 誤差ベクトルの分散，推定係数の分散

一口に「誤差」と言っても、これは様々な要因に起因すると考えられる．例えば CFD 計算中に空気力の平均値が遷移すれば、運動方程式の残差はランダムでなく偏り誤差としての特徴を持つし、カルマン渦のように翼振動とは一見無相関な変動流体力が働いていても、また、変動空気力が翼の運動に対して 2 次以上の項を含むような非線形性がある場合にも、運動方程式の残差は大きくなるであろう．このように、これまで仮定してきた自励空気力の形式と実際の変動空気力には違いがあると考えるのが自然であるし、「誤差」がどのように結果に影響するかはその要因ごとに様々な場合があると思われる．したがって、同定誤差の特徴を正しく分析し、その原因を特定した上で個々について別々の取り扱いをすることは非常に困難である．

そこで本研究では、解析的な取り扱いを簡単にするため、誤差ベクトルの各成分が以下の性質を持つ確率変数であると仮定する．

1. 偏りのない誤差である (普遍性:  $E(\varepsilon_i) = 0$ )
2. 各成分のばらつきが等しい (等分散性:  $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ )
3. 各誤差成分に相関は無い (無相関性:  $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ )

さらに、この誤差ベクトルの分布が、多次元正規分布であると仮定すると、推定した空気力係数のばらつき具合や、それらを用いて推定した振動モードのばらつきがどの程度生じうるかを評価できる．

ここで注意しなくてはならないのは、誤差に対する 2 番目の仮定の等分散性である．翼振動の運動方程式は多自由度 (翼枚数とモード数の積  $N_b N_f$ ) を扱っているため、それぞれの自由度における誤差レベルは一般に異なると思うのが自然であろう．しかしながら、そのような取り扱いは誤差の伝播に関する評価をより複雑にしてしまうと予想されるため、本研究では 2 番目の仮定により、定式化や実装の単純さを優先した．

誤差ベクトルが正規分布に従うとき、空気力係数の推定値  $\partial\bar{F}$  もまた正規分布に従い、期待値  $\partial\bar{F}$ 、分散共分散  $(\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \sigma^2$  の多次元正規分布に従う [58]．推定された空気力係数  $\partial\bar{F}$  の真値からのずれを  $\partial\tilde{F}$  とし、真値からのずれ  $\partial\tilde{F}$  の分散共分散は、誤差ベクトルの各成分に対する分散を  $\sigma^2$  とすれば、次のようになる．

$$V(\partial\tilde{F}_i) = [(\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \sigma^2]_{ii} \quad (2.67)$$

$$Cov(\partial\tilde{F}_i, \partial\tilde{F}_j) = [(\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \sigma^2]_{ij} \quad (2.68)$$

このとき、十分大きいサンプル数  $N_{\text{sample}}$  のもとでは  $(\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \propto 1/N_{\text{sample}}$  であり、 $\sigma^2$  は一定値に収束する．したがって理想的には推定値の標準偏差は  $1/\sqrt{N_{\text{sample}}}$ 、即ちサンプル数の  $-1/2$  乗で減少することになる．

### 2.3.4 推定された空力弾性モード固有値の信頼区間

このように同定された空力係数（たち）は統計的にはばらついており、それが多次元正規分布に従うとき、それを用いて導かれた空力弾性モードも確率変数とみることができ、ある一定の範囲でばらつきうる。そこで、空力弾性モードの最も重要なパラメタである、振動数と減衰率の信頼区間を推定して評価する。本研究では、振動数・減衰率の存在範囲は、特に断らない限り 99 % 信頼区間である  $\pm 3\sigma$  を誤差棒として表示する。

しかしながら、モード同定された固有値や固有ベクトルのばらつきは、線形化空力力を含む固有値問題を解く必要があることから、線形変換によって単純にばらつきなどを求めることができない。そこで、本研究では推定されるモードのばらつきをモンテカルロ法によって推定することにした。

入力である空力係数の推定値  $\partial F$  が、分散共分散行列  $(\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \sigma^2$ 、平均  $\partial \bar{F}$  である多次元正規分布に従うので、これは多次元標準正規分布に従う量  $x$  を用いて、次のようにつくることができる。

$$\partial F = Ax + \partial \bar{F}, \quad (2.69)$$

$$AA^T = (\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \sigma^2 \quad (\text{分散共分散行列の Cholesky 分解}) \quad (2.70)$$

一様乱数から  $x$  を生成し、多次元正規分布に従う  $\partial F$  を用いた固有値解析を多数行うことで、出力量である各モードの固有値の分布を調べることができる。

正規分布に従う乱数は様々な生成の仕方があるが、本研究ではその中でも最も簡易だと考えられる、複数の一様乱数を足しあわせる方法を用いた。この方法は、ばらつきをもつ量を多数足しあわせて作った量の従う分布が正規分布に近づくという、統計の基本的な性質を利用した正規乱数の生成方法である。 $n$  個の一様乱数  $u$  ( $0 \leq u \leq 1$ ) を用いて、

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n u_i - n/2}{\sqrt{n/12}} \quad (2.71)$$

とすると正規乱数  $x$  が近似的に得られる。本研究では、よく用いられる  $n = 12$  を用いた。

## 2.4 2 章のまとめ

本章では、ターボ機械翼列の振動現象を解析するための基礎事項として、1 自由度の運動方程式から多自由度振動の取り扱いまでを概説し、主要な振動現象であるフラッターと強制振動応答についてその違いとフラッターの解析指針を明確にした。さらに翼列フラッターにおける主要な概念である翼間位相差と減衰率の評価を翼列全体の振動方程式からいくつかの過程を置くことで導出し、翼列の振動の特徴を確認するとともにこれらの概念が通用する状況を述べた。

続いて、多自由度の翼列フラッターを時間領域の連成解析手法を用いて解析するために時間領域のモード同定法を定式化し、モード同定における誤差要因を洗い出した上で実用上プログラムで実装可能な範囲に落としこむべく、統計的な手法による同定誤差の解析までを定式化した。

## 第 3 章 支配方程式

### 3.1 連続体の支配方程式

本研究では連続体の基礎方程式として質量・運動量・エネルギーの保存則を，流体・固体の支配方程式として適宜採用している．まずこれら保存則について述べ，その後流体・固体双方で採用したものについて述べる．

#### 3.1.1 基準配置と現在配置，物質表示と空間表示，輸送定理

空間中に存在する連続体を無数の点（粒子）の集合と見る．ある時刻において，空間中に存在する物質点に，その粒子の存在する座標をもって  $X$  と名前をつける．すると，連続体を構成する無数の粒子が，ある時刻の位置を名前にして区別できるようになる．このある時刻に物質点たちがいた位置のことを基準配置，このある時間のことを基準時間という．

任意の時刻  $t$  における物質点  $X$  の位置を，物質点  $X$  のいる座標  $x(t, X)$  で表す． $x$  は，物質点が運動していれば  $X$  とは異なる位置になる．この物質点全体の位置のことを現在配置という．

基準時間以外では，基準配置と現在配置とは一般に異なる．したがって，物質点のもつ物理量を考えるとき，物質点の名前で区別するか，物質点の位置で区別するかを明確にしなくてはならない．物理量  $f$  を物質点につけた名前  $f(t, X)$  で表すとき，これを物質表示または Lagrange 表示という．また，現在の位置  $f(t, x)$  で表すとき，これを空間表示または Euler 表示という．

同一の物質点  $X$  に着目し，時間を進めながら追いかけていくことを考える．物質点  $X$  の運動  $x(t, X)$  について，物質点の速度  $v$  は，同じ  $X$  の微小時間の位置ベクトルの変化率であるから，次式で定義できる．

$$v = \frac{\partial x}{\partial t}_X \quad (3.1)$$

物質点のもつ任意の物理量  $f$  の時間微分は，連鎖律を用いて

$$\frac{\partial f}{\partial t}_X = \frac{\partial f}{\partial t}_x + v \cdot \nabla_x f \quad (3.2)$$

で与えられる．いま，物理量  $f$  の空間積分に対し，時間変化を考えると，

$$\frac{\partial}{\partial t}_X \int_{V_x} f dV_x = \int_{V_X} \frac{\partial}{\partial t}_X \left( f \frac{dV_x}{dV_X} \right) dV_X \quad (3.3)$$

$$= \int_{V_X} \left( \frac{dV_x}{dV_X} \frac{\partial}{\partial t}_X f + f \frac{\partial}{\partial t}_X \frac{dV_x}{dV_X} \right) dV_X \quad (3.4)$$

$$= \int_{V_X} \left( \frac{\partial f}{\partial t}_x + v \cdot \nabla_x f + f \nabla_x \cdot (v) \right) \frac{dV_x}{dV_X} dV_X \quad (3.5)$$

$$= \int_{V_x} \left[ \frac{\partial f}{\partial t}_x + \nabla_x \cdot (f v) \right] dV_x \quad (3.6)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}_x \int_{V_x} f dV_x + \int_{S_x} (f v) \cdot dS_x \quad (3.7)$$

と書ける．これは，検査体積を物質と共に運動させながら取った物理量  $f$  の空間積分の時間変化率が，検査体積を固定して取った空間積分の時間変化率と，検査面境界を出入りした物質点の運動に伴う  $f$  の移動量の和に等しいことを表しており，レイノルズの輸送定理と呼ばれる．これを用いて以下に各保存則を導く．

### 3.1.2 質量保存則・運動量保存則・エネルギー保存則

まず質量保存則は、「物質点と共に運動する検査体積内の質量は一定である」ことである。したがって時間微分を取っても0である。これは、輸送定理より以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} m = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_x} \rho dV_x = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.9)$$

次に運動量保存則は、「物質点と共に運動する検査体積内の運動量の増分は、検査体積表面及び内部に作用した力積に等しい」ことである。これを書き、左辺を輸送定理、右辺を発散定理により変形すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_x} (\rho \mathbf{v}) dV_x = \int_{S_x} T d\mathbf{S}_x + \int_{V_x} \mathbf{F}_v dV_x \quad (3.10)$$

$$\int_{V_x} \left[ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \right] dV_x = \int_{V_x} \nabla_x \cdot T dV_x + \int_{V_x} \mathbf{F}_v dV_x \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla_x \cdot T + \mathbf{F}_v \quad (3.12)$$

質量保存則・運動量保存則を用いて、連続体微小要素に対する運動方程式を導くことができる。これは、上式左辺の微分を計算し、

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla_x) \mathbf{v} + \left[ \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_x \cdot \rho \mathbf{v} \right] = \nabla_x \cdot T + \mathbf{F}_v \quad (3.13)$$

連続式より、[ ]内は0となるから、運動方程式

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla_x) \mathbf{v} = \nabla_x \cdot T + \mathbf{F}_v \Leftrightarrow \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla_x \cdot T + \mathbf{F}_v \quad (3.14)$$

が導出される。

最後にエネルギー保存則は、「物質点と共に運動する検査体積内の全エネルギーの増分は、検査体積表面応力及び内部に作用した体積力のした仕事、および表面における熱流入に等しい」ことである。これを書けば、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_x} \rho \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV_x = \int_{S_x} T \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}_x + \int_{V_x} \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v} dV_x - \int_{S_x} \mathbf{q} d\mathbf{S}_x \quad (3.15)$$

$$\int_{V_x} \left[ \frac{\partial \rho \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right)}{\partial t} + \nabla_x \cdot \rho \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] dV_x = \int_{V_x} [\nabla_x \cdot (T \mathbf{v}) + \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v} - \nabla_x \cdot (\mathbf{q})] dV_x \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \rho \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right)}{\partial t} + \nabla_x \cdot \rho \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \nabla_x \cdot (T \mathbf{v}) + \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v} - \nabla_x \cdot (\mathbf{q}) \quad (3.17)$$

連続体の運動を記述する方程式系には、以上3つの保存則と、構成式（応力-歪関係式）および熱力学的状態量の間関係式である状態方程式を与えることで閉じ、適切な数値解法を用いることで系の時間発展を解析することが可能となる。

### 3.1.3 回転座標系における基礎方程式

回転機械の翼列などの回転座標系においては、座標系が慣性系に対して相対運動するから、慣性力が外力として出現する。一定回転数で回転している回転機械のように回転数変化が無視でき、原点を通る軸まわりに一定の角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  で回転する場合には、運動量式の外力項として、体積力である遠心力とコリオリ力

$$-2\rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \rho \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \quad (3.18)$$

を加える．一方で，エネルギー式への外力の寄与を考えると，コリオリ力は回転系における相対速度と直交するために流体粒子に対して仕事をせず，また遠心力にはポテンシャルエネルギーが存在する．したがって，エネルギー式の体積力項にはこれによる仕事の代わりに，単位質量・体積あたりの遠心力のポテンシャルエネルギー

$$V_r = -\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}|^2 \quad (3.19)$$

を比全エネルギーに含ませ，速度の項を相対速度に変更した形に書き換えることができる．

## 3.2 流体の支配方程式

### 3.2.1 状態方程式および応力-歪関係式（構成式）

流体解析で用いる応力の種類には 2 つある．1 つは圧力  $p$  であり，流体中の一点を見た時，どの方向の面に対しても同じ大きさの圧縮力がかかるもので，熱力学的な量である．理想気体の場合，これは状態方程式により与えられる．

$$p = \rho RT \quad (3.20)$$

また，理想気体は単位質量あたりの内部エネルギー  $e$  が温度のみで決まり，定積比熱  $C_v$ ，定圧比熱  $C_p$ ，比熱比  $\gamma$  を用いて以下のように書ける．

$$e = C_v T, \quad C_v = \frac{1}{\gamma - 1} R, \quad C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R \quad (3.21)$$

もう 1 つは流体の分子粘性に起因する力で，粘性応力と呼ばれる．ニュートン流体の場合，粘性応力は速度勾配の線形関数で， $\mu, \lambda$  を分子粘性係数，第二粘性係数とし下式で与えられる．

$$T_{\nu} = 2\mu \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} + \left( \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^T \right] + \lambda (\nabla_x \cdot \boldsymbol{v}) \boldsymbol{I} \quad (3.22)$$

圧力と粘性応力を合わせて流体中の応力が定まる．このとき，応力の静水圧成分が，熱力学的な圧力に一致するという仮定（ストークスの仮定）を用い，粘性応力の体積弾性率を 0 にすることがしばしば行われ，本研究でもこれを採用している．すると，第二粘性係数が次のように定まる．

$$\frac{T_{ii}}{3} = -p + \left( \lambda + \frac{2}{3} \right) \nabla_x \cdot \boldsymbol{v} = -p, \quad \lambda = -\frac{2}{3} \mu \quad (3.23)$$

これらを用いて，圧縮性流体の応力を表すことができる．

本研究では流体力モデルとしてレイノルズ平均圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用いている．これは，前述の質量保存則・運動量保存則・エネルギー保存則に，ニュートン流体を仮定し，次で与えられる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_{\nu 1}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_{\nu 2}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{E}_{\nu 3}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho e_{\text{tot}} \end{bmatrix}, \quad e_{\text{tot}} = e + \frac{1}{2} v_i v_i$$

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1 v_1 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_1 v_3 \\ (\rho e_{\text{tot}} + p)u \end{bmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_2 v_1 \\ \rho v_2 v_2 + p \\ \rho v_2 v_3 \\ (\rho e_{\text{tot}} + p)v \end{bmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} \rho v_3 \\ \rho v_3 v_1 \\ \rho v_3 v_2 \\ \rho v_3 v_3 + p \\ (\rho e_{\text{tot}} + p)w \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{\nu 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{\nu 2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{\nu 3} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad \beta_i = \tau_{ij} v_j + \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

### 3.2.2 一般曲線座標系への変換

流体解析では物体の形状を精度よく表現する為に、物体表面に沿うように空間を離散化することが行われる。また、フラッター解析では、固体表面の運動に伴い、流体の解析領域が変化する。そのため、移動境界問題を取り扱えるように、運動する座標系上で書かれた支配方程式を用いる。この定式化によって、格子は物体の表面を Lagrange 的に追跡し、運動に同期させることができる。そのため、物体の運動により変化する流体解析領域の変化を表現することが可能となる [59]。

デカルト座標系を  $x = (x, y, z, t)$ 、一般曲線座標系を  $\chi = (\xi, \eta, \zeta, t)$  で定義する。デカルト座標系上の微小ベクトル  $dx$  と、一般曲線座標系上の微小ベクトル  $d\chi$  の間には、変換則

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \chi} d\chi, \quad d\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = \left( \frac{\partial x}{\partial \chi} \right)^{-1} \quad (3.25)$$

が成立する。また、微小体積  $dV_x$  と  $dV_\chi$  の間には、

$$dV_x = \det \left( \frac{\partial x}{\partial \chi} \right) dV_\chi = \frac{1}{J} dV_\chi \quad (3.26)$$

なる関係式が成立する。ここで、 $J$  はデカルト系と一般曲線座標系の微小体積比である。微小面積ベクトル  $S_x$  と  $S_\chi$  は、微小ベクトルと微小体積の関係式を用いて、次の関係式で結ばれる。

$$dV_x = \frac{1}{J} dV_\chi \Leftrightarrow dx \cdot dS_x = \frac{1}{J} d\chi \cdot S_\chi \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \chi} d\chi \cdot dS_x = \frac{1}{J} d\chi \cdot S_\chi \quad (3.28)$$

$$d\chi^T \cdot \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \chi} \right)^T dS_x - \frac{1}{J} S_\chi \right] = 0 \Leftrightarrow dS_x = \frac{1}{J} \frac{\partial \chi^T}{\partial x} dS_\chi \quad (3.29)$$

座標変換行列の各座標成分を用いて書き下すと次のようになる：

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \left( \frac{\partial x}{\partial \chi} \right)^{-1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix}^{-1} = J \begin{bmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta & z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta & x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta \\ y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta & z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta & x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta \\ y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi & z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

いま、デカルト系に張られた一般曲線座標系  $\chi$  が運動していることを考える。この座標系は翼の運動とは無関係に運動させることができるが、この座標系の上に乗って見た物理量の変化はデカルト系の Euler 的なものとも Lagrange 的なものとも異なるものになる。デカルト座標系上において、流体粒子の運動  $v$  と、一般曲線座標系上の  $\chi = \text{Const.}$  点の運動  $\hat{v}$  は次式で定義される。

$$v = \frac{\partial x}{\partial t}_X, \quad \hat{v} = \frac{\partial x}{\partial t}_\chi \quad (3.31)$$

連鎖則より，

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{v}}) \equiv \mathbf{V} \quad (3.33)$$

となる．Eqn. (3.33) で表わされる速度は，一般曲線座標系上における反変速度である．この中で，一般曲線座標系の運動速度による成分を次のように表すことにする．

$$\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} (-\dot{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} -\xi_x \hat{v}_1 - \xi_y \hat{u} - \xi_z \hat{v}_1 \\ -\eta_x \hat{v}_2 - \eta_y \hat{v} - \eta_z \hat{v}_2 \\ -\zeta_x \hat{v}_3 - \zeta_y \hat{w} - \zeta_z \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_t \\ \eta_t \\ \zeta_t \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

座標系  $\chi$  の運動速度  $\dot{\mathbf{v}}$  を物質の運動  $\mathbf{v}$  と等しく取るとき座標系はラグランジュ的に物質点に追従していることになり，Euler 的な見方も Lagrange 的な見方も可能な座標系であることから，運動座標系を Arbitrary Lagrangean-Eulerian (ALE) 座標系と呼ぶ，

次に，輸送定理を一般曲線座標系上で書く事を考える．一般曲線座標系上の任意物理量  $f$  の体積積分の物質時間導関数は，デカルト座標系上で輸送定理を導いたときと同様にして，次のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_x} f dV_x = \int_{V_x} \frac{\partial}{\partial t} \left( f \frac{dV_x}{dV_X} \right) dV_X \quad (3.35)$$

$$= \int_{V_x} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{f}{J} \frac{dV_x}{dV_X} \right) dV_X \quad (3.36)$$

$$= \int_{V_x} \left( \frac{dV_x}{dV_X} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{f}{J} \right) + \left( \frac{f}{J} \right) \frac{\partial}{\partial t} \frac{dV_x}{dV_X} \right) dV_X \quad (3.37)$$

$$= \int_{V_x} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{f}{J} \right) + \mathbf{V} \cdot \nabla_x \left( \frac{f}{J} \right) + \frac{f}{J} \nabla_x \cdot \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right) \frac{dV_x}{dV_X} dV_X \quad (3.38)$$

$$= \int_{V_x} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{f}{J} \right) + \nabla_x \cdot \left( \frac{f \mathbf{V}}{J} \right) \right] dV_X \quad (3.39)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_x} \left( \frac{f}{J} \right) dV_x + \int_{S_x} \left( \frac{f \mathbf{V}}{J} \right) \cdot d\mathbf{S}_x \quad (3.40)$$

これを用いて，デカルト系で記述された保存則を，積分変数の変換を行うことで一般曲線座標系の記述に書き直す．まず，質量保存則は，体積積分を書き換えることで，

$$\frac{\partial}{\partial t} m = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_x} \rho dV_x = 0 \quad (3.41)$$

右辺の物質時間導関数は，輸送定理を用いれば，

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{J} \right) + \nabla_x \cdot \left( \frac{\rho \mathbf{V}}{J} \right) = 0 \quad (3.42)$$

と変形できる．運動量保存則は，

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_x} \rho \mathbf{v} dV_x = \int_{S_x} (-p\mathbf{I} + T_\nu) d\mathbf{S}_x + \int_{V_x} \mathbf{F}_v dV_x \quad (3.43)$$

左辺を輸送定理，左辺を表面積分および体積積分を微小体積および面積に関する関係式 Eqn. (3.29) を用いて書き換え，発散定理より体積積分に変換し微分形を導くと，

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho \mathbf{v}}{J} \right) + \nabla_x \cdot \left[ \frac{\rho \mathbf{v} \mathbf{V}}{J} + (p\mathbf{I} - T_\nu) \frac{1}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} \right] = \frac{\mathbf{F}_v}{J} \quad (3.44)$$

と変形できる．最後に，エネルギー保存則も同様にして積分変数を変換し，輸送定理および発散定理を用いることで，

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_x} \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) dV_x = \int_{S_x} (-pI + T_\nu) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}_x + \int_{V_x} \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v} dV_x - \int_{S_x} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}_x \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi \left[ \frac{\rho}{J} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \right] + \nabla_\chi \cdot \left[ \frac{\rho(e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2) \mathbf{V}}{J} + \frac{1}{J} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} (p\mathbf{v} - T_\nu \mathbf{v} + \mathbf{q}) \right] = \frac{\mathbf{F}_v}{J} \cdot \mathbf{v} \quad (3.46)$$

と変形でき，一般曲線座標系上で保存則を記述することができる．

以上をまとめ，成分ごとに記述すれば次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_1 - \hat{\mathbf{E}}_{\nu 1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_1 - \hat{\mathbf{E}}_{\nu 2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_1 - \hat{\mathbf{E}}_{\nu 3}}{\partial \zeta} &= \hat{\mathbf{S}} \\ e_{\text{all}} = e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \quad (\text{絶対系}) , \quad e_{\text{all}} = e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + V_r \quad (\text{回転系}) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho e_{\text{all}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{絶対系}), \quad \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ -2\rho\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \rho\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{回転系})$$

$$\hat{\mathbf{E}}_1 = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V_1 \\ \rho v_1 V_1 + \xi_x p \\ \rho v_2 V_1 + \xi_y p \\ \rho v_3 V_1 + \xi_z p \\ (\rho e_{\text{all}} + p) V_1 - \xi_t p \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}_2 = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V_2 \\ \rho v_1 V_2 + \eta_x p \\ \rho v_2 V_2 + \eta_y p \\ \rho v_3 V_2 + \eta_z p \\ (\rho e_{\text{all}} + p) V_2 - \eta_t p \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}_3 = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V_3 \\ \rho v_1 V_3 + \zeta_x p \\ \rho v_2 V_3 + \zeta_y p \\ \rho v_3 V_3 + \zeta_z p \\ (\rho e_{\text{all}} + p) V_3 - \zeta_t p \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{\nu 1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11}\xi_x + \tau_{12}\xi_y + \tau_{13}\xi_z \\ \tau_{21}\xi_x + \tau_{22}\xi_y + \tau_{23}\xi_z \\ \tau_{31}\xi_x + \tau_{32}\xi_y + \tau_{33}\xi_z \\ \beta_1\xi_x + \beta_2\xi_y + \beta_3\xi_z \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}_{\nu 2} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11}\eta_x + \tau_{12}\eta_y + \tau_{13}\eta_z \\ \tau_{21}\eta_x + \tau_{22}\eta_y + \tau_{23}\eta_z \\ \tau_{31}\eta_x + \tau_{32}\eta_y + \tau_{33}\eta_z \\ \beta_1\eta_x + \beta_2\eta_y + \beta_3\eta_z \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}_{\nu 3} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11}\zeta_x + \tau_{12}\zeta_y + \tau_{13}\zeta_z \\ \tau_{21}\zeta_x + \tau_{22}\zeta_y + \tau_{23}\zeta_z \\ \tau_{31}\zeta_x + \tau_{32}\zeta_y + \tau_{33}\zeta_z \\ \beta_1\zeta_x + \beta_2\zeta_y + \beta_3\zeta_z \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = \tau_{11}v_1 + \tau_{12}v_2 + \tau_{13}v_3 + \kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \beta_2 = \tau_{21}v_1 + \tau_{22}v_2 + \tau_{23}v_3 + \kappa \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \beta_3 = \tau_{31}v_1 + \tau_{32}v_2 + \tau_{33}v_3 + \kappa \frac{\partial T}{\partial z}$$

### 3.2.3 Favre 平均 Navier-Stokes 方程式

ここまでは通常の Navier-Stokes について基礎的な式変形を行ってきたが，本研究で扱う航空用エンジンファンの流れ場は乱流であると考えられ，その効果を含んだ解析を行うことが求められる．乱流とは流体が三次元的に乱れて運動する状態をいい，大きなスケールでの渦から粘性散逸のような小さなスケールの渦に至るまでの連続した渦を伴う流れである．このような変動成分により流れが「かき混ぜられ」るので，乱流は運動量，エネルギー，物質濃度に対して強い拡散効果を与え，層流に比べ境界層が厚くなったり，壁面付近の流速が大きくなることで壁面摩擦が増えて全圧損失が増えたり，境界層が剥離しにくくなったり，熱伝達が促進されたりする．

乱流の数値解析にあたり Navier-Stokes 方程式を直接解くには，乱流現象を正確に再現するために，流れ場と同じスケールの大きな渦から粘性散逸に至る小さな渦までを捕らえる必要がある．通常発達した乱流ではそれを構

成する渦の最小寸法はコルモゴロフ (Kolmogorov) スケールであるため、これを捕らえるには最小格子幅がその大きさよりも小さくなければならない。コルモゴロフスケールは

$$l_k = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (3.48)$$

で定義される量である。ここで  $\varepsilon$  は乱流エネルギー散逸、 $\nu$  は動粘性係数である。流れの代表速度を  $V$ 、代表長さを  $L$  とするとテイラーの評価により、乱流エネルギー散逸は、

$$\varepsilon = \frac{V^3}{L} \quad (3.49)$$

と表すことができ、

$$\frac{L}{l_k} = \left( \frac{VL}{\nu} \right)^{3/4} = Re^{3/4} \quad (3.50)$$

となる。ここで、代表長さを計算領域の最大幅程度で考えると、 $L/l_k$  は乱流を直接的に捕らえようとする場合の格子点数ということになる。よって、直接乱流を三次元解析しようとする、その格子点数はレイノルズ数の  $9/4$  乗よりも大きくする必要がある。例えば大型の航空用エンジンファンを想定し代表流速をマッハ 1.3 の  $V = 440[\text{m/s}]$ 、代表長さを翼端部翼弦長さとしておよそ  $L = 0.3[\text{m}]$ 、動粘性係数を  $\nu = 1.5 \times 10^{-5}[\text{m}^2/\text{s}]$  とすると、 $Re = 8.8 \times 10^6$  となり、 $4 \times 10^{15}$  もの格子点数が必要になってしまい現実的に解けるものではない。そのため乱流であるような流れ場を解く場合は、その乱流現象にモデル化を施し、格子幅をコルモゴロフスケールにまで下げることなく解く方法が考案されている。

翼列フラッター解析で解かれる時間スケールは翼振動周期の 10 倍程度、空間スケールはファン半周から全周である。そこで本研究では工学的に広く用いられているレイノルズ平均モデル (RANS, Reynolds Averaged Navier-Stokes equation) を用いる。RANS で用いられる基礎方程式は、Navier-Stokes 方程式にアンサンブル平均 (レイノルズ平均) を施すことで導かれる。しかし、密度が変化する場合にレイノルズ平均を施すと方程式の形が複雑になってしまい、乱流の効果をモデル化することが困難になるため、以下で定義される密度加重平均 (Favre 平均)

$$f = \tilde{f} + f'' \quad , \quad \tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho} \quad , \quad \overline{\rho f''} = 0 \quad , \quad \overline{f''} \neq 0 \quad (3.51)$$

が用いられる [60]。ここで、 $\tilde{\cdot}$  はアンサンブル平均、 $\tilde{\cdot}$  は密度加重平均、 $''$  は瞬時値の Favre 平均からのずれを表す。これらを用いて Navier-Stokes 方程式を変形する。ここでは簡単のためデカルト系におけるものをインデックス形式で示す。質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則はそれぞれ、

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \tilde{T}_{vij} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ - \bar{\rho} \tilde{v}_i'' \tilde{v}_j'' \right] \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{e}_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{h}_{\text{tot}} \tilde{v}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \tilde{T}_{vij} \tilde{v}_i \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ - \tilde{q}_j \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ - \bar{\rho} \tilde{v}_i'' \tilde{v}_j'' \tilde{v}_i \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ - \frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{v}_i'' \tilde{v}_i'' \tilde{v}_j'' \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ - \bar{\rho} \tilde{h}'' \tilde{v}_j'' \right] \quad (3.54)$$

となり、変動量が平均値に及ぼす影響が流束の形で出現する。これらを時間平均流れと付加的な変数からモデル化し、乱れの効果を考慮するものが乱流モデルである。

Eqn. (3.53) において移流項より生じた変動量のファール平均は、分子粘性応力に加えて生じている応力成分のように見えることからレイノルズ応力と呼ばれる、また、Eqn. (3.54) には、後に Eqn. (3.56) に示すように全エネルギーに乱れ成分のもつ運動エネルギー (乱流エネルギー) が加わり、さらにレイノルズ応力に平均流成分

が加わることで現れる仕事項，内部エンタルピーが変動流速に乗って輸送される項（乱流熱流束），変動速度の三重積成分が出現する．

以上の式では，粘性応力，熱流束に関するアンサンブル平均は近似的に次のように与えている．

$$\tilde{T}_{vij} = 2\mu \left( \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \delta_{i,j} \right), \quad \tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \right), \quad \hat{q}_j = -\kappa \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (3.55)$$

比全内部エネルギーおよび比全内部エンタルピーは次のように，変動成分に対する運動エネルギーを含むようになる．また理想気体の場合，アンサンブル平均された状態方程式は，

$$\tilde{e}_{\text{tot}} = C_v \tilde{T} + \frac{1}{2} \tilde{v}_i \tilde{v}_i + \frac{1}{2} \widetilde{v_i'' v_i''}, \quad \tilde{h}_{\text{tot}} = C_p \tilde{T} + \frac{1}{2} \tilde{v}_i \tilde{v}_i + \frac{1}{2} \widetilde{v_i'' v_i''}, \quad \bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \quad (3.56)$$

と，状態方程式の形を見るに，少なくとも理想ガスを対象とする範囲では，Favre 平均を施した際に，アンサンブル圧力はアンサンブル平均密度とファール平均温度で与えられるので，Navier-Stokes 方程式の形が乱れの影響を除いて  $(\rho, p, T, \mathbf{v}) \rightarrow (\bar{\rho}, \bar{p}, \tilde{T}, \tilde{\mathbf{v}})$  とすればそのまま踏襲されることがわかる．このように圧縮性 RANS では，実用上あまり意識されることはないが，解かれている変数ごとに平均化のされ方が異なっている．

### 3.3 固体の支配方程式

固体の運動を表現するために，先に導出した質量保存則および運動方程式を出発点とする．これらの基礎式と，変位境界条件および力学的境界条件を用いて，運動方程式と力学的境界条件に等価な仮想仕事原理を導出する [61]．

#### 3.3.1 仮想仕事式の導出

Lagrange 形式で書かれた変形前後における質量保存則，運動方程式はそれぞれ次で与えられる．

$$\rho dV_x = \rho_0 dV_X \quad (3.57)$$

$$\rho \mathbf{a} = \nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad T_{ij} = T_{ji} \quad (3.58)$$

応力場  $\mathbf{T}$  として，運動方程式の解となりうる応力場（可容応力場）を考える．すると， $\mathbf{T}$  は Eqn. (3.58) を満たすような応力場の集合であり，力の釣り合いが必ず満たされる．

次に，重み関数として任意のベクトル場  $\mathbf{w}$  を Eqn. (3.58) に内積した，

$$(\nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a})) \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (3.59)$$

も常に成り立つ．これを全領域で積分しても 0 である．第一項目の発散を書き換え，発散定理を用いて積分領域を変換すれば，

$$\int_{V_x} (\nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a})) \cdot \mathbf{w} dV_x = 0 \quad (3.60)$$

$$\int_{V_x} \nabla_x \cdot (\mathbf{T} \mathbf{w}) dV_x - \int_{V_x} \mathbf{T} : \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} dV_x + \int_{V_x} \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{w} dV_x = 0 \quad (3.61)$$

$$\int_{S_x} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \mathbf{w} dS_x - \int_{V_x} \mathbf{T} : \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} dV_x + \int_{V_x} \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{w} dV_x = 0 \quad (3.62)$$

左辺第二項は対称テンソル  $\mathbf{T}$  とのテンソル積なので，対称成分だけが残る

$$\int_{V_x} \mathbf{T} : \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial \mathbf{x}} \right] dV_x = \int_{S_x} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \mathbf{w} dS_x + \int_{V_x} \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{w} dV_x \quad (3.63)$$

となる．応力が釣り合い式を満たすものであれば，釣り合い式の任意の重み関数の重み付き残差も 0 であることがわかる．

重み関数  $w$  を，境界条件を満たし，領域中で十分滑らかな変位場（可容変位場） $u$  とする．このとき，重み付き残差式中の表面積分を，力学的境界条件部  $S_x^{t_0}$  と変位境界条件部  $S_x^{u_0}$  に分解して

$$\int_{V_x} T : \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^T}{\partial x} \right] dV_x = \int_{S_x} \mathbf{n} \cdot T u dS_x + \int_{V_x} \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \cdot u dV_x \quad (3.64)$$

$$\int_{V_x} T : \varepsilon dV_x = \int_{S_x^{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot u dS_x + \int_{S_x^{u_0}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_0 dS_x + \int_{V_x} \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \cdot u dV_x \quad (3.65)$$

ただし，最終行で，

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^T}{\partial x} \right] \quad (3.66)$$

が，微小歪テンソルであることを用いた．

Eqn. (3.65) は任意の可容応力場  $u$  について成り立つ．両辺の  $u$  に対する第一変分をとれば，変位境界条件部は積分区間不変かつ  $\delta u = 0$  であるから消滅し，

$$\int_{V_x} T : \delta \varepsilon dV_x = \int_{S_x^{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \delta u dS_x + \int_{V_x} \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \cdot \delta u dV_x, \quad \delta \varepsilon = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta u)^T}{\partial x} \right] \quad (3.67)$$

が任意の可容変位場  $\delta u$  について成り立つ．これの左辺は内部応力  $T$  と仮想変位  $\delta \varepsilon$  のする仕事を，右辺は外力と慣性力のする仮想仕事を表しており，これらが常に等しいことを意味している．逆に，任意のベクトル場  $\delta u$  に対し Eqn. (3.67) が成立するとき，これまでの式変形を逆にたどってゆくと，運動方程式および力学的境界条件に帰着することが示せる．即ち Eqn. (3.67) と運動方程式は等価である．したがって，仮想仕事式を離散化し，近似解を求めることは，運動方程式の近似解を求めていることと同等である．

### 3.3.2 応力-歪関係式（構成式）

Eqn. (3.67) は現在配置で書かれた仮想仕事式である．微小変形理論を使えば，固体の基礎式としてこれを直接適用することができ，有限要素法による固体の解析に一般的に用いられる．微小変形理論に基づく定式化においては，物体の変形を無視し，空間微分に関して現在配置と基準配置を同一視したうえ， $V_x$  の定義域が不変であるという仮定を置く．この仮定と，Lame の定数を用いた線形弾性体の応力-歪関係式（構成則）を用いれば，Eqn. (3.67) を直接有限要素分割することができる．

しかし，微小変形理論は，定式化上変形に伴う内部応力による剛性変化を考慮することができない．内部応力による剛性変化を扱う際，初期応力場を仮定し，応力-歪関係式を書き換えることで対応することができるが，変形とそれに伴う応力を必ずしも適切に評価できるわけではない．

さらに固体の変形として回転変形を含む場合に，体積や表面積が非物理的に増大する．そのため，本研究のように，回転機械に遠心力や空気力が作用した状態における力学的平衡点やそのまわりの微小振動に着目する場合，微小変形理論に基づく固体ソルバを適用することはできない．

弾性変形範囲の金属材料など，比較的小さい歪の範囲で弾性変形を解析する場合，応力-歪関係式（構成則）にサンブナン-キルヒホッフ体の構成則を用いる事が多い．

これは，基準配置で表された歪テンソルである第二ピオラ-キルヒホッフ応力テンソル  $S$  と，Green-Lagrange 歪  $E$  が等方的な線形の関係式で結ばれるものであり，微小変形の線形弾性体を有限変形に拡張したものであると考えられる．

サンブナン-キルヒホッフ体の構成則は  $S_{ij}, E_{ij}$  に対し次で与えられる．ここに， $\lambda, \mu$  は弾性定数であるラメの定数， $E, \nu$  はそれぞれヤング率，ポアソン比である．

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 2\mu & 2\mu & & & \\ 2\mu & \lambda + 2\mu & 2\mu & & & \\ 2\mu & 2\mu & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.68)$$

微小歪  $\varepsilon$ ，Green-Lagrange 歪  $E$  は Eqn. (3.69) で表される．微小歪を構成式に用いた有限要素解析では，応力が変位に対して線形になり，回転変形は回転角が微小な範囲としてしか評価されないことから，変形が大きくなった際に非物理的な挙動（体積増加など）が顕著になる．しかしながら，Green-Lagrange 歪には変位に対して 2 次の項が入っており，連続体の「伸び」が，変形が大きい際にもより正しい形で評価される．このように，変形が大きい場合には歪の評価において変形に対して幾何的な非線形性を考慮することが必要になってくる．

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right], \quad E = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \quad (3.69)$$

### 3.3.3 仮想仕事式の基準配置への書き換え

さて，Eqn. (3.67) の仮想仕事式は現在表示で書かれているが，前述のサンブナン-キルヒホッフ体の構成式を用いて固体の解析を行う際には， $S, E$  が陽に現れるように仮想仕事原理を書き換えるとその後の定式化がしやすい．

表示の書き換えは，空間微分を定義する座標系を現在表示から基準表示に変換することで行われる．基準表示の座標  $\mathbf{X}$ （変形前状態）と現在表示の座標  $\mathbf{x}$ （変形後状態）の間に変位  $\mathbf{u}$  を介して成り立つ関係は，

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u} \quad (3.70)$$

である．配置の変換に用いる行列は変形勾配テンソル  $F$  といい，座標値をそれぞれの座標で空間微分した量として，以下のように表わされる．

$$F \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = I + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}, \quad F^{-1} \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = I - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.71)$$

これらの変分はそれぞれ，基準表示の変位勾配を用いて次のように書ける．

$$\delta \varepsilon = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right] \quad (3.72)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} F^{-1} + F^{-T} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right] \quad (3.73)$$

$$\delta E = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \quad (3.74)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + I \right)^T \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + I \right) \right] \quad (3.75)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ F^T \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T F \right] \quad (3.76)$$

より，微小歪  $\delta \varepsilon$  と Green-Lagrange 歪  $\delta E$  の変分の間に成り立つ関係は，次のようになる．

$$\delta \varepsilon = F^{-T} \delta E F^{-1} \quad (3.77)$$

これを用いて Eqn. (3.67) 式左辺の積分変数を基準表示に書き換えると、内力の仮想仕事は第二ピオラ-キルヒホッフ応力  $S$  と Green-Lagrange 歪の変分  $\delta E$  のスカラー積で表せる。

$$\int_{V_x} T : \delta \varepsilon dV_x = \int_{V_X} T : F^{-T} \delta E F^{-1} J dV_X \quad (3.78)$$

$$= \int_{V_X} J F^{-1} T F^{-T} : \delta E dV_X \quad (3.79)$$

$$= \int_{V_X} S : \delta E dV_X \quad , \quad S = J F^{-1} T F^{-T} \quad (3.80)$$

$S, E$  は共に対称テンソルで、次のようなベクトル表示をすると、スカラー積を計算するときや有限要素法の各マトリクスを構成するとき、マトベク操作を利用して都合が良い。

$$S \rightarrow \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{22} & S_{33} & S_{12} & S_{23} & S_{31} \end{bmatrix}^T \quad (3.81)$$

$$E \rightarrow \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{22} & E_{33} & 2E_{12} & 2E_{23} & 2E_{31} \end{bmatrix}^T \quad (3.82)$$

$$S : E = S_{ij} E_{ij} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \quad (3.83)$$

同様に表面力・体積力も積分変数を変換し、基準表示の仮想仕事式が得られる。本研究では流体-構造連成を行い、流体ソルバから受け取る表面力が現在表示であるため、表面力については現在表示として取り扱っている。体積力・慣性力は基準表示で評価している。しかし元はどの項も Eqn. (3.67) の積分変数を変換しただけなので、見かけ上式が違うように見えるだけである。

### 3.3.4 固体の基礎式のまとめ

以上をまとめ、本研究で用いる固体の基礎式を次に書き下しておく。幾何非線形有限要素法による変形解析では、現在表示の Eqn. (3.67) を直接解き、空間微分に用いる座標値  $x$  を更新しながら問題を解く方法を Updated Lagrange 法といい、一方で空間微分に用いる座標値を更新しなくて良い、基準表示の Eqn. (3.84) を用いて問題を解く方法を Total Lagrange 法という。これらどちらの定式化を用いても、同一の構成式を用い、変形勾配による座標変換を介していれば同じ解析が可能だが、本研究では構成式が基準表示で与えられるため、直感的で理解しやすい Total Lagrange の形式を採用する。

$$\int_{V_X} \rho_0 \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} dV_X + \int_{V_X} S : \delta E dV_X = \int_{S_x^{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS_x + \int_{V_X} \rho_0(\mathbf{g}) \cdot \delta \mathbf{u} dV_x \quad (3.84)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 2\mu & 2\mu & & & \\ 2\mu & \lambda + 2\mu & 2\mu & & & \\ 2\mu & 2\mu & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.85)$$

## 3.4 3 章のまとめ

本章では、連続体の運動の原理である質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則を出発点とし流体・固体それぞれの数値解析法で用いられる基礎方程式について説明した。

流体においては有限体積法で離散化することを念頭に置き，運動する一般曲線座標系における圧縮性 Navier-Stokes 方程式と，乱流モデルを使用することから圧縮性 RANS を導出し，乱流の効果によって新たに加えられる項を示した．

固体の解析においては有限要素法による離散化を行うことから，等方弾性体の仮想仕事式の導出を行った．

こうして列挙された基礎式たちを見ると，3 つの基礎的な運動法則が，解析対象や離散化手法，用いられる座標系によって様々に表現されて用いられていることに改めて気づくことができ，本研究で用いられない表現も含めて多種多様な世界観があることを感じられて非常に興味深い．

## 第 4 章 数值解析手法

## 4.1 流体の数値解析法

### 4.1.1 有限体積法

空間をセルと呼ばれる有限個の体積領域に分割し，それぞれのセルの中の保存量の空間平均値の変化を，セル表面を介して流入出する保存量の総和を求めることで，流体の流れ場や時間発展を数値的に求める方法を有限体積法と呼ぶ．

前章で導出した圧縮性流体の保存型の基礎方程式の各項が，セル境界における流束を表しており，有限体積法による定式化は基礎方程式の形に適したものである．

各項は時間項，非粘性流束項，粘性流束項，外力項に分けられる．これらの各項の評価法について順次述べ，最後に時間進行法について述べる．

### 有限体積的離散化の概要

セルを，一般曲線座標系上で  $\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1$  の領域に取る．支配方程式 Eqn. (3.51) を一般曲線座標系上の微小体積  $d\xi d\eta d\zeta$  で積分し，流束部分を発散定理で面積分に置き換えれば次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \hat{Q} d\xi d\eta d\zeta &= \int \hat{S} d\xi d\eta d\zeta - \int (\hat{E}_1 - \hat{E}_{\nu 1})_{\xi=i+\frac{1}{2}} d\eta d\zeta + \int (\hat{E}_1 - \hat{E}_{\nu 1})_{\xi=i-\frac{1}{2}} d\eta d\zeta \\ &\quad - \int (\hat{E}_2 - \hat{E}_{\nu 2})_{\eta=j+\frac{1}{2}} d\zeta d\xi + \int (\hat{E}_2 - \hat{E}_{\nu 2})_{\eta=j-\frac{1}{2}} d\zeta d\xi \\ &\quad - \int (\hat{E}_3 - \hat{E}_{\nu 3})_{\zeta=j+\frac{1}{2}} d\xi d\eta + \int (\hat{E}_3 - \hat{E}_{\nu 3})_{\zeta=j-\frac{1}{2}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.1)$$

外力・生成項  $\hat{S}$  をセル中心における値とセル体積，セル境界値における流束を，面中心の値と表面積で評価した一点積分

$$\int \phi d\xi d\eta d\zeta = \phi_{i,j,k}, \quad \int \phi_{\xi=i+\frac{1}{2}} d\eta d\zeta = \phi_{i+\frac{1}{2},j,k}, \quad \int \phi_{\eta=j+\frac{1}{2}} d\zeta d\xi = \phi_{i,j+\frac{1}{2},k}, \quad \int \phi_{\zeta=j+\frac{1}{2}} d\xi d\eta = \phi_{i,j,k+\frac{1}{2}}$$

で評価すれば，セル平均値  $\phi_{i+\frac{1}{2}}$  の時間発展について以下の離散化式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{Q} = \hat{S}_{i,j,k} - (\hat{E}_1 - \hat{E}_{\nu 1})_{i+\frac{1}{2},j,k} + (\hat{E}_1 - \hat{E}_{\nu 1})_{i-\frac{1}{2},j,k} \quad (4.2)$$

$$- (\hat{E}_2 - \hat{E}_{\nu 2})_{i,j+\frac{1}{2},k} + (\hat{E}_2 - \hat{E}_{\nu 2})_{i,j-\frac{1}{2},k} \quad (4.3)$$

$$- (\hat{E}_3 - \hat{E}_{\nu 3})_{i,j,k+\frac{1}{2}} + (\hat{E}_3 - \hat{E}_{\nu 3})_{i,j,k-\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

これらの各項を何らかの方法を用いて評価することで，セル内への保存量の流入出を近似的に求めることができる．

### 有限体積法におけるヤコビアンとメトリックの評価

有限体積的離散化に基づき，体積分と面積分をセル中心・セル表面中心の値を用いた一点積分で近似するとき， $\hat{E}$ ,  $\hat{E}_{\nu}$  などに出現する空間メトリクスは，デカルト系と一般曲線座標系における微小体積の関係式 Eqn. (3.26)，微小面積の関係式 Eqn. (3.29) より，セル体積  $\Delta V$ ，セル各表面の面積ベクトル  $\Delta S_{\xi}$ ,  $\Delta S_{\eta}$ ,  $\Delta S_{\zeta}$  を用いて次のように評価すれば良い．

$$\frac{1}{J} = \Delta V, \quad \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{bmatrix} = \Delta S_{\xi}, \quad \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{bmatrix} = \Delta S_{\eta}, \quad \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ \zeta_z \end{bmatrix} = \Delta S_{\zeta}, \quad (4.5)$$

移動格子法を用いてセルを運動させるとき，ヤコビアンやメトリクスはセルの運動に起因する誤差を排除するように適切に評価しなくてはならない．ヤコビアン，メトリクスに関して解析的に成り立つ性質として，体積保存則 (Geometric conservation law, GCL) と面積保存則 (Surface conservation law, SCL) があり，CFD で得られた解が格子によって歪められず，一様流が保存するような条件が存在する．このような解析的に成り立っている関係が離散的にも満たされるような離散化が，CFD で良い解を得るために要求される．まずメトリクスに関しては，運動量保存則で一様圧力に対して  $v = 0$  が維持される条件として，SCL

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} \xi_x/J \\ \xi_y/J \\ \xi_z/J \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \eta} \begin{bmatrix} \eta_x/J \\ \eta_y/J \\ \eta_z/J \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \begin{bmatrix} \zeta_x/J \\ \zeta_y/J \\ \zeta_z/J \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

が必要になる．ここでメトリクスにかかっている空間微分項の離散化は流束の離散化と同じで，セル中心における幅 1 の中心差分である．また，セルの運動に伴って生じる反変速度成分 Eqn. (3.29) (メトリクス時間項とも言う) の評価法を有限体積的に行うことで，セルの運動に同期して生じる誤差を打ち消し，一様流を保存するようなスキームを作ることができる．これは，計算領域中の体積が保存するという GCL 条件

$$\frac{\partial}{\partial t_x} \int dV_x = \int \hat{v} \cdot d\mathbf{S}_x \rightarrow \frac{\partial}{\partial t_x} \frac{1}{J} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_t}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_t}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_t}{J} \right) = 0 \quad (4.7)$$

に基づき，有限体積的に格子の運動を評価するものである．GCL 条件は，まず時間方向に 2 点を取ったスキーム (BDF2) の場合は， $n+1$  と  $n$  の 1 timestep 間にセルが格子線方向に膨らんだ体積を  $V_\xi^{n+1,n}$ ,  $\Delta V_\eta^{n+1,n}$ ,  $\Delta V_\zeta^{n+1,n}$  として，

$$\frac{\xi_t}{J} = -\frac{\Delta V_\xi^{n+1,n}}{\Delta t}, \quad \frac{\eta_t}{J} = -\frac{\Delta V_\eta^{n+1,n}}{\Delta t}, \quad \frac{\zeta_t}{J} = -\frac{\Delta V_\zeta^{n+1,n}}{\Delta t} \quad (4.8)$$

と評価することで一様流が保存することが知られている．

本研究の翼振動計算で用いた時間方向三点後退スキーム (BDF3) に対しては，ここで求めた BDF2 に対する評価法を組み合わせることで一様流の保存するスキームを作ることができる．これは，GCL 条件 Eqn. (4.7) の時間項に三点後退スキームを適用し，1step 間の体積変化にてまとめ式

$$\frac{1}{2\Delta t} \left[ 3 \left( \frac{1}{J} \right)^{n+1} - 4 \left( \frac{1}{J} \right)^n + 1 \left( \frac{1}{J} \right)^{n-1} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_t}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_t}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_t}{J} \right) = 0 \quad (4.9)$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{3\Delta V_\xi^{n+1,n}}{2\Delta t} - \frac{\Delta V_\xi^{n,n-1}}{2\Delta t} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_t}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_t}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_t}{J} \right) = 0 \quad (4.10)$$

の形から，体積変化に関して同様の差分評価になるよう，Eqn. (4.8) を次のようにして組み合わせるとメトリクス時間項を評価することで，BDF3 でも一様流を保存するスキームを作ることができる．

$$\frac{\xi_t}{J} = -\frac{3\Delta V_\xi^{n+1,n} - \Delta V_\xi^{n,n-1}}{2\Delta t}, \quad \frac{\eta_t}{J} = -\frac{3\Delta V_\eta^{n+1,n} - \Delta V_\eta^{n,n-1}}{2\Delta t}, \quad \frac{\zeta_t}{J} = -\frac{3\Delta V_\zeta^{n+1,n} - \Delta V_\zeta^{n,n-1}}{2\Delta t} \quad (4.11)$$

#### 4.1.2 非粘性項の評価

非粘性項の数値流束は，圧縮性流れの数値計算法として古くから様々なものが提案されてきた．これらの多くは，セル表面におけるリーマン問題を近似的に解くことで流束を評価するものであり，代表的なものに Roe の FDS (Flux Difference Splitting) [62]，Van Leer に代表される FVS (Flux Vector Splitting) [63] などが挙げられる．

FVS の改良版として Liou らによって提案された AUSM (Advection Upstream Splitting Method) [64] は，流束による対流と圧力の項の風上化を分離して考えるもので，演算量を抑え，FVS より数値粘性が低く堅牢であるが，衝撃波付近でオーバーシュートするという欠点を持っている．AUSM の派生型としてこの欠点が改良されたものなどが種々提案されており，広く用いられている．

本研究では、その 1 つであり嶋らによって開発された Simple High-resolution Upwind Scheme (SHUS)[65] を用いた。SHUS は、圧力項の評価と移流項の評価を分離する AUSM の考え方を踏襲し、圧力項に FVS 法に基づく評価を、移流項の質量流束に対して Roe の FDS の考え方に基づく風上化を施して非粘性流束を評価するものである。特徴として、移流項が Roe スキームに由来することから Lax-Friedrichs スキームや FVS のように数値粘性が過剰でないこと、計算量が低く実装が容易である点が挙げられる。近年では SHUS の派生版として、低マッハ数流れにおいて過剰に数値粘性が作用することを抑制した Low-speed SHUS や、その改良版の全速度スキームで、数値粘性をコントロールするカットオフマッハ数が不要である Simple Low-dissipation AUSM (SLAU) [66] などが提案され続けている。

対流項の風上化は、質量流束  $m = \rho V$  で代表させられる。これを用いて、数値流束は

$$\hat{E} = \frac{1}{J}(m\phi + p_{\frac{1}{2}}N), \quad \phi = \begin{bmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ h \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \\ -\xi_t \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

と書ける。 $m\phi$  は質量流束によって運ばれる量であり、 $h$  は単位質量当たりの全エンタルピである。また  $N$  の 2 ~ 4 行目の成分は法線ベクトルであり、この項が圧力の寄与を表している。5 行目の成分は、圧力のセル境界でする仕事を、移流項のエンタルピに含ませたことにより格子が移動する際に副次的に生じる項である。

$p_{\frac{1}{2}}$  はセル境界における圧力の混合で、FVS にならいセル境界左右におけるマッハ数  $M_{\pm}$  を用いて、

$$p_{\frac{1}{2}} = \beta_+ p_+ + \beta_- p_- \quad (4.13)$$

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{4}(2 \mp M_{\pm})(M_{\pm} \pm 1)^2 \quad \text{if } -1 < M_{\pm} < 1 \quad (4.14)$$

$$\beta_+ = 1, \quad \beta_- = 0 \quad \text{if } M_{\pm} > 1 \quad (4.15)$$

$$\beta_+ = 0, \quad \beta_- = 1 \quad \text{if } M_{\pm} < -1 \quad (4.16)$$

と書ける。こうして評価される圧力項には、嶋らは極超音速ジェットで不安定性が生じるために付加的な修正が必要かも知れないと述べている。そのような付加的な修正項は数値粘性のかたちで流束評価に導入されるが、安易な導入は不必要な拡散数の増大につながり、安定な時間進行の妨げとなってしまうため、陰解法や時間進行法に若干の工夫が必要になると思われる。本研究ではマッハ数はおおまかに言って 2 以下の流れを対象としているため、そのような修正は用いなかった。

次に質量流束は、Roe の FDS にならい次のように評価される。密度差、速度差、圧力差がかかっている項が数値粘性であり、これらの係数として基本変数  $\rho, v, p$  に基づく流束ヤコビアン行列を風上化した際に現れるものが用いられていることが、Roe スキームに由来しているとされる所以であると思われる。

$$m = \frac{1}{2} \left[ (\rho V)_+ + (\rho V)_- - |\bar{V}| \Delta \rho - \frac{|\bar{M} + 1| - |\bar{M} - 1|}{2} \bar{\rho} \Delta V - \frac{|\bar{M} + 1| + |\bar{M} - 1| - 2|\bar{M}|}{2} \frac{\Delta p}{\bar{c}} \right] \quad (4.17)$$

$$\bar{M} = \frac{\bar{V}}{\bar{c}}, \quad \bar{V} = \frac{V_+ + V_-}{2}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_+ + \rho_-}{2} \quad (4.18)$$

$\Delta$  はセル境界を挟んだ左右の量の差分 ( $\Delta q = q_+ - q_-$ ) を表す。 $\bar{c}$  は音速の平均値である。スキームは音速の平均値に鈍感であるので、ここでは下のようにした。

$$\bar{c} = \sqrt{\gamma \frac{p_+ + p_-}{\rho_+ + \rho_-}} \quad (4.19)$$

## 高次精度化 (MUSCL 補間)

有限体積法では、セル平均量のみを計算時に保持しているため、セル内での物理量の空間分布の情報は消えてしまう。そのような場合には、セル内の量の分布にある関数形状を仮定してセル境界における物理量のよい推定値を与えることで、空間精度を向上させることができる。

セル  $i$  内の物理量  $q$  に対し、セル中心  $x_i$  まわりでテイラー展開を施せば、

$$q(x) = q(x_i) + (x - x_i) \frac{dq}{dx}(x_i) - \frac{1}{2}(x - x_i)^2 \frac{d^2q}{dx^2}(x_i) + O(\Delta x^3) \quad (4.20)$$

となる。これに対し、 $q$  のセル平均、勾配のセル平均、2 次導関数のセル平均をそれぞれ求めれば、次のようになる。

$$q_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_i + \frac{1}{2}\Delta x} q(x) dx = q(x_i) - \frac{1}{24} \Delta x^2 \left( \frac{d^2q}{dx^2}(x_i) \right)^2 + O(\Delta x^3) \quad (4.21)$$

$$q_{x\ i} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_i + \frac{1}{2}\Delta x} \frac{dq}{dx} dx = \frac{dq}{dx}(x_i) + O(\Delta x^2) \quad (4.22)$$

$$q_{xx\ i} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_i + \frac{1}{2}\Delta x} \frac{d^2q}{dx^2} dx = \frac{d^2q}{dx^2}(x_i) + O(\Delta x^2) \quad (4.23)$$

Eqn. (4.20) のセル中心値、セル中心導関数をこれらで置き換えて次式を得る。

$$q(x) = q_i + (x - x_i) q_{x\ i} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta x^2}{12} - (x - x_i)^2 \right] q_{xx\ i} + O(\Delta x^3) \quad (4.24)$$

勾配のセル平均、2 次導関数のセル平均を、セル平均  $q_i$  の差分で

$$q_{x\ i} = \frac{q_{i+1} - q_i}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad \Delta q = q_{i+1} - q_i \quad (4.25)$$

$$q_{xx\ i} = \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x), \quad \Delta^2 q = q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1} \quad (4.26)$$

と近似すれば、最終的に以下に示すセル内部の物理量分布の近似式を得る。

$$q(x) = q_i + \frac{(x - x_i)}{2\Delta x} \Delta q + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{12} - \frac{(x - x_i)^2}{\Delta x^2} \right] \Delta^2 q + O(\Delta x^3) \quad (4.27)$$

また、より一般的な差分の形を考え、パラメタ  $\kappa$  を用いて Eqn. (4.27) を表せば、

$$q(x) = q_i + \frac{(x - x_i)}{2\Delta x} \Delta q + \frac{3\kappa}{2} \left[ \frac{1}{12} - \frac{(x - x_i)^2}{\Delta x^2} \right] \Delta^2 q + O(\Delta x^3) \quad (4.28)$$

$\kappa = \frac{1}{3}$  でセル内物理量分布が 3 次精度で補間される。Eqn. (4.28) から、セル境界値  $q_-, q_+$  が、隣接セル平均値差分  $\Delta_+ = q_{i+1} - q_i, \Delta_- = q_i - q_{i-1}$  を用いて以下のように求まる。

$$(q_-)_{i+\frac{1}{2}} = q_i + \left[ \frac{1}{4} \{ (1 - \kappa) \Delta_- + (1 + \kappa) \Delta_+ \} \right]_i \quad (4.29)$$

$$(q_+)_{i+\frac{1}{2}} = q_{i+1} - \left[ \frac{1}{4} \{ (1 + \kappa) \Delta_- + (1 - \kappa) \Delta_+ \} \right]_{i+1} \quad (4.30)$$

TVD 性を確保するため、流束制限関数として Minmod リミターおよび Van Albada の制限関数 [67] を用いた。Van Albada の制限関数を用いたセル境界値は、次で表される。

$$(q_-)_{i+\frac{1}{2}} = q_i + \left[ \frac{s}{4} \{ (1 - s\kappa) \Delta_- + (1 + s\kappa) \Delta_+ \} \right]_i \quad (4.31)$$

$$(q_+)_{i+\frac{1}{2}} = q_{i+1} - \left[ \frac{s}{4} \{ (1 + s\kappa) \Delta_- + (1 - s\kappa) \Delta_+ \} \right]_{i+1} \quad (4.32)$$

$$s = \frac{2\Delta_+ \Delta_- + \varepsilon_i}{\Delta_+^2 + \Delta_-^2 + \varepsilon_i}, \quad \varepsilon_i = 10^{-15} \quad (4.33)$$

### 4.1.3 粘性項および拡散項の評価

粘性項は，粘性応力をセルの各表面において求め，セルになされる力積および仕事を求めることで評価される．構造格子を用いてセル中心のみ物理量を持つ場合，セル表面における諸量を何らかの方法で推定する必要がある．

粘性応力テンソルと，それによりセル表面から流入する運動量・エネルギー流束を改めて書き下すと次式のようになる．

$$T_\nu = 2\mu \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] - \frac{2}{3} \mu (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) I, \quad \hat{\mathbf{E}}_{\nu i} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \xi_{i,j} \\ \tau_{2j} \xi_{i,j} \\ \tau_{3j} \xi_{i,j} \\ \xi_{i,k} \tau_{kj} v_j \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

セルの各表面で応力テンソルを求めるとき，速度の空間勾配および発散を求める必要がある．例えば  $\xi$  方向の  $i + \frac{1}{2}$  面における速度勾配は，

$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \chi} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (4.35)$$

と，連鎖則を用いて一般曲線座標系上の微分とメトリクスを用いて記述することができる．セル表面におけるメトリクスは，そこで定義されているものはそのまま用い，定義点が異なるものは内挿により求める．また，セル境界において一般曲線座標系上における速度勾配を求める．このようにして粘性応力テンソルと流束が計算できる．

まず，一般曲線座標系上の各方向の微分は，各座標方向における幅 1 の二次精度中心差分とを用いる．定義点が差分される点にない場合には，周囲の値からの内挿値を用い，

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi}_{i+\frac{1}{2},j,k} \simeq \frac{\mathbf{v}_{i+1,j,k} - \mathbf{v}_{i,j,k}}{\Delta \xi} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta}_{i+\frac{1}{2},j,k} \simeq \frac{\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}{\Delta \eta} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \zeta}_{i+\frac{1}{2},j,k} \simeq \frac{\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta \zeta} \quad (4.38)$$

と評価できる．Eqn. (4.36) の  $\xi$  方向の微係数に対しては，中心差分によりセル中心の値を用いることができるから，式通りに評価すればよい．また，メトリクスはセル表面の値を持っているので，それを使えば良い．

Eqn. (4.37), Eqn. (4.38) に関しては， $\eta, \zeta$  方向の微係数に対しては， $i + \frac{1}{2}$  点上の値をソルバが持たないので，この通りに計算できない．そこで， $i + \frac{1}{2}$  点上の値を周囲のセルの値から内挿を行う．

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} &\simeq \frac{\mathbf{v}_{i+1,j+\frac{1}{2},k} + \mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{2} \\ &\simeq \frac{\mathbf{v}_{i+1,j+1,k} + \mathbf{v}_{i+1,j,k} + \mathbf{v}_{i,j+1,k} + \mathbf{v}_{i,j,k}}{4} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} &\simeq \frac{\mathbf{v}_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} + \mathbf{v}_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{2} \\ &\simeq \frac{\mathbf{v}_{i+1,j,k+1} + \mathbf{v}_{i+1,j,k} + \mathbf{v}_{i,j,k+1} + \mathbf{v}_{i,j,k}}{4} \end{aligned} \quad (4.40)$$

このように， $\xi$  方向の面で差分を求めるには，

- $\xi$  方向差分：  $\xi$  方向に幅 1 の差分
- $\eta$  方向差分：  $\xi$  方向に幅 1 の内挿  $\eta$  方向に，幅 1 の内挿  $\eta$  方向に，幅 1 の差分
- $\zeta$  方向差分：  $\xi$  方向に幅 1 の内挿  $\zeta$  方向に，幅 1 の内挿  $\zeta$  方向に，幅 1 の差分

の順序で、内挿と差分を行えば良い。また、他の面においても  $\xi, \eta, \zeta$  を順番に入れ替えて読み替えれば同様である。プログラミング上は、内挿・差分のサブルーチンを予め作っておき、各変数に対して順番に適用するようにすると保守や派生版（乱流モデル部分など）、高精度差分版の作成が容易になる。

同様に、セル表面におけるヤコビアン、メトリクスも計算することができる。

$$\left(\frac{1}{J}\right)_{i+\frac{1}{2},j,k} \simeq \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{J}\right)_{i+1,j,k} + \left(\frac{1}{J}\right)_{i,j,k} \right] \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\eta_{x_m}}{J}\right)_{i+\frac{1}{2},j,k} &\simeq \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\eta_{x_m}}{J}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + \left(\frac{\eta_{x_m}}{J}\right)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right] \\ &\simeq \frac{1}{4} \left[ \left(\frac{\eta_{x_m}}{J}\right)_{i+1,j+\frac{1}{2},k} + \left(\frac{\eta_{x_m}}{J}\right)_{i,j+\frac{1}{2},k} + \left(\frac{\eta_{x_m}}{J}\right)_{i+1,j-\frac{1}{2},k} + \left(\frac{\eta_{x_m}}{J}\right)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\zeta_{x_m}}{J}\right)_{i+\frac{1}{2},j,k} &\simeq \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\zeta_{x_m}}{J}\right)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\zeta_{x_m}}{J}\right)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \right] \\ &\simeq \frac{1}{4} \left[ \left(\frac{\zeta_{x_m}}{J}\right)_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\zeta_{x_m}}{J}\right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\zeta_{x_m}}{J}\right)_{i+1,j,k-\frac{1}{2}} + \left(\frac{\zeta_{x_m}}{J}\right)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

$(m = 1, 2, 3)$

これらの近似は全て二次精度の内挿と差分であるから、セル表面における応力テンソルが 2 次精度で求まる。

また、熱流束についても同様の方法でセル表面における温度勾配を求めている。粘性応力がする仕事についても、セル表面速度を幅 1 の内挿として評価すれば、仕事に関しても 2 次精度となる。

#### 4.1.4 変数変換

本計算コードでは  $\rho, \rho v, e$  の保存量ではなく  $v, p, T$  の基本量を変数としている。そのため、保存量の増減を基本量の増減に変数変換する必要がある。これには保存量、基本量間の微小変化量に関する変数変換行列を用いることで対応している。また、この変数変換行列を音速に関して修正することで、低マッハ数流れにおける収束性を改善する技法である前処理法を導入することができる。しかし、本コードでは圧縮性コードの収束性が大きく悪化するほどの低マッハ数の流れ（およそ  $M = 0.05$  以下が目安）は対象としていないため、前処理法は用いない。そのため主に変数変換について以下説明する。

圧縮性流体の数値解析法としては、粘性・非粘性を問わず、特性速度を元に移流を扱うのが一般的である。この方法は広範なレイノルズ数領域で有効であるが、流体の音速に対して流速が非常に遅い非圧縮性に近い流れに対して圧縮性コードを扱おうとすると、特性速度の差が大きくなることに起因し計算が収束しにくくなったり、解に非物理的な振動が現れたりすることが知られている。この問題を解決するための方法として、前処理法 [68] がある。前処理法は、擬似音速を導入することで基礎方程式の固有値を操作し、特性速度を移流速度と同程度にする手法である。

変数変換は、独立変数を一般曲線座標系における保存量  $\hat{Q}$  から  $\tilde{Q}$  に変更することで行われる。

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho & \rho u & \rho v & \rho w & \rho(e + \phi) \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} p & v_1 & v_2 & v_3 & T \end{bmatrix}^T \quad (4.44)$$

簡単のため、Euler 方程式で説明する。時間微分項が次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}_i}{\partial \xi_i} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tilde{Q}} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}_i}{\partial \xi_i} = \mathbf{0} \quad (4.45)$$

ここで出現する，保存量の微小変化と基本量の微小変化を結ぶ関係式が前処理行列  $\Gamma$  とその逆行列であり，

$$\Gamma = \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tilde{Q}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p v_1 & \rho & 0 & 0 & \rho_T v_1 \\ \rho_p v_2 & 0 & \rho & 0 & \rho_T v_2 \\ \rho_p v_3 & 0 & 0 & \rho & \rho_T v_3 \\ \rho_p h_{\text{tot}} + \rho h_p - 1 & \rho v_1 & \rho v_2 & \rho v_3 & \rho_T h_{\text{tot}} + \rho h_T \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\Gamma^{-1} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \hat{Q}} = J \begin{bmatrix} [\rho h_T + \rho_T(h_{\text{tot}} - 2\phi)]/d & \rho_T v_1/d & \rho_T v_2/d & \rho_T v_3/d & -\rho_T/d \\ -v_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -v_2/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ -v_3/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ [(1 - \rho h_p) - \rho_p(h_{\text{tot}} - 2\phi)]/d & -\rho_p v_1/d & -\rho_p v_2/d & -\rho_p v_3/d & \rho_p/d \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$\phi = \frac{1}{2}(v_i v_i) \quad , \quad d = \rho_T + \rho(\rho_p h_T - \rho_T h_p) \quad , \quad (4.48)$$

である．ここで， $h_{\text{tot}}$  は比全エンタルピであることに注意されたい．

理想ガスの場合，状態方程式  $p = \rho RT$  および比エネルギー  $e = C_v T$ ，比エンタルピ  $h = C_p T$  に関する関係から，熱力学的諸量の導関数を計算できるから，以下の量たち

$$h_T = C_p \quad , \quad h_p = 0 \quad (4.49)$$

$$\rho_T = -\frac{p}{RT^2} \quad , \quad \rho_p = \frac{1}{RT} \quad (4.50)$$

を用いる．

前処理を用いるためには，パラメタ  $\theta$  を用いて  $\rho_p$  を置き換える．すると，音速に関する熱力学的関係式は次のように書き換えられる．

$$\frac{1}{U_r^2} = \rho_p + \frac{\rho_T(1 - \rho h_p)}{\rho h_T} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{1}{U_r^2} - \frac{\rho_T(1 - \rho h_p)}{\rho h_T} \quad (4.51)$$

$\frac{1}{U_r^2}$  を作為的に変更し，擬似音速を導入することで変換行列が前処理行列となる．擬似音速の導入によって特性速度が移流速度に近づき，低マッハ数の流れに圧縮性ソルバを用いることが可能になる．ただし陰解法に前処理法を用いる際には，陽的に評価する圧縮性流束についても通常の圧縮性流れ向けのスキームでなく All-speed Roe スキームや SLAU などの前処理を用いたものを使用すること，言い換えれば陰解法と前処理は数値粘性の選び方について両者が出来るだけ整合するように手法を選択することが望ましいと考えられている．

本研究で対象とした流れは主として  $M \geq 0.1$  以上であり，この領域で陰解法の収束に不具合は生じなかった．したがって前処理については使用せず，変数変換にのみ前処理行列を用いている．

さらに，後述の陰解法においては  $\Delta$  型のもの（1 反復内における増分量）を作業変数として取ることにより，保存型の方程式以外でも陰解法を構築することが可能となる．変換行列  $\Gamma$  を用い，基礎方程式の変換（前から  $\Gamma^{-1}$  をかける）および独立変数の基本量への変換（空間微分を受ける量について  $\hat{Q}$  から  $\tilde{Q}$  に書き換え）したとき，非粘性流束は

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \hat{E}_i}{\partial \xi_i} = \Gamma^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (A_i \hat{Q}) = B_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\tilde{Q}) \quad (4.52)$$

と書き換えられる．非保存型における流束ヤコビアン行列は，

$$B_i = \Gamma^{-1} A_i \Gamma = \Gamma^{-1} \frac{\partial \hat{E}_i}{\partial \tilde{Q}} \quad (4.53)$$

の関係から求めることができ、その形式は、

$$B_i = \begin{bmatrix} V_i & \rho^2 h_T \xi_{i,1}/d & \rho^2 h_T \xi_{i,2}/d & \rho^2 h_T \xi_{i,3}/d & 0 \\ \xi_{i,1}/\rho & V_i & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{i,2}/\rho & 0 & V_i & 0 & 0 \\ \xi_{i,3}/\rho & 0 & 0 & V_i & 0 \\ 0 & \rho(1 - \rho h_p) \xi_{i,1}/d & \rho(1 - \rho h_p) \xi_{i,2}/d & \rho(1 - \rho h_p) \xi_{i,3}/d & V_i \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$V_i = \xi_t + v_1 \xi_{i,1} + v_2 \xi_{i,2} + v_3 \xi_{i,3}, \quad d = \rho_T + \rho(\rho_p h_T - \rho_T h_p) \quad (4.55)$$

であり、後に述べる TCPGS 法ではこの流束ヤコビアン行列を用いている。

#### 4.1.5 時間進行法

時間進行法には、大きく分けて陽解法と陰解法という二種類の手法が存在し、計算対象に応じて使い分けられている。

偏微分方程式の数値計算における時間進行法とは、支配方程式と状態量を時間方向に離散化し、時間微分項を数値的に積分することで、過去の離散時間点における既知の状態量  $\hat{Q}^n, \hat{Q}^{n-1}, \dots$  などから、未来の解析対象時刻における未知の状態量  $\hat{Q}^{n+1}$  を求める手続きのことである。

陽解法とは、離散化方程式中の未知状態量  $\hat{Q}^{n+1}$  を既知状態量から直接求めることのできる方法であり、計算手続きが比較的単純なことからしばしば用いられる。しかしながら、計算が不安定になる場合もあり、特に移流を含む方程式に対しては、格子幅と移流速度の比  $\frac{c \Delta t}{\Delta x}$  が 1 を超えてはならないという制限 (CFL 条件) が存在する。

この条件のもとで時間刻み幅を大きく取るためには格子幅を大きく取ればよいが、本研究の対象となる回転機械などでは、翼面付近の境界層内においても計算格子を配置する必要があり、最小の格子幅を考えると  $\Delta x \sim 10^{-5} \sim 10^{-6}$  オーダーの格子幅が必要となってしまう。

陰解法とは、解析対象時刻において、状態量  $\hat{Q}^{n+1}, \hat{Q}^n, \hat{Q}^{n-1}, \dots$  たちが支配方程式を通じて成り立つべき関係式を元に、間接的に  $\hat{Q}^{n+1}$  を求める方法である。これに分類される方法は多くが陽解法より安定で、時間刻みを大きく取ることができる。中にはどのような時間刻み幅を取っても安定に計算が進められるものも存在する。陰解法による定式化は、Newton-Raphson 法などによる方程式の線形化を通じて、未知量  $\hat{Q}^{n+1}$  に関する大規模連立一次方程式を解くことに帰着する。

圧縮性流体の陰解法においては、計算負荷を軽減させ解の収束を早める為に、係数行列に対して近似因数分解や近似因子対角化などの処理が施される場合が多い。このような係数行列の構造を変化させる処理は、計算の精度を下げてしまうと指摘されている。

本研究ではそのスキームのうちの 1 つであり、山本らにより開発された前処理型 LU-SGS 法 [69] および嶋らにより開発された TCPGS 陰解法 [70] を独自に改変したものを用いた。また、時間進行中の解の質を高めるために、増分型の定式化による反復解法を用いている。これらについて以下説明する。

#### 陰解法の定式化と増分型解法

Eqn. (3.51) が解析対象時刻の  $n+1$  タイムステップで成り立っていると考える。

$$\left( \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right)^{n+1} + \left( \frac{\partial \hat{E}_i - \hat{E}_{\nu i}}{\partial \xi_i} \right)^{n+1} = (\hat{S})^{n+1} \quad (4.56)$$

$$\Leftrightarrow \hat{R} = (\hat{S})^{n+1} - \left[ \left( \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right)^{n+1} + \left( \frac{\partial \hat{E}_i - \hat{E}_{\nu i}}{\partial \xi_i} \right)^{n+1} \right] = 0 \quad (4.57)$$

$\hat{R}$  は残差で，解析対象時刻における保存則の満たされ度合いを表す． $\hat{R} = 0$  ならば保存則が満たされる．ここにおける時間微分項が，次のように既知時刻の量  $\hat{Q}^{n+1}, \hat{Q}^n, \hat{Q}^{n-1}$  の線形和で評価されるものとするれば，

$$\left(\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}\right)^{n+1} \simeq \sum a_n (\hat{Q})^n \quad (4.58)$$

となる．時間微分項を二点後退差分 (Euler 陰解法) および三点後退差分で評価するときは次式で評価すれば良い．

$$\left(\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}\right)^{n+1} \simeq \frac{\hat{Q}^{n+1} - \hat{Q}^n}{\Delta t}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \quad (4.59)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}\right)^{n+1} \simeq \frac{3\hat{Q}^{n+1} - 4\hat{Q}^n + \hat{Q}^{n-1}}{2\Delta t}, \quad a_{n+1} = \frac{3}{2\Delta t} \quad (4.60)$$

次に，解析対象時刻の量を反復改良していくことを考える．未知量  $\hat{Q}^{n+1}$  を， $m$  回目の反復によって得た既知部分  $\hat{Q}^{n+1,m}$  と未知部分  $\Delta \hat{Q}$  に分解し，Newton-Raphson 法にならひ， $(\hat{R})^{n+1,m+1}$  に対し未知部分で線形近似を施した，

$$(\hat{R})^{n+1,m+1} \simeq (\hat{R})^{n+1,m} + \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{Q}}\right)^{n+1,m} \Delta \hat{Q} = 0 \quad (4.61)$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{Q}}\right)^{n+1,m} \Delta \hat{Q} = (\hat{R})^{n+1,m} \quad (4.62)$$

$$\hat{Q}^{n+1,0} = \hat{Q}^n, \quad \hat{Q}^{n+1,m+1} = \hat{Q}^{n+1,m} + \Delta \hat{Q} \quad (4.63)$$

の方程式を解く． $\Delta \hat{Q} \rightarrow 0$  となれば，上式は  $(\hat{R})^{n+1,m} \rightarrow 0$  となり，解析対象時刻における離散化式が満たされる．

Eqn. (4.62) において，ヤコビアン行列を書き下せば次のようになる．

$$-\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{Q}} = -\frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{Q}} + \left[ a_{n+1} I + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{\partial \hat{E}_i}{\partial \hat{Q}} - \frac{\partial \hat{E}_{\nu i}}{\partial \hat{Q}} \right) \right] \quad (4.64)$$

これら外力項，非粘性項，粘性・拡散項のヤコビアン行列を離散化式に沿って各計算セルで丁寧に求め，領域全体で連立した行列を構築し，これを反転するような手続きを踏めば，原理的には陰解法ができることになる．

## LU-SGS 法

本研究で用いた LU-SGS 法では，まずヤコビアン行列 Eqn. (4.64) において以下の項を無視または近似的に評価する．

1. 外力項  $-\frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{Q}}$  : 無視する．
2. 粘性・拡散項  $\frac{\partial \hat{E}_{\nu i}}{\partial \hat{Q}}$  : 対角成分のみ最大固有値として評価 [71]

これにより Eqn. (4.64) は大幅に簡略化され，非粘性項のみを陰解法として構築すればよくなる．LU-SGS 法自体は非粘性項に対する手法であり，これについて以下説明する．

まず，ヤコビアン行列  $-\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{Q}}$  の非粘性項の流束ヤコビアン行列を用いて，

$$a_{n+1} I + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{\partial \hat{E}_i}{\partial \hat{Q}} \right) = a_{n+1} I + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \hat{A}_i \quad (4.65)$$

と書く．Newton-Raphson 法の式は，次のようになる．

$$\left[ a_{n+1}I + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \hat{A}_i \right] \Delta \hat{Q} = \hat{R} \quad (4.66)$$

ヤコビアン行列  $\hat{A}_i$  を特性速度ごとに分離し，座標軸正方向成分に対しては後退差分を，座標軸負方向成分に対しては前進差分を取る．即ち一次風上差分を取れば，

$$\begin{aligned} & \underbrace{[a_{n+1}I + (\hat{A}_1^+ - \hat{A}_1^-) + (\hat{A}_2^+ - \hat{A}_2^-) + (\hat{A}_3^+ - \hat{A}_3^-)]_{i,j,k} \Delta \hat{Q}_{i,j,k}}_{\text{Diagonal } D\Delta Q} \\ & \quad - \underbrace{[(\hat{A}_1^+ \Delta \hat{Q})_{i-1,j,k} + (\hat{A}_2^+ \Delta \hat{Q})_{i,j-1,k} + (\hat{A}_3^+ \Delta \hat{Q})_{i,j,k-1}]}_{\text{Lower diagonal } L\Delta Q} \\ & \quad + \underbrace{[(\hat{A}_1^- \Delta \hat{Q})_{i+1,j,k} + (\hat{A}_2^- \Delta \hat{Q})_{i,j+1,k} + (\hat{A}_3^- \Delta \hat{Q})_{i,j,k+1}]}_{\text{Upper diagonal } L\Delta Q} = \hat{R}_{i,j,k} \end{aligned} \quad (4.67)$$

となる．左辺の第一項目はブロック対角行列，第二項目はブロック下三角行列，第三項目はブロック上三角行列である．これら各項に対する評価を以下に述べる．

まず，ブロック下三角行列の項  $\hat{A}^+ \Delta \hat{Q}$ ，上三角行列の項  $\hat{A}^- \Delta \hat{Q}$  は，固有値の正負を見て風上判定を行うよう，反転中のマトベク積を次式で計算する．

$$\hat{A}^\pm \Delta \hat{Q} = \hat{L} \frac{\hat{\Lambda} \pm |\hat{\Lambda}|}{2} \hat{R} \Delta \hat{Q} = \hat{\lambda}_1^\pm \Delta \hat{Q} + \frac{\hat{\lambda}_a^\pm}{c\sqrt{g_{ii}}} \hat{Q}_a + \frac{\hat{\lambda}_b^\pm}{c\sqrt{g_{ii}}} \hat{Q}_b \quad (4.68)$$

$$\hat{\lambda}_1 = V, \quad \hat{\lambda}_4 = V + c\sqrt{g}, \quad \hat{\lambda}_5 = V - c\sqrt{g}$$

$$\hat{\lambda}_a^\pm = \frac{1}{2}(\hat{\lambda}_4^\pm - \hat{\lambda}_5^\pm), \quad \hat{\lambda}_b^\pm = \frac{1}{2}(\hat{\lambda}_4^\pm + \hat{\lambda}_5^\pm) - \hat{\lambda}_1^\pm, \quad \hat{\lambda}^\pm = \frac{\hat{\lambda} \pm |\hat{\lambda}|}{2}$$

$$\hat{Q}_a = \bar{p} \hat{Q}_c + \bar{m} \hat{Q}_d, \quad \hat{Q}_b = \frac{\bar{m}}{c^2 \sqrt{g_{ii}}} \hat{Q}_c + \bar{p} \hat{Q}_d, \quad \bar{p} = \hat{Q}_p \cdot \Delta \hat{Q}, \quad \bar{m} = \hat{Q}_m \cdot \Delta \hat{Q}$$

$$\hat{Q}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \\ U \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_d = \begin{bmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ H \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_p = \begin{bmatrix} \phi \\ -\bar{\gamma}v_1 \\ -\bar{\gamma}v_2 \\ -\bar{\gamma}v_3 \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_m = \begin{bmatrix} -V \\ \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi = \frac{1}{2}v_i^2, \quad H = \frac{e+p}{\rho}, \quad \bar{\gamma} = \gamma - 1, \quad g_{ii} = \xi_i \xi_i$$

ブロック対角成分に対しては，更なる計算量の低減を狙って，流束ヤコビアン行列に対して， $\hat{A}$  の最大固有値の絶対値  $\sigma(\hat{A})$  を用いて，

$$\hat{A}^\pm \simeq \frac{\hat{A} \pm \sigma(\hat{A})I}{2} \quad (4.69)$$

なる近似を施す．これは，ブロック対角行列の固有値を全て最大固有値で置き換えたことに相当し，行列の優対角性が大幅に向上する．これは計算の安定化に寄与するが，計算を簡略化しているため，Newton-Raphson 法の精度は落としたことになる．すると，ブロック対角行列は

$$[a_{n+1}I + (\hat{A}_1^+ - \hat{A}_1^-) + (\hat{A}_2^+ - \hat{A}_2^-) + (\hat{A}_3^+ - \hat{A}_3^-)]_{i,j,k} \quad (4.70)$$

$$\simeq [a_{n+1} + \sigma(\hat{A}_1) + \sigma(\hat{A}_2) + \sigma(\hat{A}_3)]I = D \quad (4.71)$$

となり，ブロック対角行列を反転がスカラーの割り算に置き換えられる．ちなみに，上三角・下三角のヤコビアン行列も Eqn. (4.69) で評価する流儀も存在する．

粘性項については固有値成分のみ対角項として考慮すると述べたが，粘性項を陽的に扱う場合，時間刻みを大きく取り過ぎると計算が不安定になってしまう．したがって粘性項の対角成分のみを陰的に評価することのアナロジーとして，対角行列に粘性項のスペクトル半径に対応する量

$$4(\nu + \nu_i)(\xi_k \xi_k + \eta_k \eta_k + \zeta_k \zeta_k) \quad (4.72)$$

を加える．普通の二次精度中心差分では対角項の係数は 2 であるが，粘性応力に加え熱流束の項もあるのでこれら 2 つについて安定化を図るという意味で，2 倍の値である係数 4 としている．粘性解析を行う場合，計算の安定化と収束性の向上の効果がある．

以上の近似を適用し，Eqn. (4.67) の反転を行う．しかし，Eqn. (4.67) は多次元の方程式なので全体係数行列は 7 点差分の形態になり，1 次元的な前進代入・後退代入では反転できない．したがって，近似 LDU 分解

$$\begin{aligned} L + D + U &\simeq (L + D)D^{-1}(D + U) \\ &= (L + D)(I + D^{-1}U) \end{aligned} \quad (4.73)$$

により，2 回のスイープで近似的に反転する．これは，下三角行列を右辺に移項する前進消去 (Forward sweep) と，上三角行列を右辺に移項する後退消去 (Backward sweep) の 2 つの過程からなる．

$$\begin{aligned} \Delta \hat{Q}_{i,j,k}^* &= D^{-1}[\hat{R}_{i,j,k} + (\hat{A}_1^+ \Delta \hat{Q}_1^*)_{i-1,j,k} + (\hat{A}_2^+ \Delta \hat{Q}_2^*)_{i,j-1,k} + (\hat{A}_3^+ \Delta \hat{Q}_3^*)_{i,j,k-1}] \\ \Delta \hat{Q}_{i,j,k} &= \Delta \hat{Q}_{i,j,k}^* - D^{-1}[(\hat{A}_1^- \Delta \hat{Q})_{i+1,j,k} + (\hat{A}_2^- \Delta \hat{Q})_{i,j+1,k} + (\hat{A}_3^- \Delta \hat{Q})_{i,j,k+1}] \end{aligned}$$

前進消去・後退消去は， $i + j + k = \text{Const.}$  なる超平面を前進・後退させながら行う．超平面をまたぐセル同士はスイープ順序を変更することができないが，同一の超平面内であればデータの相互依存性はなく，並列化が可能となる．ただし，計算効率に間接参照が多く，一般的な連続アクセスのできるループと比べると，メモリアクセスが不連続になってしまうこと，超平面内のループごとにスレッド並列化における同期操作が入ることから，計算順序の観点から演算効率を伸ばすことは容易ではない．

## TCPGS 法

TCPGS 法 [70] は，嶋によって提案された MFGS (Matrix-free Gauss-Seidel) 法 [72] の考え方を一般の作業変数に拡張し，さらに全速度スキームとの併用を念頭に置き，各作業変数に対する数値粘性の調整を容易にしたものであると考えられる．この考え方は嶋によって低マッハ数の非定常流れを解きやすくするために提案されたが，その報告のなかで，通常圧縮性流れスキームが使用される領域においても，定常流れ計算を効率良く行えることが述べられている．

オリジナルの TCPGS では変数を  $p, v, s$  ( $s$  はエントロピ変数) と取られたが，本研究ではこれを参考に  $p, v, T$  に対する定式化を用いた．さらにスレッド並列化が困難な LU-SGS 法の欠点を克服するために，線形方程式の内部反復部分に Red-Black Gauss-Seidel 法を用いている (SGS 反復も用いることができる)．これらの工夫により，前述の LU-SGS スキームよりシンプルな定式化を得ることができ，収束性も大幅に向上させることができた．

まず，右辺の計算を経て基本量に変数変換された増分型の基礎方程式は，時間項の離散化も含めて以下のように書ける．

$$a_{n+1} \Delta \tilde{Q} + B_i \frac{\partial \Delta \tilde{Q}}{\partial \xi_i} = \tilde{R} \quad , \quad \tilde{R} = \Gamma^{-1} \hat{R} \quad (4.74)$$

LU-SGS 法で流束ヤコビアン行列を風上化したのと同様に，この形式においても  $B_i$  に数値粘性を加える事で優対角性を保った近似的な風上化を行うことができる．簡単のため数値粘性は対角行列として与えたとし，嶋らが提案する全速度スキーム向けの数値散逸ではなく一般的な圧縮性スキームを対象とするため，数値散逸  $D_i$  を，

$$D_i = \text{diag}[d_p, d_v, d_v, d_v, d_T] \quad , \quad d_p = d_v = d_T = |V_i| + c\sqrt{\xi_{i,k}\xi_{i,k}} \quad (4.75)$$

と，圧縮性流束の最大スペクトル半径により与える．数値散逸を加えられた流束ヤコビアン行列は，LU-SGS 法と同様に

$$B = B_i^+ + B_i^- \quad , \quad B_i^\pm = \frac{B_i \pm D_i}{2} \quad (4.76)$$

となり，+成分には後退差分を，-成分には前進差分を取る．また，粘性項の安定性確保のための対角項への修正についても LU-SGS 法と同様に扱う．陰解法行列の評価は，計算の単純化の観点から， $(i, j, k)$  セルの更新に関わる係数行列は全て  $(i, j, k)$  セルの値を用いるものとした．これらを経て得られた陰解法の離散化は最終的に，

$$\underbrace{(a_{n+1}I + D_1 + D_2 + D_3)\Delta\tilde{Q}_{i,j,k}}_{\text{Diagonal } D\Delta\tilde{Q}} \quad \underbrace{-B_1^+\Delta\tilde{Q}_{i-1,j,k} - B_2^+\Delta\tilde{Q}_{i,j-1,k} - B_3^+\Delta\tilde{Q}_{i,j,k-1}}_{\text{Lower diagonal } L\Delta\tilde{Q}} \\ + \underbrace{+B_1^-\Delta\tilde{Q}_{i+1,j,k} + B_2^-\Delta\tilde{Q}_{i,j+1,k} + B_3^-\Delta\tilde{Q}_{i,j,k+1}}_{\text{Upper diagonal } U\Delta\tilde{Q}} = \tilde{R}_{i,j,k} \quad (4.77)$$

となる．この方程式を，近似 LDU 分解を用いず直接 Red-Black Gauss-Seidel 法により何回か線形反復する．Gauss-Seidel 法は，離散化式の上三角成分と下三角成分を用い，得られている最新の  $\Delta\tilde{Q}$  を用いて

$$\Delta\tilde{Q}_{i,j,k}^{\text{new}} = D^{-1}(\tilde{R}_{i,j,k} - L\Delta\tilde{Q} - U\Delta\tilde{Q}) \quad (4.78)$$

と更新する．その際，並列化に伴い順序の依存性を除去するように，

- Group 1: if  $j + k = (\text{odd})$  then  $i = (\text{even})$  ; else  $i = (\text{odd})$  ("Red" cells)
- Group 2: if  $j + k = (\text{odd})$  then  $i = (\text{odd})$  ; else  $i = (\text{even})$  ("Black" cells)

と，構造格子を 3 次元的な千鳥模様にグループ分けする．これをグループごとに色分けして可視化すると，3 次元構造格子では Fig. 4.1 のようになる．こうすることで Group 1, Group 2 の中ではデータ依存がないから，並列化を行うことが出来る．並列化は  $j$  方向と  $k$  方向のループを融合した変数  $j * k$  について行えば良い．すると，ループ変数が非常に大きくなりスレッド間のロードバランスが均一化されること，OpenMP のバリア同期は各グループ計算が終わった段階で取れば良いこと，最内ループは第一方向のストライド幅 1 のアクセスとなることにより，LU-SGS に比べて容易に計算機の性能を引き出せる．

Group 1, Group 2 ごとに Gauss-Seidel の更新を行い，全セルに対する更新が終わるまでを 1 回の Gauss-Seidel 反復とみなし，Red-Black 法の反復回数を  $N$  とすると，本研究では嶋ら [73] が提案する

$$N = \min(N_{1/10}, 20) \quad (4.79)$$

を採用した．ただし， $N_{1/10}$  は Gauss-Seidel 法の残差が初期の  $1/10$  以下になるまでの反復回数である．線形方程式は完全に残差が落とされてない状態で次の非線形反復に進むが，一次精度の片側差分を取っていること，FDS の考え方により求められる行列型の数値粘性ではなく，Lax-Friedrichs スキームのように対角型の数値粘性を過剰に加えていることから，陰解法の定式化に陽的な流束との整合性はない．したがって陰解法の残差を落とすことにはあまり意味はなく，ある程度の緩和を行った後に残差の落ちが鈍化したら，線形反復を打ち切り非線形反復の回数を増やしたほうが良いと考えられる．

本研究では流体計算領域を複数の構造格子ブロックで離散化するマルチブロック法を用いている．その詳細は付録 C に示すが，ここでは陰解法に関する扱いに関してのみ述べる．MFGS 法や TCPGS 法は流体ブロック内で 1 度しか SGS 反復を行わない LU-SGS とは異なり，複数回の反復を行うことができる．そこで本研究では計算の安定性・収束性の観点から，隣接ブロックとの接続を意識した実装を行っている．具体的には，毎 Gauss-Seidel 反復ごとに最新の隣接ブロック境界における変化量を通信し，Gauss-Seidel 反復内でヤコビ法的に（つまり非対角項の計算に，隣接ブロックから来た前 GS 反復更新後の値を用いて）取り扱っている．こうすることで，LU-SGS 法などの陰解法で領域間が陰的に接続されずに「隣接ブロックにおける陰解法での変化量は常に 0」と評価されていることに起因して収束性が悪化する現象を改善し，少ないステップ数で収束解を得ることができる．また，Eqn. (4.79) における残差評価も全ブロックにおける総和を用いている．

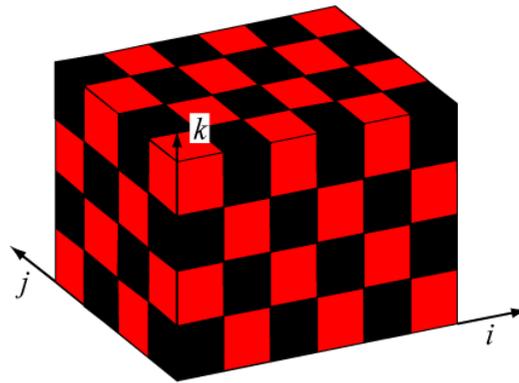


Fig. 4.1: Cell grouping for Red-Black Gauss-Seidel relaxation

### 局所時間刻み法

定常流れ計算においては全セルの流束の収支が取れればよく、時間刻み幅は最終的な解に関係ない。CFD の格子は、壁面付近は非常に格子幅が小さいため、CFL 条件によって壁面付近のどこかで取れる時間刻みが決まる。そのため定常流れ計算では、領域全体で一様な時間刻み幅を用いるのではなく、局所的に時間刻み幅を変化させて計算を収束させる方法が用いられることもある。これを局所時間刻み法と呼ぶ。

本研究では、定常流れ場の解析を行う際、各セルで一様な最大 CFL 数を満たすように、次式で各セルにおける時間刻み幅を決定した。またこのときの CFL 数は、10 程度を目安にした。

$$\Delta t = \min \left( \frac{\text{CFL}}{|V_1| + c\sqrt{\xi_{1,k}\xi_{1,k}}}, \frac{\text{CFL}}{|V_2| + c\sqrt{\xi_{2,k}\xi_{2,k}}}, \frac{\text{CFL}}{|V_3| + c\sqrt{\xi_{3,k}\xi_{3,k}}} \right) \quad (4.80)$$

### 4.1.6 乱流モデル

3.2.3 では、乱流の流れ場を直接数値解析で扱うには膨大な格子点数が必要なこと、乱流の効果は基礎方程式をレイノルズ平均することにより、非線形項から現れる変動成分同士の平均として現れたレイノルズ応力および乱流熱流束をモデル化することで扱われていることを述べた。

レイノルズ応力および乱流熱流束のモデル化には、壁からの距離と壁面付近の流速分布に基づき代数的にレイノルズ応力を与える 0 方程式型モデルや、乱れに関する量を変数とし、その発展方程式をモデル化する 1 方程式型、2 方程式型モデルなどがある [60] [74]。本研究では 1 方程式型、2 方程式型の渦粘性モデルを採用している。

### 線形渦粘性モデル

レイノルズ応力および乱流熱流束のモデル化におけるアプローチの一つは、分子粘性の拡散効果がひずみ速度に比例するのと同様に、乱れ成分による拡散効果も時間平均流れ場の速度勾配（より一般的にはひずみ速度）に比例すると考える方法である。まず、レイノルズ応力の等方成分（圧力と同じ役割）を乱れの大きさを代表させる量である乱流エネルギー  $k$  を用いて Eqn. (4.81) のように定める。次に、非等方な項をひずみ速度テンソルの非等方成分を用いて、ブシネスク近似から Eqn. (4.82) のようにモデル化する。ここで、レイノルズ応力の大きさは渦粘性係数  $\mu_t$  で決められ、分子粘性と同じ形になる。熱流束に対するモデル化として、乱流による運動量拡散時間と熱拡散の時間の比である乱流プラントル数  $Pr_t$  を導入し、Eqn. (4.83) とする。このようにレイノルズ応力と乱

流熱流束に対する構成式を定めると，流れ場と  $k, \mu_t$  が決まれば乱れの効果が決定することになる．

$$\frac{1}{2} \widetilde{\rho v_i'' v_i''} = \bar{\rho} k \quad (4.81)$$

$$-\widetilde{\rho v_i'' v_j''} = T_{tij} = \underbrace{-\frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}}_{\text{isotropic term}} + \underbrace{2\mu_t \left( \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)}_{\text{anisotropic term}} \quad (4.82)$$

$$-\widetilde{\rho h'' v_j''} = q_{tj} = -\kappa_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \simeq \frac{\bar{\rho} C_p \mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (4.83)$$

### Spalart-Allmaras モデル

Spalart-Allmaras モデル [75] は渦粘性係数に関するモデル変数  $\hat{\nu}$  に対する移流方程式を用いた 1 方程式型モデルで，カノニカルな流れ場であるチャンネル乱流や付着した乱流境界層はかなり良く解けるようである．また，計算の収束性も非常に良い．ただし，剥離を大きめに算出してしまふ，ジェットの流れ場が苦手である，といった欠点も持ち合わせている．用いたモデル方程式は Eqn. (4.84) であり，圧縮性スキームの保存形の流束評価が使えるようにオリジナルのモデルに密度を掛けて変形した形である． $d$  は壁面からの距離を表す．

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \hat{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \hat{\nu} v_j}{\partial x_j}}_{\text{advection}} = \underbrace{c_{b1}(1 - f_{t2}) \hat{S} \rho \hat{\nu}}_{\text{production}} - \underbrace{\rho \left[ c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left( \frac{\hat{\nu}}{d} \right)^2}_{\text{dissipation}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \mu_t) \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x_j} \right\} + c_{b2} \rho \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x_i} \right]}_{\text{diffusion}} \quad (4.84)$$

渦粘性係数  $\mu_t$  は，モデル変数  $\hat{\nu}$  と制御関数  $f_{v1}$  とを用い以下で表される．

$$\mu_t = \rho \hat{\nu} f_{v1} \quad , \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \quad , \quad \chi = \frac{\hat{\nu}}{\nu} \quad (4.85)$$

また，生成項の係数  $\hat{S}$  は渦度を基準にして次のように決められる．しかし，対象とする流れ場によっては渦度を用いることで良くない性質が出ることもあり，ひずみ速度も用いられる場合もある．

$$\hat{S} = \Omega + \frac{\hat{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad , \quad \Omega = \sqrt{2W_{ij}W_{ij}} \quad (4.86)$$

生成項，消散項，拡散項に関するモデル定数は以下のとおりである．

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad , \quad f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6} \quad , \quad f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2)$$

$$g = r + c_{w2}(r^6 - r) \quad , \quad r = \min \left( \frac{\hat{\nu}}{\hat{S} \kappa^2 d^2}, 10 \right)$$

$$c_{b1} = 0.1355 \quad , \quad c_{b2} = 0.622 \quad , \quad \kappa = 0.41 \quad , \quad \sigma = 2/3$$

$$c_{w2} = 0.3 \quad , \quad c_{w3} = 2 \quad , \quad c_{v1} = 7.1 \quad , \quad c_{t3} = 1.2 \quad , \quad c_{t4} = 0.5 \quad , \quad c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}$$

このうち，モデル関数  $f_{t2}$  は渦粘性の小さいところで乱れの生成を抑制する効果があるのだが，レイノルズ数があまり大きくない場合に前縁付近のようなあまり乱れが発達していない部分で渦粘性の生成が抑制された結果，格子密度に大きな感度を持つ層流領域が現れることがある [76][77]．現れた層流領域はいずれ乱流になるが，しかしこの項の作用では乱流遷移のような現象を正しく扱えないと考え，計算の安定性を重視し，本研究では，全域乱流であることを仮定して遷移を取り扱うことはせず，特に断らない限り  $f_{t2} = 0$  とした．また，このモデルでは乱流エネルギーは考慮されていないため，乱れが非常に大きく局所的に圧力が低下するような位置では結果の解釈に注意が必要になる．

### $k - \omega$ 2 方程式モデル

$k - \omega$  モデルは Wilcox [78] により開発された, 乱流エネルギー  $k$  と比消散率  $\omega$  (単位乱流エネルギーあたりの消散率) より乱れの長さスケールと時間スケールを決定し渦粘性係数を定める 2 方程式型乱流モデルである. Wilcox により様々なバージョンが提案されているが, 本研究ではその中でも最も単純で, 壁面からの距離が不要な 1988 年のものを用いた. 乱流エネルギー  $k$ , 比消散率  $\omega$  に関するモデル方程式は以下で表される.

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \rho k v_j}{\partial x_j}}_{\text{advection}} = \underbrace{P_k}_{\text{production}} - \underbrace{\beta^* \rho \omega k}_{\text{dissipation}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}_{\text{diffusion}} \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \rho \omega v_j}{\partial x_j}}_{\text{advection}} = \underbrace{\frac{\gamma \omega}{k} P_k}_{\text{production}} - \underbrace{\beta \rho \omega^2}_{\text{dissipation}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]}_{\text{diffusion}} \quad (4.88)$$

渦粘性係数, 乱流エネルギー生成項, その他のモデル係数は以下のとおりである.

$$\mu_t = \rho k / \omega, \quad P_k = T_{tij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\sigma_k = 0.5, \quad \sigma_\omega = 0.5, \quad \beta^* = 0.09, \quad \beta = \frac{3}{40}, \quad \kappa = 0.41, \quad \gamma = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma_\omega \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \simeq 0.553$$

このような 2 方程式型の渦粘性モデルではよどみ点付近で非物理的な  $k$  の生成が生じることがあり, Durbin [79] や Kato, Launder [80] などにより渦粘性や生成項に修正やリミッターを設けることが提案されている. 本研究では, 生成項の大きさが消散項の 10 倍を超えないよう, 以下の制限を掛けた.

$$(P_k)_{\text{lim}} = \min(P_k, 10\beta^* \rho \omega k) \quad (4.89)$$

### 非線形渦粘性モデル: Abe, Jang, Leschziner の $k - \omega$ モデル (AJL- $\omega$ モデル)

ブシネスク近似によって Eqn. (4.82) とモデル化されたレイノルズ応力は分子粘性応力と同様の単純な形式をしている一方で, 非等方な乱流場や二次流れや剥離を含む複雑な乱流場をうまく再現できないケースがあることが知られており, レイノルズ応力の表現を工夫することでこれらの欠点を改善しようという試みが多くなされている.

レイノルズ応力をより良く表現するための工夫として, レイノルズ応力の全成分の輸送方程式をモデル化するレイノルズ応力モデルや, そこでの知見を活かしてレイノルズ応力を速度勾配に非線形なかたちでモデル化する陽の応力方程式モデルや非線形渦粘性モデルがある. その中で, 本研究では非線形渦粘性モデルで  $k - \omega$  モデルの一種である Abe, Jang, Leschziner による  $k - \omega$  モデル (AJL- $\omega$  モデル)[81] も用いる.

まず, レイノルズ応力の構成式であるが, 等方成分に対応する  $k$  は渦粘性モデルと同じ Eqn. (4.81) を採用し, 非等方成分に対応する非等方テンソルに対応する  $b_{ij}$  を次式のように定義する.

$$-\overline{\rho v_i'' v_j''} = T_{tij} = \underbrace{-\frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}}_{\text{isotropic term}} + \underbrace{2 \bar{\rho} k b_{ij}}_{\text{anisotropic term}} \quad (4.90)$$

ここで,  $b_{ij}$  は無次元量であり,

$$b_{ij} = \frac{b_{ij}^*}{C_D}, \quad b_{ij}^* = b_{ij}^{*1} + b_{ij}^{*2} + b_{ij}^{*s} \quad (4.91)$$

$$b_{ij}^{*1} = -C_B \left( S_{ij}^* - \frac{1}{3} \delta_{ij} S_{kk}^* \right) \quad (4.92)$$

$$b_{ij}^{*2} = C_B \left[ -2(S_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kj}^*) + 2 \left( S_{ik}^* S_{kj}^* - \frac{1}{3} \delta_{ij} S^{*2} \right) \right] \quad (4.93)$$

$$b_{ij}^{*s} = -C_B f_{s1} S_{ij}^* + 2C_B f_{s2} \left( S_{ik}^* S_{kj}^* - \frac{1}{3} \delta_{ij} S^{*2} \right) \quad (4.94)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad S_{ij}^* = C_D \tau S_{ij}, \quad \Omega_{ij}^* = C_D \tau \Omega_{ij}$$

と、レイノルズ応力がひずみ速度および渦度テンソルを用いた 2 次の積まででモデル化される．壁面付近の渦粘性係数の制御，および Realizability を満足するために用いられる制御関数，モデル係数は以下のとおりである．

$$\tau = \nu_t/k, \quad \nu_t = C_\mu f_\mu k^2/\varepsilon, \quad C_D = 0.8, \quad C_\mu = 0.12, \quad f_\mu = \left[ 1 + (35/R_t^{0.75})e^{-(R_t/30)^{0.75}} \right] (1 - f_w(26))$$

$$f_w(\xi) = e^{-(d^*/\xi)^2}, \quad R_t = k^2/(\mu\varepsilon), \quad d^* = v_\varepsilon d/\nu, \quad v_\varepsilon = (\nu\varepsilon)^{1/4}$$

$$C_B = \frac{1}{1 + \frac{22}{3}\Omega^{*2} + \frac{2}{3}(\Omega^{*2} - S^{*2})f_B}, \quad f_B = 1 + C_\eta(\sqrt{\Omega^{*2}} - \sqrt{S^{*2}}), \quad C_\eta = 100$$

$$f_{s1} = f_{r1}f_{r2}C_{s1}(\Omega^{*2} - S^{*2}), \quad f_{s1} = -f_{r1}f_{r2} [1 + C_{s2}(\Omega^{*2} - S^{*2})]$$

$$f_{r1} = \frac{\Omega^{*2} - S^{*2}}{\Omega^{*2} + S^{*2}}, \quad f_{r2} = \frac{S^{*2}}{\Omega^{*2} + S^{*2}}, \quad C_{s1} = 0.15C_\eta, \quad C_{s2} = 0.07C_\eta$$

渦粘性係数  $\mu_t = \rho\nu_t$  は，Wilcox のモデル類似の形式であって，乱流エネルギー  $k$  と比消散率  $\omega$  から求められる．モデル方程式，制御関数，モデル係数は以下のとおりである．

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \rho k v_j}{\partial x_j}}_{\text{advection}} = \underbrace{P_k}_{\text{production}} - \underbrace{\beta^* \rho \omega k}_{\text{dissipation}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}_{\text{diffusion}} \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \rho \omega v_j}{\partial x_j}}_{\text{advection}} = \underbrace{\frac{\gamma \omega}{k} P_k}_{\text{production}} - \underbrace{\beta \rho \omega^2}_{\text{dissipation}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]}_{\text{diffusion}} + [1 - f_w(600)] C_{\omega 1} \frac{\mu_t}{k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (4.96)$$

$$\sigma_k = f_t/1.2, \quad \sigma_\omega = f_t/1.5, \quad f_t = 1 + 5.0f_w(5), \quad \varepsilon = \beta^* \omega k, \quad \beta^* = \frac{\beta/(3\beta_0) + (R_{tw}/9)^4}{1 + (R_{tw}/9)^4}, \quad R_{tw} = k/(\nu\omega)$$

$$\beta_0 = 0.09, \quad \gamma = 0.45, \quad \beta = 0.0747, \quad C_{\omega 1} = 1.5$$

なお，このモデルは制御関数  $C_B$  が渦み点付近の過剰な乱れエネルギー生成を抑制する効果を果たしているため，生成項に対する修正や Durbin の時間スケールリミターは使用しなくても良いと思われる．

#### 4.1.7 境界条件

本研究で用いた代表的な境界条件として，以下のものがある．

1. 流入・流出境界条件
2. 準一次元無反射境界条件
3. 物体表面境界条件
4. 領域間接続・周期境界条件

本研究の流体ソルバは境界条件として速度  $v$ ，圧力  $p$ ，温度  $T$  を与える．これらは解析対象が 2 次元か 3 次元か，絶対系か回転系か，運動物体かそうでないのか，粘着条件かすべり条件か，でそれらに応じた導入をする必要があるが，代表的なもののみ以下に記す．

### 流入境界条件

流入・流出境界条件は，境界部の軸方向流速が超音速か亜音速かを見て判断する．本研究では，扱った流れがすべて亜音速であったことから，超音速に対するものは用いていない．

亜音速で圧縮性流れが流入する境界においては，一様外部流などの特殊な場合を除き，単純に全ての物理量を固定することはできない．それは，流れ中における特性量（Riemann 不変量）の一部が流れに逆行し，それによって上流の流れが変化させられるからである．よって，流れに逆行する Riemann 不変量を計算領域内から内挿することで，流入する流れの条件を模擬することができる．流線に沿って計算領域外に出ていく Riemann 不変量は，計算領域内の値から次のように計算できる．

$$R_3 = v - \frac{2c}{\gamma - 1} \quad (4.97)$$

この Riemann 不変量を持ち，かつ流入全温を実現する速度  $v_{\text{inlet}}$  は，全温  $T_t$  を用いて次のようにして計算できる．

$$v_{\text{inlet}} = \frac{1}{\gamma + 1} \left[ (\gamma - 1)R_3 + \sqrt{4(\gamma + 1)C_p T_t - 2(\gamma - 1)R_3^2} \right] \quad (4.98)$$

これと流入角度から速度三成分が求まり，流入全圧  $P_t$  とマッハ数から静圧が求まる．

### 流出境界条件

まず，流れの回転が存在しない，2 次元な流れにおける亜音速流出の境界条件は，背圧固定条件を用いた．これは流出部の圧力を一定値  $p_{\text{ref}}$  に固定し，他の物理量を領域内より外挿するものである．即ち，

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \\ T \end{bmatrix}_{\text{outlet}} = \begin{bmatrix} v_{1\text{in}} \\ v_{2\text{in}} \\ v_{3\text{in}} \\ p_{\text{ref}} \\ T_{\text{in}} \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

回転翼列など，流出部で流体が回転運動する場合には，背圧を一意に固定してしまうことはできない．それは，流体の回転運動に釣り合うような圧力分布を模擬する必要があるからである．流れが回転している場合には，流体粒子が回転運動を続けるための向心力が，半径方向の圧力差により生じているはずである．軸方向回転流れにおいて，流れの分布が周方向・軸方向に一様化したときの平均的な流れ場における釣り合い条件を単純半径平衡（SRE）と呼ぶ．これは，運動方程式を立てることによって，周方向速度と半径方向の圧力差が，半径を  $r$  として以下のように結び付けられる．

$$\frac{C_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \quad (4.100)$$

二重円筒内の回転流れを考えると，例えば，圧力のリファレンスとして HUB における圧力  $p(r_h) = p_{\text{ref}}$  を持っていたとする．すると，このリファレンス値を用いて，TIP までの圧力  $p(r)_{\text{SRE}}$  は，

$$p(r)_{\text{SRE}} = p_{\text{ref}} + \frac{1}{\theta_0} \int_{r_h}^r \int_0^{\theta_0} \frac{\rho C_\theta^2}{r} dr d\theta \quad (4.101)$$

のように  $r_h \rightarrow r$  の積分を実行することで求まる．実装上は，これを周方向・半径方向に数値積分する．こうして各半径位置における圧力を回転を考慮した上で求めている．

実際の実装時の問題としては，通常，流出境界においては翼の後流などが完全に周方向に一様になっておらず，ある程度の幅を持って分布しており，このような平均化を無理矢理施した場合，出口境界付近で不自然な流れの分布が見られる．したがって，SRE 条件を導入する際には，後述する無反射境界条件における局所線形化のリファレンス値として，半径方向に平均化された周速における圧力を SRE 条件により求め，これに対して無反射境界条件を併用した．これにより，回転流れ場の大域的な圧力分布を模擬しつつ，後流などの非一様性を許した定式化を構築することができる．

## 準一次元無反射境界条件

翼列流れを CFD によって解く際、境界において圧力波や衝撃波、膨張波などが不自然に反射する挙動が見られることがある。それは境界で計算領域内側からやってきた波が十分境界の外に出ていかないことによる。無反射境界条件は、計算領域境界における波の不自然な反射を防ぐためのものであり、Thompson らの Euler 方程式に対するものや、Poinsot, Lele による NS 方程式に対するものが広く知られている。また、境界における波の反射を防ぐ方法は、入口/出口境界付近で格子幅を広げ数値粘性により減衰させる方法、境界付近の格子十数点程度にわたり、時間平均値とのずれに反応する人工的な減衰項を付加して擾乱を減衰させる方法 (Perfectly Matched Layer, PML) がある。Giles は、計算境界で Euler 方程式を線形化し、ある平均値まわりの変動成分に対して無反射境界条件を定式化した (Giles の条件 [82])。タービン翼列後流や振動翼列計算のように変動量が平均値からの偏差が小さい場合については、この定式化が簡便で、かつ境界の無反射化に有効であることが報じられている。

本研究ではこの Giles の条件を、一般曲線座標系に対応させた形で用いている。それは、次のように書ける。一般曲線座標系の Euler 方程式で、変数を  $p, v_1, v_2, v_3, \rho$  に取る。一般曲線座標系において、次の Euler 方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \tilde{A}_i \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \xi_i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} V_i & \rho \xi_{i,x} & \rho \xi_{i,y} & \rho \xi_{i,z} & 0 \\ 0 & V_i & 0 & 0 & \frac{\xi_{i,x}}{\rho} \\ 0 & 0 & V_i & 0 & \frac{\xi_{i,y}}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & V_i & \frac{\xi_{i,z}}{\rho} \\ 0 & \gamma p \xi_{i,x} & \gamma p \xi_{i,y} & \gamma p \xi_{i,z} & V_i \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

平均値  $\bar{q}$  まわりで線形化し、平均値からの偏差成分  $\tilde{q}$  に関する方程式を導けば、

$$\tilde{q} = \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}, \quad \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + \tilde{A}_i(\bar{\mathbf{q}}) \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \xi_i} = \mathbf{0} \quad (4.103)$$

となる。ここでは  $\xi_i = \xi_1 = \xi$  方向に無反射境界条件を適用することを考える。ヤコビアン行列  $\tilde{A}_1$  を固有値分解することで、次の 5 つの固有値  $\tilde{\lambda}_i$ ・固有ベクトル  $e_i$  が出現する。

$$\tilde{\lambda}_1 = V_1, \quad \tilde{\lambda}_2 = V_1, \quad \tilde{\lambda}_3 = V_1, \quad \tilde{\lambda}_4 = V_1 + c\sqrt{\xi_i \xi_i}, \quad \tilde{\lambda}_5 = V_1 - c\sqrt{\xi_i \xi_i} \quad (4.104)$$

$$\underbrace{e_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{entropy wave}}, \quad \underbrace{e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\xi_y}{\rho c} \\ \frac{\xi_x}{\rho c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{shear wave}}, \quad \underbrace{e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\xi_z}{\rho c} \\ 0 \\ \frac{\xi_x}{\rho c} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{shear wave}}, \quad \underbrace{e_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2c^2} \\ \frac{\xi_x}{2\rho c\sqrt{\xi_i \xi_i}} \\ \frac{\xi_y}{2\rho c\sqrt{\xi_i \xi_i}} \\ \frac{\xi_z}{2\rho c\sqrt{\xi_i \xi_i}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\text{sound wave(+)}}, \quad \underbrace{e_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2c^2} \\ -\frac{\xi_x}{2\rho c\sqrt{\xi_i \xi_i}} \\ -\frac{\xi_y}{2\rho c\sqrt{\xi_i \xi_i}} \\ -\frac{\xi_z}{2\rho c\sqrt{\xi_i \xi_i}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\text{sound wave(-)}} \quad (4.105)$$

以上の第 1 成分から第 5 成分までは、それぞれエントロピー波、せん断波 (2 つ)、音波 (2 つ) に対応する成分である。これより左固有行列、右固有行列はそれぞれ、

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ 0 & -\frac{\xi_y}{\rho c} & -\frac{\xi_z}{\rho c} & \frac{\xi_x}{2\rho c\sqrt{\xi_i \xi_i}} & -\frac{\xi_x}{2\rho c\sqrt{\xi_i \xi_i}} \\ 0 & \frac{\xi_x}{\rho c} & 0 & \frac{\xi_y}{2\rho c\sqrt{\xi_i \xi_i}} & -\frac{\xi_y}{2\rho c\sqrt{\xi_i \xi_i}} \\ 0 & 0 & \frac{\xi_x}{\rho c} & \frac{\xi_z}{2\rho c\sqrt{\xi_i \xi_i}} & -\frac{\xi_z}{2\rho c\sqrt{\xi_i \xi_i}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = \tilde{L}^{-1} = \begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\rho c \xi_y}{\xi_i \xi_i} & \frac{\rho c (\xi_z^2 + \xi_x^2)}{\xi_x \xi_i \xi_i} & -\frac{\rho c \xi_y \xi_z}{\xi_x \xi_i \xi_i} & 0 \\ 0 & -\frac{\rho c \xi_z}{\xi_i \xi_i} & -\frac{\rho c \xi_y \xi_z}{\xi_x \xi_i \xi_i} & \frac{\rho c (\xi_x^2 + \xi_y^2)}{\xi_x \xi_i \xi_i} & 0 \\ 0 & \frac{\rho c \xi_x}{\sqrt{\xi_i \xi_i}} & \frac{\rho c \xi_y}{\sqrt{\xi_i \xi_i}} & \frac{\rho c \xi_z}{\sqrt{\xi_i \xi_i}} & 1 \\ 0 & -\frac{\rho c \xi_x}{\sqrt{\xi_i \xi_i}} & -\frac{\rho c \xi_y}{\sqrt{\xi_i \xi_i}} & -\frac{\rho c \xi_z}{\sqrt{\xi_i \xi_i}} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

と定められ、これを用いて  $\tilde{A}$ 、変動成分に対する特性量  $c$  を求めることができる。

$$\tilde{A} = \tilde{L}\Lambda\tilde{R}, \Lambda = \text{diag}(\tilde{\lambda}_i), \mathbf{c} = \tilde{R}\tilde{\mathbf{q}} \quad (4.107)$$

境界における値は、これら特性量に対応する特性速度が計算領域外側から内側へ進むのものを 0 と変更し、境界内側には変動成分に対する特性量が入ってこない条件を与える。これは、固有値の正負を見て修正された特性量  $c_{\text{mod}}$  により、境界における値は次のように計算される。

$$\mathbf{q}_{\text{boundary}} = \bar{\mathbf{q}} + \tilde{L}\mathbf{c}_{\text{mod}}, \mathbf{c}_{\text{mod}} = [c_{i\text{mod}}] \quad (4.108)$$

$$c_{i\text{mod}} = c_i \text{ (for outgoing wave)}, \quad c_{i\text{mod}} = 0 \text{ (for incoming wave)} \quad (4.109)$$

このような特性変数と特性速度の向きに基づく定式化は、独立変数  $p, v, T$  からの変換を用いても可能であると考えられるが、原理的には行っていることは同じだと考え、本研究では Giles の定式化に基づいた  $\rho, v, p$  からの変換を行っている。

### 物体表面境界条件

移動境界問題などにおいては、物体表面が運動するから、物体の運動に同期した速度を物体表面の境界条件として与える。これは、境界部における空間メトリックスを用いて計算する。まず、滑り無し条件のときは、物体境界において境界速度と流体の流動速度は完全に同期している。したがって、翼表面を通る質量流束が 0 であるという条件は、次で計算できる。

$$\mathbf{V} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\xi_t \\ -\eta_t \\ -\zeta_t \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

非粘性計算における滑り壁条件は、壁速度  $\mathbf{v}_{\text{wall}}$  を用いて、

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{\text{wall}} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\xi_t \\ -\eta_t \\ -\zeta_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_{\text{in}} - \mathbf{v}_{\text{wall}}) - (\mathbf{v}_{\text{in}} - \mathbf{v}_{\text{wall}}) \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} + \mathbf{v}_{\text{wall}} \quad (4.111)$$

## 4.2 固体の数値解析法

### 4.2.1 有限要素法

基礎方程式である仮想仕事式を要素と呼ばれる有限個の体積領域に分割する．要素中には物理量をもつ点を有限個用意し，これらを節点と呼ぶ．要素中の物理量の分布を，節点における値と形状関数と呼ばれる関数で近似したうえで，節点の未知量に関して成り立つ方程式を解くことで，偏微分方程式の境界値問題の近似解を求める方法を有限要素法という．

先の有限体積法がセル内の量の平均値を求めることで近似解を得ているのに対して，有限要素法では点をもつ物理量の近似解を求めていることになる．

本節ではまず有限要素法による離散化の概要 [83][84] を述べる．次に，非線型の離散化方程式を解くための反復解法について述べる．反復解法のために線形化された離散化方程式の各項を具体的に説明する．最後にフラッターのような振動解析を行う際のモード合成法を用いた自由度縮小について述べる．

### 4.2.2 有限要素分割

有限要素分割とは，解析対象の領域を有限の区間に分割し，区間内の物理量分布を，区間内にある物理量が定義された点（節点という）の値と，形状関数と呼ばれる内挿関数を用いて内挿することで近似し，満たすべき微分方程式の離散化式を得るものである．

要素内の関数分布を近似するときは，ある要素内の節点  $m$  のもつ物理量  $q^m$  と，局所分布における節点  $m$  の寄与を表す形状関数  $N^m$  を用いて，次のように定義される．

$$q = \sum_m N^m q^m = N^m q^m \quad (4.112)$$

また，Eqn. (4.133) を有限個の体積要素に分割し，各要素を  $V_e$  で表すと，体積積分と表面積分はそれぞれ，

$$\int_V dV = \sum_e \int_{V_e} dV_e \quad , \quad \int_{S_e} dV = \sum_e \int_{S_e} dS_e \quad (4.113)$$

と，有限個の区間の体積積分の総和で表すことができる．したがって，以後は各要素に対して内挿関数を用いた変位や速度，外力を用いてこれら体積積分，表面積分を計算し，最終的に各要素の積分を仮想仕事原理に従って重ねあわせればよい．

### 用いる要素

有限要素法においては，物理量が定義される点や内挿関数の違い，物理モデルの違いのことなどを含めて一般に要素と呼ぶ．離散化方程式を立てる上で，要素の違いは計算コスト，解の質や収束性に決定的な違いをもたらすことから，要素の選択は問題に応じてされるべきであり，半ば経験的に決められる部分も存在する．

有限要素法は三角形や四面体など，要素分割を半自動的に行える幾何形状を持つ要素や，様々な形状を持つ要素を混合して取り扱える定式化であるから，解析対象の形状に対して非常に汎用性に富んだ手法であるといえる．そのため，有限要素法による構造解析は工学上広く用いられている．

本研究では 3 次元形状を有する空力要素に対する動解析が行えることを目標としている．単独翼などの連成解析では構造を梁，板，シェルなど材料力学的な考察から開発された要素を用いてモデル化し解析を行うことが多い．薄板やシェル構造に対してはこれら梁，板，シェル理論に基づく要素定式化は，連続体の構成則をそのまま用いるソリッド要素に比べて節点数を大幅に削減できることから，板やシェルの要素は先行研究である単独翼のフラッター解析において広く用いられている．

ガスタービン空力要素においては、有する幅に比べ厚さが十分薄くない場合があったり、回転翼列に関しては 3 次元的に大きくねじれた構造を有するなどという理由で、板要素やシェル要素はその適用範囲が定かではない。したがって本研究では 3 次元ソリッド要素を採用し、曲げ・捩りを精度良く求めるため形状関数にはアイソパラメトリック要素である 20 点セレンディピティ要素を用いることにする。これは要素内変位を節点変位たちを用いて 2 次関数で近似することを意味し、要素内の歪みは変位の一階微分であるから、1 次関数で近似される。また、要素境界においてはこれらの関数が隣接要素と一致するように作られているから、要素境界においても内挿された物理量は連続で、一階微分可能である。

20 点セレンディピティ要素は、六面体の要素である。本研究で扱う軸流流体機械の翼型は、形状がそれほど複雑でないことから、前述のような口バストさを有する四面体要素ではなく、構造格子からの格子生成が容易な六面体要素を選択した。

20 点セレンディピティ要素の物理量配置および要素に張られた局所座標系を Fig. 4.2 に示す。六面体の頂点およびその辺上に自由度を有し、変形の曲率までを表現できるのが特徴である。

要素局所座標系  $r_1, r_2, r_3$  は、要素境界で  $-1 \leq r_i \leq 1$  を満たし、この境界上に節点が配置されるように張られる。要素内局所座標系  $r$  と基準表示座標系  $X$  との関係は、物理量の内挿と同じ内挿関数を用いて節点座標を内挿する。このような要素をアイソパラメトリック要素と呼ぶ。

$$\mathbf{X} = \sum_{m=1}^{20} N^m(\mathbf{r}) \mathbf{X}^m \quad (4.114)$$

形状関数  $N_m$  は座標値や物理量の分布を空間内に再構築するための関数であり、次のような関数である。

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)(-2-r_1-r_2-r_3), & N_2 &= \frac{1}{8}(1+r_1)(1-r_2)(1-r_3)(-2+r_1-r_2-r_3) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+r_1)(1+r_2)(1-r_3)(-2+r_1+r_2-r_3), & N_4 &= \frac{1}{8}(1-r_1)(1+r_2)(1-r_3)(-2-r_1+r_2-r_3) \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1-r_1)(1-r_2)(1+r_3)(-2-r_1-r_2+r_3), & N_6 &= \frac{1}{8}(1+r_1)(1-r_2)(1+r_3)(-2+r_1-r_2+r_3) \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(-2+r_1+r_2+r_3), & N_8 &= \frac{1}{8}(1-r_1)(1+r_2)(1+r_3)(-2-r_1+r_2+r_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_9 &= \frac{1}{4}(1-r_1^2)(1-r_2)(1-r_3), & N_{10} &= \frac{1}{4}(1+r_1)(1-r_2^2)(1-r_3) \\ N_{11} &= \frac{1}{4}(1-r_1^2)(1+r_2)(1-r_3), & N_{12} &= \frac{1}{4}(1-r_1)(1-r_2^2)(1-r_3) \\ N_{13} &= \frac{1}{4}(1+r_1^2)(1-r_2)(1+r_3), & N_{14} &= \frac{1}{4}(1-r_1)(1-r_2^2)(1+r_3) \\ N_{15} &= \frac{1}{4}(1-r_1^2)(1+r_2)(1+r_3), & N_{16} &= \frac{1}{4}(1-r_1)(1-r_2^2)(1+r_3) \\ N_{17} &= \frac{1}{4}(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3^2), & N_{18} &= \frac{1}{4}(1+r_1)(1-r_2)(1-r_3^2) \\ N_{19} &= \frac{1}{4}(1+r_1)(1+r_2)(1-r_3^2), & N_{20} &= \frac{1}{4}(1-r_1)(1+r_2)(1-r_3^2) \end{aligned}$$

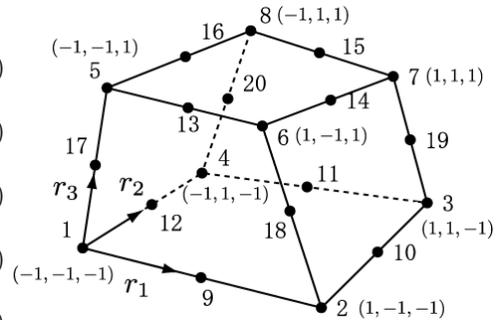


Fig. 4.2: Local coordinate and nodes of 20 point solid element

これにより、要素内座標  $X$ 、要素内変位  $u$  は、 $m$  番節点の節点座標、節点変位をそれぞれ  $X^m, u^m$  として、形状関数を用いて次のように内挿される。これは仮想変位  $\delta u$ 、変位増分  $\Delta u$  についても同じ内挿が施される。また、 $N^m$  を形状関数行列といい、質量マトリクスや剛性マトリクス、外力ベクトルを作るときに用いられる。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} N_m & 0 & 0 \\ 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \mathbf{X}^m = N^m \mathbf{X}^m, \quad (4.115)$$

$$\mathbf{u} = N^m \mathbf{u}^m, \quad \delta \mathbf{u} = N^m \delta \mathbf{u}^m, \quad \Delta \mathbf{u} = N^m \Delta \mathbf{u}^m \quad (4.116)$$

### 局所座標系における微分と積分への変換

要素局所座標系と形状関数が定義されると、有限要素分割された体積積分・表面積分は要素局所座標に変数変換を行うことを用いて積分を実行することが可能となる。

要素中における微小ベクトル  $d\mathbf{X}$  と要素局所座標系の微小ベクトル  $\mathbf{r}$  の関係はヤコビアン行列で結ばれるが、形状関数を用いて次のように書ける。

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^m}{\partial r_1} \mathbf{X}^m & \frac{\partial N^m}{\partial r_2} \mathbf{X}^m & \frac{\partial N^m}{\partial r_3} \mathbf{X}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr_1 \\ dr_2 \\ dr_3 \end{bmatrix}, \quad J = \det \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{r}} \right) \quad (4.117)$$

有限要素法では、物理量の一階の空間勾配を使用する際に、形状関数の空間微分  $\frac{\partial N}{\partial X_i}$  などが出現するため、これらを連鎖束より

$$\frac{\partial N}{\partial X_i} = \frac{\partial N}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial X_i} + \frac{\partial N}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial X_i} + \frac{\partial N}{\partial r_3} \frac{\partial r_3}{\partial X_i} \quad (4.118)$$

として求める。また、物理量の微分は、形状関数により内挿された値を解析的に処理することにより、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial X_i} &= \frac{\partial u}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial X_i} + \frac{\partial u}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial X_i} + \frac{\partial u}{\partial r_3} \frac{\partial r_3}{\partial X_i} \\ &= \frac{\partial N^m}{\partial r_j} \frac{\partial r_j}{\partial X_i} u^m \end{aligned} \quad (4.119)$$

と、形状関数の微分とヤコビアン行列の逆行列を用いて計算できる。このように物理量の空間微分が形状関数の微分を用いて求められることが、差分法との大きな違いの 1 つである（ちなみに差分法でも、内挿関数の解析的微分と一致するような差分の取り方が「良い」差分の取り方だと言われている [85]。） $\frac{\partial r_i}{\partial X_j}$  などは、ヤコビアン行列の逆行列を計算することにより求める。即ち、

$$\frac{\partial r_i}{\partial X_j} = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{X}} \right]_{ij} = \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{r}} \right]_{ij}^{-1} \quad (4.120)$$

である。

これを用いて、要素内における体積積分、要素表面の  $r_i$  軸と  $r_j$  軸で張られる曲面上での面積分は、次のように求めれば良いことがわかる。

$$\int_{V_e} q dV_e = \int_{V_e} q dX_1 dX_2 dX_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q J dr_1 dr_2 dr_3 \quad (4.121)$$

$$\int_{S_e} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{q} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{e}_i dr_i \right] \times \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{e}_j dr_j \right] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{q} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r_i} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial r_j} \right] dr_i dr_j \quad (4.122)$$

ヤコビアン  $J$  は、前節における流体解析で用いた定義とは異なり、注意する必要がある。

体積積分、面積積分を求める際には、定積分の近似求積法であるガウス積分を用いる。ガウス積分は、以下のように区間  $[-1, 1]$  の関数に対して、被積分関数  $\phi$  の積分点における値  $\phi(r_l)$  と重み関数  $w_l$  の重み付き和で求められる。3 次精度までの積分点座標および重みを Table. 4.1 に示す。

$$\int_{-1}^1 \phi dr = \sum_l w_l \phi(r_l) \quad (4.123)$$

多次元の場合は、和が二重、3重になる。

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi dr_1 dr_2 = \sum_{l_1, l_2} w_{l_1} w_{l_2} \phi(r_{l_1}, r_{l_2}), \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi dr_1 dr_2 dr_3 = \sum_{l_1, l_2, l_3} w_{l_1} w_{l_2} w_{l_3} \phi(r_{l_1}, r_{l_2}, r_{l_3}) \quad (4.124)$$

Table. 4.1: Integral points and weights of Gaussian quadrature rule

Order ( $p$ ) / Point No.	1	2	3
1	$r = 0, w = 2$	-	-
2	$r = -\sqrt{1/3}, w = 1$	$r = \sqrt{1/3}, w = 1$	-
3	$r = -\sqrt{5/3}, w = 5/9$	$r = 0, w = 8/9$	$r = \sqrt{5/3}, w = 5/9$

積分点の選び方により，生成されるマトリクスの質が定まる．有限要素法による構造解析では，積分点を十分に取った完全積分を行うと，剛性を過大評価してしまい極端に硬い解が生じてしまうことがある．1 次要素でその現象は顕著に見られ，せん断応力が原因となることからせん断ロッキングと呼ばれる．これは 2 次要素や，PS 要素や EAS 要素のようにロッキングが起こらないよう改良された要素を用いることで回避可能である [86]．

本研究では上述の通り 2 次要素（3 次精度）を用いて解析を行っており，ロッキングと思われる挙動は発生しなかった．したがって，全てのマトリクス・ベクトル生成時に数値積分としては十分精度の高い完全積分 (Table. 4.1 の  $p = 3$ ) を行っている．

### 4.2.3 増分型定式化

固体の運動および変形の支配方程式は，第 2 章において保存則から導出した表示の仮想仕事式で与えられる．

$$\int_{V_X} \rho_0 \mathbf{a} dV_X + \int_{V_X} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_X = \int_{S_x^{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS_x + \int_{V_X} \rho_0(\mathbf{g}) \cdot \delta \mathbf{u} dV_x \quad (4.125)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \quad (4.126)$$

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \quad (4.127)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 2\mu & 2\mu & & & \\ 2\mu & \lambda + 2\mu & 2\mu & & & \\ 2\mu & 2\mu & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.128)$$

有限要素分割による離散化形式には，変位を未知数とする方法（変位法）と応力を未知ベクトルとする方法（応力法）がある．一般に有限要素法の固体解析においては，変位法の方が定式化が単純であることから，変位法に基づく定式化が行われる．本研究では固体の変形及び運動を解くために有限要素法を用いるから，変位法に基づく定式化を用いる．

変位を未知数とするとき，有限変位を考慮する場合，支配方程式 Eqn. (4.127) は変位に対して非線形方程式となる．したがって，流体解析の増分型反復解法と同様に，これを増分形式に書きなおし，Eqn. (4.127) を満たす変位を反復的に求めることが行われる．本小節ではこの定式化について説明する．

解析対象配置において力の釣り合いが満たされているとして，Eqn. (4.127) は次のように書き換えられる．

$$R = \int_{V_X} \rho_0 \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} dV_X + \int_{V_X} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} dV_X - \int_{S_x^{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS_x - \int_{V_X} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV_X = 0 \quad (4.129)$$

解析対象配置の変位  $\mathbf{u}$  を，既知配置  $\mathbf{u}_t$  とそこからの増分  $\Delta \mathbf{u}$  で表す．

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + \Delta \mathbf{u} \quad (4.130)$$

$R$  に対し，既知配置まわりで一次展開することで線形化を施し，Newton-Raphson 法に基づく解法を取る．表面力は反復中に境界条件として陽的に与えられるものとして扱えば，

$$R \simeq \int_{V_X} \rho_0 \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} dV_X + \int_{V_X} \left[ \mathbf{S} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \right] \cdot \left[ \delta \mathbf{E} + \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \right] dV_X \quad (4.131)$$

$$- \int_{S_x^{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS_x - \int_{V_X} \rho_0 \left( \mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right) \cdot \delta \mathbf{u} dV_X = 0 \quad (4.132)$$

$\Delta \mathbf{u}$  に対して一次近似して，

$$R(\mathbf{u}_t) + \int_{V_X} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \right) \cdot \delta \mathbf{E} + \mathbf{S} \cdot \left( \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \right) \right] dV_X - \int_{V_X} \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \right) \cdot \delta \mathbf{u} dV_X = 0, \quad (4.133)$$

$$R(\mathbf{u}_t) = \int_{V_X} \rho_0 \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} dV_X + \int_{V_X} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} dV_X - \int_{S_x^{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS_x - \int_{V_X} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV_X$$

となる．Eqn. (4.133) を  $\mathbf{u}_t$  を更新しながら  $\Delta \mathbf{u}$  について解き続けることで， $R(\mathbf{u}_t) \rightarrow 0$  となり，力の釣り合いが満たされる．

ちなみに，形状関数の形によらず  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}$  などのヤコビアン行列を簡単に求める方法がある．それは，仮想時間  $\tau$  を導入し，これにより成り立つ関係式

$$d\mathbf{S} = \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} \Delta \tau = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \Delta \tau \quad (4.134)$$

を利用することである． $\mathbf{S}$  の時間微分を計算し，出てきた  $\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}$  でくくり， $\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \rightarrow \Delta \mathbf{u}$  と置き換えれば，くくられた行列が  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}}$  となる．

#### 4.2.4 変位-歪マトリクス

有限要素分割により，要素内に連続な変位分布が定義されると，それを微分することで変位勾配や歪を求められるから，要素変位と歪の関係を導ける．最終的には接線剛性マトリクスを導出するために使用するため，先に変位と歪の関係について述べる．

Green-Lagrange 歪  $\mathbf{E}$  テンソルおよびその変分  $\delta \mathbf{E}$  はベクトル形で次のように書ける．

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1}^2 + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}^2 + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2}^2 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}^2 + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3}^2 + \frac{\partial u_2}{\partial X_3}^2 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3}^2 \right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

$$\delta \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

したがって、 $\delta E$  と  $\delta u$  の関係式は、

$$\delta E = B^m \delta u^m = (B_1^m + B_2^m) \delta u^m, \quad B_1^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^m}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_3} \\ \frac{\partial N^m}{\partial X_2} & \frac{\partial N^m}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_3} & \frac{\partial N^m}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N^m}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_1} \end{bmatrix}, \quad (4.137)$$

$$B_2^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial N^m}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial N^m}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial N^m}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial N^m}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial N^m}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial N^m}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial N^m}{\partial X_3} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial N^m}{\partial X_3} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \frac{\partial N^m}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial N^m}{\partial X_2} + \frac{\partial N^m}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial N^m}{\partial X_2} + \frac{\partial N^m}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial N^m}{\partial X_2} + \frac{\partial N^m}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial N^m}{\partial X_3} + \frac{\partial N^m}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial N^m}{\partial X_3} + \frac{\partial N^m}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial N^m}{\partial X_3} + \frac{\partial N^m}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial N^m}{\partial X_1} + \frac{\partial N^m}{\partial X_3} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial N^m}{\partial X_1} + \frac{\partial N^m}{\partial X_3} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \frac{\partial N^m}{\partial X_1} + \frac{\partial N^m}{\partial X_3} \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

のように  $B^m$  を変位ベクトルに掛けることで求められる。この  $B^m$  を変位-歪マトリクスと呼ぶ。

歪のヤコビアン成分  $\frac{\partial E}{\partial u} \Delta u$ ，その変分のヤコビアン成分  $\frac{\partial \delta E}{\partial u} \Delta u$  についても Eqn. (4.135)，Eqn. (4.136) より求めることができる。まず歪のヤコビアンは，Eqn. (4.135) を見れば分かる通り，Eqn. (4.138) を用いて

$$\frac{\partial E}{\partial u} \Delta u^m = B^m \Delta u^m = (B_1^m + B_2^m) \Delta u^m, \quad (4.139)$$

となる。次に変分のヤコビアン成分  $\frac{\partial \delta E}{\partial u} \Delta u$  は，Eqn. (4.136) から

$$\frac{\partial \delta E}{\partial u} \Delta u = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial \Delta u_3}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \Delta u_1}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \Delta u_3}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \Delta u_1}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Delta u_3}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \Delta u_1}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \Delta u_3}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \Delta u_1}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \Delta u_3}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \Delta u_1}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial \Delta u_3}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

テンソル表示を使えば，次のように書ける。

$$\frac{\partial \delta E}{\partial u} \Delta u = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right)^T \frac{\partial \Delta u}{\partial X} + \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial X} \right)^T \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right] \quad (4.141)$$

これらを用いて，既知配置で線形化した釣り合い式のヤコビアン行列（接線剛性行列）を求めていく。

#### 4.2.5 接線剛性マトリクスおよび質量マトリクス

接線剛性マトリクスは，Eqn. (4.133) の各項のうち変位増分  $\Delta u$  の係数となる行列である。これに対応する項は，Eqn. (4.133) の第二項および第三項であり，各要素で次を計算する。

$$\int_{V_e} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial u} \Delta u \right) \cdot \delta E + S \cdot \left( \frac{\partial \delta E}{\partial u} \Delta u \right) \right] dV_X - \int_{V_X} \rho_0 \left( \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u \right) \cdot \delta u dV_e \quad (4.142)$$

平衡点を求めるための Newton-Raphson 法におけるヤコビアン行列であり，一方で物理的な解釈としては平衡点まわりの微小振動の振動モードを決定する行列であるから，本研究において非常に重要である。

### 初期変位行列

初期変位行列  $K_L$  は, Eqn. (4.133) のうち変位増分により生じた応力増分がする仮想仕事に対応する剛性マトリクスで, [ ] 内初項に該当する. これは, 応力-歪関係式  $S = \bar{D}E$  および前小節で求めた  $B^m$  を用いて次のように書ける.

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \right) \cdot \delta \mathbf{E} = \delta \mathbf{E} \cdot \left( \bar{D} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \right) \quad (4.143)$$

$$= (B^m \delta \mathbf{u}^m) \cdot (\bar{D} B^n \Delta \mathbf{u}^n) \quad (4.144)$$

$$= \delta \mathbf{u}^{mT} B^{mT} \bar{D} B^n \Delta \mathbf{u}^n \quad (4.145)$$

節点変位ベクトルは要素内の位置によらないので積分の外に出せて, 初期変位行列  $K_e$  は

$$\int_{V_e} \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \right) \cdot \delta \mathbf{E} dV_e = \delta \mathbf{u}^{mT} K_e^{mn} \Delta \mathbf{u}^n, \quad K_e^{mn} = \int_{V_e} B^{mT} \bar{D} B^n dV_e \quad (4.146)$$

### 初期応力行列

初期応力行列  $K_{NL}$  は, Eqn. (4.133) のうち, 変位増分による変形が生じることで, 既知の応力場がする仮想仕事に対応する剛性マトリクスで, [ ] 内第二項に該当する. これは, 次の行列を用いてまとめることができる.

$$\mathbf{S} \cdot \left( \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \right) = \mathbf{S} : \left( \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} S_{ij} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i} S_{ij} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} \right] \quad (4.147)$$

$$= \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} S_{ij} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j} \quad (4.148)$$

$$= \delta \mathbf{u}^m B_{NL}^{mT} \bar{S} B_{NL}^n \Delta \mathbf{u}^n \quad (4.149)$$

$$B_{NL}^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^m}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N^m}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N^m}{\partial X_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_3} \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 & S_{12} & 0 & 0 & S_{13} & 0 & 0 \\ 0 & S_{11} & 0 & 0 & S_{12} & 0 & 0 & S_{13} & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & 0 & 0 & S_{12} & 0 & 0 & S_{13} \\ S_{21} & 0 & 0 & S_{22} & 0 & 0 & S_{23} & 0 & 0 \\ 0 & S_{21} & 0 & 0 & S_{22} & 0 & 0 & S_{23} & 0 \\ 0 & 0 & S_{21} & 0 & 0 & S_{22} & 0 & 0 & S_{23} \\ S_{31} & 0 & 0 & S_{32} & 0 & 0 & S_{33} & 0 & 0 \\ 0 & S_{31} & 0 & 0 & S_{32} & 0 & 0 & S_{33} & 0 \\ 0 & 0 & S_{31} & 0 & 0 & S_{32} & 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

したがって, 初期応力行列  $K_{NL_e}$  を次のように計算することができる.

$$\int_{V_e} \mathbf{S} \cdot \left( \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \right) dV_e = \delta \mathbf{u}^{mT} K_{NL_e}^{mn} \Delta \mathbf{u}^n, \quad K_{NL_e}^{mn} = \int_{V_e} B_{NL}^{mT} \bar{S} B_{NL}^n dV_e \quad (4.151)$$

### 外力行列

外力行列  $K_F$  は, Eqn. (4.133) のうち, 変位増分が生じた結果, 外力が変動する効果による剛性を表す. この項は, 重力に代表される一様体積力がかかる場合は現れないが, 遠心力や電磁気力などの非一様体積力がかかる場合出現する. 回転機械に代表される回転場においては, 遠心力による応力の影響がかなり大きい, この項も剛性マトリクスに寄与してくる. 遠心力は回転半径方向の剛性を低下させる効果があることから「遠心軟化項」と呼ばれ, 一般に物体の振動数を下げる効果がある.

遠心力が働く時を考える．角速度  $\omega$  で回転する系における運動方程式を考える．いま，微小体積  $dV$  に作用する体積力  $g$  の 3 成分は，回転中心を原点にとることで次式で与えられる．

$$\mathbf{g} = -\omega \times (\omega \times \mathbf{x}) - 2\omega \times \mathbf{v} - \dot{\omega} \times \mathbf{r} \quad (4.152)$$

角速度を一定とし，振幅は微小として，運動速度に対して回転速度が遥かに大きいとすれば ( $|x|\omega \gg v$ ) 上式の第 2 項 (コリオリ力) と第 3 項 (回転角加速度による力) は無視でき，物体に作用する慣性力は遠心力が支配的となる．遠心力のヤコビアン行列は， $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$  を利用して，

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = -\omega \times (\omega \times \Delta \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \quad (4.153)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = - \begin{bmatrix} -(\omega_2^2 + \omega_3^2) & \omega_1\omega_2 & \omega_3\omega_1 \\ \omega_1\omega_2 & -(\omega_3^2 + \omega_1^2) & \omega_2\omega_3 \\ \omega_3\omega_1 & \omega_2\omega_3 & -(\omega_1^2 + \omega_2^2) \end{bmatrix} = -\Omega \quad (4.154)$$

これを用いて，遠心力の外力行列  $K_{ge}$  を次のように計算することができる．

$$\delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^{mT} N^{mT} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} N^n \Delta \mathbf{u}^n \quad (4.155)$$

$$- \int_{V_e} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} dV_e = \delta \mathbf{u}^{mT} K_{ge}^{mn} \Delta \mathbf{u}^n, \quad K_{ge}^{mn} = \int_{V_e} \rho_0 N^{mT} \Omega N^n dV_e \quad (4.156)$$

### 接線剛性マトリクス

以上より，各要素に対する仮想仕事は，接線剛性マトリクス  $K$  を用いて次のように変形できる．

$$\text{Eqn. (4.142)} = \delta \mathbf{u}^{mT} (K_e + K_{NLe} + K_{ge})^{mn} \Delta \mathbf{u}^n \quad (4.157)$$

### 質量マトリクス

質量マトリクスは，Eqn. (4.133) の各項のうち加速度の項に含まれるマトリクスである．これは，節点値より内挿された仮想変位および加速度を計算することで，各要素に対し次のようになる．

$$\int_{V_e} \rho_0 \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} dV_e = \delta \mathbf{u}^m M_e^{mn} \mathbf{a}^m, \quad M_e^{mn} = \int_{V_e} N^{mT} \rho_0 N^n dV_e \quad (4.158)$$

## 4.2.6 外力ベクトルおよび内力ベクトル

外力ベクトルおよび内力ベクトルは，仮想仕事式 Eqn. (4.133) の既知配置における外力と内力の仮想仕事に対応するベクトルであり，これらを要素内内挿値を用いて計算すると出現する．それは，これらの各項に対応する．

$$\int_{V_X} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} dV_X - \int_{S_x^{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS_x - \int_{V_X} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV_X$$

### 外力ベクトル

表面力および体積力の項は，次のようにして変形できる．

$$\int_{S_x^{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS_x = \delta \mathbf{u}^{mT} \mathbf{F}_{S_e}^m, \quad \mathbf{F}_{S_e}^m = \int_{S_x^{t_0}} N^{mT} \mathbf{t}_0 dS_x \quad (4.159)$$

$$\int_{V_e} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dV_e = \delta \mathbf{u}^{mT} \mathbf{F}_{V_e}^m, \quad \mathbf{F}_{V_e}^m = \int_{V_e} N^{mT} \rho_0 \mathbf{g} dV_e \quad (4.160)$$

ここに,  $F_{S_e}^m, F_{V_e}^m$  を, 節点  $m$  に対する要素等価節点力といい, ある要素  $V_e, S_e$  にかかる表面力, 体積力を節点力として入れた場合の, 節点  $m$  への寄与を表している.

### 内力ベクトル

内部応力の項は, 歪-変位関係式で導いた  $B$  マトリクスを用い, 次のようにして変形できる.

$$\int_{V_e} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} dV_e = \delta \mathbf{u}^{mT} \mathbf{Q}^m, \quad \mathbf{Q}^m = \int_{V_e} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{S} dV_e \quad (4.161)$$

### 仮想仕事式のまとめ

以上により, 仮想仕事式 Eqn. (4.133) に出現する各項を計算した. これらをまとめ, 全節点変位をまとめたベクトルである全体節点変位ベクトルを  $\mathbf{u}$  と書くと, 有限要素法により離散化された運動方程式は次のように書ける.

$$\delta \mathbf{u}^T (\mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{Q} - \mathbf{F}_S - \mathbf{F}_V) = 0 \quad \text{for } \forall \delta \mathbf{u} \quad (4.162)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V - \mathbf{Q} \quad (4.163)$$

これが既知配置まわりで線形化された運動方程式である. 既知配置が力学的平衡点である場合, そのまわりの微小振動の運動方程式は, 速度, 加速度, 内力・外力ベクトルに対して以下の関係

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \Delta \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}} = \Delta \ddot{\mathbf{u}} \quad (4.164)$$

$$\mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V - \mathbf{Q} = \Delta (\mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V) + (\mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V - \mathbf{Q}) \quad (4.165)$$

$$= \Delta (\mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V) \quad (4.166)$$

が成立し, 次のように書き換えられる.

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \Delta (\mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V) \quad (4.167)$$

本研究では, 力学的平衡点を求めるときは Eqn. (4.163) から加速度をゼロとして求めている. また, 振動解析においては平衡点まわりで線形化された運動方程式 Eqn. (4.167) を用いて微小振動の解析を行なっている.

### 4.2.7 モード分解

運動方程式 Eqn. (4.167) は, 大規模な 2 階の連立常微分方程式である. 有限要素法による振動解析においては, 対象の離散化を終えると自由度数が大きくなりすぎてしまい直接時間積分をすると計算コストがかかりすぎてしまう場合がある.

有限要素モデルの自由度縮小には, モード合成法の他にグヤン縮退による方法などが使われる. これらを用いることにより, 現実的に連成解析や結果の解釈が可能な自由度数まで自由度をしばり込む. 後者はモードという概念を用いることなく, 縮小した質量行列・剛性行列を導く一般性の高い方法であるが, 消去する自由度の選び方に任意性が高く, 統一的な基準は存在しない.

そこで, 本研究ではモード合成法による振動解析を行なっている. モード合成法とは, 離散化してできた運動方程式の固有値・固有ベクトルを求め, 解析したい振動に寄与する有限個の振動モードのみに自由度を縮小し, 変動外力に対する応答を, 各振動モードの重ね合わせで表現する方法であり, 建築物や土木・機械構造物の振動解析に広く用いられている.

モード分解により, 自由度を有限個のモードに取り縮小することは次のようにして行われる. まず, 運動方程式の (右辺)=0, 即ち

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.168)$$

の一般化固有値問題を解く． $\Delta \mathbf{u} = \phi e^{i\omega t}$  と，モード形状ベクトル  $\phi$  の単振動を仮定すると，一般化固有値問題

$$\omega^2 M \phi = K \phi \Leftrightarrow \left( \frac{1}{\omega^2} \right) \phi = K^{-1} M \phi \quad (4.169)$$

が得られる．実用上は，一般的な反復的固有値解法を用いるとふつつ固有値の大きい方から求まるため，標準固有値問題に帰着させ低次振動モードから解くために，振動数の逆数を固有値と見た 2 番目の形式を用いるが，問題としては元の形式と等価である． $K, M$  はともに実対称行列なので，求まる固有値・固有ベクトルは全て実数である．

これにより，原理的には  $\mathbf{u}$  の自由度数  $n$  の固有値固有モード  $\omega_i, \phi_i$  が出現する．モード座標系  $q_i$  を導入し，変位を各モードの重ね合わせ

$$\Delta \mathbf{u} = \sum q_i \phi_i = \Phi \mathbf{q}, \quad \Phi = [\phi_1 \quad \cdots \quad \phi_{N_f}], \quad \mathbf{q} = [q_1 \quad \cdots \quad q_{N_f}]^T \quad (4.170)$$

で表現する．運動方程式は，両辺にモード固有ベクトルを内積することで，次のようにモードごとの非連成連立方程式に分解できる．

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T K \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \Delta \mathbf{F} \quad (4.171)$$

$$m_i \ddot{q}_i + k_i q_i = f_i, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \quad (4.172)$$

質量・接線剛性マトリクスは次のように対角化され，外力ベクトルはモード固有ベクトルとの内積として各モードに入力される．

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_{N_f} \end{bmatrix}, \quad \Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_{N_f} \end{bmatrix}, \quad \Phi^T \Delta \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \cdot \Delta \mathbf{F} \\ \vdots \\ \phi_{N_f} \cdot \Delta \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

本研究では，固有ベクトル  $\phi_i$  に対して全てのモード質量が  $m_i = 1$  となるように無次元化を施している．このとき，モード剛性が  $k_i = \omega_i^2$  と，固有円振動数の 2 乗になる．

モードごとの運動方程式を時間発展させることは，流体ソルバによる変動空気力計算にかかる時間より圧倒的に少ない．したがって，モード合成法はフラッター解析の効率を大幅に向上させているといえる．

### モード別運動方程式の解法

導いたモード別運動方程式は，非連成であるからモードごとに同じ解き方をすればよい．まず，Eqn. (4.172) は 2 階常微分方程式であるから，一階の連立常微分方程式に書き換える．各モードの変位と速度を並べた状態量ベクトル  $\mathbf{s}_i$  を導入し，以下のように変形できる．

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_i^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{s} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_i \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{s}} = A \mathbf{s} + \mathbf{f} \quad (4.174)$$

これを Crank-Nicolson 法により時間積分する．右辺を中心差分，左辺を  $n$  と  $n+1$  Step で評価すれば，

$$\frac{\mathbf{s}^{n+1} - \mathbf{s}^n}{\Delta t} = A \frac{\mathbf{s}^{n+1} + \mathbf{s}^n}{2} + \frac{\mathbf{f}^{n+1} + \mathbf{f}^n}{2} \quad (4.175)$$

$$\left[ \frac{1}{\Delta t} - \frac{A}{2} \right] \mathbf{s}^{n+1} = \frac{\mathbf{s}^n}{\Delta t} + \frac{A}{2} \mathbf{s}^n + \frac{\mathbf{f}^{n+1} + \mathbf{f}^n}{2} \quad (4.176)$$

$$\mathbf{s}^{n+1} = \left[ \frac{1}{\Delta t} - \frac{A}{2} \right]^{-1} \left[ \frac{\mathbf{s}^n}{\Delta t} + \frac{A}{2} \mathbf{s}^n + \frac{\mathbf{f}^{n+1} + \mathbf{f}^n}{2} \right] \quad (4.177)$$

となる．微小振動の運動方程式は線形なので，外力が求まっていれば反復なしで時間積分できる．流体構造連成させる場合は， $\mathbf{f}^{n+1}$  が流体ソルバから求められるため，内部反復中に流体ソルバから受け取った値に逐次更新される．

## 2次元の計算における運動方程式

2次元の振動計算における運動方程式は、並進（もともと線型）および回転運動を線形化することにより、運動方向の固有ベクトルを求めることが可能である。物体の有限要素モデルを作成し、振動方向として運動を線形化した固有ベクトルを用いることで有限要素法により導いた振動方程式と同じコードで計算を行うことが可能である。この導き方について説明する。

2次元の計算に対しては、並進・回転に対する運動方程式が次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix} \quad (4.178)$$

まず、並進運動については、有限要素モデルの各自由度に対応する固有ベクトルを、運動方向の単位ベクトル  $n$ 、FEM モデルの節点数を  $N$ 、翼質量を  $m$  として、各自由度のモード変位を

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{m}} \left[ \dots \quad n^T \quad \dots \right]^T, \quad \mathbf{u} = q\phi, \quad q = \sqrt{mh} \quad (4.179)$$

とすれば、このモードに対する運動方程式

$$\ddot{q} + \frac{K_h}{m} q = \phi^T \Delta F \quad (4.180)$$

は、並進方向の運動方程式と等価になる。

$xy$  平面内の回転運動に対しては、線形化位置からの回転変位を  $\alpha$  とした回転運動が、回転行列を用いて

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \mathbf{r}_0 = \Pi \mathbf{r}_0 \quad (4.181)$$

$$\simeq u(\alpha=0) + \frac{d\Pi}{d\alpha}(\alpha=0) \mathbf{r}_0 \alpha \quad (4.182)$$

$$\simeq u(\alpha=0) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_0 \alpha \simeq u(\alpha=0) + \begin{bmatrix} y_0 \\ -x_0 \end{bmatrix} \alpha \quad (4.183)$$

$$(4.184)$$

と近似できることから、回転運動を線形化した運動の固有ベクトルが以下のように求まる。

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{I}} \left[ \dots \quad y_0 \quad -x_0 \quad 0 \quad \dots \right]^T, \quad \mathbf{u} = q\phi, \quad q = \sqrt{I}\alpha \quad (4.185)$$

### 4.2.8 製造形状の逆解析法

有限要素解析により翼振動のモード解析を行う際には、前述の通り翼形状と翼に作用する応力分布が必要になるため、「設計点形状」のみではモード解析を行うことはできず、製造時形状の逆解析を一旦求めて回転時の解析を行わなくてはならない。

ターボ機械において翼形状は、ふつう空力的な設計点 (Aerodynamic design point, ADP) において検討され決められる。設計点の形状というのは、動翼を考えた場合、設計点ではもちろん翼やディスクは回転しており、設計点形状は遠心力や空気が加わって変形した後の形状である。また翼形状は回転数や空力荷重によって様々に変化するため、一般に運転時の形状は Hot shape, running shape などと呼ばれる。したがって、翼を製造する際には設計点形状から荷重が取り除かれ、静止している時の形状 (製造時形状, Cold shape, manufactured shape) を求める必要がある。

しかしながら、製造時形状を数値的に求めるのは以下の点からなかなか容易なことではない。

- 翼変形解析において構成則が「変形前を基準にした変位から求めた歪」により与えられること。
- 外力と変位の関係は非線形なものであるため、逆変換を考えることが困難なこと。

このため、製造時形状を求める問題において通常の幾何非線形 FEM における Newton 法が用いることができず、仮に Newton 反復中に変位の更新と共に基準配置を更新するという形で用いたとしても、計算を収束させることができない。いっぽう、変形前を基準配置にした順方向の解析においては、Newton 反復は厳密であり収束性が非常に良いことから、本研究では、以下の手続きで変形前形状  $X$  を反復的に求める。

1. 設計点形状  $x_{\text{Hot}}$ , 設計点における外力 (遠心力+空気力)  $F_{\text{Hot}}$  を求める。
2. 初期条件として  $X = x_{\text{Hot}}$  を設定
3. 基準配置  $X$  を固定し, Newton 反復を収束させ, 設計点における外力に対する変位  $u$  を求める
4. Hot 形状に対する誤差評価として, 翼形状の相対誤差  $\varepsilon = |x_{\text{Hot}} - (X + u)|/|u|$  を計算。これが単調減少していけば収束する。誤差が大きい時,  $X = x_{\text{Hot}} - u$  として基準配置を更新して, 3 へ。

この手続きで肝心なのは、安定な順方向の計算から製造時形状を求めること、つまり 3 の操作を繰り返すことにある。しかし、この繰り返し手続きは Newton 法ではないため、収束が非常に遅く、改良の余地はあると思われる。筆者の経験では、翼型にもよるが、30 回程度繰り返すと変位の相対残差が  $10^{-4}$  程度になる。Fig. 4.3 に、逆解析元の形状と逆解析によって求めた形状の例を示す。翼端部にゆくに従い変形量が大きくなり、また特に前縁付近でねじれ戻りの影響があることが見て取れる。

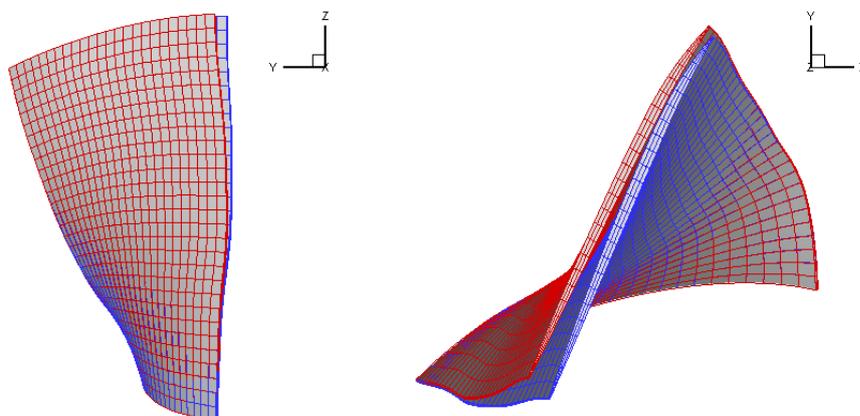


Fig. 4.3: Hot shape (red) and transformed cold shape (blue). Large untwist can be seen at the leading edge of the tip.

## 4.3 流体-構造連成法

### 4.3.1 分離型反復解法

流体-構造連成手法には、流体部分と固体部分の取り扱いに関して、大きく分けて二種類の方法がある [87]。一つは強連成法といい、流体と固体を同一の離散化法によって離散化し、双方の状態量が混合した連立方程式を解く方法である。これは固体の変形がとて大きい場合でも計算が安定する、堅牢な手法であることが知られている。しかしながら、流体・固体が複合した連立方程式を一度に解くことのできる、専用のプログラムを開発する必要がある。

一方、既存の流体ソルバ・固体ソルバを境界条件を介して結びつけることで、双方の影響を考慮することも連成系の解法として考えることができる。これは弱連成法と呼ばれている。弱連成法は、境界条件により双方の影響が考慮されるので、強連成とは異なり既存のソルバを利用することができる。しかしながら、両者を適切に結びつけることができないと計算が不安定になったり、結びつける方法に起因して非物理的な解が生じてしまう可能性がある。したがって、連成法の導入に際しては、それが結びつけるソルバ同士で適切な方法であるかを前もって検証しておく必要がある。

ソルバ分離型反復解法と呼ばれる、強連成と弱連成の中間的な性質を持つ連成法も存在する。これは、ソルバ間が弱連成法のように境界条件を介して結び付けられながら、両ソルバの離散化式の残差を反復解法により減少させ、両方程式と境界条件が漸近的に満たされるようにするものである。このような特徴から、漸近的強連成とも呼ばれることもある。反復的に連成解を求めることで、連成させるソルバ同士がより強く結び付き、計算の安定性が増すといわれている。このような考え方を基盤としたアルゴリズムは流体-構造連成法でよく用いられている。

本研究では、流体ソルバに反復解法が組み込まれている。したがって、流体ソルバの反復解法を利用しながら、途中に固体の運動解析を組み込むことで、前述のソルバ分離型反復解法（以後、反復解法と呼ぶ）を導入した。

分離型反復解法において、1 Timestep 進行内における反復アルゴリズムは次のようになる。

1. 現 step の流体力と固体速度より、次 step における固体位置を予測する。
2. 予測された固体位置から、次 step における流体力を予測する
3. 新たに求められた次 step の流体力から、次 step の固体位置を修正する
4. 修正された固体位置を用い、次 step における流体力を修正する
5. 3,4 を繰り返すことで、次 step の流体力および固体変位を収束させる
6. 十分流体力および変位が収束したら、次 step の値を確定し時間を進め、1 に戻る

これに基づくアルゴリズム内では、各ソルバは境界条件を次のように授受している。

- 流体ソルバ：固体連成面変位  $u_s$  を受け取り、流体力  $F_s$  を固体ソルバに転送する
- 固体ソルバ：流体力  $F_s$  を流体ソルバから受け取り、固体連成面変位  $u_s$  を転送する

以降これらの受け渡し法について説明する。

### 4.3.2 変位の伝達法

本研究では変位によるエネルギー保存条件から導かれる力の受け渡し法 [88][89][90] を採用する。これを採用した理由は二つあり、一つ目は変位を受け渡した行列を用いて力も受け渡せること、二つ目はフラッター現象を「空力的負減衰力によりエネルギーが構造体に入る現象」という視点から見ると、エネルギー保存に基づいた定式化がふさわしいと考えたからである。

構造モデル連成面で構造モデル表面力  $F_s$  がされる仕事  $W_s$ 、流体モデル連成面で流体モデル表面力  $F_a$  がする仕事  $W_a$  は、構造モデル変位を  $u_s$ 、流体モデル変位を  $u_a$  とすると次式で与えられる。

$$W_s = \mathbf{u}_s^T \mathbf{F}_s \quad (4.186)$$

$$W_a = \mathbf{u}_a^T \mathbf{F}_a \quad (4.187)$$

ここで構造モデルから流体モデルへの変位の受け渡しは線型変換であるとき，変換行列が  $G$  であるとすれば， $\mathbf{u}_a = G\mathbf{u}_s$  と両連成面での仕事が等しいから，

$$\mathbf{u}_s^T \mathbf{F}_s = \mathbf{u}_a^T \mathbf{F}_a = \mathbf{u}_s^T G^T \mathbf{F}_a \quad (4.188)$$

$$\mathbf{F}_s = G^T \mathbf{F}_a \quad (4.189)$$

となり，同じ行列を用いて構造モデル表面力を計算することができる．

この受け渡し法を用いるためには，構造連成面における節点変位を流体ソルバの連成面の格子点変位に受け渡す必要がある．本研究で用いた固体要素は節点を流体の格子と一致させていない．したがって何らかの外挿法あるいは補間法を用いて変位を受け渡すことになる．板要素を用いた連成解析においては無限に広い板理論の曲げ変位を用いる IPS 法，連成面全体を有限要素法における平面要素とみなして高次の形状関数を用いて補間を行う TPS 法，近い点を検索しスプライン補間をする B-Spline 法などがあるが，ソリッド要素を用いた場合，連成面は板の中央面ではなく構造表面であるため，これらの方法を用いるためには中央面変位をあらかじめ既知の節点変位より内挿で求める必要がある．

そこで，CFD 格子における変位場を FEM 格子を点群データと見立て，その点群のもつ値から周囲のスカラー場を再構築するような手法を用いるようにする．

#### 移動最小二乗法による内挿の応用

移動最小二乗法 (Moving Least Square, MLS) [91] は，距離基底関数 (Radial basis function, RBF [92]) と類似して主として点群データの取扱いや内挿，曲面の構成などに用いられる関数値再構築手法である．数値解析手法においては，Element-Free Galerkin 法に代表される，格子という概念を用いない数値計算法である「メッシュレス法」において，物理量の再構築に用いられたりする．これは，補間される点の変位場  $u_f$  を，周囲の  $N$  個の点の変位場  $u_1, \dots, u_N$  と，距離に基づく重み関数  $w(r_l)$ ， $r_l = |\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_l|$ ， $M$  個の空間基底関数  $p_1, \dots, p_M$  を用いて重み付き最小二乗法に基づき決定するものである．

空間再構築の関数形状は，基底関数  $p_j$  に関する大きさ  $a_j$  を用い，基底関数の線形結合で Eqn. (4.190) と表す．また，重み付き最小二乗法の評価関数  $J$  は Eqn. (4.191) で与えられ，各評価点におけるサンプリング値と再構築された関数の残差の重み付き二乗和を取ったものである．

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M p_j(\mathbf{x}) a_j = \mathbf{p}^T \mathbf{a} \quad (4.190)$$

$$J = \sum_{l=1}^N w(r_l) [u(\mathbf{x}) - u_l]^2 \quad (4.191)$$

$J$  の停留条件を満たすよう， $\mathbf{a}$  で偏微分し 0 とおくと，次のように  $\mathbf{a}$  に関する方程式が導ける．

$$\sum_{l=1}^N w(r_l) \begin{bmatrix} p_1 p_1 & \cdots & p_1 p_M \\ & \ddots & \vdots \\ \text{sym} & & p_M p_M \end{bmatrix} \mathbf{a} = \sum_{l=1}^N w(r_l) u_l \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow P^T W P \mathbf{a} = P^T W \mathbf{u}_s \quad (4.192)$$

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(\mathbf{x}_1)^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}(\mathbf{x}_N)^T \end{bmatrix} (N \times M), \quad W = \begin{bmatrix} w(r_1) & & \\ & \ddots & \\ & & w(r_N) \end{bmatrix} (N \times N), \quad \mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (4.193)$$

Eqn. (4.192) から  $\mathbf{a}$  を求めることで，内挿を受ける点  $\mathbf{x}_f$  まわりにおける変位場が再構築される．直接値を求めることも可能だが，連成解析における仕事の保存条件を用いた変位伝達則 Eqn. (4.189) を直接用いるには，内挿に用いられる点と内挿を受ける点の変位が線形の関係式で結ばれる必要がある．変換則を求めるには，Eqn. (4.190) を用いて消去することで，以下ようになる．

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{p}(\mathbf{x}_f)^T (P^T W P)^{-1} P^T W \mathbf{u}_s = \mathbf{G}^T \mathbf{u}_s \quad (4.194)$$

これを見ると，補間係数ベクトル  $G^T$  は，格子間の位置関係によってのみ計算できることがわかる．したがって， $x$  方向， $y$  方向， $z$  方向の変位を，各点で  $G^T$  を用いて補間することで，流体ドメインの翼表面変位を求めることが出来る．

最小二乗法の重み係数  $w(r)$  は，内挿点  $x_f$  と固体メッシュ点  $x_l$  の距離  $r$  に基づく関数である．今回は，Fig. 4.4 に示すような Element-Free Galerkin 法で使用されることの多い 4 次スプライン関数

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + 8\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 - 3\left(\frac{r}{r_0}\right)^4 & (0 \leq r \leq r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases} \quad (4.195)$$

とし，重み基準半径  $r_0$  は有限要素メッシュの辺の長さの最大値とした．この関数は，内挿を受ける点に近ければ近いほど重みが増し，逆に重み基準半径より遠くにいる点の情報は考慮しないという重み関数である．また，空間基底は，次の 7 個とした．

$$p^T = [1 \quad x \quad y \quad z \quad xy \quad yz \quad xz] \quad (4.196)$$

これにより，周囲の点が  $(P^T W P)^{-1}$  が存在するように，最低 7 点うまく選ばれれば MLS による空間内挿が行える．なお数値解析上の技法として，MLS 内挿に用いる最大点数は大きくなりすぎてもいけないことから， $N \leq 20$  と制限した．

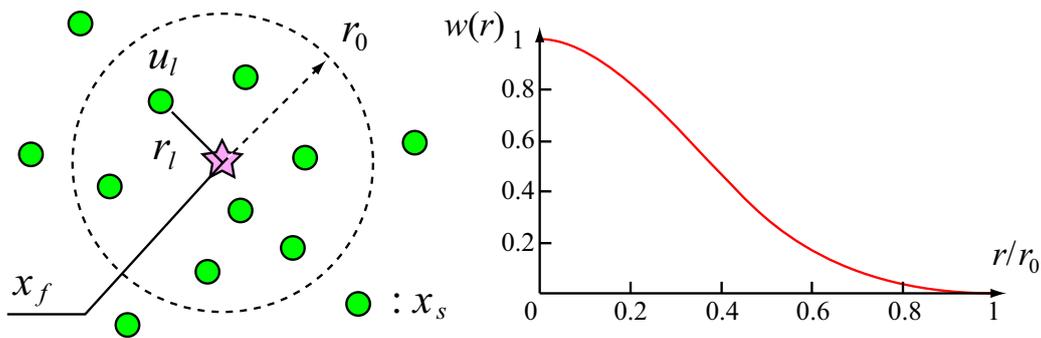


Fig. 4.4: The weight function of the moving least squares interpolation

翼表面における流体力は，流体ドメイン翼表面における仕事と固体ドメイン表面力による仕事がつりあうよう，MLS による内挿係数  $G^T$  を用いて，次のように内挿している．

$$u_f^T F_f = u_s^T F_s \Rightarrow F_s = \sum (GF)_{x_f} \quad \text{for all points, each direction} \quad (4.197)$$

ここで，MLS 法による変位再構築・内挿が非常にロバストであることを示すために，同じく連成解析に用いられる，Badcock [93] による Linear-CVT 法と翼振動モード変位の内挿結果を比較してみる．

Linear-CVT 法はある CFD 格子に対して FEM 格子近傍 3 点を用いる線形的な空間内挿の一種である．本研究ではこの手法を用いた場合に補間が局所的なものであることから，CFD 格子と FEM 格子の間で格子密度が大きく異なる場合において補間の滑らかさが損なわれ，補間結果に凹凸が生じてしまう現象を確認している．こうしてなめらかな補間が行われないと，CFD 格子の前縁付近などに微細な凹凸ができ，翼面上流れが超音速の領域で圧縮波や膨張波が多数生じて CFD の流れ場を汚染してしまう．そのため，より正確で数値的に扱いやすく，かつ「空間的に滑らかな」内挿手法を選択することは，このようなフラッター解析における数値解析上の要点の 1 つであると考えられる．

Fig. 4.5 に，FEM 格子から CFD 格子へ NASA Rotor 67 動翼の 1 次ねじりモードの変位を内挿したときの，MLS 法と Linear-CVT 法間での比較を示す．FEM 格子は翼弦方向に一樣な格子幅をもっており，CFD 格子とは局所的な格子密度が大きく異なる．MLS, Linear-CVT には翼面上変位の等高線を示している．このような場合には Linear-CVT 法のような局所的な内挿を用いると内挿された CFD 格子上の変位は翼の前縁・後縁で非常にいびつなものとなるが，MLS を用いると等高線がずれることなく，かつ滑らかに補間されることがわかる．

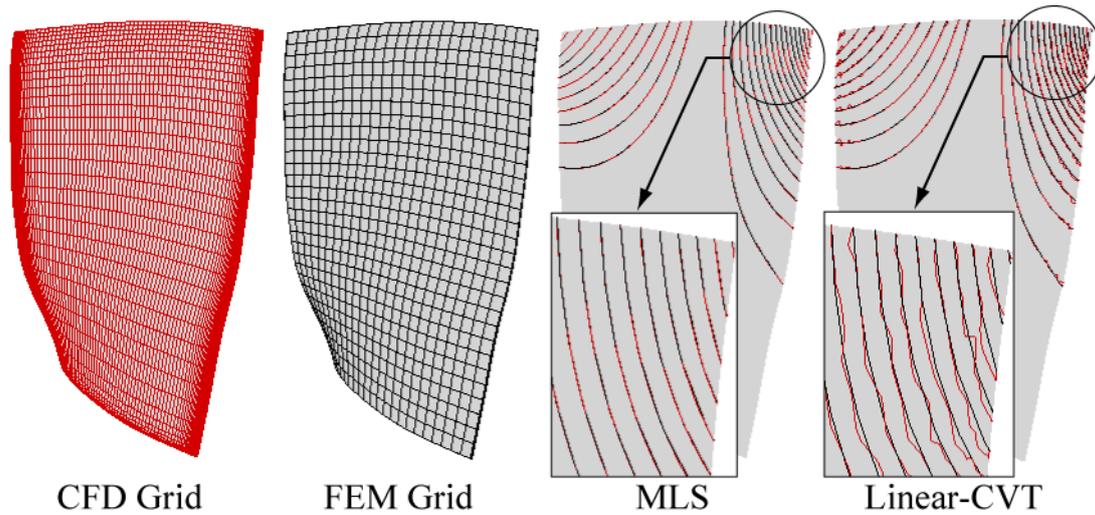


Fig. 4.5: Comparison of mapping methods of the blade displacement (MLS and Linear-CVT[93]). Red: interpolated displacement on the CFD grid, Black: displacement on the FEM grid (Source)

### 4.3.3 流体力の伝達法

#### CFD から FEM への流体力の受け渡し

FEM 接点にかかる流体力に関しても，双方のする or される仕事が等しいという条件から，変位を受け渡したときと同じ行列を用いて受け渡すことが可能である．今回はこの定式化により CFD 節点における流体力を計算し，格子点変位を FEM 節点変位から計算する行列  $G$  を用いて，FEM 節点に入力力を求めている．このとき，連成面の CFD 節点における流体力  $F_a$  を，周囲の 4 つの連成面セル表面にかかる力を用いて次のように求めている．

$$F_a = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 F_i \tag{4.198}$$

$$F_i = p_i S_i, i = 1, 2, 3, 4 \tag{4.199}$$

なお，このとき連成面全体での合力が相対誤差にして  $1.0 \times 10^{-14}$  のオーダーで成立していることを確認している．

### 4.3.4 格子変形の手法

本研究の流体-構造連成解析では、CFD において移動格子法を用い、翼の運動を翼面の格子を翼の運動に Lagrange 的に追従させることで表現している。この方法で格子を動かす時、翼面のみを動かせばよいわけではなく、計算領域全体でスムーズに格子変位を分布させるようにしないと、翼端部分で格子が大きく歪んだり、ひっくり返ったりして最終的には破綻し、格子体積が負になって計算を続行できなくなる。またマルチブロック法を用いる際は、領域間の連続性を確保するために、特別な工夫が必要になってくる。このようにターボ機械の翼振動計算における格子変形のさせ方に関しては、外部流れのフラッター計算とは異なる様々な困難がある。本研究では、状況に応じて二種類の格子変形手法を用いた。

(i) 代数的に格子を動かす手法

格子を動かす際に最も単純で計算負荷の低い方法は、格子線の情報を用いて代数的に格子を動かす方法である。

(ii) 有限要素法によるモーフィング手法（静解析）

前述の代数的に格子を動かす方法では、マルチブロック法を用いた際に翼周りのブロックが非常に小さい場合や、翼変形が大きい場合に翼端部分での格子のひずみが非常に大きくなってしまい、格子の質が悪くなるか計算が続行できなくなる。このような場合には、翼に隣接する流体ブロックのみならず、流路全体の流体ブロックを非構造的に接続し有限要素法でモーフィングをかけて変形させればよいと考えられる。格子のモーフィングは、CFD 格子を弾性体とみなす考え方の他に、ラプラシアンオペレータによるスムージング  $\nabla^2 u = 0$  ( $u$  はスカラー) が考えられるが、本研究では固体変形解析における FEM におけるコードの線形部分を流用できること、弾性定数を用いて変形挙動を調整できる自由度があることから、前者の方法を用いることにした。

固体の変形解析では大変形を取り扱うため非線形有限要素法を用いたが、格子のモーフィングについては翼面上変位が境界条件を満たしており、かつ格子が破綻しなければよいので、微小変形の定式化を用いた。流体格子全域のセル節点変位をまとめたベクトルを  $u_{CFD}$  とすると、離散化式は次のようになる。

$$\sum_e K_e u_{CFD} = 0, \quad u_{CFD} = u_{Blade} \quad (\text{at blade surface}) \quad (4.200)$$

モーフィングでは境界値問題が解ければ良いため、ロッキングが起こっていても差し支えない。また流体セルは辺上に中間節点をもたないため、1 次要素を用いて要素剛性行列  $K_e$  を計算する。第  $m$  節点と第  $n$  節点に対する要素剛性行列の成分は、

$$K_e^{mn} = \int_{V_e} B^{mT} D B^n dV_e, \quad B^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^m}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_3} \\ \frac{\partial N^m}{\partial X_2} & \frac{\partial N^m}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_3} & \frac{\partial N^m}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N^m}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_1} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 2\mu & 2\mu & & & \\ 2\mu & \lambda + 2\mu & 2\mu & & & \\ 2\mu & 2\mu & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.202)$$

構成則行列  $D$  は格子のどこを大きく動かして翼変位を吸収させるかを決めるのに重要となる。本研究では、翼面付近の格子は細かいことから相対位置ができるだけ変化しないよう、また格子の大きい流路中央部分で変位を大きく吸収するように、格子体積の逆数をヤング率  $E$  に与えた。また、各方向のひずみがカップリングしないように、ポアソン比を  $\nu = 0$  と与えた。モーフィングソルバは CFD の格子に対して行うため高々 1, 2 万自由度程度の固体変形解析に比べると 200 万点の格子ではおよそ 600 万自由度となりメモリ消費量が大いだが、1 次要素を用いているため自由度間の結合が小さいためか、共役勾配法による連立一次方程式求解は固体変形解析よりも容易であった。前処理には、Fill-in を考慮しない不完全 LU 分解の ILU(0) 前処理を用いた。

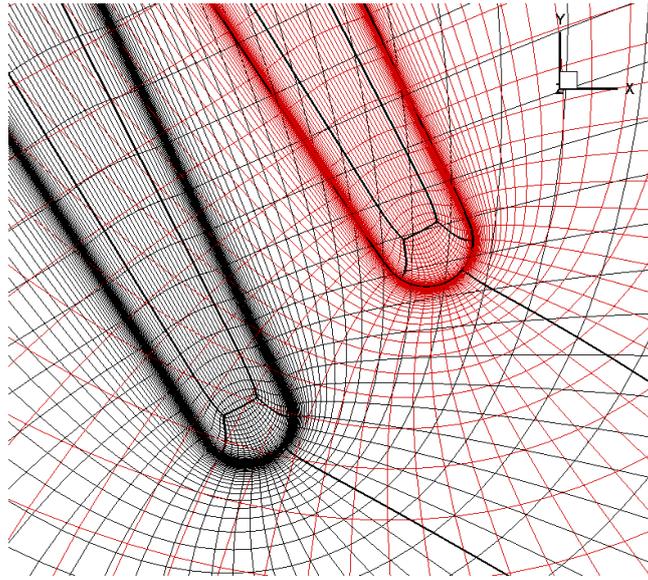


Fig. 4.6: An example of grid morphing result (black: before morphing, red: after morphing)

格子のモーフィングを行った結果を Fig. 4.6 に示す。Fig. 4.6 は翼端付近の格子の拡大図であり、翼面付近の格子の直交性が保たれたまま翼形状を変形させることができている。

(iii) 有限要素モーフィングの応用による、CFD 格子の翼振動応答関数を作成する手法（翼振動解析）

前述のモーフィング手法は、翼振動の解析にも応用することが可能である。各翼振動モードに対する流体格子の実変位は、各振動モードのモード変位に比例する。また、翼振動解析においては翼振幅を微小として取り扱っている。格子の運動も翼の運動に対して線形に応答するものとすれば、格子の変形の応答は

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{N_f} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} q_i(t) \quad (4.203)$$

として、モード  $i$  の単位モード変位あたりの格子変形  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$  が分かれば、Eqn. (4.203) により各時刻における CFD 格子位置  $\mathbf{x}(t)$  を算出することができる。

ここで  $\mathbf{x}_0$  は振動中心の格子座標、 $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$  を応答関数と呼ぶことにする。モーフィング手法により、応答関数は以下の手順で求めることができる。

1. モーフィングに入力する翼面上の変位を、 $i$  モードの単位モード変位の変位量、即ちモードベクトル  $\mathbf{u}_{\text{Blade}} = \phi_i$  とし、モード変位を FEM 節点から CFD 格子へ移動最小二乗法を用いマッピングする。
2. 翼面上の変位を変位境界条件とし、流体格子全域における変位値  $\mathbf{u}_{\text{CFD}}$  を連立一次方程式を解くことで求める。すると、解かれた値は即ち応答関数であり、 $\mathbf{u}_{\text{CFD}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$  となる。
3. 全ての翼振動モードについて (1)(2) を行う。

翼振動の解析に先立ってこれらの応答関数を作成しておき、計算開始時に読み込ませて計算中で使用することで、非定常計算中にモーフィングソルバの連立一次方程式を解くことなくモーフィングを実行できる。一方、メモリ使用量は増えてしまい、連成解析で取り込む翼振動モードの数だけ格子点情報が増えてしまう。

## 4.4 4 章のまとめ

本章では、本研究で用いる数値解析手法を流体・固体それぞれに分けて紹介し、それらを結びつける連成解析で用いられる方法について述べた。流体、固体の主要な計算手法を Table. 4.2 に、固体変形の Table. 4.3 にまとめて示す。

Table. 4.2: Numerical methods for flow simulatiuons

Governing equation	3D-RANS, Finite Volume Method, ALE formulation
Inviscid term	SHUS [65] +3rd MUSCL, Van-Albada limiter
Viscous term	2nd order central difference
Time derivative	(Steady) Euler implicit, (Unsteady) 2nd order 3 points Backward difference
Implicit relaxation	LU-SGS scheme [69], TCPGS [73] -RBGS, local time stepping
Turbulence model	Spalart-Allmaras [75], Wilcox's $k - \omega$ [78], AJL- $\omega$ [81]
Data transfer	(Displacement) Moving least squares interpolation (Aero. force) Work-conservative transformation

Table. 4.3: Numerical methods for solid dynamics simulatiuons

Governing equation	The principle of virtual work, Finite Element Method
Solid solver	Nonlinear FEM with Total-Lagrange formulation [83], 20 points solid element [84]
Constitutive equation	Isotropic, St. Venant-Kirchhoff material
Linear solver	Conjugate gradient method with ILU(0) or ILU(1) preconditioning [94]
Eigenproblem solver	Arnoldi's method [95]
Time integration	Clank-Nicolson

## 第 5 章 検証計算

## 5.1 平板単独翼のクラシカルフラッター

気流中に平板単独翼を弾性支持し流速を上げていくと、ある流速でフラッターが発生する。特に流れの剥離や失速が生じない低い迎角で起こるものをクラシカルフラッターといい、曲げ自由度とねじり自由度が空気力によって連成した振動モードが不安定になる現象が観察できる。

クラシカルフラッターは、理想化された流れの状況を想定すれば、理論解析で導かれた空気力モデルを用いて解析を行うことが可能である。最も基礎的な場合として、非圧縮性流れ中に 0 迎角で置かれた二次元平板の、ねじり自由度および翼弦垂直方向の並進自由度の調和振動に対する自励空気力が、Theodorsen により解析的に求められている [96], (1935)。この解は空力弾性問題の歴史的な出発点であるとも考えられる非常に重要な解であり、教科書のみならず現在においてもフラッター制御などの分野で用いられることもある。

本章ではこの Theodorsen の自励空気力を空力弾性問題の参照解として位置づけ、連成解析を用いて同じ系を模擬したときの結果との比較を行う。これを通じて、本研究で構築した連成解析手法およびモード同定手法を用いることで空力弾性モードやフラッター発生流速といった、フラッター評価における基礎的な事項を正しく捉えられることを示す。

### 5.1.1 問題設定

まず、比較の土台となる二次元平板のメカニカルモデルを設定する。Fig. 5.1 にメカニカルモデルの構成を、Table. 5.1 に振動解析に用いる諸量の定義を示す。平板翼は振動中心の迎角 0 で流れ中に置かれており、ピッチング運動および並進運動をする。Fig. 5.1, Table. 5.1 は Theodorsen の定式化を用いるために重心位置やねじり中心が一般的な場合について描かれているが、本研究では単純化のために、舵面は用いず、翼弦中央まわりのねじり自由度、および並進運動を考える。即ち  $a = x_a = S_\alpha = 0$  となる。また、翼支持系は十分軽いものとして質量・慣性モーメントを 0 と仮定して平板部の慣性のみを考える。また、構造減衰も無視し  $C_h = C_\alpha = 0$  とする。

Theodorsen [96] は主翼・舵面が組み合わさった系に対して自励空気力を導いている。迎角 0 で流れ中に弾性支持された平板翼の振動方程式は、ここではフルスパンに対するものを示し

$$\begin{bmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_h & 0 \\ 0 & C_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\Leftrightarrow M_s \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = f \quad (5.2)$$

と表わされ、運動方程式右辺の空気力ベクトルは、

$$\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} \pi \rho b^2 \{ u \dot{\alpha} - \ddot{h} - \pi ab \ddot{\alpha} \} + 2\pi \rho b u C(k) \{ u \alpha - \dot{h} + (\frac{1}{2} - a) b \dot{\alpha} \} \\ -\pi \rho b^2 \{ (\frac{1}{2} - a) u b \dot{\alpha} + b^2 (\frac{1}{8} + a^2) \ddot{\alpha} + ab \ddot{h} \} + 2\pi \rho b u^2 (\frac{1}{2} + a) C(k) \{ u \alpha - \dot{h} + (\frac{1}{2} - a) b \dot{\alpha} \} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$= -M_\alpha \ddot{x} + P \dot{x} + C(k) R \dot{x} + C(k) S x \quad (5.4)$$

と表わされる。

変動流体力は翼の運動に関して線形に生じる成分、即ち自励空気力の成分のみを考えており、Eqn. (5.4) のように翼の運動  $x$  に対する係数行列の形式を用いると、係数行列は次のように書くことができる。

$$x = \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad M_\alpha = \pi \rho b^2 l \begin{bmatrix} 1 & ab \\ ab & (\frac{1}{8} + a^2) b^2 \end{bmatrix}, \quad P = -\pi \rho b^2 u l \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & (\frac{1}{2} - a) b \end{bmatrix}, \\ R = 2\pi \rho b u l \begin{bmatrix} -1 & (\frac{1}{2} - a) b \\ -(\frac{1}{2} + a) b & (\frac{1}{2} - a)(\frac{1}{2} + a) b^2 \end{bmatrix}, \quad S = 2\pi \rho b u^2 l \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & (\frac{1}{2} + a) b \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

ここで、 $C(k)$  は、流体の応答の時間遅れ効果を表すもので Theodorsen 関数と呼ばれ、無次元振動数  $k$  の関数である。また、 $H_\nu^{(n)}$  はハンケル関数と呼ばれ、第一種・第二種ベッセル関数  $J_\nu, Y_\nu$  を用いて Eqn. (5.7) で表わ

される．ここに  $\nu$  はベッセル関数の次数である．

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}, \quad k = \frac{b\omega}{u} \tag{5.6}$$

$$H_\nu^{(1)}(k) = J_\nu(k) + iY_\nu(k), \quad H_\nu^{(2)}(k) = J_\nu(k) - iY_\nu(k) \tag{5.7}$$

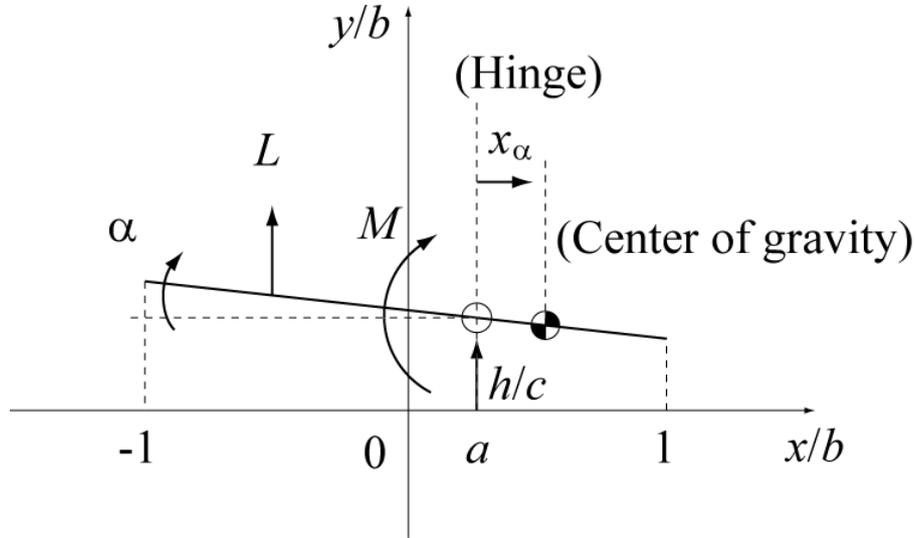


Fig. 5.1: Parameters of the flat plate airfoil

Table. 5.1: Definition of parameters for the mechanical model and flow condition

$l$ [m]	Span length
$b$ [m]	Half chord length
$t$ [m]	Thickness of the plate
$\rho_s$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Density of the plate
$a$ [-]	Nondimensional hinge position
$x_a$ [-]	Nondimensional distance between the C.G. and the hinge
$L$ [N]	Lift (positive: $y > 0$ )
$M$ [N]	Momentum around the hinge (positive: CW)
$h$ [m]	Heaving displacement (positive: $y > 0$ )
$\alpha$ [rad]	Pitching angle (positive: CW)
$m = 2\rho_s btl$ [kg]	mass of the plate
$I_\alpha = mb^2/3$ [kgm <sup>2</sup> ]	Moment of inertia around the hinge
$S_\alpha = mbx_a$ [kgm]	Static moment of wing
$K_h$ [N/m]	Heaving stiffness
$K_\alpha$ [Nm/rad]	Pitching stiffness
$C_h$ [Ns/m]	Heaving damping coefficient
$C_\alpha$ [Nms/rad]	Pitching damping coefficient
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Density of air
$u$ [m/s]	Free stream velocity

Table. 5.2: Common parameters within type 1 and 2

$l$ [m]	0.05
$b$ [m]	0.025
$t$ [m]	0.001
$\rho_s$ [kg/m <sup>3</sup> ]	8000
$m$ [kg]	0.02
$I_\alpha$ [kgm <sup>2</sup> ]	$4.167 \times 10^{-6}$
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1.29 ( $p_\infty = 101325\text{Pa}$ , $T_\infty = 273.15\text{K}$ )
$u$ [m/s]	0 ~ 75

Table. 5.3: Type 1

$K_h$ [N/m]	700
$K_\alpha$ [Nm/rad]	0.6
$f_{h0}$ [Hz]	11.3
$f_{\alpha0}$ [Nm/rad]	60.4

Table. 5.4: Type 2

$K_h$ [N/m]	700
$K_\alpha$ [Nm/rad]	0.6
$f_{h0}$ [Hz]	29.8
$f_{\alpha0}$ [Nm/rad]	60.4

本研究では，流れがおおよそ非圧縮とみなせるような  $M < 0.3$  の標準状態空気 ( $\rho = 1.29$ ) に対して 100m/s 以下の流れ領域でフラッターが生ずるように，予め試行錯誤により次に示す Type1, Type2 の 2 種類のメカニカルモデルの仕様を定めた．Table. 5.2 に Type1, Type2 共通の仕様を，Table. 5.3, Table. 5.4 に Type1, 2 それぞれの仕様を示す．Type1, 2 は並進運動の剛性係数のみが異なり，Type2 の方が Type1 よりも曲げねじりの振動数が近接しているため自由度間の連成が起こり易く，フラッター流速は Type1 に比べて低くなる．このようなフラッター流速の違いが数値解析により正しく捉えられるかどうか，本検証において確認する．

### 5.1.2 解析的空力微係数を用いたシステムモード求解法： $p - k$ 法

Eqn. (5.1) の運動方程式の安定性解析やモード解析を行うことで，フラッターの有無や流体中の振動モードを求めていく．付加質量行列  $M_a$  を用いトータル質量行列  $M = M_s + M_a$  を作り，さらに Eqn. (5.5) の行列形式の空気力と状態空間ベクトル  $s = [x^T \ \dot{x}^T]^T$  を用い一階の常微分方程式に変換すると，線形空気力を用いた状態空間表示のシステム運動方程式

$$\frac{d}{dt} s = \begin{bmatrix} O & I \\ M^{-1}(-K + C(k)S) & M^{-1}(-C + P + C(k)R) \end{bmatrix} s \quad (5.8)$$

が得られ，この固有値問題は，固有値を  $\lambda$  とすると

$$\lambda s = \begin{bmatrix} O & I \\ M^{-1}(-K + C(k)S) & M^{-1}(-C + P + C(k)R) \end{bmatrix} s \quad (5.9)$$

となる．したがって，空力弾性モードを求めるには Eqn. (5.8) のモード解析を行えば良い．しかし，システムの係数行列には振動数を含む関数である  $C(k)$  が入っているため，次に述べる  $p - k$  法と呼ばれる反復的アルゴリズムを用いて Theodorsen 関数の無次元振動数に用いられる振動数と，モード解析による振動数が一致するような振動数を求める．

1. 計算条件  $u, M_s, C, K$  を設定する．
2. 無次元振動数  $k_{\text{est}}$  を仮定．
3. 空力微係数の行列  $P, C(k_{\text{est}})S, C(k_{\text{est}})R$  を算出．
4. Eqn. (5.9) のシステム行列 ( $4 \times 4$  複素行列) を構築する．

5. Eqn. (5.9) の一般化固有値問題を解き，目的のモードに対して振動数  $\omega = |\text{Im}(\lambda)|$  を求める
6. 計算による無次元振動数  $k_{\text{calc}} = b\omega/u$  と仮定した無次元振動数  $k_{\text{est}}$  の相対誤差  $|k_{\text{calc}} - k_{\text{est}}/k_{\text{calc}}|$  を求め，規定の誤差以下  $|k_{\text{calc}} - k_{\text{est}}/k_{\text{calc}}| < \varepsilon$  なら終了．そうでなければ無次元振動数の新たな推定値を  $k_{\text{est}} = k_{\text{calc}}$  とし，3へ戻る

$p - k$  法は Theodorsen 関数を用いた場合，およそ 20 反復未満で収束する．規定の相対誤差は  $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-4}$  とした．

システム方程式 Eqn. (5.8) の解法としては，Theodorsen 関数の近似式として知られる R. T. Jones の近似式

$$C(k) \simeq 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.0455i}{k}} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.3i}{k}} \quad (5.10)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{0.75075 \times 10^{-2}}{ik + 0.0455} + \frac{0.1005}{ik + 0.3} \quad (5.11)$$

を用いる方法もある．これに関しては，次項で説明する．

### 5.1.3 近似 Theodorsen 関数を用いた状態空間解法

Eqn. (5.10)Theodorsen 関数は無次元振動数を引数にもつ特殊関数であり周波数領域において定義されているが，R. T. Jones の有理関数近似 Eqn. (5.11) を用いると，無次元振動数を陽に含む形に書き換えることができ，さらに時間領域の表現を導くことが出来る．

まず，変動空気力 Eqn. (5.4) を，流体の時間遅れを表す新たな変数

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\xi_1}{ik + \lambda_1} \mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x}_2 = \frac{\xi_2}{ik + \lambda_2} \mathbf{x} \quad (5.12)$$

ただし，

$$\xi_1 = 0.75075 \times 10^{-2} \quad , \quad \lambda_1 = 0.0455 \quad , \quad \xi_2 = 0.1005 \quad , \quad \lambda_2 = 0.3 \quad (5.13)$$

を導入し書き換えると，付加質量行列  $M_a$  以外の項について次のようになる．

$$P\dot{\mathbf{x}} + C(k)R\dot{\mathbf{x}} + C(k)S\mathbf{x} \simeq \left( P + \frac{1}{2}R \right) \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}S\mathbf{x} + R(\dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mathbf{x}}_2) + S(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad (5.14)$$

このとき， $ik$  のつく項は周波数オペレータ  $i\omega$  ( $\omega$  は振動の角周波数)・時間微分オペレータとのアナロジーから，次のように書き換えられる．

$$ik = i\omega \frac{b}{u} \Rightarrow \frac{b}{u} \frac{d}{dt} \quad (5.15)$$

これを用いて，関係式 Eqn. (5.12) から新変数  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ，に対する発展方程式が次のように書ける．

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \frac{u}{b}(\xi_1 \mathbf{x} - \lambda_1 \mathbf{x}_1) \quad , \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{u}{b}(\xi_2 \mathbf{x} - \lambda_2 \mathbf{x}_2) \quad (5.16)$$

Eqn. (5.14)，Eqn. (5.16) を用い，時間領域の状態空間表示に書きなおした空力弾性方程式は最終的に，

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I & O & O \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ (u\xi_1/b)I & O & -(u\lambda_1/b)I & O \\ (u\xi_2/b)I & O & O & -(u\lambda_2/b)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$F_1 = M_{\text{tot}}^{-1} \left[ -K + \frac{1}{2}S + \frac{u(\xi_1 + \xi_2)}{b}R \right] \quad , \quad F_2 = M_{\text{tot}}^{-1} \left[ -C + P + \frac{1}{2}R \right]$$

$$F_3 = M_{\text{tot}}^{-1} \left[ S - \frac{u\lambda_1}{b}R \right] \quad , \quad F_4 = M_{\text{tot}}^{-1} \left[ S - \frac{u\lambda_2}{b}R \right]$$

の線形な形式となる．時間領域解析を行う際は，初期条件を与え上式を数値的に解析すれば良い．

### 5.1.4 時間領域モード同定法の Verification

#### 本小節の目的

連成解析によりフラッターを模擬し検証 (Validation) する前に, 空力弾性モードを同定する手続きの Verification として, 既知のシステム方程式の時間領域解を入力とした際に正しい結果を返すことを示す. なお, 本小節の内容は続いて行われる連成解析結果による空力弾性モード同定の検証とは次のように異なる位置づけを持つ.

- Verification (本小節の内容): 空力弾性モード同定の手続きそのものは, 振動方程式のみで閉じており, CFD や連成解析とは独立のモジュールで構成される. そのため, 既知のシステムの時間領域解を用いて同定結果が正しく算出されるかを確かめ, 同定モジュールの機能健全性を示すのが本節の Verification の目的である.
- Validation (次小節以降の内容): 本研究では流体構造連成解析結果の処理手法として時間領域のモード同定というアプローチを取った解析フレームワークを構築している. そのため, この枠組みそのものを振動解析として用いることの妥当性を実証する. 具体的には, シミュレーションによって正しく流体・構造連成の物理的効果が模擬できていること, それと同時にモード同定結果でも正しい処理結果が得られることを示す.

#### Verification の方法

前小節の最後では, 周波数領域で記述されている R. T. Jones の近似 Theodorsen 関数を用いた運動方程式を, 時間領域のシステム方程式 Eqn. (5.17) に書き換えた. したがって, このシステム方程式に初期条件を与え, 数値積分することで時間領域解を得ることが出来る.

このようにして得られた時間領域解から空力弾性モードを同定し, 各モードの周波数・減衰率・モード形状を得る. 一様流速を様々に変化させて, フラッターが起こらない状態からフラッター発生流速以降までを対象とし, 周波数領域法 ( $p-k$  法) による空力弾性モード解析結果との比較を行う.

#### 解析の条件と同定方法の検討ケース

Eqn. (5.17) の解析に用いる初期条件は, ピッチング・並進にそれぞれ 0.01 % 翼弦長の最大振幅に対応する初期速度

$$\mathbf{x}_{\text{init}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}}_{\text{init}} = \left[ 1.0 \times 10^{-4} c \sqrt{K_h/m} \quad 1.0 \times 10^{-4} b \sqrt{K_\alpha/I_\alpha} \right]^T \quad (5.18)$$

を与える. なお, システム方程式は線形なのでモード自体に振幅の依存性は無い. また, 空気力の時間遅れ変数の初期条件は, 翼振動をしていないときの自明な解を考え,

$$\mathbf{x}_{1\text{init}} = \mathbf{x}_{2\text{init}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}}_{1\text{init}} = \dot{\mathbf{x}}_{2\text{init}} = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

とする.

時間領域解は, 4 段 4 次精度の古典的ルンゲ・クッタ法によって得られる. 時間領域数値解の例を Fig. 5.2 に示す. このケースはメカニカルモデルが Type1 の  $u = 49.7$  [m/s] である. 初期値に応じて並進振幅・回転振幅が誘起されるが, 時間の経過とともに振幅は減衰する (フラッターが発生しないケース.)

この時間領域解をソースとして, Verification として同定区間の検討を行う. Fig. 5.2 中には, 3 つの時間区間幅 「initial」「short」「long」が示されている. initial はねじり振動約 1.75 回, short は約 3 回, long は十分長い振幅が減衰しきるまでの情報を用いる. これら 3 ケースについての同定結果をもとに, フラッター境界を正しく得られると考えられる同定の仕方について考える.

ところで, Fig. 5.3 には, 直接同定には用いないが空気力の時間遅れ効果を表す変数  $x_1, x_2$  の各成分の挙動を示す. これらは変位ベクトルの成分と同様, 第一成分が並進, 第二成分が回転運動に対応している. Eqn. (5.12) の定式化からもわかるように, これらは変位ベクトルの履歴 Fig. 5.2 と非常に似通った挙動をしている. また, 実線で示す第一成分では第二成分より若干遅れた挙動をしている.

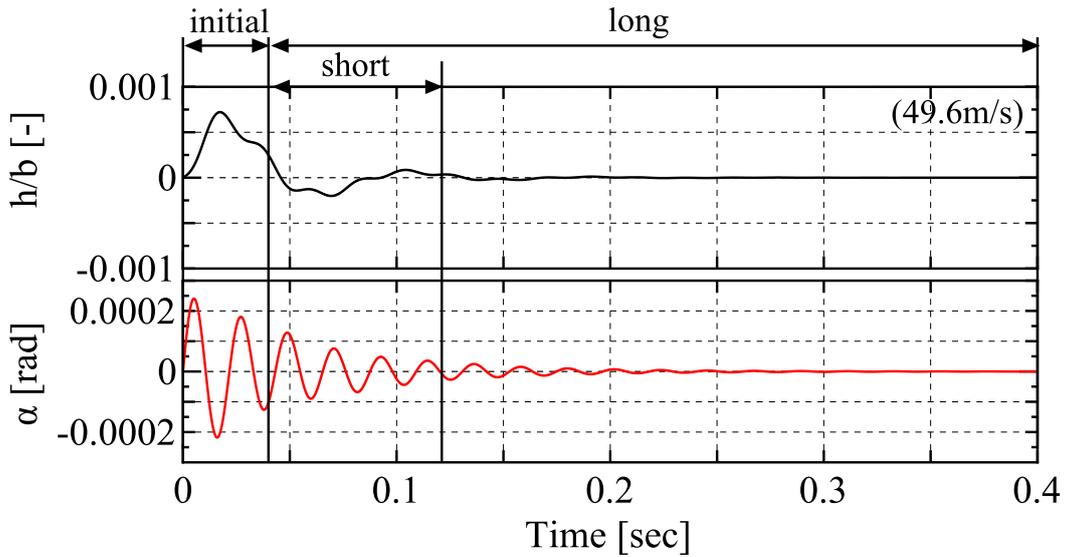


Fig. 5.2: An example of time history generated by time-domain system equation (Eqn. (5.17), displacements) with showing three different sampling region (initial, short, and long)

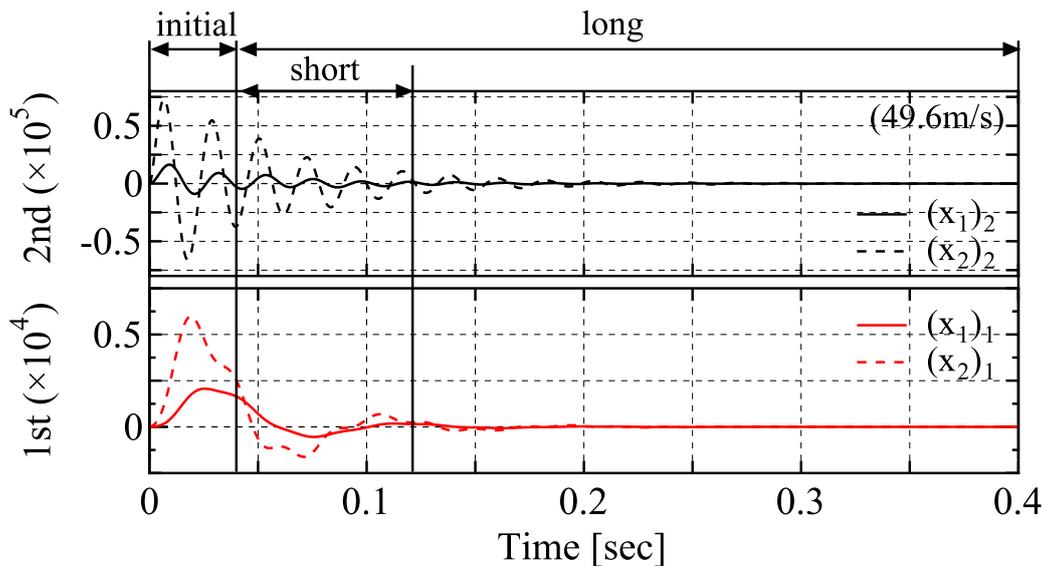


Fig. 5.3: An example of time history generated by time-domain system equation (Eqn. (5.17), aerodynamic delay variables  $x_1, x_2$ )

結果と考察

一様流流速をスイープした際の「initial」「short」「long」の3ケースの同定区間に対する空力弾性モード固有値の同定結果を、周波数領域法による同定結果と比較する形で Fig. 5.4 に示す。同定時の決定係数はどのケースでも  $R^2 = 0.9999$  以上であって、非常に良い同定結果が得られていると考えられる。また、誤差棒は 99 %信頼区間の  $3\sigma$  をとっており、short のケースと一部の並進モード分岐以外は非常に狭い幅を示している。long の並進モード分岐で非常に大きな誤差棒があるのはこのモードに対応する情報量がほとんど残っていなかったためであると考えられ、一方 initial では減衰率の誤差棒が他の 2 ケースに比べ著しく大きい。これは後にも議論するが、初期条件の立ち上がり起因して自励空気力の時間遅れ効果が正しく発現しきっていないのだと考えられる。

ここでは「initial」「short」「long」の間の同定結果の違いについて議論する。short, long では振動数・減衰率ともに両者は完全に一致しているため、初期の数周期を除き、かつねじり振動 3 回、並進振動 1 周期程度がソー

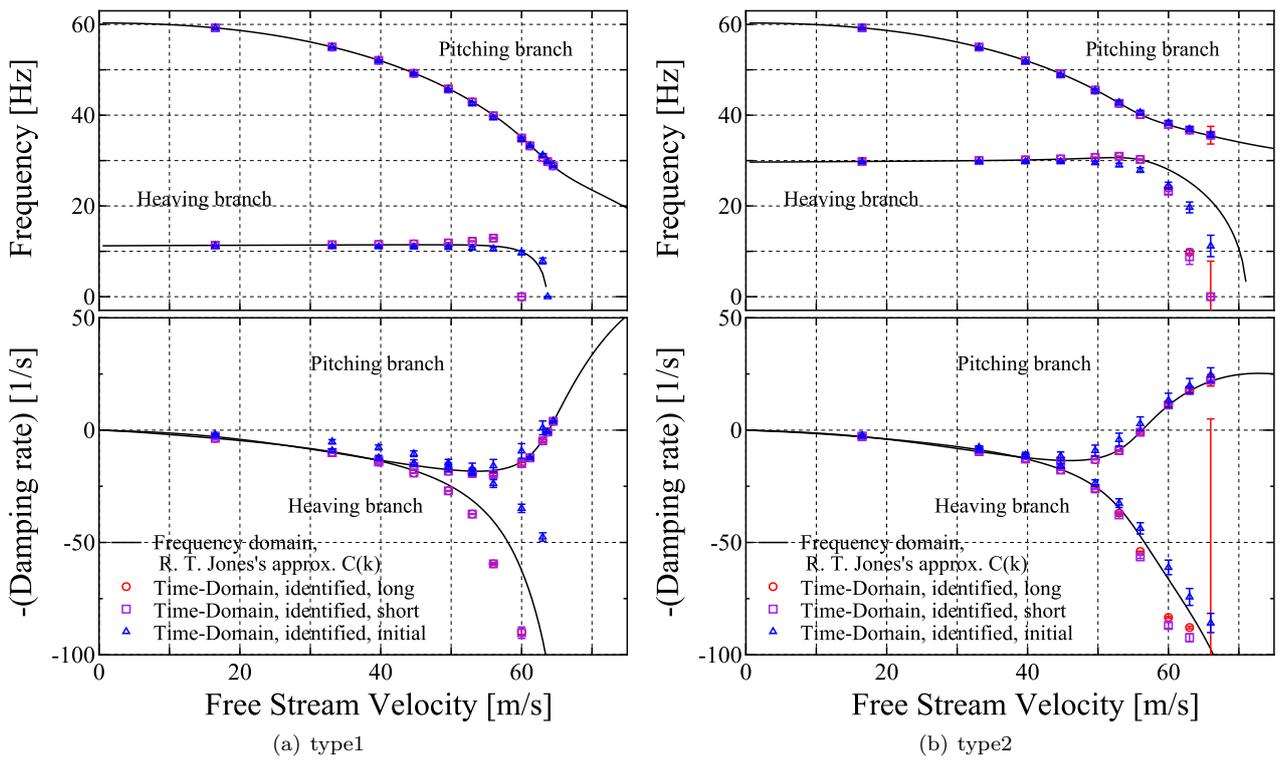


Fig. 5.4: Verification of aeroelastic eigenvalues between theoretical and FSI results

スとして含まれば同定には十分なデータ量があると考えられる。これら 2 ケースでは、ねじりモード分岐は振動数・減衰率ともに周波数領域法と一致している。したがって、フラッターモードでは低流速から高流速にわたって正しい解析結果が得られることが期待できる。なお、高フラッター発生点付近の並進モード分岐は周波数領域法との乖離が見られるが、これは時間領域解では減衰率が非常に大きくなり、過減衰に近い挙動を示しているためであると考えられる。

一方、初期の情報のみを同定に用いた initial のケースでは、特に減衰率で周波数領域法との乖離が認められる。これらは initial と同様に同定区間が比較的短い short のケースが、十分な同定区間を持っていると考えられる long のケースと一致していることから、変動空気力の立ち上がり起因したエラーであると考えられる。

Fig. 5.5, Fig. 5.6 にはモード形状の比較としてねじり・並進自由度の間の振幅比・位相差を示している。この場合も、データソースの取り方に対する同定結果の傾向としては固有値分布の場合と同様のことが言え、最初のデータを捨てた場合の short と long は高減衰率の並進モード分岐を除き周波数領域法とよく一致している。

結論

以上より、本小節の Verification の結論として、連成解析データの取り扱いや結果の解釈で気をつけることは以下である。

- 翼振動に伴う変動空気力が計算領域全体に行き渡るまでの振動初期のデータは捨てる
- 十分に長い時間サンプルを用いれば、同定結果はそれより長いサンプルの時と同じ結果となるのでサンプル数に対する結果の収束をモニターすることが望ましい。
- フラッターに突入するモードはフラッター流速以上でも正しく同定を行うことが出来る。しかし、それ以外のモードでは、減衰率が非常に大きいモードで同定結果が周波数領域法とは一致しない。

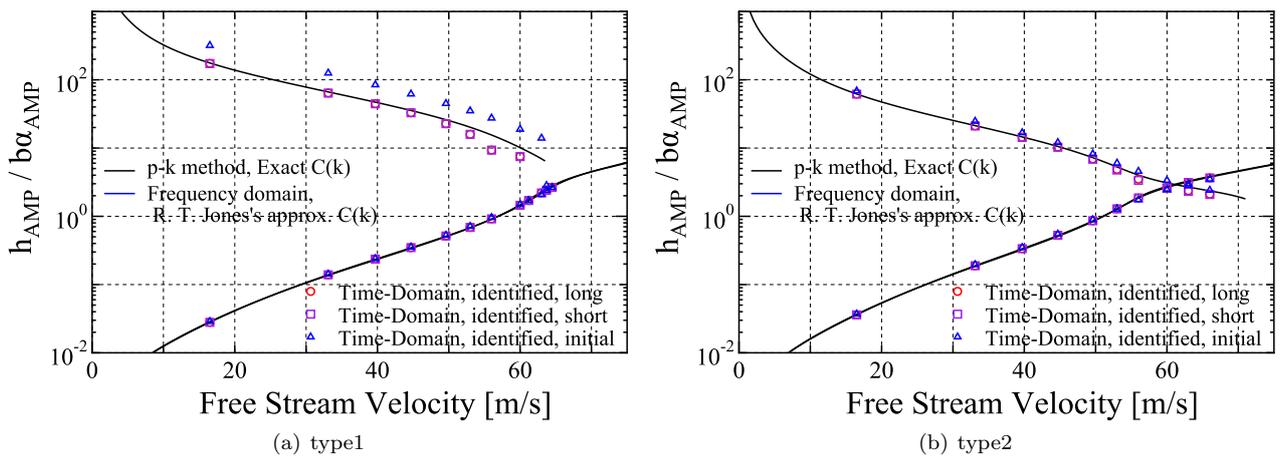


Fig. 5.5: Comparison of amplitude ratio between theoretical and FSI results

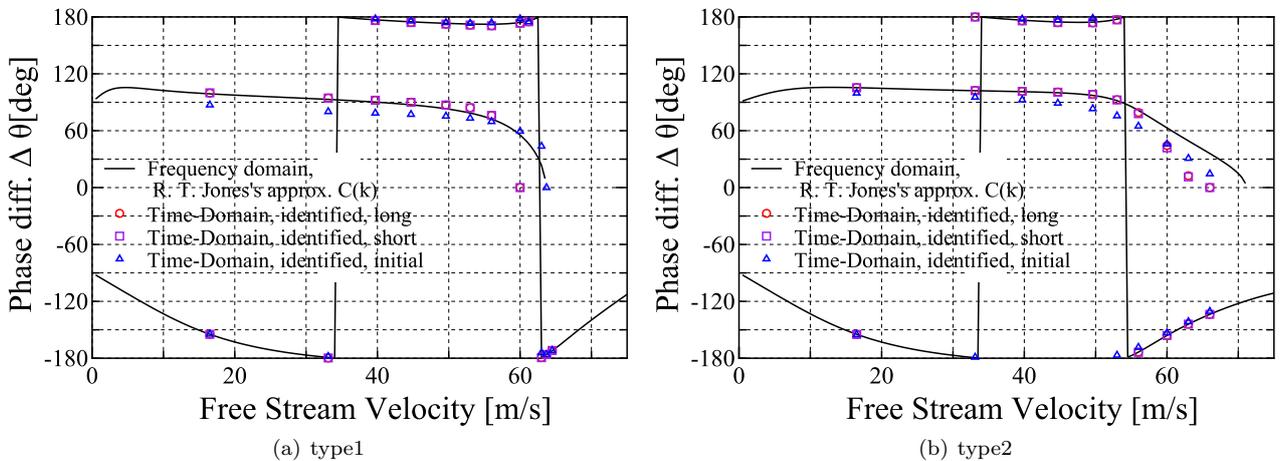


Fig. 5.6: Comparison of phase difference between theoretical and FSI results

### 5.1.5 連成解析における数値解析の設定

数値解析では、一様流中の平板単独翼を模擬した連成解析を行う。Fig. 5.7 に、数値解析における CFD 格子と、翼運動を入力するための有限要素モデルを示す。格子は 2 次元の O 型格子を用い、翼弦方向・翼高さ方向にそれぞれ 89 点、49 点である。O 型格子外周は翼弦中央より 20chord 長遠方に設置し、垂音速の一様流境界条件を課したうえで、さらに擾乱の反射を防ぐために一般曲線座標系に拡張した Giles の準一次元無反射境界条件を併用する。

さて、翼面上の境界条件を考えると、Theodorsen の理論と対応した数値解析を行う場合懸念されるのは、翼厚さと翼後縁のクッタ条件に関する事項である。まず Theodorsen の理論では無限小の翼厚さを仮定しているのだが、数値解析においては無限小の翼厚さを扱うことは難しい。それは、O 型格子を用いた際に平板の前縁に何点かを配置しないと格子が滑らかにならず、良い解を得られないためである。本小章の計算では、メカニカルモデルの設定と同じ翼厚さ 1mm (翼弦長との比で  $t/2b = 0.02$ ) を与えた。次に「後縁では圧力差は生じず、したがって循環が 0」となる翼後縁のクッタ条件であるが、これも数値解析において、粘性項を無視した Euler 方程式を用いた場合、陽に満足させることができないと思われる。そのためこの検証では翼面で境界層が発達することを許容し、滑りなし条件と Spalart-Allmaras モデルによる乱流計算を行った。

また時間刻み幅として、クラシカルフラッターはピッチング自由度主導のモードで生じること、自励空気力の揚力傾斜成分はピッチングに対して負の剛性を与えるために、流れを早くすると振動数は一般に低下することから、真空中におけるピッチング運動の 1 周期 (60Hz) を約 2000 等分する時間刻み幅を用いた。

連成解析では微小な初期擾乱を構造に与えることで、その後の時間発展を計算する。ここでは、ピッチング、並進それぞれの自由度に対して最大振幅が 0.01 % 翼弦長に相当する初速度を与えた。

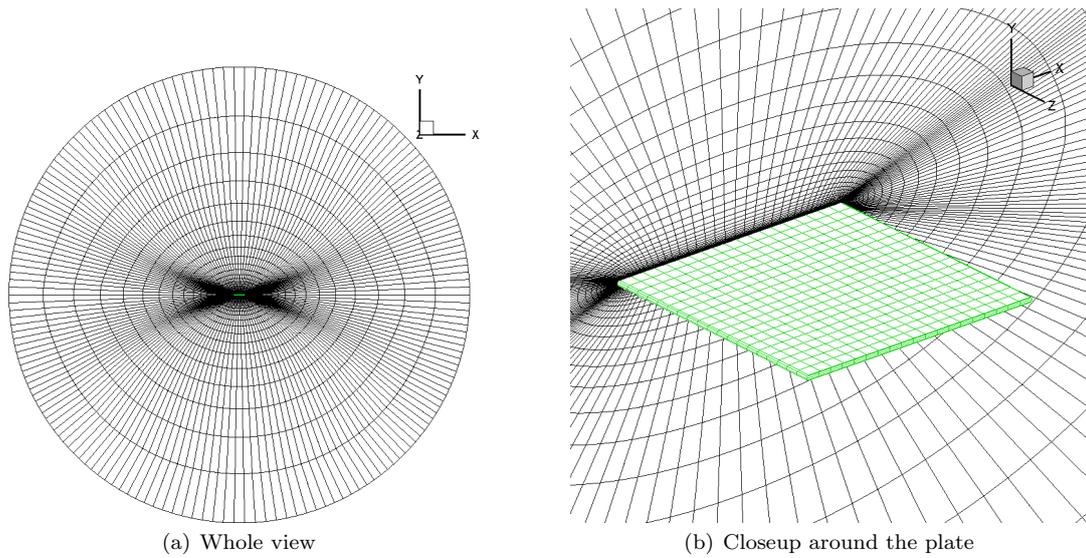


Fig. 5.7: FSI setup and a numerical grid of flat plate flutter

### 5.1.6 解析結果の比較と考察

#### 連成解析におけるフラッター発生前後の挙動

まずフラッター前後でどのような振動が翼に生じるかを説明するために、Fig. 5.8, Fig. 5.9 に Type1, Type2 それぞれの場合についてフラッター流速前後の翼振動応答の時間履歴を示す。両者とも (a) では安定、(b) で中立安定かやや不安定、(c) 不安定、な場合について示している。(a) の安定な場合には、ねじり自由度の長周期の振動に加えて、ねじり振動の周期に似た周期で、ピッチアップの後に遅れて並進運動が誘起されている挙動が見取れる。フラッター境界付近もしくはその後の (b)(c) においては長周期の並進運動はほとんど見られず、ピッチングと並進が連成した振動が支配的である。

連成解析によるフラッター解析においては、このように変位の時間履歴をじかに観察することでフラッター発生流速を判断し、またフラッターが起こる振動モードに関して大まかな情報を得ることができる。しかしながら、周波数領域法で得られるような空力弾性モードの情報に対する定量性はなく、(c) のようにフラッターが起こり、ほぼ単一の空力弾性モードのみが発現している場合にのみ減衰率（増幅率）や振動数を評価することができる。

#### 速度線図

空力弾性モードの同定を行い、空力弾性方程式を計算結果より直に決定することで、フラッターが起こっている場合のみならず、起こらずに減衰する場合（サブクリティカル状態）に対しても空力弾性モード、即ち流れ中における振動状態の評価を行う。

各流速に対する計算結果に対して行い、流速に対する振動数、減衰率を Type1, Type2 についてまとめたものを Fig. 5.10 に示す。実線に理論解析の結果、点に連成解析に対する結果を示し、誤差棒は 99 % 信頼区間を統計的に評価し示している。

まず減衰率を見ると、減衰率のゼロクロス点で中立安定点であり、フラッター発生流速である。フラッターはピッチングモードが主導となり、流速を上げることで流体力により並進自由度との連成が徐々に高まる「ピッチングモード分岐」で生じる。

ピッチングモード分岐では、Type1, Type2 とともに流速を上げるとともに減衰率が大きくなり、ある流速を超えると急激に減衰率が小さくなり不安定に陥る挙動が非常によく捉えられており、フラッター境界も理論解析結果と殆ど一致している。また Type1, Type2 の間では理論解析結果においてフラッター発生点まわりの減衰率の勾配が大きく異なり、並進自由度の剛性が低い Type1 のほうが Type2 に比べてフラッター流速は大きい、急激に不安定領域に突入する挙動が見取れる。このような挙動も連成解析とモード同定により非常によく捉えられて

いるといえる．ピッチングモード分岐では流速変化に対する振動数変化も理論解と一致しており，これらのことから，モード同定手法によってフラッターに突入する空力弾性モードの振動状態が適切に捉えることができると判断できる．

一方で，剛性が低く振動数が小さい曲げモード分岐であるが，減衰率が急激にする以前の流速まで（Type1 では 50m/s 以下，Type2 では 55m/s 以下）では振動数，減衰率ともに理論解析結果との一致が見られ，空力弾性モードがうまく同定できていると言える．しかしながら，それより高い流速になると減衰率が急激に増大し，それとともに理論解析結果とのずれが見られる．特に振動数については，理論解析において並進モード分岐の減衰率が増大するとともに急激に振動数も低下し，0 に漸近する挙動が観察されている．これは減衰率が大きくなりすぎ空力弾性モードが振動的ではなく過減衰的な挙動に切り替わっているためではないかと考えられるが，連成解析結果では理論解析よりも低流速側にこの挙動が生じており，またエラーバーもそれ以前の典に比べて非常に大きくなった．これは並進モード分岐の空力弾性モードが計算初期にかなり早く減衰してしまい，モードの同定に十分な情報量を確保できなかったためではないかと推察される．Fig. 5.8, Fig. 5.9 の (b)(c) から，フラッター発生点付近では不安定な空力弾性モードの情報量が非常に大きく，安定なモードの情報量が相対的に小さくなってい

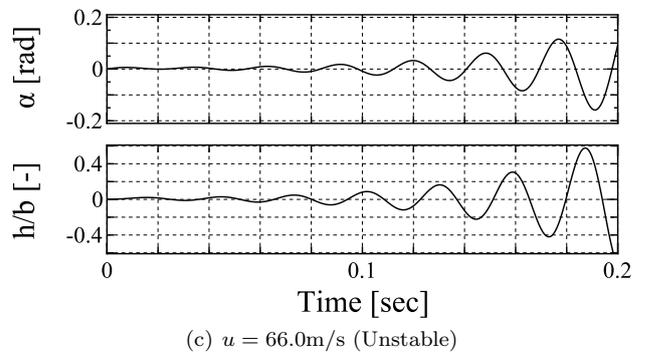
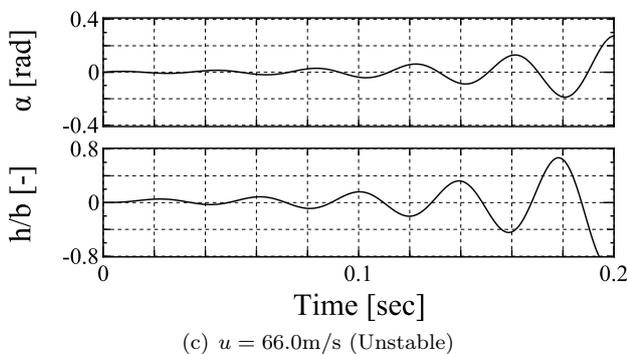
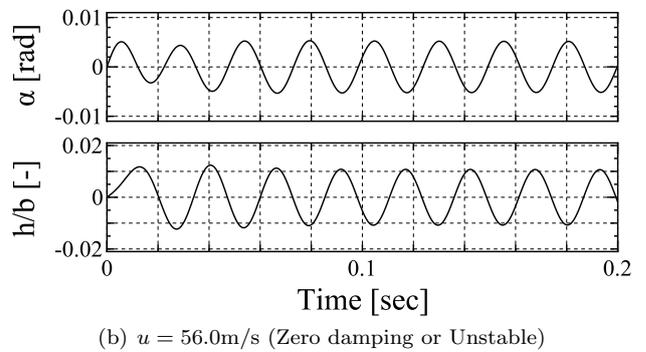
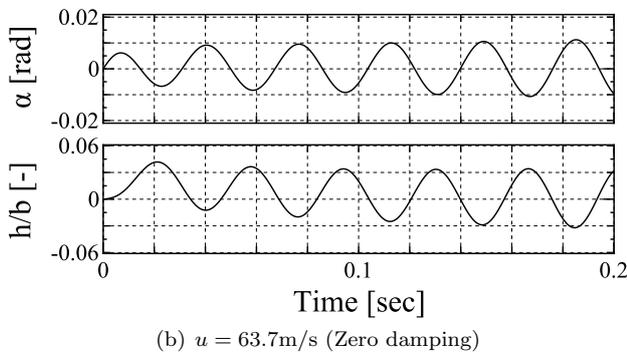
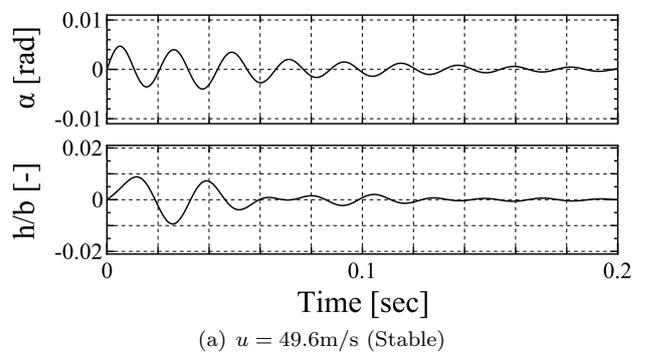
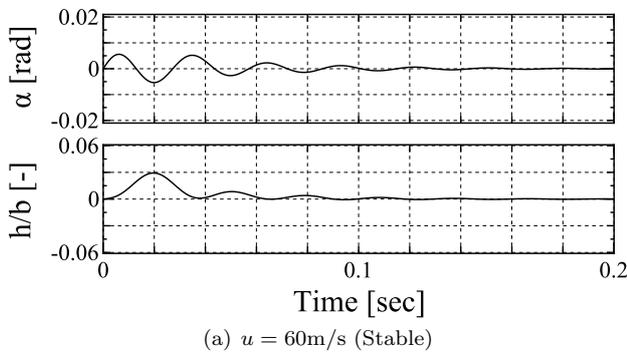


Fig. 5.8: Time history of vibration around the flutter velocity (Type1)

Fig. 5.9: Time history of vibration around the flutter velocity (Type2)

と考えることが出来る．

しかし，理論解析においても高減衰率の空力弾性モードに対して適切な解析を行っているかどうかは疑わしい．それは，Theodorsen の空気力の導出背景として，翼の調和振動が仮定されていることに起因する．調和振動を仮定しているので，Theodorsen の解は減衰率が小さく解が振動的になる場合にのみ使えろと考えられ，空力弾性方程式の解が過減衰的な挙動を示す場合については結果を参照解として用いることは適当ではないと思われる．

以上より，本研究で用いたモード同定法は，解の情報が比較的長く残る，フラッターに突入する空力弾性モードや減衰率が低く調和振動に近い振動状態に対しては適切に空力弾性モードが同定できると考えられる．

空力弾性モード形状

ここまでは空力弾性モードの固有値成分である振動数，減衰率を見て理論解析結果との比較をしてきた．さて，では空力弾性モードの固有ベクトル成分はどうだろうか．空力弾性モードの固有ベクトル成分は自由度間に位相差のある複素モードであり，並進モード振幅  $h_{AMP}$ ，ピッチング振幅  $\alpha_{AMP}$ ，ピッチングに対する並進運動の位相差  $\Delta\theta$  を用いて次のように表わされる．

$$\begin{bmatrix} h_{AMP} e^{i\Delta\theta} \\ \alpha_{AMP} \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

理論解析結果との比較には，無次元の曲げねじり振幅比である  $h_{AMP}/b\alpha_{AMP}$ ，位相差  $\Delta\theta$  を用いる．Fig. 5.11 に振幅比を示す．流速が低い時に振幅比が小さい系列がピッチングモード分岐，振幅比の大きい系列が並進モード分岐である．ここでも振動数や減衰率の場合と同様に，ピッチングモード分岐では理論解と非常に一致が見られるが，曲げモード分岐では Type1 では 50m/s 以上，Type2 では 55m/s 以上の高減衰率領域で理論解との乖離がみられる．したがって，固有ベクトルの情報がうまく同定できるかどうかについても，固有振動数の場合と同様のことが言え，低減衰率のモードは適切に同定ができ，高減衰モードでは理論解析の想定されている範囲から逸脱するため同定結果の是非は理論解析を参照解としたときに評価することは難しいといえる．そして，Fig. 5.12 に示す位相差でも同様のことが言える．

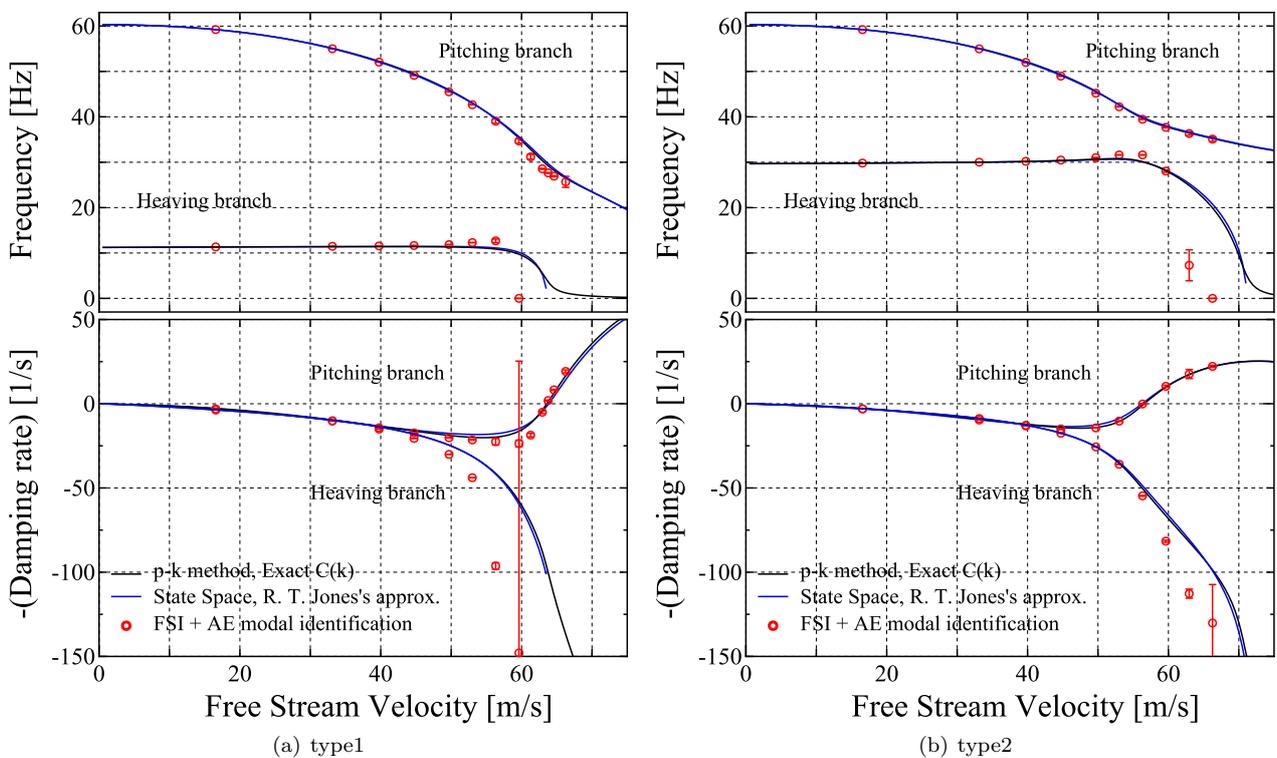


Fig. 5.10: Comparison of Aeroelastic eigenvalues between theoretical and FSI results

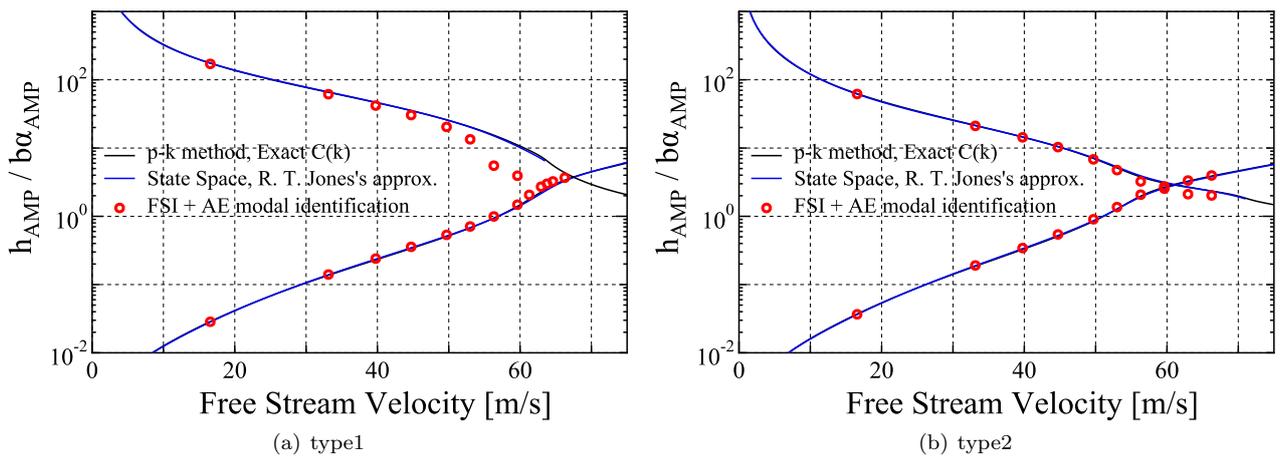


Fig. 5.11: Comparison of amplitude ratio between theoretical and FSI results

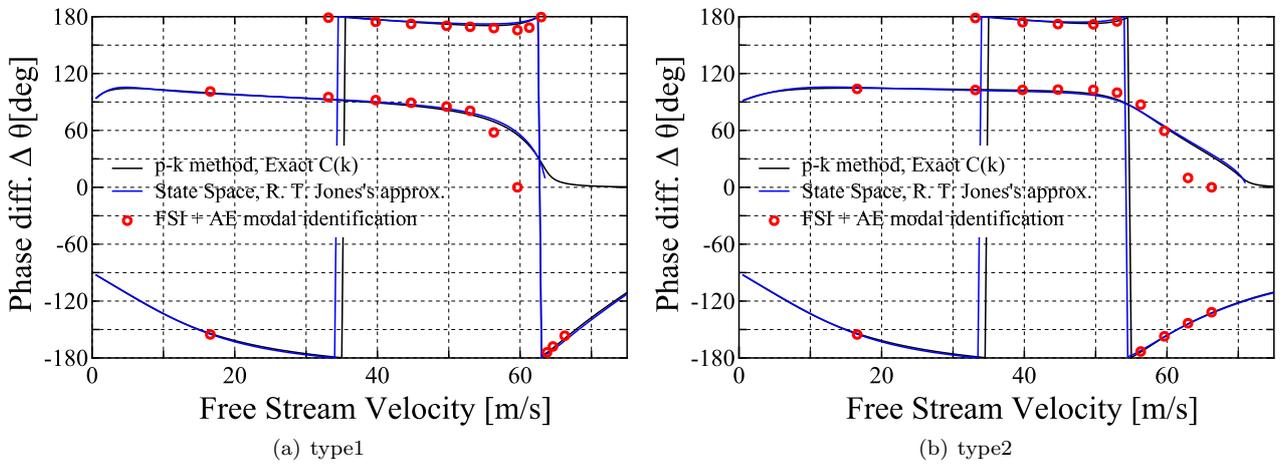


Fig. 5.12: Comparison of amplitude ratio between theoretical and FSI results

また、位相差を見るとちょうどフラッター流速の点 (Type1 では 62m/s, Type2 では 55m/s) において、ピッチングモード分岐における位相差が正から負に逆転している。並進自由度がピッチングに対して位相遅れを持つということは、並進速度にピッチング変位と同期した成分が現れ、ピッチアップして揚力が大きくなっている状態において揚力と同方向の並進速度が現れ、並進自由度に対して仕事が入力される状態にあるということである。振動自由度間の位相差は空気力と構造自由度の連成状況によって決まることから、本研究で構築した連成解析手法が構造モデルと流れ状態に依存して生じるような振動自由度間の空力的連成現象を適切に捉え、クラシカルフラッターを計算できていると同時に、モード同定によりそれが定量化されて示されていることがわかる。

## 5.2 平板翼列のクラシカルフラッター

前節では、最も基礎的な空力弾性現象である、非圧縮性流れ中の平板単独翼で発生するクラシカルフラッターに関して理論解析と数値解析の間の比較を行い、本研究で用いられる数値解析手法が、空力・構造間の連成現象に起因した振動状態の変化やフラッターの発生を適切に捉えられることを確認した。

本節では、さらに検証の段階を引き上げ、単独翼のみならず振動自由度が翼間で空力的に連成する、翼列の場合のフラッター現象を対象とし、半理論解析と数値解析結果の比較を行う。第 2 章で示した通り、構造的にも空力的にも完全に均一な状態におかれた翼列では、翼枚数によって実現できる翼間位相差ぶんだけ空力弾性モードが現れる。そのため本節の主な目的は、単独翼のような高々数個の自由度の系だけでなく、翼列のような翼枚数ぶんだけ自由度が増えた系においても空力弾性モードが正しく同定されるか、つまり各翼間位相差の違いによる空力弾性モードの違いが正しく捉えられているかを確かめることである。

### 5.2.1 問題設定

対象とする問題は、インシデンス 0 の亜音速流れ中における無限小厚さの平板翼列である。Fig. 5.13 に、翼列の仕様を決定するパラメータを示す。翼弦長  $c$  の平板翼がスタガ角  $\theta$ 、ピッチ  $s$  で並んでおり、一様流（流速  $u$ 、密度  $\rho$ 、マッハ数  $M$ ）が  $x$  軸正方向に流れている。翼番号は背側（ $y > 0$  側）にあるものを正とする。迎角が 0、かつ翼の厚さは無限小なので、翼が運動しないときには流れは全く向きを変えずに翼列をただ通り過ぎるだけであり、定常な揚力は存在しない。これらの翼が運動することにより、翼面から擾乱が発生し、流体中を伝播し、その擾乱が自翼や他の翼と干渉することで自励空気が発生する。

ある翼のある自由度の運動によって発生した自励空気がより他の翼の運動が誘起され、そうして起こった運動によってさらに自励空気が誘起され、このようにして各翼の全振動自由度は翼間に満ちている流体によって連成している。このような連成状態における翼列全体の翼振動モードが翼列の空力弾性モードであり、これを求め数値解析と比較する。

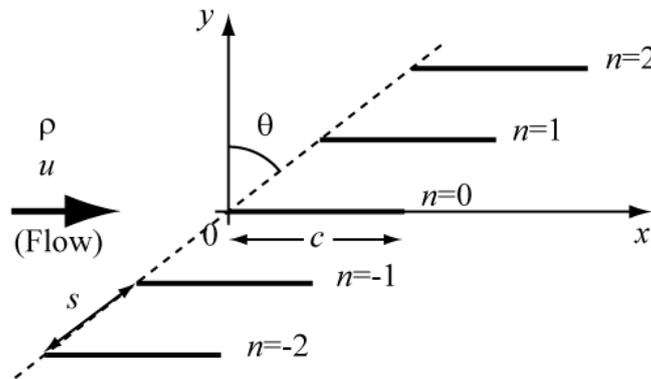


Fig. 5.13: Configuration of Flat plate cascade

まず翼のメカニカルモデルや翼列仕様を設定していく。ここでも予め試行錯誤の後、後述の空気力モデルである LINSUB によってフラッター解析が妥当に行えると思われる  $M < 0.5$  の領域でフラッターが発生するよう、翼列仕様とメカニカルモデルを定めた。

翼列仕様は、単純にピッチ  $s/c = 1.0$ 、スタガ角  $\theta = 45[\text{deg}]$  とした。次に流れの状態であるが、ここでは全温・全圧が一定に保たれた貯気槽を低圧環境に開放することで気流を作り出している、いわゆるブローダウンタイプのフラッター試験を行っていると思定し、全圧と全温を  $p_t = 101325[\text{Pa}]$ 、 $T_t = 288.15[\text{K}]$  の標準大気に保ちながら、背圧をスweepすることで流速を変化させた。このとき、同時に静密度とマッハ数も変化する。作動流体は、理想ガスの空気とした。Table. 5.5 に流れ条件と翼列仕様を、Table. 5.6 に、メカニカルモデルの仕様を示す。

Table. 5.5: Parameters for flow and cascade configuration

$p_t$ [Pa]	101325
$T_t$ [K]	288.15
$u$ [m/s]	0 ~ 166
$M$ [-]	0 ~ 0.5
$s/c$ [-]	1
$\theta$ [deg]	45

Table. 5.6: Configuration of mechanical model

$l$ [m]	0.05
$c$ [m]	0.05
$t$ [m]	0.001
$\rho_s$ [kg/m <sup>3</sup> ]	8000
$m$ [kg]	0.02
$I$ [kgm <sup>2</sup> ]	$4.167 \times 10^{-6}$
$K_h$ [N/m]	3350
$K_\alpha$ [Nm/rad]	10.3
$f_{h0}$ [Hz]	65.1
$f_{\alpha 0}$ [Nm/rad]	250

翼のメカニカルモデルは、前節と同様に、翼弦中心のピッチングと翼弦垂直方向の並進運動を考慮したモデルとした。即ち、Fig. 5.1 において  $a = x_a = S_\alpha = 0$  となる。翼の運動方程式は各翼間位相差の運動に対して、

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

となる。なお、ここでの  $L, M$  は特定の翼間位相差の運動に対する自励空気力（揚力，モーメント）である。

### 5.2.2 境界要素法（LINSUB）による空力微係数を用いたシステムモード求解法

Eqn. (5.21) において自励空気力行列を求めることが出来れば、各翼間位相差に対してピッチング・並進運動が連成した空力弾性モードを求めることが出来る。本節では、連成解析と比較を行うための参照解を求める際に、境界要素法によって半理論的に自励空気力係数を求めるプログラムである、LINSUB [97] を用いた。

LINSUB (LINEarised SUBsonic unsteady flow in cascade) は Whitehead によって開発されたプログラムで、亜音速流れ中の 0 迎角平板翼列における自励空気力係数を求めることができ、FORTRAN77 のソースコードが公開されている。

理論の詳細は割愛するが、このプログラムでは翼面を有限個の板要素 ( $i = 1, N$ ) に分割し、各板要素位置における速度  $u_i$  と、それによって誘起される板要素における非定常渦  $\gamma_i$  の関係式、および非定常渦  $\gamma_i$  と板要素の圧力差  $\Delta p_i$  の関係

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = [K_{ij}] \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \vdots \\ \Delta p_N \end{bmatrix} = -\rho U \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

から、各板要素における上下面間の圧力差を求め、翼面全体で数値積分することで自励空気力係数を得るものである。行列  $[K_{ij}]$  は核関数と呼ばれ、Fig. 5.14 のように翼面の翼列上流・下流に伝播する音波と下流に伝播するエントロピー波によって各板要素の非定常渦分布と板要素部の吹上げ速度とがどのように非定常的に相互干渉するかという物理的効果を表現している行列である。核関数の形式は複雑だが、核関数を求めることができれば、ピッチングや並進運動に限らず任意の翼面の運動に対して自励空気力を計算することが出来る。LINSUB の入力パラメータは、無次元振動数  $k = b\omega/U$ 、ピッチコード比  $s/c$ 、マッハ数  $M$ 、翼間位相差  $\sigma$ 、ならびに翼面の翼弦垂直方向速度分布である。

ここでは、LINSUB を用いて「単位振幅あたりの」翼弦中央まわりのピッチングおよび並進運動の調和振動に対する自励空気力

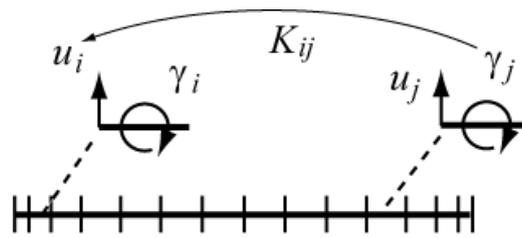


Fig. 5.14: Relationship between induced velocity and vortex on the blade surface

$$\frac{\partial L}{\partial h}, \frac{\partial L}{\partial \alpha}, \frac{\partial M}{\partial h}, \frac{\partial M}{\partial \alpha} \tag{5.23}$$

を求め、単独翼の時と同様に自動空気力を含むシステム方程式を構築し、固有値問題を反復的に  $p-k$  法で解いた。また LINSUB の翼弦方向要素分割数は 21 個とした。

### 5.2.3 連成解析における数値解析の設定

次に、連成解析の条件を設定していく。まず予め何度か行った予備解析において、翼列の計算では翼面上に境界層が発達したり、大きな翼厚さを設定すると翼間の流速が多少変化してしまい、結果に影響を与えているのではないと思われる挙動が発生した。そのため、本章の解析ではできるだけ翼を薄くするように翼厚さ・翼弦長比を 0.001(0.1%) まで低下させ、できるだけ理論解析に近い流れ場の状況を実現できるように努めた。また、単独翼の際とは異なり、乱流モデル・分子粘性項は用いず、Euler 方程式による非粘性の計算を行った。

Fig. 5.15 に格子の概要を示す。Fig. 5.15(b) の翼面に格子が集まっている部分が翼で、翼による周方向のブロックageが限りなく小さくされていることがわかる。計算領域は、 $-180 < \sigma \leq 180$ [deg] の間の翼間位相差が 45deg おきにまんべんなく発現するように、8 枚の翼を取り込み設定した。周方向には各翼間を隣接翼の流路と接続し、周方向の最端部同士も周期境界として接続している。翼列上流の流入境界を前縁より 5chord 長上流、下流の流出境界を後縁より 5chord 長下流に取り、単独翼の場合と同様にまず定常解析を行い流れ場を収束させた後、境界条件として Giles の準一次元無反射境界を課した。また翼面上では運動境界に対する滑り壁条件を課した。

解析時間幅に関しては、これも平板単独翼のケースと同様真空中における Pitching 周期 (250Hz) を 2000 等分する時間刻み幅で 3 回の内部反復を行い時間進行し、10 周期分の解析結果をモード同定に用いた。また、翼振動の変位・速度・加速度のサンプリングは 50timestep おきに行い、これは翼振動 1 周期中に約 40 サンプルをしていることになる。

### 5.2.4 解析結果の比較と考察

#### 一様流速度に対する翼振動応答の変化

平板単独翼に対するフラッターの計算と同様に、一様流流速を上げていったときの翼振動応答の変化について、応答の挙動が特徴的な  $M = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  を例にとって述べる。Fig. 5.2.4 が、これら 4 つのマッハ数に対する翼振動応答の時間履歴であり、各翼に対してピッチング変位と並進運動変位を共に示している。後述の固有値解析により、翼列フラッターは  $M = 0.3$  付近を境界として発生することがわかっており、 $M = 0.2$  は翼振動が安定な気流条件、 $M = 0.4, 0.5$  は翼振動が不安定となる気流条件である。

まず  $M = 0.2$  では、初期条件を与えた翼の振動は減衰し続け、他の翼にも振動は伝わるが、他のケースに比べて初期条件を与えていない翼の振幅の増加が遅い。そして  $M = 0.3, M = 0.4$  と流速を上げることで他の翼に振動が伝わりやすくなっている。一様流を  $M = 0.5$  まで増速すると殆ど全ての翼で振幅が発散傾向に転じていることが明瞭に見て取れ、また隣接翼とは 90 度に近い位相差で振動していることがわかる。

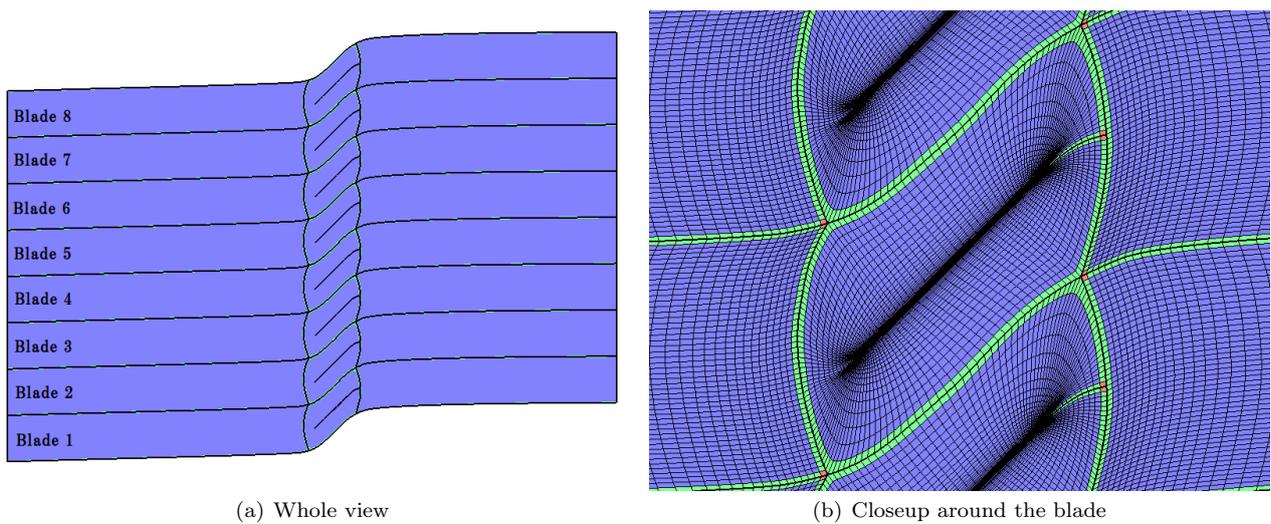


Fig. 5.15: Computational domain and CFD grids of flatplate cascade configuration

#### 同定精度に関する諸量の挙動

まず、翼振動の時間履歴より同定された諸量およびその推定誤差がどのような挙動を示しているかを述べる。誤差解析の定式化の際に、同定が上手く行っているかを示す最も簡単な指標が  $R^2$  であることを述べた。Fig. 5.17 に、連成解析の気流条件における同定結果に対する  $R^2$  を示す。全ての計算点で  $R^2$  は 0.95 以上であり、特に  $M \geq 0.3$  の計算点に対してはほとんど 1 である。したがって、翼振動の時間履歴を説明する空力弾性系の構築という観点からは、本節の結果は十分妥当なものであると言える。

次に、固有値成分に伝播した同定誤差を見ていく。同定された固有値のサンプリングに用いたタイムステップ数に対する変化について議論する。Fig. 5.18, Fig. 5.19, Fig. 5.20 に、2000step (Pitching 振動約 1 周期後) からある timestep までのサンプリング区間をとったときの空力減衰の同定誤差を、サンプリング数に対して示す。本節の計算の場合 (サンプル数) / 40 がおよそその翼振動回数に対応する。ここでは、 $R^2$  が十分 1 に近いがフラッターが生じていると思われる、同定誤差が比較的大きく出ている  $M = 0.4$ , 翼間位相差 180deg, ピッチングモード分岐に対するもの (Fig. 5.18) と、 $R^2$  が他に比べ小さかった  $M = 0.2$ , 翼間位相差 180deg (Fig. 5.19, Fig. 5.20) に対するものを例に取る。

まず Fig. 5.18 であるが、減衰率はサンプリング区間が短い場合は変化率が大きいですが、区間を長く取るにつれて一定の値に収束していくことがわかる。また、同定誤差の大きさである 99% 信頼区間の半値幅 ( $3\sigma$ ) についてはサンプルが少ない場合は増加するが、ある一定のサンプル数を堺に減少に転じることが見て取れる。また、減少区間における勾配はおおよそサンプル数の  $-1/2$  乗に比例している。このことは、最小二乗法によって推定した推定値の標準偏差がサンプル数の  $-1/2$  乗に比例するという、統計学の基本的な性質が観察できていると考えられる。このように、本研究で用いるモード同定手法により信頼性の高い結果を得るためには、推定値のサンプル数に対する変化量が小さくなっていくと同時に推定値の標準偏差が単調減少するような領域までサンプル数を稼ぐ、即ち連成計算を続行することが必要であるといえる。

$R^2$  が相対的に小さかった Fig. 5.19, Fig. 5.20 についても基本的な変化の傾向は Fig. 5.18 と一致しており、このことから  $R^2$  が小さくてもサンプル数を稼げばより正確だと思われる空力弾性モードの推定値を得ることができる。ただし、固有値成分の収束を確認することはやはり必要であり、Fig. 5.20(a) では他に比べ相対的に収束が遅くなっている。ただ、Fig. 5.20(a) では 280Sample 以降 (翼振動 7 周期ぶん, Timestep で 16000step 以上) はそれ以前に比べサンプル数を増やした際の幅が小さくなっており、それとともに Fig. 5.20(b) において推定値の標準偏差の単調減少が始まっていることが見て取れる。

これらの誤差の観察から、本研究においてはおよそ Timestep 16000step に対応する翼振動 7 周期程度を目安に空力弾性モードの誤差成分を観察しながら空力弾性モードを調べていけばよいことがわかる。

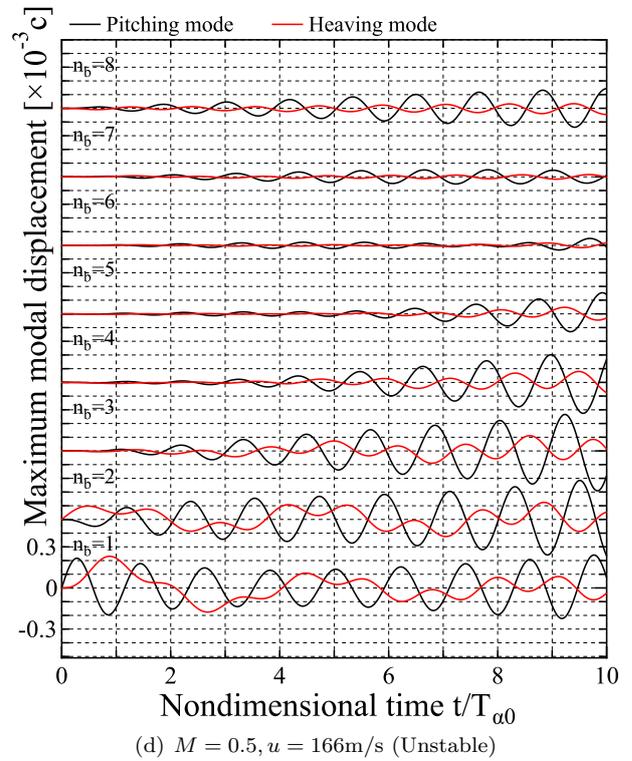
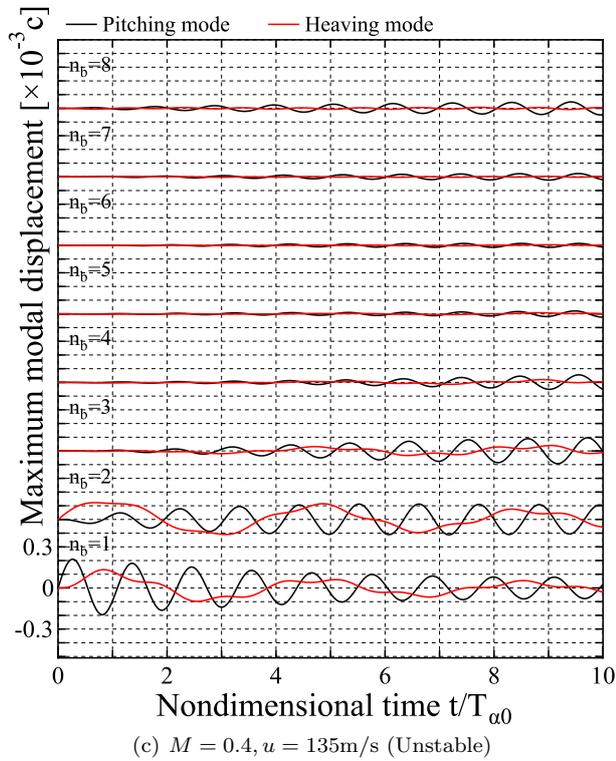
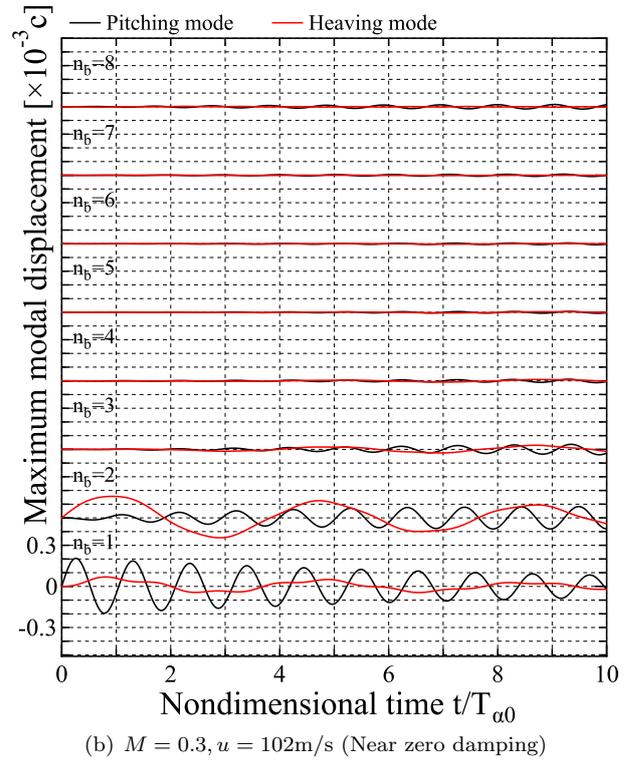
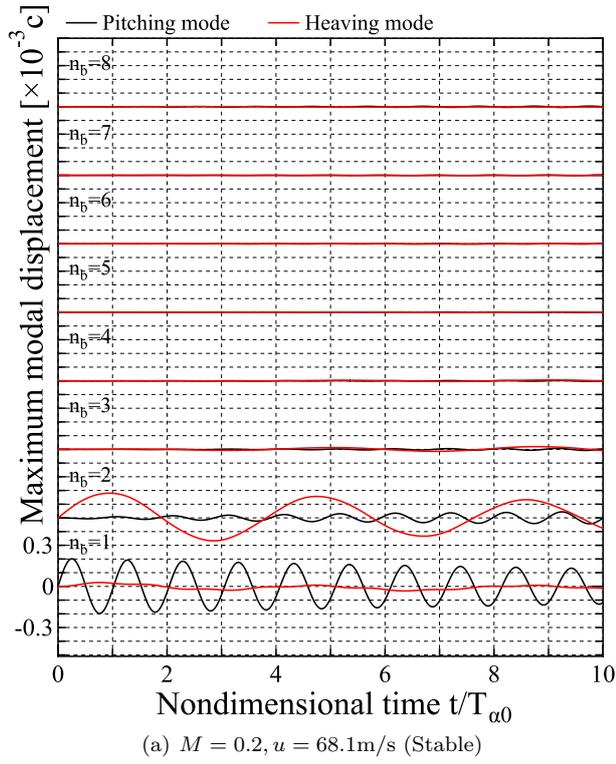
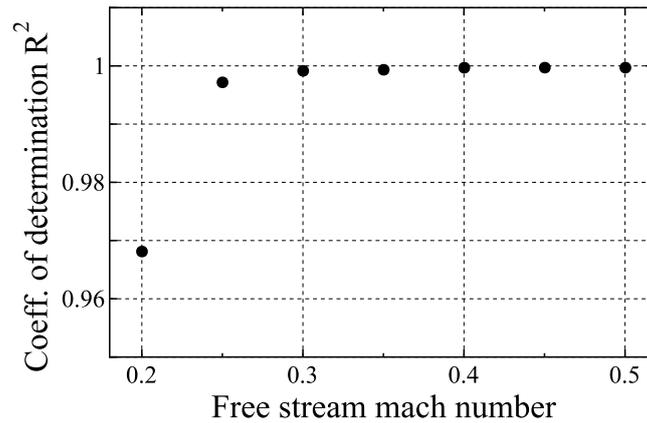


Fig. 5.16: Time history of blade vibration on each freestream Mach number

Fig. 5.17: Coefficient of determination  $R^2$  on each FSI condition

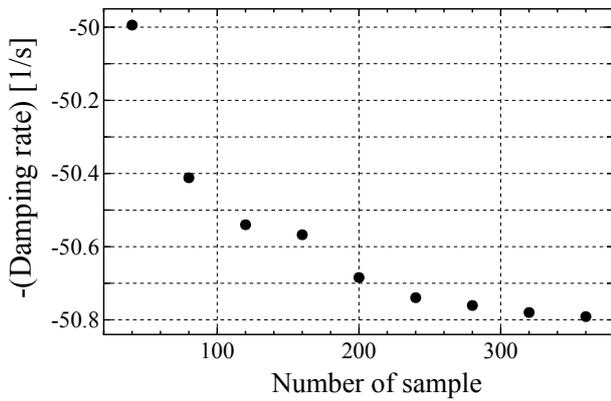
#### 空力弾性モードの比較：固有値成分

以上の誤差成分の振る舞いの観察より、20000step（～ピッチングモード 10 周期）程度では空力弾性モードの固有値成分の誤差は十分小さいと考えられる。ここからは、この 20000step までサンプリングした場合の空力弾性モードの流速に対する変化を、LINSUB の参照解と比較していく。まず固有値成分に対して、Fig. 5.21, Fig. 5.21 に振動数、減衰率の各 IBPA モードにおいて比較したものを示す。連成解析による同定結果は参照解の LINSUB とほとんどのモードで良好に一致しており、かつ Fig. 5.22(c) の IBPA=90deg ではフラッター流速がかなり正しく捉えられていることがわかる。IBPA=90deg のフラッター速度は LINSUB、連成解析においてそれぞれ  $M = 0.3178$ ,  $0.3116$  であり、たった 2% の差であった。しかし、フラッターが起きた後の固有値分布は Fig. 5.22(a) の  $M \geq 0.35$  の領域に見られるように、ピッチング分岐では誤差棒が大きくなったり、並進モード分岐では参照解のトレンドを外してしまったりしている。特に、並進モード分岐のトレンド逸脱は、おそらく並進運動が誘起する変動空気が小さく、時間がたつにつれて振幅が増大しているピッチングモードの空気に埋もれてしまったためであると推測される。

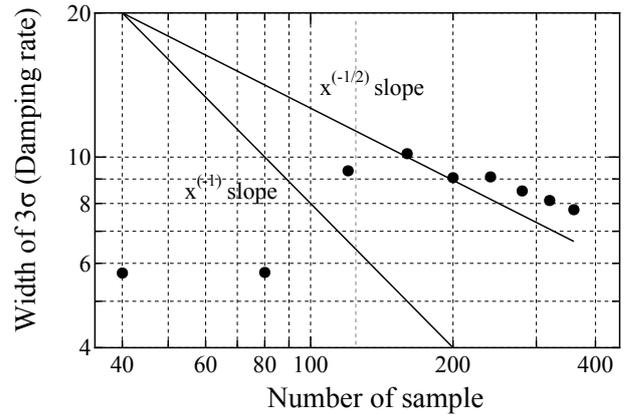
#### 空力弾性モードの比較：モード形状成分

モード形状成分についても、参照解との比較とともにモード間振幅比を Fig. 5.23 に、並進運動のピッチング運動に対する位相差を Fig. 5.24 に示す。これも固有値成分同様、振幅比のみならず位相差までもがかなり正確に LINSUB の傾向を捉えている。特に、フラッター流速付近である  $M = 0.3$  では、Fig. 5.23(c) のピッチングモード分岐においてはピッチング変位に加えて 10% 近くの並進自由度が誘起されており、このような状態はもはや 1 自由度の翼列フラッター解析では再現できず、多自由度の取り扱いが必須な状態であるといえる。

以上、LINSUB を用いた翼列の空力弾性解析結果を参照解として連成解析結果を比較検証した結果、本研究で構築した連成解析コードおよびモード同定法を用いて、構造振動モード自由度間の空力的連成に起因して翼振動特性やフラッター特性が変化する系におけるフラッター解析が、同定結果に内在する誤差にさえ注意すれば適切に行えることがわかった。

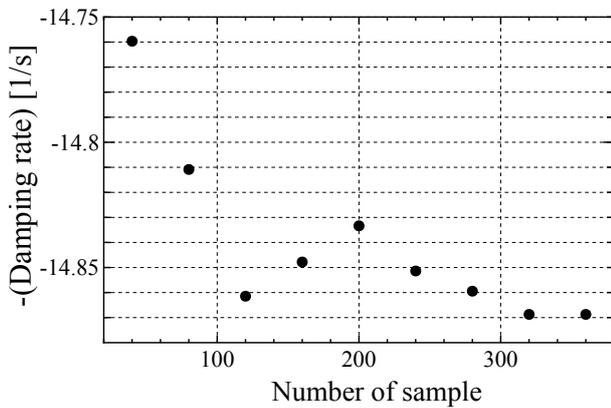


(a) Identified damping rate

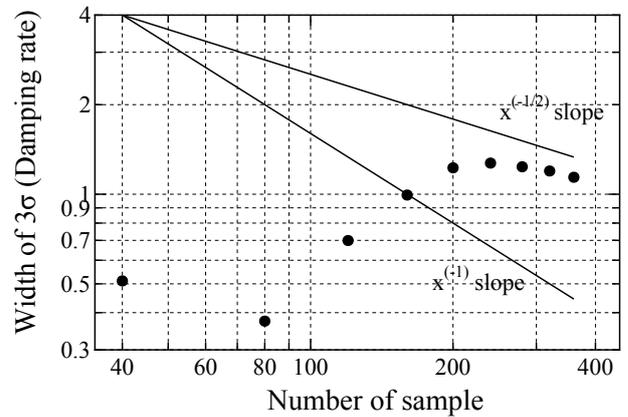


(b) Width of confidence interval

Fig. 5.18: Convergence behavior of identified aeroelastic damping and 99 percent confidence interval ( $M = 0.4$ , IBPA=180deg, Pitching mode branch)

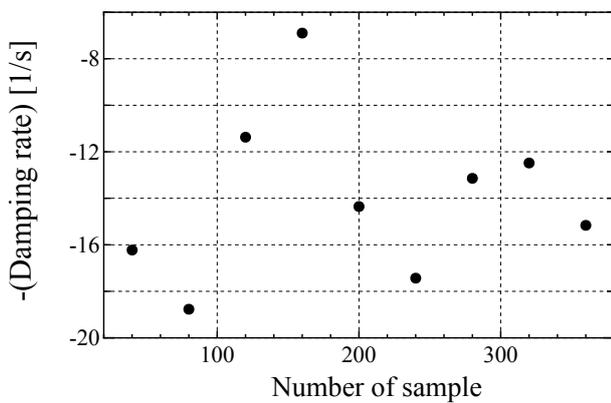


(a) Identified damping rate

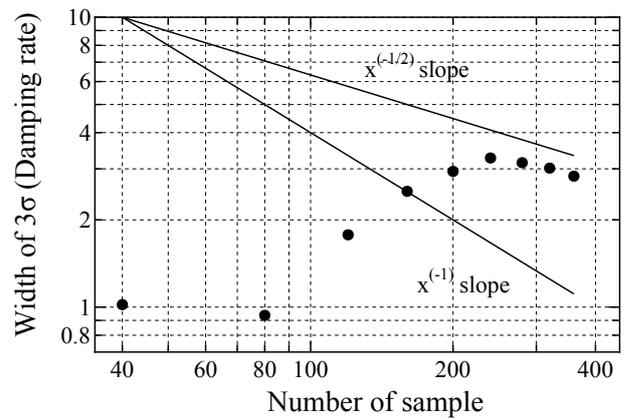


(b) Width of confidence interval

Fig. 5.19: Convergence behavior of identified aeroelastic damping and 99 percent confidence interval ( $M = 0.2$ , IBPA=180deg, Pitching mode branch)



(a) Identified damping rate



(b) Width of confidence interval

Fig. 5.20: Convergence behavior of identified aeroelastic damping and 99 percent confidence interval ( $M = 0.2$ , IBPA=180deg, Heaving mode branch)

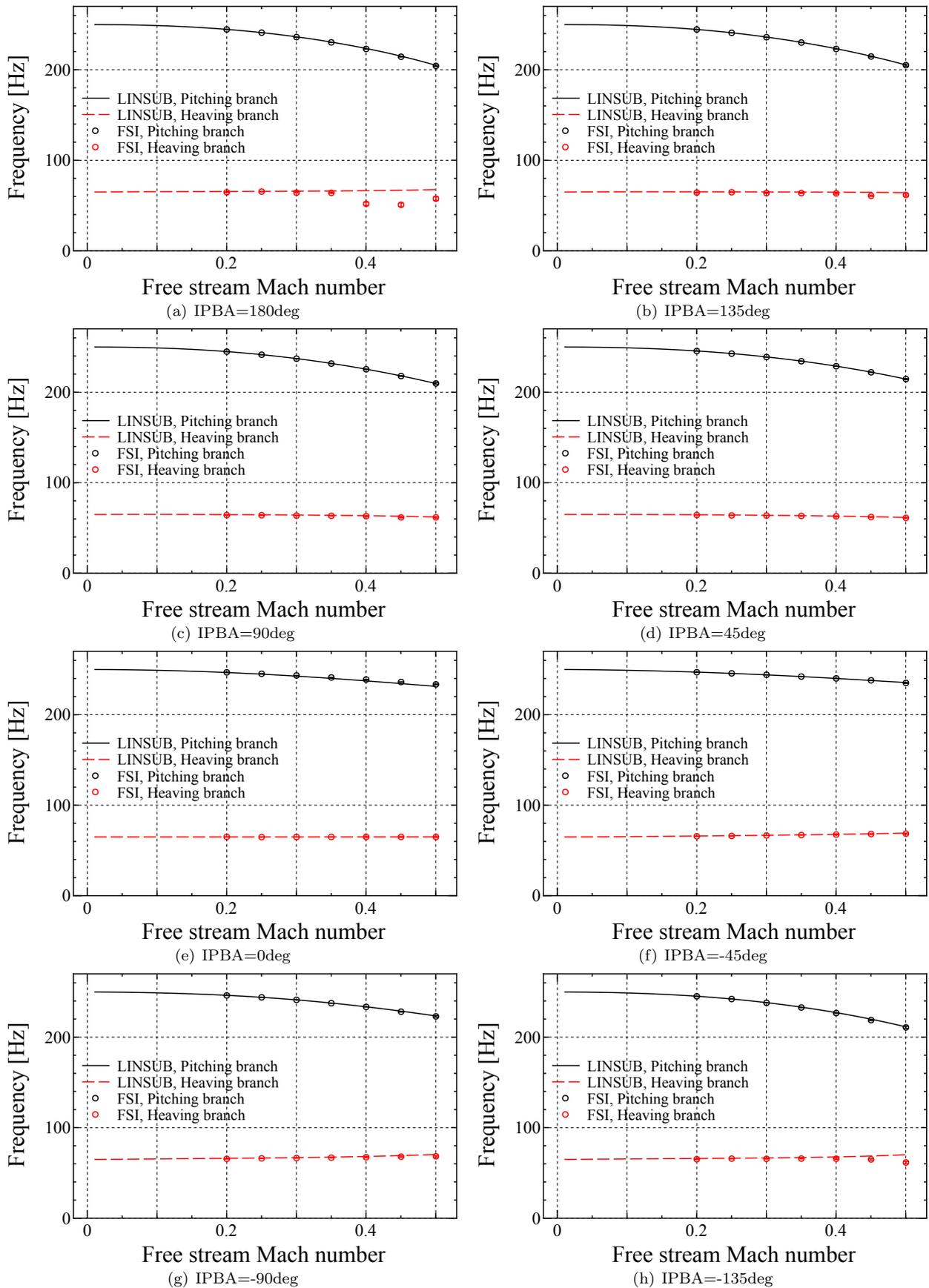


Fig. 5.21: Comparison of aeroelastic frequency between LINSUB and FSI results for each IBPA mode

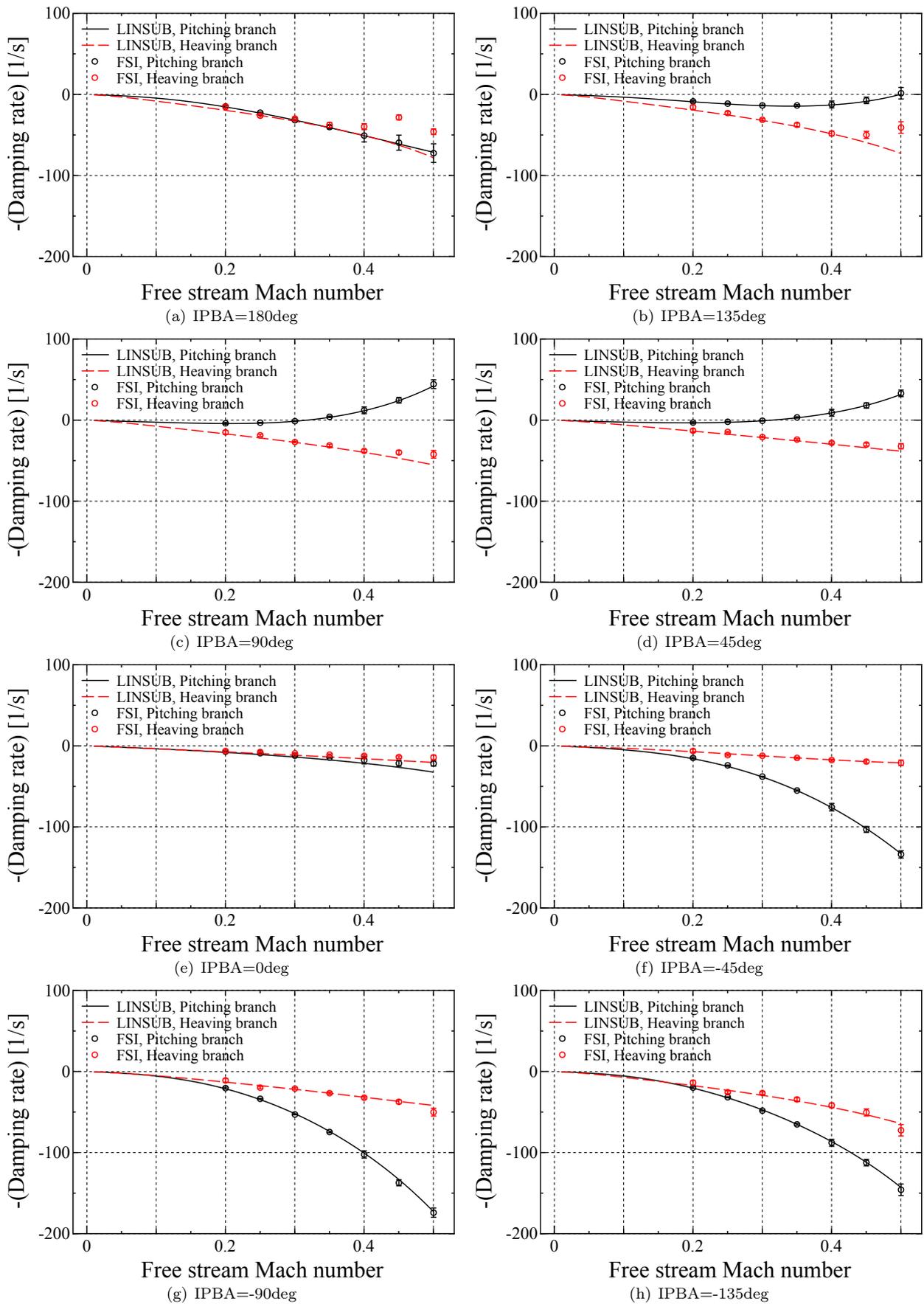


Fig. 5.22: Comparison of aeroelastic damping rate between LINSUB and FSI results for each IBPA mode

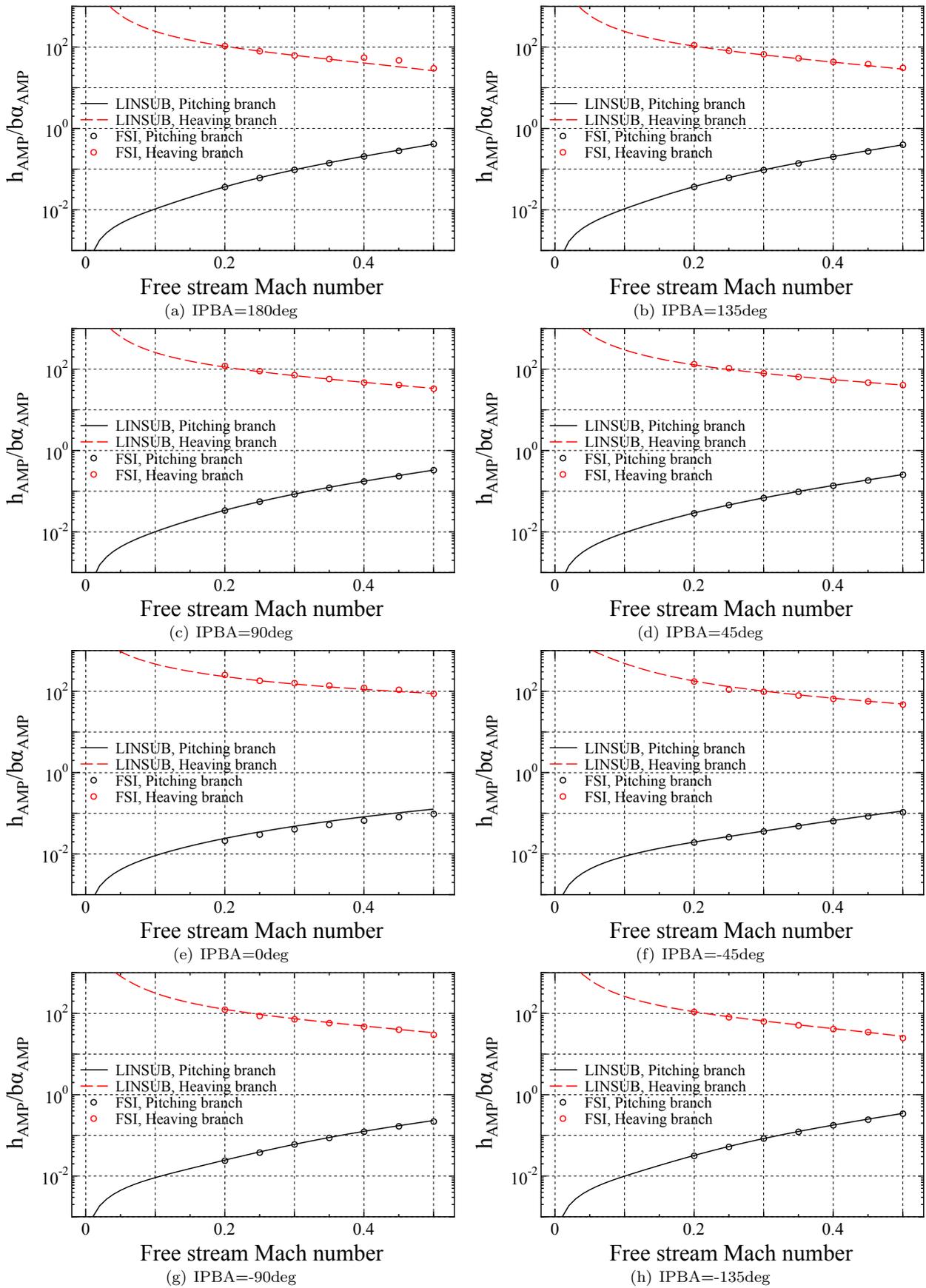


Fig. 5.23: Comparison of amplitude ratio rate between LINSUB and FSI results for each IBPA mode

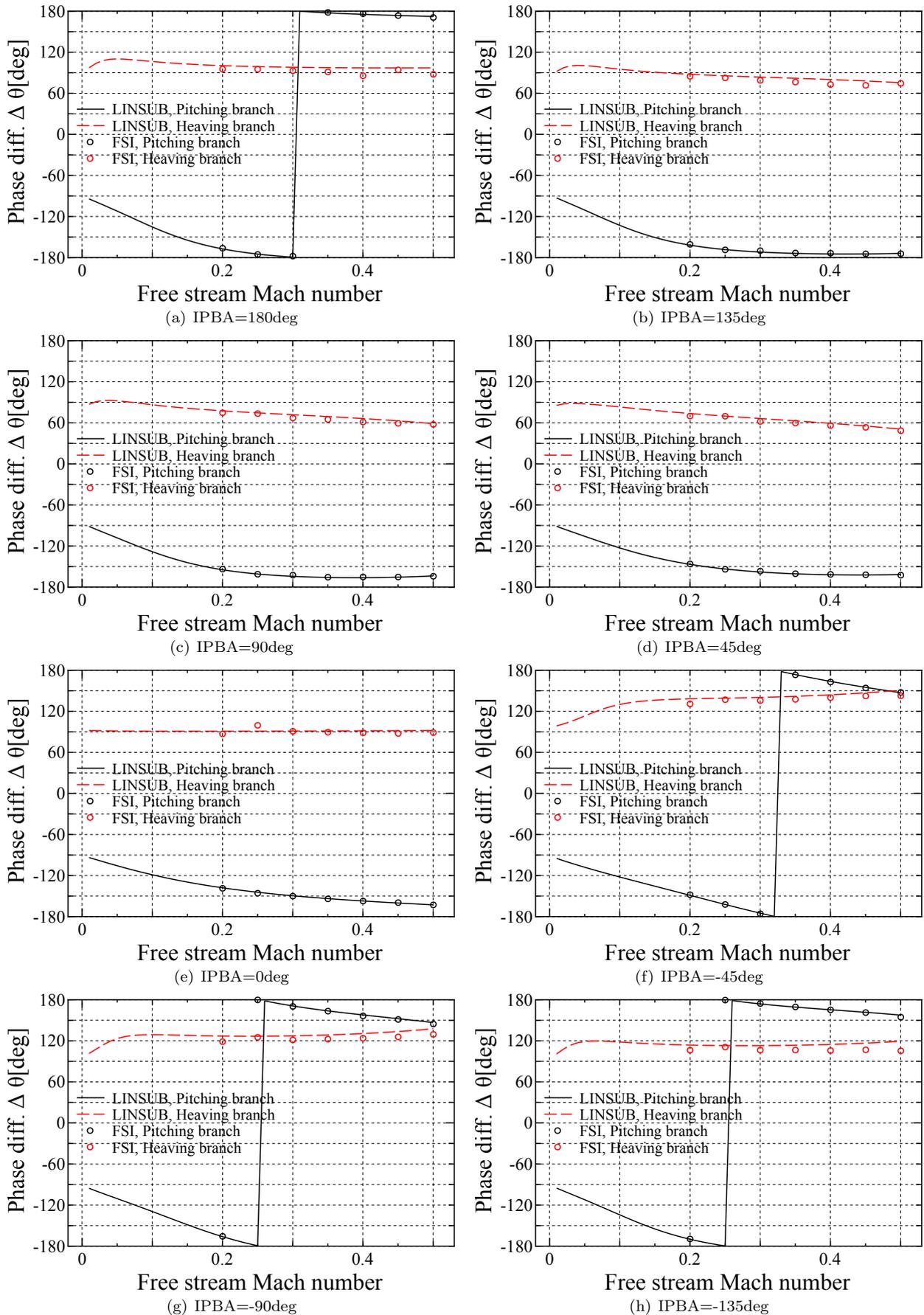


Fig. 5.24: Comparison of phase difference between LINSUB and FSI results for each IBPA mode

5.2.5 モード間連成の影響: 複合モードと単一モードの比較, 質量比の効果

前小節では LINSUB と  $p-k$  法によるフラッター解析と連成解析結果を比較し, 空力弾性モードの情報が正しく同定できることを示した. 本小節ではさらに追加的な検証として, 流体・構造間の連成の度合いを変化させたときのフラッター速度の変化を連成解析によって正しく捉えられるかを調べる.

質量比を変化させた検証ケースの設定

本小節の解析においては, 前小節において用いた翼列構成とメカニカルモデルをベースラインとし, 幾何的には同一形状を保ちつつ, 系の力学的特性を変化させる. まず, 翼の質量および剛性を, 真空中における自由振動数が一致するようにスケールリングした系を考える. 即ち,  $s$  をスケールリングパラメータとして, 慣性モーメント  $I_\alpha$ , 翼質量  $m$ , ピッチング・並進のばね定数  $K_\alpha, K_h$ , 真空中自由振動数  $\omega_\alpha, \omega_h$ , はそれぞれ,

$$\begin{aligned} I_\alpha &= s(I_\alpha)_{\text{baseline}}, \quad m = s(m)_{\text{baseline}}, \\ K_\alpha &= s(K_\alpha)_{\text{baseline}}, \quad K_h = s(K_h)_{\text{baseline}}, \\ \omega_\alpha &= (\omega_\alpha)_{\text{baseline}}, \quad \omega_h = (\omega_h)_{\text{baseline}} \end{aligned}$$

のスケールリングを受ける. 次にこのスケールリングの下で, 系の空力弾性的な無次元数がどのようにスケールリングされるかを考える. 流体・固体の参照質量の比である質量比  $\mu = m/\pi\rho b^2l$  と, 「慣性力 + 弾性力」に対する空気力 (動圧) の大きさの指標となるパラメータ  $1/\mu k_\alpha^2$ ,  $k_\alpha = b\omega_\alpha/u$  はそれぞれ,

$$\mu = s(\mu)_{\text{baseline}}, \quad \frac{1}{\mu k_\alpha^2} = \frac{1}{s} \left( \frac{1}{\mu k_\alpha^2} \right)_{\text{baseline}} \tag{5.24}$$

のスケールリングを受ける. 即ち, 真空中の振動数を一定にしながら翼の質量・剛性を共に  $s$  倍にすると, 相対的な空気力の大きさは  $1/s$  となる.

Table. 5.7 に, 検証に用いるケースを示す. ベースラインとなるケースの他に, 3 ケースを用意した.  $s = 1$  (1DoF) は質量比が同じで自由度間の連成がないケース,  $s = 1/2$ ,  $s = 1/4$  はベースライン比でそれぞれ質量比が  $1/2$ ,  $1/4$  のケースである. 質量比はベースラインで 167,  $s = 1/2$ ,  $s = 1/4$  でそれぞれ 83.5, 41.8 となる. 結果として期待されることは,  $s$  の値が小さい方が空気力の相対的強さが大きくなり, ピッチング・並進自由度の間の連成の影響が顕著に現れるようになることである.

Table. 5.7: Test cases for the effect of mass ratio on flutter characteristics

Cases	$\mu$	Relative strength of aerodynamic force at the same $u$	Comments
baseline	167	1	
$s = 1$ (1DoF)	167	1	Pitching only
$s = 1/2$	83.5	2	
$s = 1/4$	41.8	4	

ここで注意すべき点をコメントしておく. このスケールリングは, 真空中振動数を一定に保つという拘束条件の下で行っているため, あくまでパラメトリックに流体力の相対的な大きさを変化させるためのものである. 実際の翼で材料を変えた場合 (例えば, ステンレス チタン 複合材, など) には, 質量のみならず同時に弾性定数も変化するため, 真空中の振動数も変化する. このようなときは, 流体・固体密度  $\rho_a, \rho_s$ , ヤング率  $E$  を用いて,

$$\mu \propto \frac{\rho_s}{\rho_a}, \quad \frac{1}{\mu k^2} \propto u^2 \left( \frac{\rho_a}{\rho_s} \right) / \left( \frac{E}{\rho_s} \right) \tag{5.25}$$

のようにスケールリングされる. したがって同じ流速であれば, 流体・固体密度比の他に単位密度あたりのヤング率である比剛性が入ってくる. このように, 現実の材料特性に本章のスケールリングを当てはめる場合, 本章の議論は「比剛性一定のもとで」材料の質量比が低くなった場合にのみあてはまり, 例えば「ファンブレードをチタン材料から複合材に変える場合」にはあてはまらない.

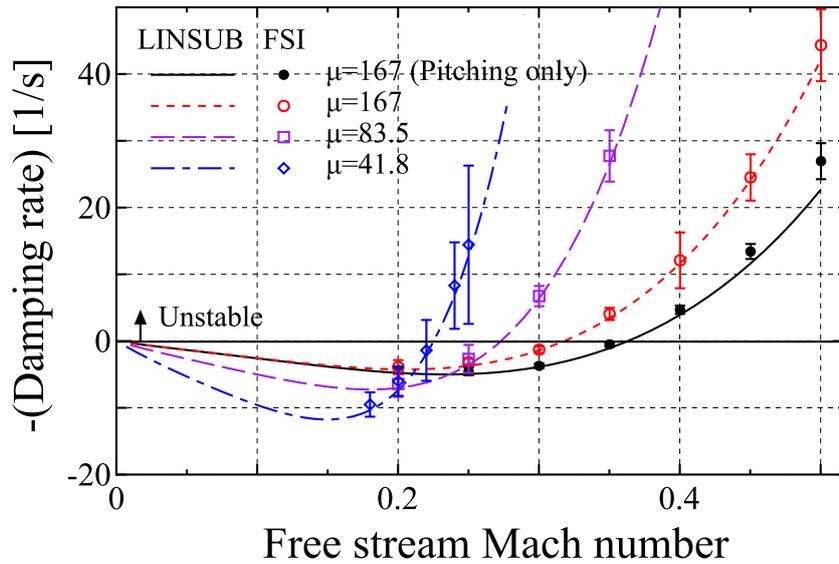


Fig. 5.25: Effect of reduction of mass ratio on the flutter speed (IBPA=90deg, pitching branch) and comparison to the LINSUB- $p-k$  method

Table. 5.8: Critical Mach number and relative difference between LINSUB and FSI

Solver/ Cases	1DoF, $\mu = 167$	$\mu = 167$	$\mu = 83.5$	$\mu = 41.8$
LINSUB	0.364	0.317	0.273	0.225
FSI	0.356	0.312	0.265	0.220
Difference	-2.2 %	-1.6 %	-2.9 %	-2.2 %

フラッターモードの速度線図

フラッター境界前後の一樣流流速条件で連成解析を行った結果から空力弾性モードを同定した。フラッターはどの質量比でも前節の検証ケースと同様に IBPA=90deg で生じた。まず Fig. 5.25 に、各ケースで最も不安定な空力弾性モードである IBPA=90deg における一樣流マッハ数の変化に対する減衰率の変化を示す。誤差棒は各ケースでの同定結果の 99 % 信頼区間である。LINSUB の結果、連成解析結果の「FSI」ともにねじり単一自由度のケースが最も安定でフラッター速度が高く、質量比を下げるほどフラッター速度が減少する様子が明瞭に観察できる。Table. 5.8 には、LINSUB・FSI を用いて各ケースで求めたフラッター速度を示している。LINSUB・FSI 間の相対差は  $\mu = 83.5$  のケースで最も大きく -2.9 % であったが、これは計算ケースの幅が減衰率の増加率に比べて高すぎたからだと考えられる。また、全てのケースで 3 % 未満と連成解析結果は LINSUB による計算結果とよく一致している。以上のことから、フラッターに入る挙動は連成解析・モード同定を用いてよく捉えられている。

しかし、連成解析によって同定された減衰率の減衰率推移とフラッター速度は問題ないが、質量比が最も小さいケース ( $\mu = 41.8$ ) の誤差棒が他のケースに比べて相対的に大きくなっている。このケースは 4 つの中では最も質量比が低く、振動モード間の空力的な連成も他のケースに比べて大きいため、モード同定としては条件の厳しいケースであるといえ、同定結果として不十分な箇所が存在する可能性が高いと考えられる。そこでこのことを調べるべく、様々な翼間位相差の空力弾性モードについて同定結果を調べることにする。

空力弾性モード固有値：振動数、減衰率

Fig. 5.26 に、各ケースにおける空力弾性モード振動数の流速に対する変化を示す。なお、ここでは代表として IBPA=180, 90, 0, -90 のものを示しており、単一モードのものは示していない。まず線で示した LINSUB の結果を見ると、一般的な傾向はどの質量比・翼間位相差でも Fig. 5.21 と変わらない。流速を上げるとピッチングモード分岐は振動数が低下し、一方並進モード分岐は振動数が上昇する翼間位相差もあれば、そうでない翼間位相差もある結果となっている。振動数に関しては、ピッチングモード分岐の同定結果は非常に良い結果を与えている。一方で、ピッチングモード分岐では  $\mu = 167$ ,  $\mu = 83.5$  の質量比が大きい間は IBPA=180deg のフラッター流速

以上の点が LINSUB の傾向を逸脱している．また，IBPA=180 の  $M = 0.25$  では LINSUB と逆の傾向になってしまっている．このように，フラッターに入るピッチングモード分岐ではモード同定は比較的良好な結果を与えるのに対し，フラッターに入らず減衰傾向となる並進モード分岐はピッチングモード分岐ほどの一致は見られない．

上記の傾向は，減衰率にてより顕著になる．Fig. 5.27 に，空力弾性モード減衰率の流速に対する変化を示す．減衰率もピッチングモード分岐はどの計算ケース・翼間位相差でもよく LINSUB と一致している．しかし， $\mu = 41.8$  では並進モード分岐は翼間位相差によって傾向が捉えられているもの（IBPA=90, -90deg）とそうでないもの（IBPA=180, 0deg）に分類できる．後者では，並進モード分岐の減衰率がピッチングモードのそれに近いものになってしまっている．同定時の決定係数はどのケースでも  $R^2 = 0.98$  であり，モード同定における残差は十分小さいといえる．そのためこの不一致が具体的にどのような理由によるかは明らかにはならなかったが，ピッチング・並進の連成が誤差棒が非常に大きくなっていることを考えると，連成解析の時間領域解から翼振動の変位・速度で線形に表した空力弾性システムが一意に定まるような条件ではなくなっているのかもしれない．

#### 自励空気力行列の一意性について

上で述べた「時間領域波形から空力弾性システムが一意に定まるような条件ではない可能性がある」ということは，本研究における定式化の仮定を逸脱することになる．モード同定では，自励空気力の係数行列（下の運動方程式中における  $A, B$ ）

$$\ddot{q} + \Lambda q = Aq + B\dot{q} \quad (5.26)$$

は，時不変な定数であるという仮定に基づいている．しかし，ここで用いている LINSUB に代表される周波数領域法では，自励空気力係数は周波数の関数として表わされている．したがって，周波数領域法では各空力弾性モードに対する  $A, B$  というのは，モード振動数が異なるから，別々の値を持たなくてはならない．こうしたことを考えると，厳密にはモード同定過程で同定された  $A, B$  と周波数領域法における  $A, B$  は等価ではないといえる．

では，誤差棒が大きいということは何を意味するのだろうか．あくまで推察ではあるが，連成解析結果として二種類の  $A, B$  の値を主張するようなデータが混在しているためかもしれない．

ただ， $A, B$  の周波数依存性を無視した仮定により時不変システムを仮定しても，あるモード以外のすべてのモードの情報が十分小さくなったならば，最後に残ったモードが同定結果として現れるのだと考えられる．したがって本研究の手法では「少なくとも最低減衰率/フラッターモードは求まる」といえ，周波数領域法と完全な互換性を有さないにも関わらず，連成解析結果はフラッターモードであるピッチングモード分岐の IBPA=90deg を含むピッチングモード全体で正しい同定結果を与えていることが，そのことを支持する結果であるといえる．

#### 空力弾性モード形状：ピッチング・並進振幅比，位相差

最後に，モード形状のピッチング・並進運動振幅比，位相差についても観察してみよう．Fig. 5.28 に各空力弾性モードの振幅比を，Fig. 5.29 にピッチング運動に対する並進運動の位相差を示す．振幅比に関しては，IBPA=90deg の  $M=0.25$  を除き LINSUB の傾向をよく捉えており，減衰率ほどには不一致が現れていない．このことは，連成の強さ自体は空気力の相対的な大きさをスケールされるためであると考えられる．一方で，位相差は  $\mu = 41.8$  で並進モード分岐のずれが目立つのもこれまでの観察と同様である．

#### 小さい質量比に対する検証のまとめ

以上をまとめ，自由振動数を一定に保ちながら質量比・剛性を变化させた解析を通じた検証で判明したこと，解析精度や結果の解釈に際し注意することは以下である．

- 慣性力・弾性力に比べ相対的に空気力を大きくすると，自由度間振幅比が増大すると同時にフラッター速度が減少する．
- 極端に空気力を大きくすると同定の不確かさが非常に大きくなる．
- 上記の理由として，自励空気力係数行列が一意に定まらないことの影響であることが可能性としてある．
- 同定の不確かさが非常に大きくなる場合にも，フラッターモードを含むモード群はそれ以外のモード群に比べ精度よく求まる．

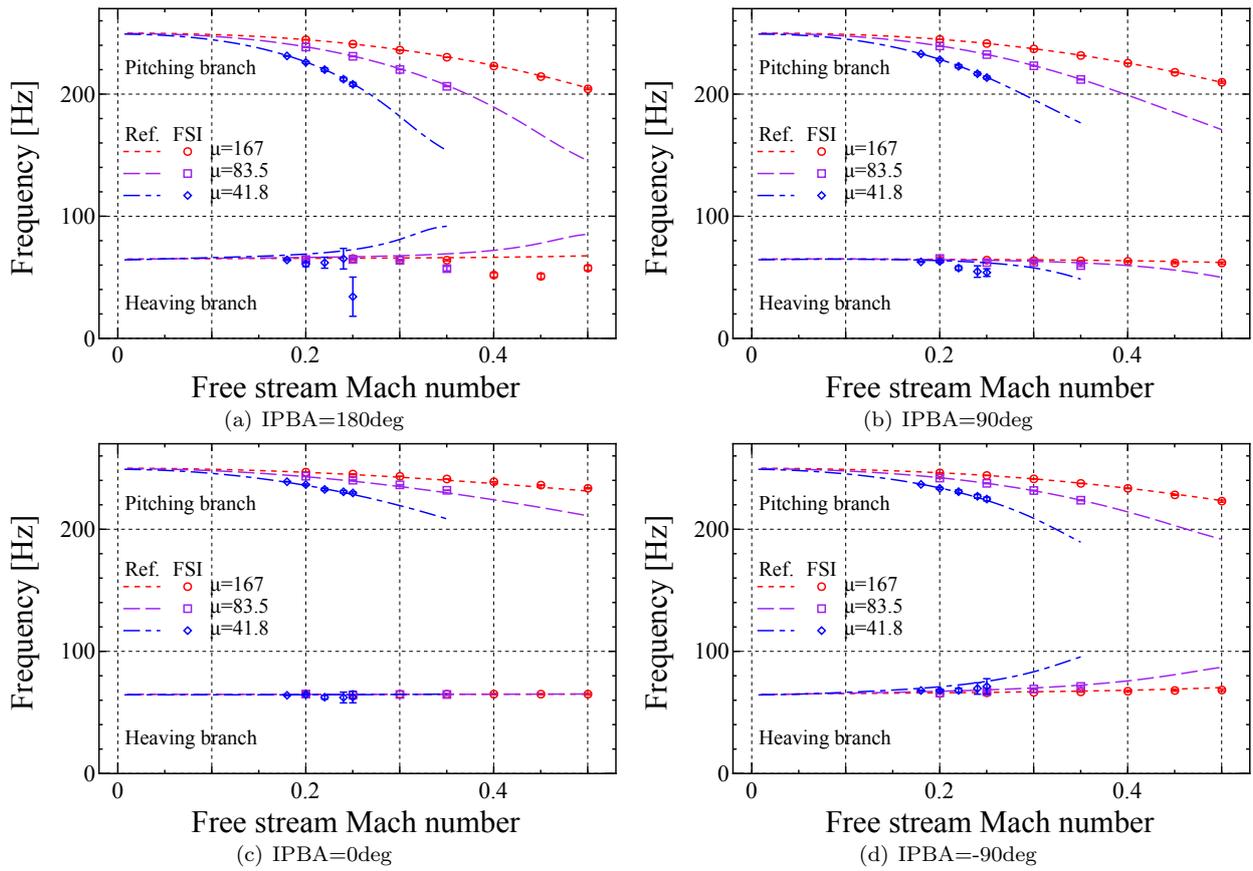


Fig. 5.26: Effect of mass ratio on aeroelastic frequency with comparison between LINSUB and FSI

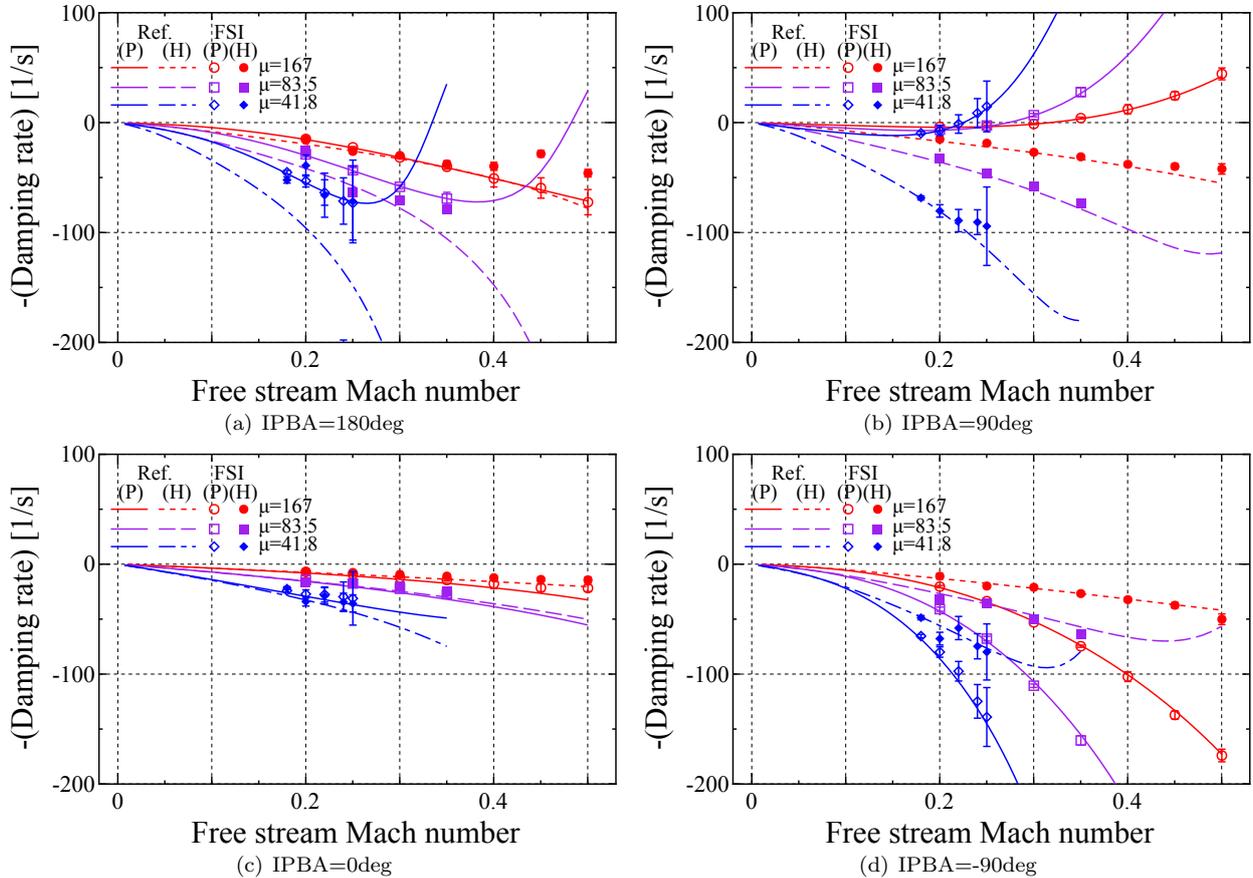


Fig. 5.27: Effect of mass ratio on aeroelastic damping rate with comparison between LINSUB and FSI

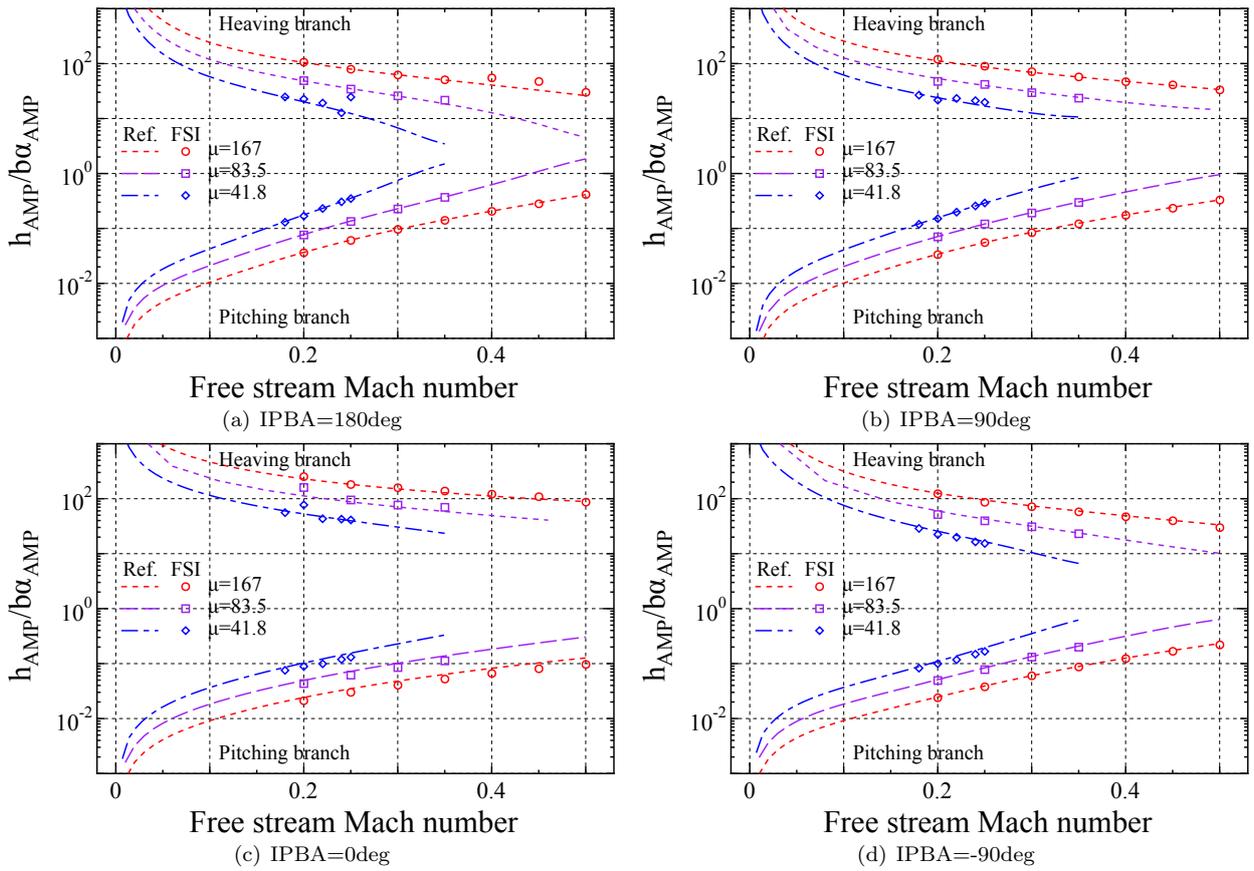


Fig. 5.28: Effect of mass ratio on amplitude ratio with comparison between LINSUB and FSI

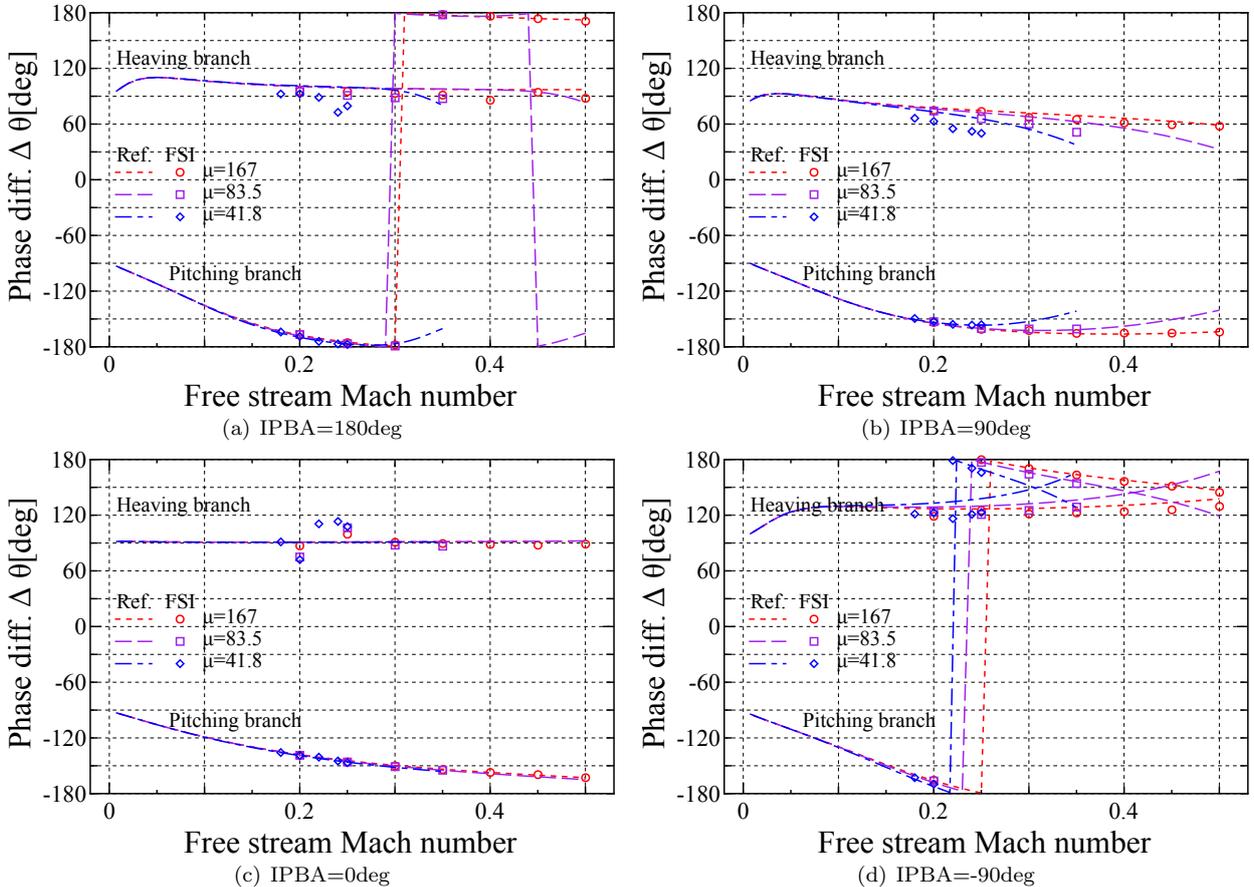


Fig. 5.29: Effect of mass ratio on phase difference with comparison between LINSUB and FSI

### 5.3 5 章のまとめ

本章では、基礎的なフラッター現象の再現と、数値解析結果を用いたモード同定法で正しく空力弾性モードが同定されることを、連成系に対する理論解析が可能な、平板単独翼および平板翼列に生じる古典的フラッターを題材にして確かめた。その結果、平板単独翼の並進モード分岐に代表されるような、流速を上げると振動数が 0 に近づき、かつ減衰率が非常に大きくなるような空力弾性モードに対しては同定結果が信頼できるものかは判断できないが、フラッターの発生点までの空力弾性モードは、単独翼・翼列といった構成の違いによらずフラッター速度を含めて精度よく捉えられることが示され、また長時間の振動解析を実行し翼振動のサンプル数を増やせばモード同定の精度が向上することが確認された。

## 第 6 章 NASA Rotor 67 に対する連成解析

## 6.1 問題設定

これまで連成手法の構築と基礎的な系における検証を行ってきたが、ここからは実機形状に近いファンに対して構築した手法を使って流体・構造間の連成現象に対する解析を行う。

本章では、典型的な遷音速ファン翼列試験機である NASA Rotor 67 を対象とし、作動時を模擬して流体・固体双方の連成効果を含めた振動解析を行い、生じる変形挙動や振動特性を調べることで、実際には計測することが困難な回転翼列の流体・構造連成振動の振動特性や空力減衰特性を解析により詳細に取得できるかどうかを調べる。

### 6.1.1 解析対象

3次元形状翼列の解析対象として、典型的な遷音速ファン実験機である NASA Rotor 67 を選択した。本解析対象は NASA の Lewis 研究所において 1980 年代後半に開発された、低アスペクト比 (1.56)、翼端相対流入マッハ数 1.38 の遷音速ファンで、動翼部分は Fig. 6.1 のような形状をしている。本ファンが作成された元々の目的は、航空用エンジンファンにおける空力計測を通じた詳細な流れ現象の把握、およびその結果を用いた数値解析手法の検証である。空力試験は設計回転数における特性および流速の計測が実施され、Strazisar ら [98] により試験結果が公開されている。Fig. 6.2 に空力計測の位置を示す。Station1, Station2 において全温、全圧、絶対系における周方向流れ角が計測され、これらの値を用いてファン特性曲線が算出されている。

なお、実験作動中にフラッターの発生は報告されていない。それにもかかわらず、NASA Rotor 67 に対するフラッター解析はこれまで多くの実施報告がある [100] [101] [102] [103] [104] [105]。その理由として、形状や空力計測データが公開されている数少ない対象であることに加え、ある程度基礎的な問題を通じて検証がなされた比較的新しい解析手法を用いる、デモンストレーションの目標とみなされていると考えられる。実際に、上で挙げら

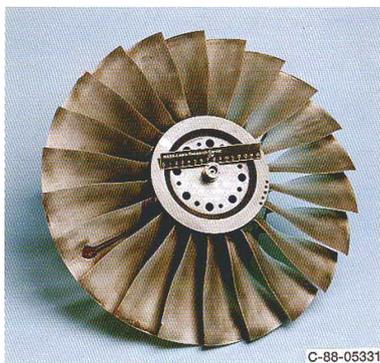


Fig. 6.1: NASA Rotor 67 [99]

Table 6.1: Design parameter of NASA Rotor 67 [98]

Number of blades	22
Aspect ratio	1.56
Hub/Tip ratio at L.E	0.375
Tip relative Mach.No.	1.38
Design Total pressure ratio	1.63
Design mass flow rate [kg/s]	33.25
Design rotational speed [rpm]	16043

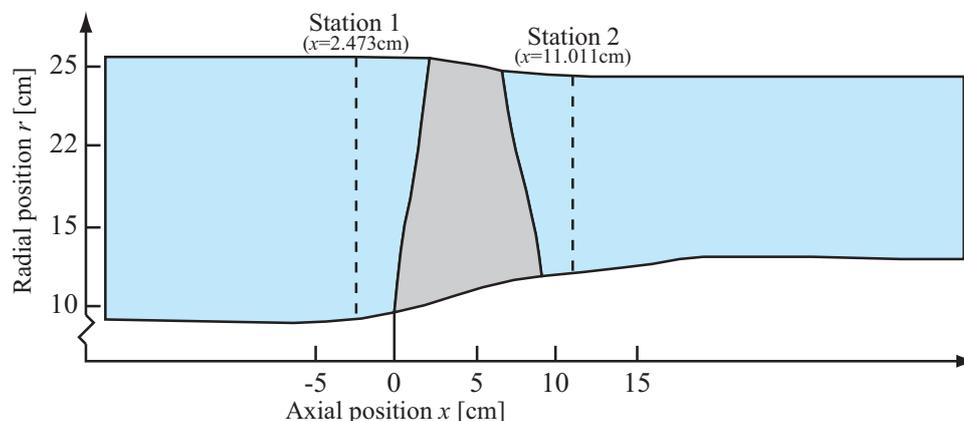


Fig. 6.2: Aerodynamic measurement positions of NASA Rotor 67

Table. 6.2: Summary of past computational studies using rotor 67 for aeromechanical purpose

Year	Authors	Configuration	Numerical Methods
1999	Chuang and Verdon [100]	Rotor only	3D-RANS, Time-domain, Uncoupled
2002	Doi and Alonso [103]	Rotor only	3D-RANS, Time-domain, Coupled
2005	Sadeghi and Liu [104]	Rotor only	3D-RANS, Time-domain, Coupled
2010	Reddy and Bakhle [101]	Staged	3D-RANS, Nonlinear frequency domain (Harmonic balance), Uncoupled
2013	Elder et al. [102]	Rotor only	3D-RANS, Time-domain with Phase-lag BC, Uncoupled
2013	Im. et al. [105]	Rotor only	3D-DES, Time-domain, Coupled
2014	Liou and Yao [106]	Rotor only	3D-RANS, Reduced order modeling by Volterra series

れた文献で用いられている解析手法を整理してみると Table. 6.2 のようになり, RANS の非連成解法から始まり年代が進むに連れ連成解析, 非線形周波数領域法 (Harmonic Balance), Detached Eddy Simulation, Volterra 級数を用いたシステムモデリングなど, 様々な特殊な解法が試されている. しかし, ターボ機械の連成解析を用いたフラッター解析において空力弾性モードはほとんど意識されておらず, ほとんどが時間領域波形を見て振動の発散/減衰を判断しているのみであり, 翼列が多自由度振動系であるという視点が欠けている. 他者の連成解析と比較した本研究で取ったアプローチの独自性は, 連成解析を用いて空力弾性モードの推定を試みることにある.

### 6.1.2 解析対象の作動条件と特性評価法

まず, 本章で対象とするファン作動条件範囲とファン特性の評価法について述べる. ファンの作動状態は, 定常流れ解析, フラッター解析とともに回転数を設計回転数とし, 流量を調整し変化させる. 流量は, ファン下流背圧を様々に変化させることで調整した. ファンの入り口条件は, 前置静翼がないため, 固定系において軸方向流入とし, 全温・全圧を標準状態大気 (標準圧力  $p_{\text{ref}} = 101325$  [Pa], 標準温度  $T_{\text{ref}} = 288.15$  [K]) に固定した. 翼列上流における乱れ度は, 流入ダクトの軸流速度の 1% とした. 本研究では, 翼列から衝撃波が完全に離脱する失速点付近の条件である, チョーク流量比約 0.92 までの流量の領域を対象とした.

ファン特性は, 修正流量  $m^*$ , 全圧力比  $\pi$ , 全温度比  $\tau$ , 断熱効率  $\eta$  を用いて評価する. これらは計算領域の入口・出口物理量をそれぞれ  $1,2$ , 静密度  $\rho$ , 入り口セル表面積を  $A$ , 入り口軸流速度を  $V_{\text{axial}}$  で表して, Eqn. (6.1) のように書ける.

$$m^* = \frac{\sum \rho_1 V_{\text{axial}} \frac{\bar{p}_{t1}}{p_{\text{ref}}}}{\sqrt{\frac{\bar{T}_{t1}}{T_{\text{ref}}}}}, \quad \pi = \frac{\bar{p}_{t2}}{\bar{p}_{t1}}, \quad \tau = \frac{\bar{T}_{t2}}{\bar{T}_{t1}}, \quad \eta = \frac{\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\tau - 1},$$

$$\bar{p}_t = \frac{\sum p_t \rho V_{\text{axial}} A}{\sum \rho V_{\text{axial}} A}, \quad \bar{T}_t = \frac{\sum T_t \rho V_{\text{axial}} A}{\sum \rho V_{\text{axial}} A} \quad (6.1)$$

ファン入口・出口の全圧・全温度は, 局所流量で重み付けされた平均値で評価される. また, 修正流量に用いる基準温度・圧力は, 前述の標準状態  $p_{\text{ref}}, T_{\text{ref}}$  を用いる. これらの特性評価に用いる諸量の算出に用いる式は, 参照する Strazisar ら [98] の試験結果と同一のものである.

### 6.1.3 数値解析の設定

上記の作動条件に対応する数値解析の設定について述べる. 数値解析手法自体については第 4 章で詳細に述べたが, ターボ機械において非連成/連成での定常流れ解析およびフラッター解析を行うには系にあった適切な解析条件や境界条件の設定が必要なことから, 本章で扱う系に対するものについて改めて記すことにする.

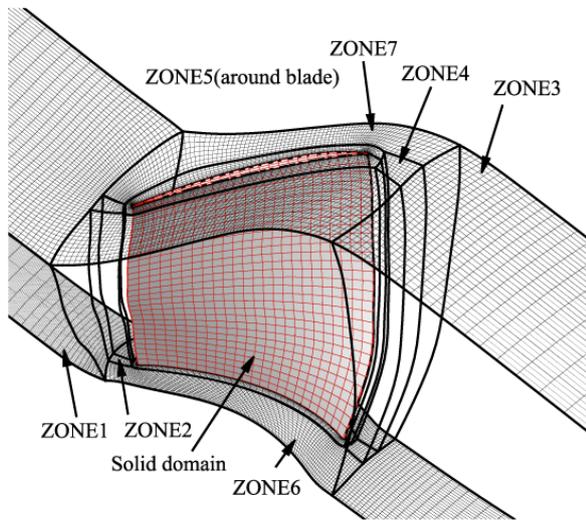


Fig. 6.3: Computational domain around the blade

Table. 6.3: cells for every domain

Domain	i	j	k	cells
ZONE1	31	56	44	76,384
ZONE2	8	8	44	2,816
ZONE3	31	32	44	43,468
ZONE4	8	8	44	2,816
ZONE5	160	16	44	112,640
ZONE6	68	16	44	47,872
ZONE7	100	8	44	35,200
total				321,376
11 blades				3,535,136

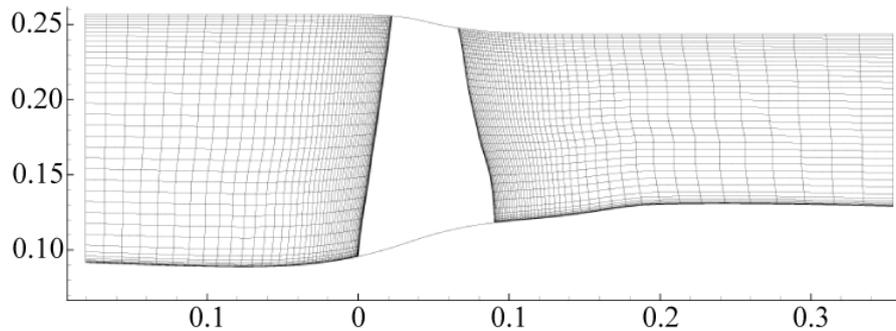


Fig. 6.4: Meridional view of the computational domain

### CFD 格子

流体計算格子は、回転流体機械の流体解析用格子生成に特化した Fine Turbo 搭載の Autogrid を用いた。Fig. 6.3 に流路部分の、Fig. 6.4 に翼を含む子午断面の解析格子をそれぞれ示す。翼間流路 1 流路は 7 つの構造格子ブロックに分割され、それらが接続されることで流路間が離散化されている。Table. 6.3 に各ブロックの格子点数を示す。一流路当たり約 32 万セルで構成されており、主要な方向の格子数として、翼面上（片側）に 80 セル、翼高さ方向に 44 セル、翼間に 56 セルを配置している。翼面上の壁面方向最小格子幅は  $5.0 \times 10^{-6}[\text{m}]$  で、これは翼面平均の無次元壁面距離の平均値は約  $y^+ = 2.1$ 、最大値は前縁部分の曲率部分で約  $y^+ = 8.5$  程度に対応する。また、解析系の単純化のために翼端部には格子を設けていない。翼形状は、「空力的設計点：Aerodynamic design point, ADP」を最大効率点付近の 92% チョーク流量点であると仮定し、NASA Rotor67 の公開形状に対して流体格子を作成する。翼変形を考慮する連成解析においては、ADP から離れた箇所では翼変形に応じ流体格子をモーフィングさせることで対応する。

### CFD コードの構成

NASA Rotor 67 の解析における CFD コードの構成を Table. 6.4 に示す。一般的な圧縮性流れ解析法を用いており、非粘性項は三次精度の MUSCL 法で高次精度化した SHUS スキームに衝撃波捕獲のために Minmod リミタを併用して計算される（他の章では Van Albada の勾配制限関数を用いている）。時間進行は、定常流に対しては一次精度後退オイラー法、フラッター解析では二次精度三点後退差分で時間項を評価し、山本らにより開発された LU-SGS スキームを使用し陰的に行う（他の章では TCPGS 陰解法を用いている）。また、乱流モデルには Wilcox の  $k-\omega$  モデルを用いる。

Table. 6.4: Numerical methods for flow simulations

Governing equation	3D-RANS, Finite Volume Method, ALE formulation
Inviscid term	SHUS [65] +3rd MUSCL with Minmod limiter
Viscous term	2nd order central difference
Time derivative	(Steady) Euler implicit, (Unsteady) 2nd order 3 points Backward difference
Implicit relaxation	LU-SGS scheme [69]
Turbulence model	Wilcox's $k - \omega$ [78]

CFD の境界条件

ターボ機械の流れを CFD で解析する際には、流れ場に合った境界条件が必要となる。Fig. 6.6 に境界条件が与えられる位置を、Table. 6.5 にそれらをまとめたものを示す。

まず、Fig. 6.5(a) に示す流入・流出境界であるが、一様流中に置かれた翼とは異なり、ファンの計算では翼の回転によって流体が吸い込まれる。動翼後方では全圧が上昇するとともに半径方向の旋回成分が生じ、同時に半径方向の静圧分布も生じる。このような状態に適合するように、計算領域入口では全圧・全温・流入角（旋回なし）を固定し、計算領域内側から境界面に向かって外挿されたりーマン不変量とから  $v, p, T$  を求める。流出境界では、旋回流れに釣り合う静圧分布を模擬するよう、単純半径平衡条件から静圧分布を求め、 $v, T$  は計算領域内側より外挿する。さらに、境界において周方向の非一様性を許したり、衝撃波・膨張波の反射を防ぐため、準 1 次元無反射境界条件である Giles の条件を併用している。Fig. 6.5(b) に示す壁面境界では、翼面上・翼根の面は粘着条件  $v = 0$  とし、また翼端では翼端間隙を模擬していないため、滑り壁条件を与える。Fig. 6.5(c) に示すピッチ方向の境界では、定常解析においては周期境界とし、ピッチ方向は速度ベクトルが周方向ピッチ角 ( $2\pi/22[\text{rad}]$ ) だけ修正されて受け渡される。

以上が定常流れに対する境界条件であるが、フラッター解析を行う際には流入/流出境界では Giles の準一次

Table. 6.5: Boundary conditions for NASA Rotor 67 configuration

Boundary		Boundary conditions
Inlet	Steady	Fixed $p_t, T_t$ , and flow angle, extrapolated $R^-$
	Unsteady	Giles's 1D NRBC
Outlet	Steady	$p$ : Simple radial equilibrium, $v, T$ : Extrapolated
	Unsteady	Giles's 1D NRBC
Blade surface	Steady	$v$ : Non-slip static wall, $T, p$ : Extrapolated
	Unsteady	$v$ : Non-slip moving wall, $T, p$ : Extrapolated
Hub wall	Both	$v$ : Non-slip wall, $T, p$ : Extrapolated
Casing wall	Both	$v$ : Slip wall, $T, p$ : Extrapolated
Pitch direction	Steady	Periodic (1 blade)
	Unsteady	Periodic (11 blades)

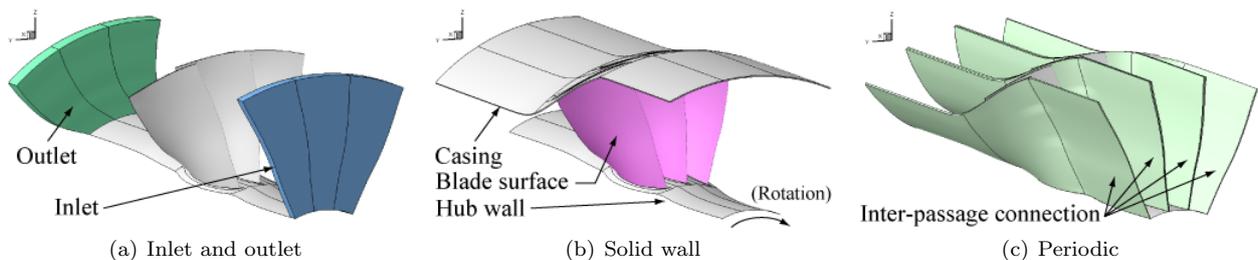


Fig. 6.5: Locations of boundary conditions for the rotor configuration

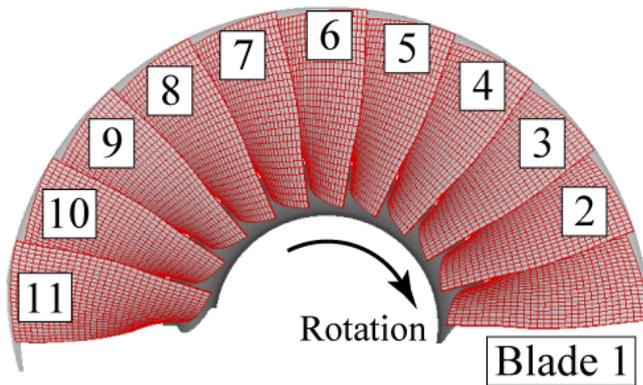


Fig. 6.6: Definition of the blade number

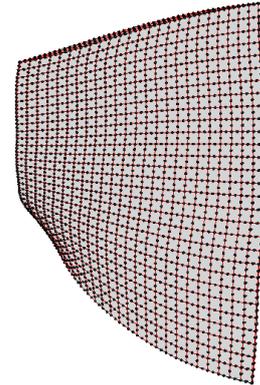


Fig. 6.7: FEM model of the blade

Table. 6.6: Model parameters of the blade structure

Material	Titanium ( $\rho_s = 4500[\text{kg}/\text{m}^3]$ , $E = 107[\text{Gpa}]$ , $\nu = 0.34[-]$ )
Boundary condition	Fixed at the hub
No. of Elements	2088
No. of Nodes	11030

元無反射境界条件を用い、境界における音波の反射を極力小さくする。また翼が運動すると CFD 格子が翼面を Lagrange 的に追跡するため、翼面は振動速度に対応する流速が境界条件として与えられる。

フラッター解析における複数流路の取り扱い

フラッター解析を行う際には多流路を含む振動解析では隣接流路と接続し、環状翼列の空間的周期性を確保するため、半周 (11 流路) の領域を取る。翼 1 枚のみを対象とする定常解析と異なり、フラッター解析を行ったり、モード同定を行う際には、翼ごとに固有の番号をつけて自由度を定義する。Fig. 6.6 に、周方向の翼番号の定義を示す。翼番号は、ある翼に対して「負圧面側にいる翼」の番号が常に大きくなるように、つまりこの場合では動翼回転方向と逆方向に番号が大きくなるように定められる。すると、正の翼間位相差の空力弾性モードは、動翼回転系における Traveling wave の周方向スピン群速度が動翼回転方向と同じ方向、すなわち「Forward traveling」の状態になり、逆に負の翼間位相差の空力弾性モードに対しては Traveling wave が動翼回転と逆のスピン群速度をもつ、「Backward traveling」の状態になる。

翼構造モデル

本解析対象においては設計回転数における翼表面座標が公開されているが、空力弾性解析において必要となる物性値や翼構造が与えられていない。そこで本研究では、中実のチタン合金で翼が製造されていると仮定し、設計点流量に近い作動点における空気力と遠心力を用い、これらが除荷された際の製造時の形状を逆解析し、回転中における振動特性を求めた。

用いた有限要素モデルを Fig. 6.7 に示す。翼部は要素数 2088、接点数 11030、20 点ソリッド要素で離散化されている。モデルの詳細を Table. 6.6 に示す。本章の解析ではミスチューニングを扱わないことから、全ての翼は同一の形状・物性値・支持構造を有するとし、同一の有限要素モデルを用いている。境界条件は、翼の植えられているプラットフォームおよびディスクまでのモデル化は行わず、翼流路 Hub 部において全変位を 0 に固定した。また、空気力による翼の振動状態に焦点を当てる目的から、構造減衰については考慮していない。

### 6.2 構造解析

作動中の動翼の機械的特性を取得するために、有限要素法による構造解析を空力解析とは別に行った。翼部に非定常空気力は作用せず遠心力のみが作用している状態において、翼部をモード解析した結果と各モードにおける自由振動数を Fig. 6.8 に示す。本研究では、このように自励空気力を含まない構造解析のみによって得られた振動モードを構造振動モード (Structural modes) と呼び、空力弾性モード (Aeroelastic mode) とは区別するようにする。得られた振動モードは、最低次モードより、Chord 垂直方向のの並進運動が支配的な 1 次曲げモード (1F), Chord 方向に節を一本有する 2 次曲げモード (2F), Span 方向の節を一本有し、そのまわりの回転運動が支配的な 1 次ねじりモード (1T), Chord 方向に節を二本有する 3 次曲げモード (3F), Chord 方向に 2 点支持曲げ変形をするような Chord 曲がりモード (1C) が観察された。1F と 1T は 4 倍程度振動数が離れている。

回転数に対する翼振動数の変化を表す Campbell 線図を Fig. 6.9 に示す。これより、少なくとも設計回転数比 140 % までにおいては設計回転数ではどの振動モードも縮退することがないことがわかる。フラッター解析は設計回転数で行うが、Campbell 線図より設計回転数においては 1F モードが 2 次のエンジンオーダー振動数 (2EO) と、3F モードが 9EO と近接しており実際のリグならば共振の危険があると判断される。しかし、本研究では動

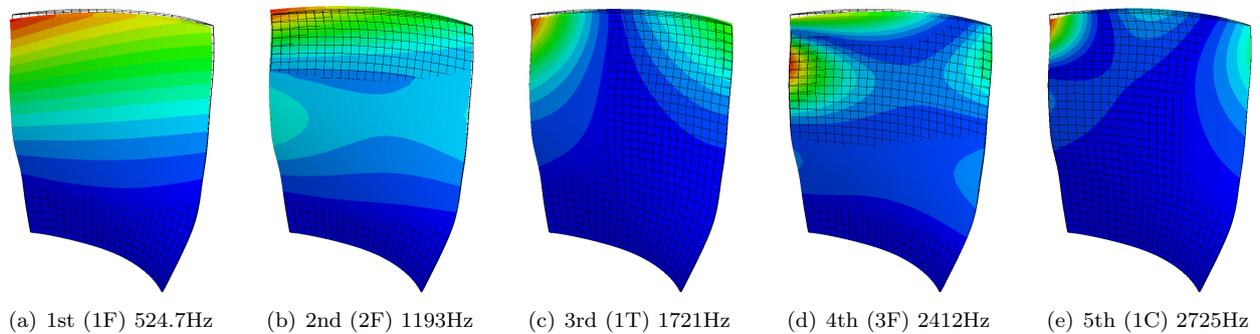


Fig. 6.8: Five lower vibration modes of a blade (in vacuo)

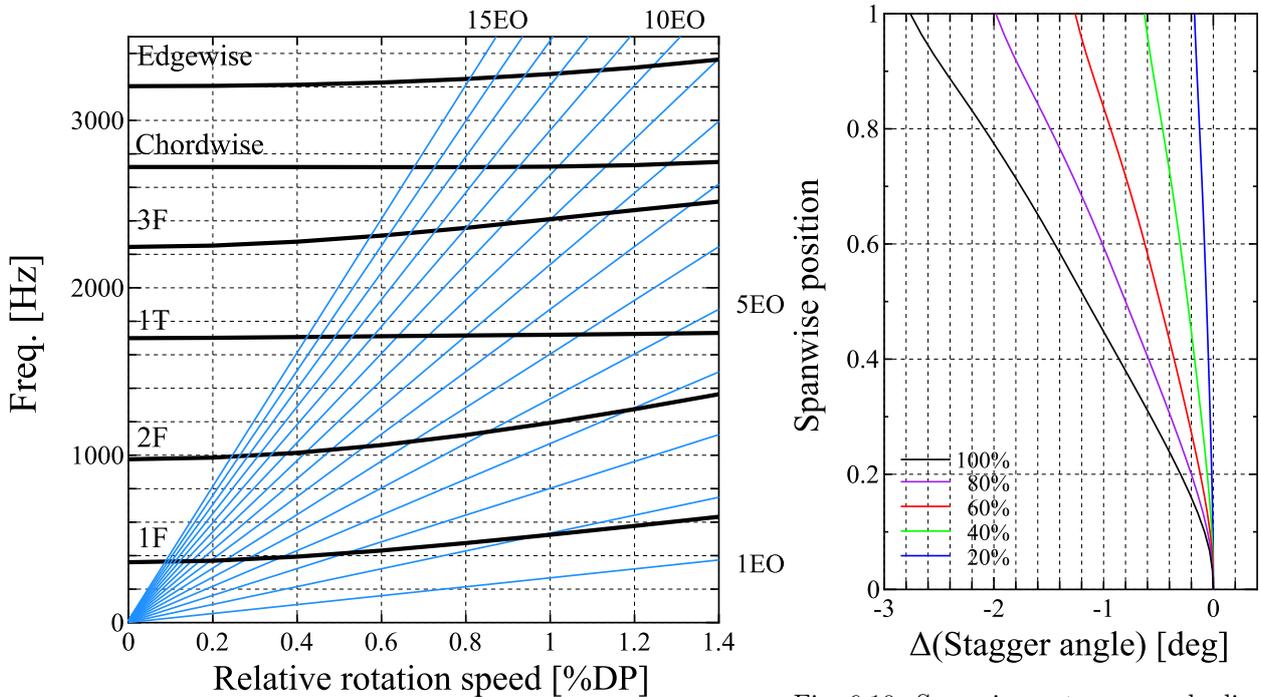


Fig. 6.9: Campbell diagram of NASA Rotor 67

Fig. 6.10: Spanwise restagger angle distribution on each rotating speed

翼前後の静翼がないこと、周方向には理想的な一様流入条件を与えており偏流はないこと、軸の偏心は考慮していないことから回転同期の擾乱は計算では存在しないため、翼が 2EO と共振することはないと考えられ、構造モデルの修正は行わなかった。

さらに、連成解析で空力的な変形を観察する前段階として、遠心力に対する翼変形応答も調べる。一般に翼高さ方向に大きなねじれをもつ軸流ターボ機械の翼では、翼端付近に作用する遠心力の面外成分が翼のねじれをキャンセルする向きに変形するように作用し、この変形によるねじれ量、または翼スタガ角の変化をねじり戻り角 (Restagger angle) と呼ぶ。ねじり戻り量は、特にアスペクト比が高く、翼が長い場合において大きくなるため、設計時に正確に知りたい量のうちの 1 つであると考えられる。

静止時から設計回転数まで 20 % 回転数刻みに翼高さ方向のねじり戻り量を取得し、Fig. 6.10 に示す。ここでは流体力は考慮せず、構造解析のみの値を示している。ねじり戻り量は翼高さ方向に単調増加しており、またどの翼高さにおいても回転数の増加に対してスタガ角が小さくなる方向に単調に変化していることから、この翼は各翼高さ断面における翼素が単純に積重されているため、変形してもねじり戻り方向が変化することはないためであると予想される。設計回転数においては翼端のスタガ角は約 2.8deg 小さくなっており、これは流体解析において無視できない程度の大きさであると考えられる。

## 6.3 流体解析の検証と流れ場

静変形・フラッター解析に先立ってファン作動中の流れ場がどの程度再現されているかを確認するために、公開されている試験結果との比較を行い、流体解析の検証とした。ここでは流体解析のみを公開されている翼形状で行い、空気力による変形は考えない。

### 6.3.1 特性曲線

Fig. 6.11 に、取得されたファン特性曲線を示す。横軸は流量であり、実験・計算それぞれのチョーク流量からの比を表している。まず圧力比を見ると、数値解析結果はおおまかに実験の傾向を捉えていることがわかる。断熱効率率は実験ではチョーク流量比約 99 % で最大をとっているものの、数値解析では実験値より若干低流量側に最大効率点が位置している。これは翼端間隙を模擬した格子を用いていないため翼端部分の衝撃波離脱が起きにくくなっているためであると考えられる。全体的には流量変化に対する定性的な傾向が数値解析で捉えられているものだと判断できる。

しかし、次小節で考えるように、この特性曲線の概形が実験値とこの計算結果の程度でおおまかに対応しているといえども、局所的な流れ場まで見ていくと全ての作動点において詳細に流れ現象が捉えられているわけではないと考えるのが自然だということになる。

### 6.3.2 翼間の流れ場と翼後方のフローパターン

特性曲線に加えて、翼間の流れ場についても試験結果との比較を行い定性的な傾向が捉えられているかを調べる。NASA Rotor 67 では、レーザードップラー流速計により翼間の相対マッハ数分布が取得されており、衝撃波のパターンや流れ場の様子を知ることができる。なお、流れ場の比較は Fig. 6.11 の特性曲線に示す最大効率付近点作動点 (PE) と、失速点付近作動点 (NS) の 2 点について行った。

Fig. 6.3.2 に、翼根からそれぞれ 30 %、70 %、90 % の流路高さ断面における翼相対マッハ数を示す。色付きのコンターが数値解析結果、白黒のコンターが公開データである。PE 点では 90 % Span、70 % Span 位置では翼間衝撃波が存在し、翼列は始動状態になっている。90 % Span 位置の数値解析結果では、翼間衝撃波は負圧面後縁付近の剥離領域と干渉し上流側に押し出されているように見えるが、対応する試験結果からは衝撃波パターンは不明瞭であり、詳細な構造はわからない。70 % 翼高さ、30 % 翼高さではマッハ数が超音速 ( $M > 1$ ) から亜音速 ( $M < 1$ ) に切り替わる位置がそれぞれ流路中央部分、翼前縁部分とよく一致していることがわかる。

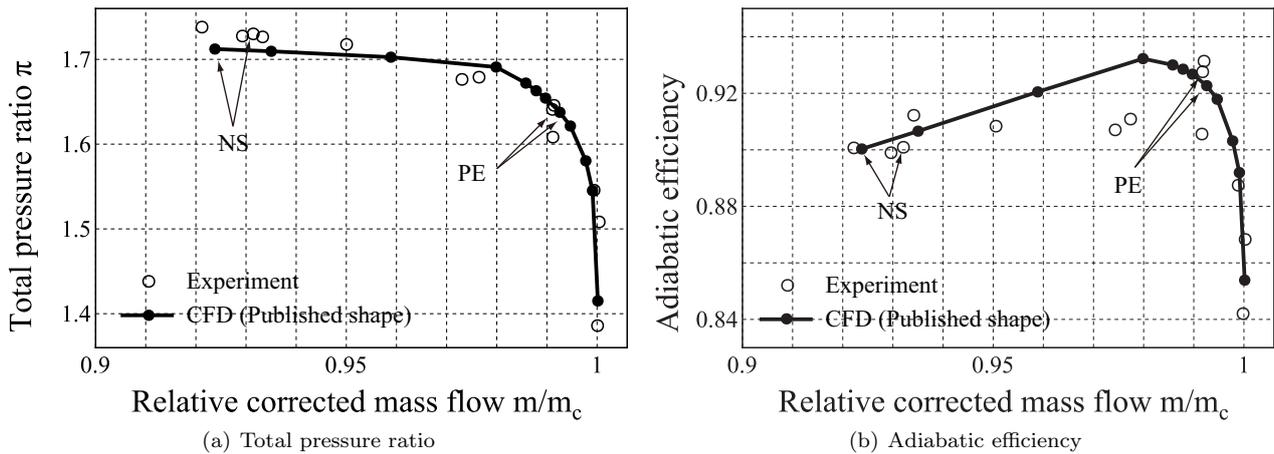


Fig. 6.11: Fan characteristic curve on 100 % speedline obtained by steady CFD using published shape (Non-FSI calc.)

一方、翼間の衝撃波が離脱する NS 点において、90 % Span 位置ではマッハ数は大きく異なっている。おそらく試験結果では翼端漏れ流れと衝撃波が干渉している様子が上側の翼の前縁腹側付近で見えているが、数値解析においては弧状衝撃波で亜音速に減速した流れが再び前縁で超音速に加速し負圧面に流れており、それ以外の流れ構造は確認できない。ここで生じている違いは数値解析において翼端間隙を模擬していないためである。NS 点の 70 % Span 位置では翼端間隙に関する流れはなく、衝撃波パターンはよく試験結果と一致している。30 % Span 位置においては、翼負圧面の前縁で流れが亜音速から超音速に加速し、すぐに亜音速に戻るといった挙動は試験結果と数値解析結果で共通している。しかし数値解析結果においては前縁部分に剥離領域が見られ、これに起因する低速の領域が負圧面後縁まで広がってしまっている。一方試験結果では負圧面上の低速領域は翼弦方向中央位置では消えてしまっているように見え、数値解析結果が剥離領域を大きく評価しすぎていると思われる。

NS 点における Hub 付近の前縁剥離が大きく評価されすぎていることは、翼後方の流れ分布からも予想できる。Fig. 6.13 に、PE 点・NS 点における動翼後方 (Station2) における流れ角、全圧、全温をそれぞれ示す。PE 点では数値解析結果は試験結果と近い分布になっているので良い結果が得られていると考えられる。しかし NS 点では、30 % Span から 70 % Span 位置にかけて、特に 50 % Span 位置において、試験結果と計算結果が大きく異なっている。まず流れ角は試験結果よりも大きくなっているが、これは過大に計算された前縁剥離が相対系において速度の欠損した後流として動翼下流まで流れており、絶対系の速度に変換した際に流れ角が周囲より大きくなるためである。この流れ角が局所的に異なる傾向を見せる領域では全圧、全温も試験結果との乖離が著しい。特に全圧には試験結果では 50 % Span 付近では平坦な分布になっているが、数値解析結果では大きな S 字型の分布が生じてしまっている。

このように今回用いた計算手法によって、失速点付近の流れ場を全スパンにわたって精度よく解析するにはまだ改善すべき点は多いものの、特性曲線の概形や翼間衝撃波の離脱とそれに伴う効率低下は定性的に再現されているものと考え、連成解析を行う。

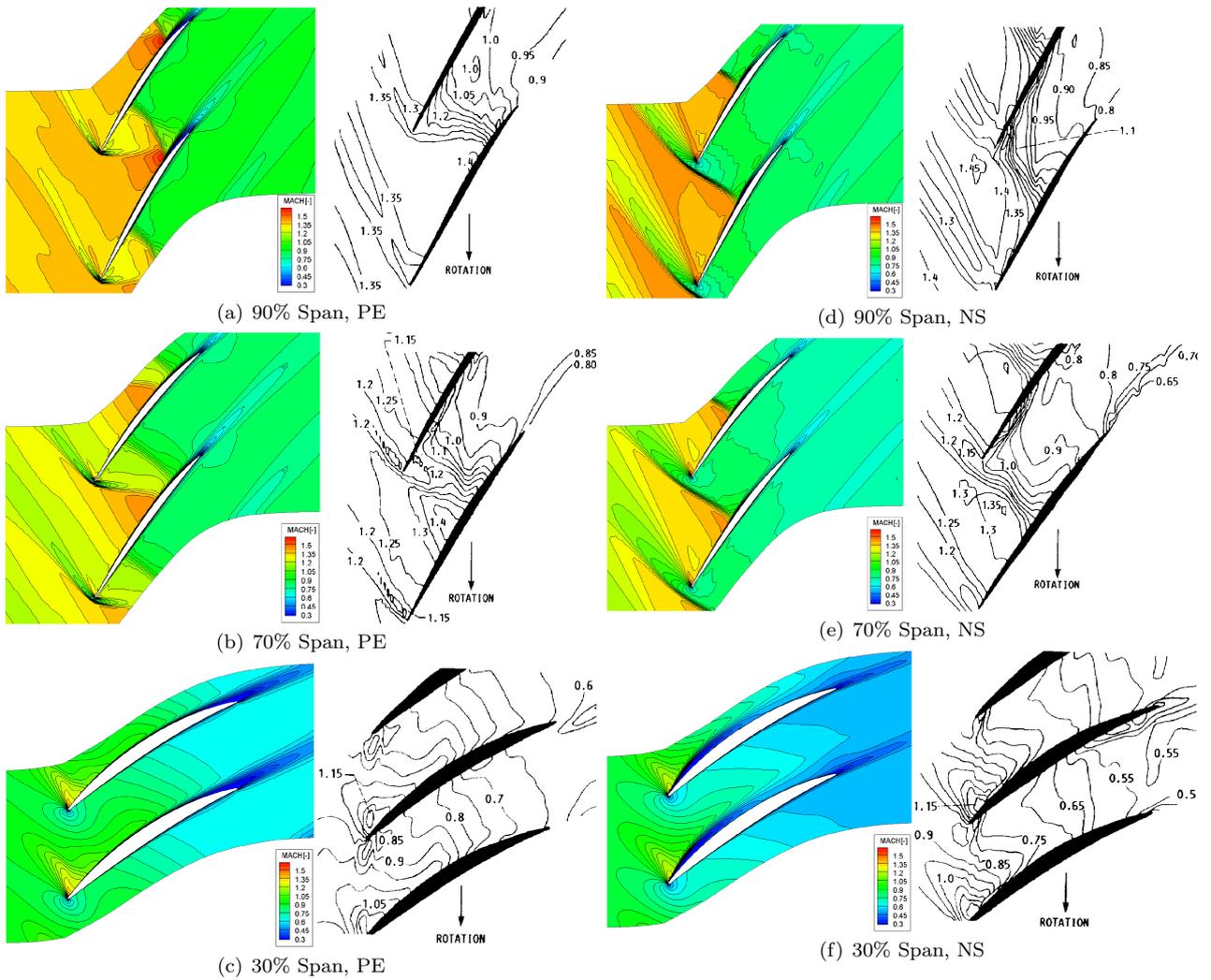


Fig. 6.12: Comparison of local relative Mach number with experimental data.  
Color: CFD results, Monochrome: experimental results

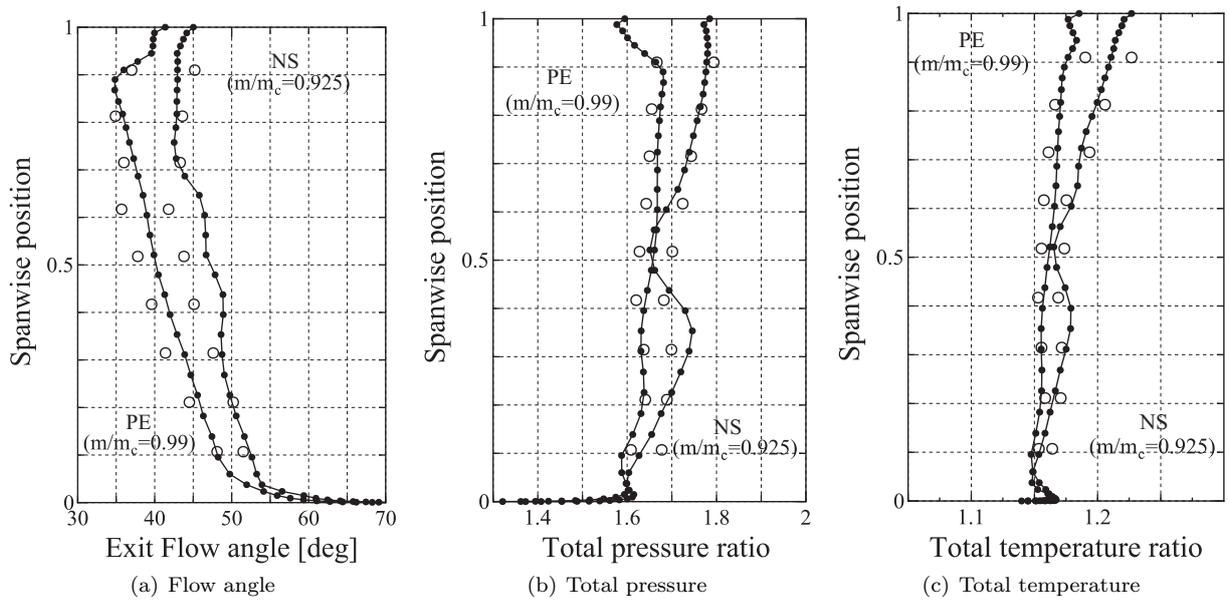


Fig. 6.13: Radial flowfield at two operating points

## 6.4 静変形を考慮したファン特性の解析

一般に流体機械や風洞試験では、模型や機器は空力荷重に応じて変形するため、この効果を適切に評価して流れや空力特性の評価に反映させる必要がある。本節では、ターボ機械における空力的変形に着目し、性能を評価するための流れ場の解析と解析条件における翼変形を考慮した連成解析を行い、航空エンジンファンにおける流れ場に特有の空力的な静変形現象について述べる。

### 6.4.1 連成解析における条件

連成解析を行うには、空力的な設計点を仮想的に定め、そのときの荷重を用いて構造逆解析を行う必要がある。本研究では Fig. 6.11 における PE 点を仮想的な設計点として考え製造形状を得ており、この製造形状に基づいて非設計点における連成解析を行う。回転数は流れ場の検証を行った設計回転数比 100 % で行う。まず静連成解を求める前に、流体解析のみを実施し、前もって状態に近い定常解を求めておいた。この流れ場から翼の変形を許容し、変形を伴う解析を行った。

### 6.4.2 静連成解析と流体解析のみのファン特性解析結果の比較

定常流体解析および静変形解析を組み合わせることで、流体力による変形を考慮した場合のファン作動特性を取得した。Fig. 6.14 に取得したファン特性曲線を示す。このグラフから、翼変形を許容するかどうかで性能の解析結果にどれほどの違いが生じるのを見ることができる。変形前の特性曲線と変形後の特性曲線の比較より、チョーク点から最大効率点まではほとんど特性が変化しないことがわかる。ここで、特性がほとんど変化しなかった作動領域のうち最も流量が低い点を A 点とする。A 点以降でも、流量-全圧上昇の関係はほとんど変化していない。ここで A 以降の点を B 点、C 点、D 点とする。これら B、C、D 点では翼変形を許容すると作動点は低流量側にシフトし、作動状態としては失速に近づいていることがわかる。

断熱効率も A 点まではほとんど変化していない。また、それ以降の B、C、D 点ではほとんど同一の特性曲線上に作動点に変化している流量-圧力比特性とは異なり、翼変形を許容した場合に若干の効率低下があることがわかる。

### 6.4.3 連成/非連成解析間の流れ場の変化

このように翼変形に伴い作動点に変化するが、翼変形によって流れ場にどのような変化が起きているかを見ていく。Fig. 6.15 に、90 % Span 位置における静圧分布の連成解析前後の変化を A、B、C、D の 4 点について示す。

まず、ほとんど作動点に変化しなかった A 点においては、翼間の流れは翼間衝撃波の存在する始動状態となっており、翼間衝撃波の位置、静圧場ともに Fig. 6.15(a) の変形前、Fig. 6.15(e) の変形後でほとんど変化しておらず、翼変形の影響は流れ場にほとんど現れていないことがわかる。しかし Fig. 6.15(b) B 点の変形前の流れ場では、翼間衝撃波は背圧の上昇により前進しちょうど前縁に到達しているような、始動状態と不始動状態をちょうど隔てる状態の流れ場になっている。この状態で変形が起こると Fig. 6.15(f) の流れ場になり、前縁の衝撃波がやや前進し、さらに前縁直下流に位置する負圧面上の超音速領域において若干の圧力低下が確認できる。ここでみられた離脱衝撃波の前進と負圧面超音速域における圧力低下は、Fig. 6.15(c)、Fig. 6.15(g) 間に示す C 点の変化、Fig. 6.15(d)、Fig. 6.15(h) 間に示す D 点の変化でも同様の変化が生じていることが確認できる。

以上、翼列が始動している状態では翼変形の流れ場の影響は小さいが、翼間流れが不始動状態になる低流量側の作動条件において翼変形と流れ場間の連成は大きくなり、流れ場の変化は離脱衝撃波の前進と負圧面上超音速領域における加速に代表されるといえる。この結果を典型的に示していると考えられる、90 % Span 位置における翼面上の圧力分布を Fig. 6.16 に示す。ここで、圧力係数の基準値としてファン入口 (Station1) における全圧  $p_{t1}$  と静圧  $p_{s1}$  を用い  $C_p = (p - p_{s1}) / (p_{t1} - p_{s1})$  と定める。Fig. 6.16(a) の A 点では翼変形の有無でほとんど圧力

分布は変化しておらず，したがって流体力の変化も小さいといえる．しかし，Fig. 6.16(b) に示す C 点では上に述べるような超音速領域の加速と離脱衝撃波の前進といった挙動が明瞭に見て取れる．

#### 6.4.4 特性曲線に沿う翼形状の変化

以上のような流れ場の変化が翼変形に伴い起こっているが，それでは翼は各作動点でどのように変形しているのだろうか．ここでは，翼のねじり戻り量に着目して変形形状を解析していく．

各 Span 断面におけるスタガ角変化を  $\Delta\theta$  とすると，これは設計点におけるスタガ角変化  $\Delta\theta_{\text{Design}}$  と非設計点における流れ状態の変化によって生じた追加的なスタガ角変化  $\Delta\theta_{\text{Aero}}$  とを用いて，

$$\Delta\theta = \Delta\theta_{\text{Design}} + \Delta\theta_{\text{Aero}} \quad (6.2)$$

と分解できる．

各 Span 断面におけるねじり戻り量の合計  $\Delta\theta$  と，空力状態の変化に対応する成分  $\Delta\theta_{\text{Aero}}$  を Fig. 6.17 に，翼端部のスタガ各変化を流量に対して Fig. 6.19 に示す．まず Fig. 6.17 において，ねじり戻りの合計である  $\Delta\theta$  から，空力的な遠心力によるねじり戻りよりもかなり小さいことがわかる．しかし，空力状態の変化に対応する成分  $\Delta\theta_{\text{Aero}}$  と Fig. 6.19 を見ると，ねじり戻り角の変化は 2 つのグループに分かれている．1 つはチョーク状態から設計点を経て A 点までに至る変形量の小さいグループで，翼列の始動状態に対応している．始動状態のグループではねじり戻り量は大きくても 0.1deg 未満に抑えられており，この変形量では流れ状態の変化が起こっていなかったことも理解できる．そしてもう 1 つは翼列が不始動状態になる B,C,D 点のグループであり，A 点から B 点の間でねじり戻り量に大きな飛びが生じていることがわかる．

このように変形量に飛びが生じることを理解するために，各 Span 断面の圧力分布から翼断面に作用する揚力を翼弦垂直方向の空気力であると定義し，2 次元的な分布における風圧中心の位置と揚力係数の変化を算出したものが Fig. 6.18 である．ここで風圧中心位置  $x_{Cp}$  は各 Span 断面における翼弦長で無次元化されている．

A 点において，翼端付近では  $x_{Cp} = 0.5$  付近に位置していた風圧中心の位置は，A 点から B 点にかけての翼間衝撃波の離脱に伴い大きく前縁側に移動するようになる．そして，B 点では翼端付近の 1T モードのねじり中心がおおよそ  $x/c = 0.4$  であり，この位置よりも前縁側に風圧中心がくるようになる．B 点の変形前後の風圧中心の位置を見ると，変形に伴いさらに前縁側に移動している．これらの傾向は C 点，D 点でも同様であり，圧力分布の変化 Fig. 6.16(b) から理解できる．

以上の翼変形挙動と流れ場の変化の様子を模式的に描いたのが Fig. 6.20 であり，ねじり戻り挙動と衝撃波の前進は不始動領域において互いに促進しあう方向に作用していると考えられる．

#### 6.4.5 翼形状の変化と特性変化の大きさに関して

以上見てきたように，本解析結果では翼変形の絶対量は小さく，性能へ与える影響も僅かであった．これは本解析対象が十分剛であって，遠心力による変形に比べて空気力による変形量が小さいためだと考えられる．しかし，翼変形量は翼厚みや材料特性，異方性，翼高さにより変化する．例えば，Wilson ら [107] によるアスペクト比 2.3 の遷音速ファン動翼に対する翼変形解析では，設計回転数においてチョーク側作動点と失速側作動点の間で翼端部に 1deg 以上のスタガ角変化があり，この翼変形が空力性能に大きく影響している．このような，変形が大きく誘起されるような対象において本連成解析手法は有効な解析手段となりうるだろう．

いっぽう，Huppertz ら [108] は低アスペクト比の圧縮機動翼を含む IGV-動翼-静翼の 1.5 段について，100 ~ 60 % 設計回転数までの部分回転数で静変形を考慮した連成解析を行っており，彼らは空力的変形はほとんど特性曲線に影響せず，翼変形としては遠心力によるものを考えればよいと述べている．

これらの報告例や本小章の結果から，静変形の最終的な特性に与える影響の大きさはかなりアスペクト比や剛性といった翼構造仕様に依存するといえる．

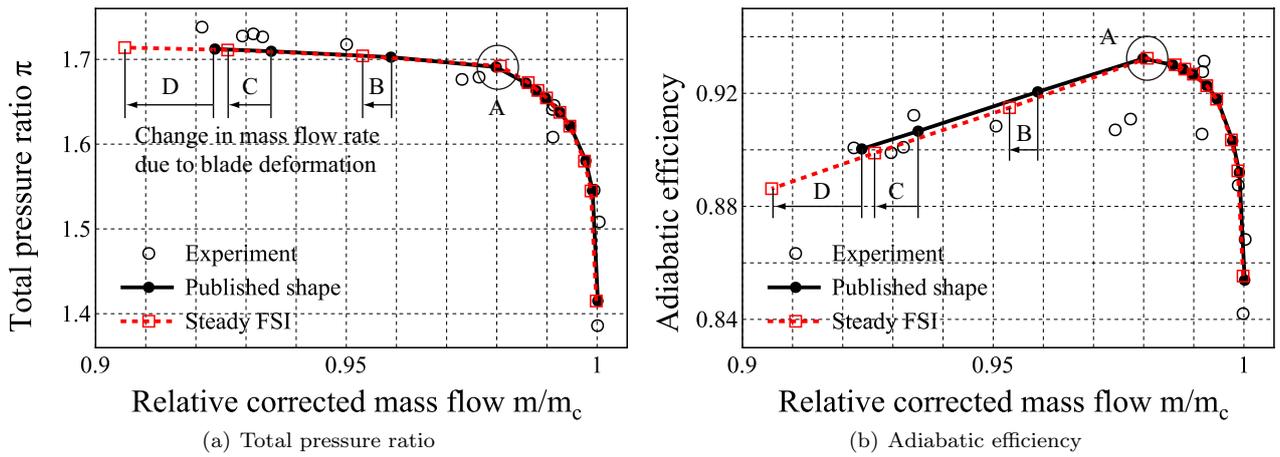


Fig. 6.14: Fan characteristic on 100% speedline obtained by simulation using publish shape (Non-FSI calc.) and FSI calculation.

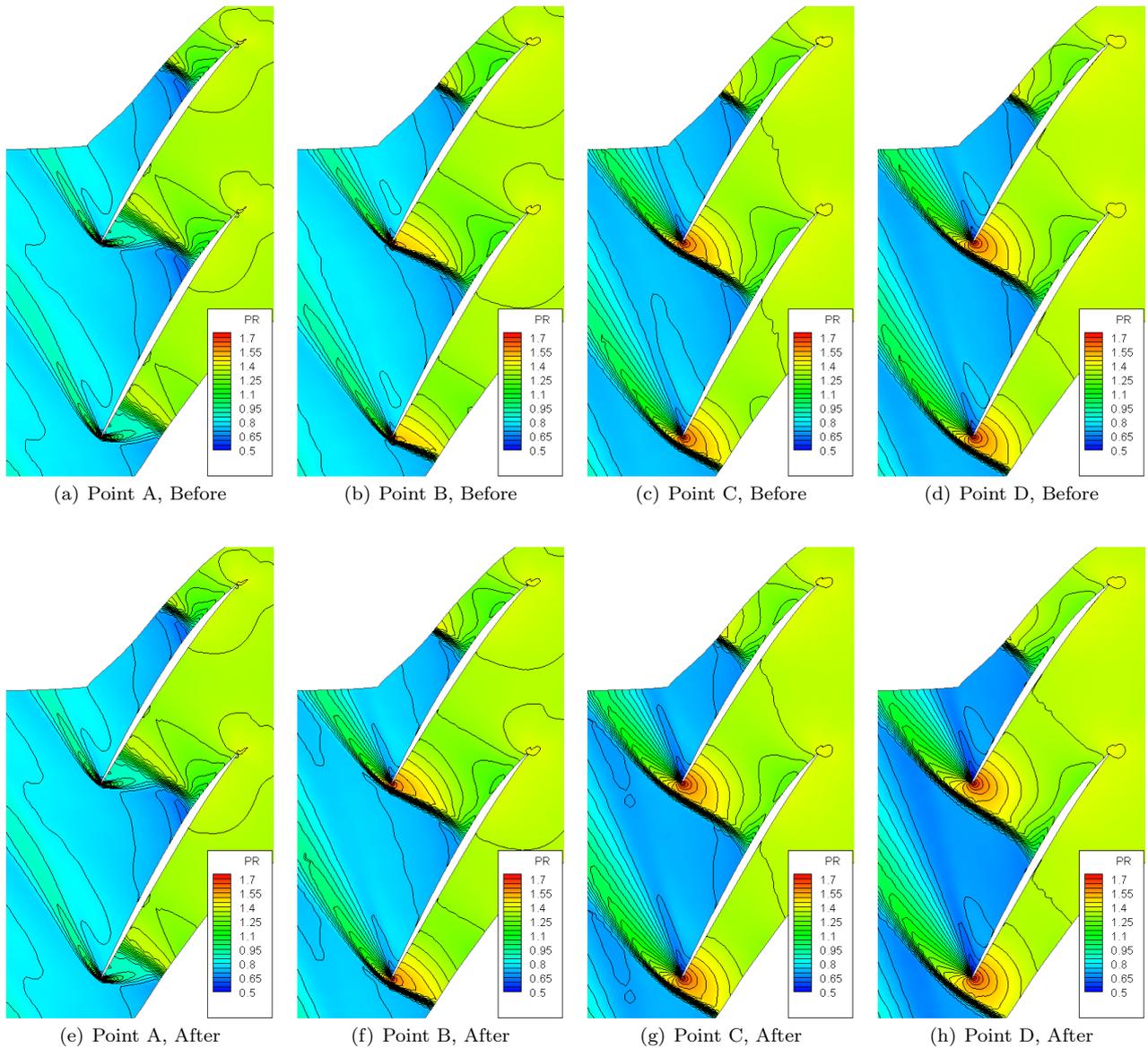


Fig. 6.15: Static pressure distribution around the blade at 90% span height from the hub

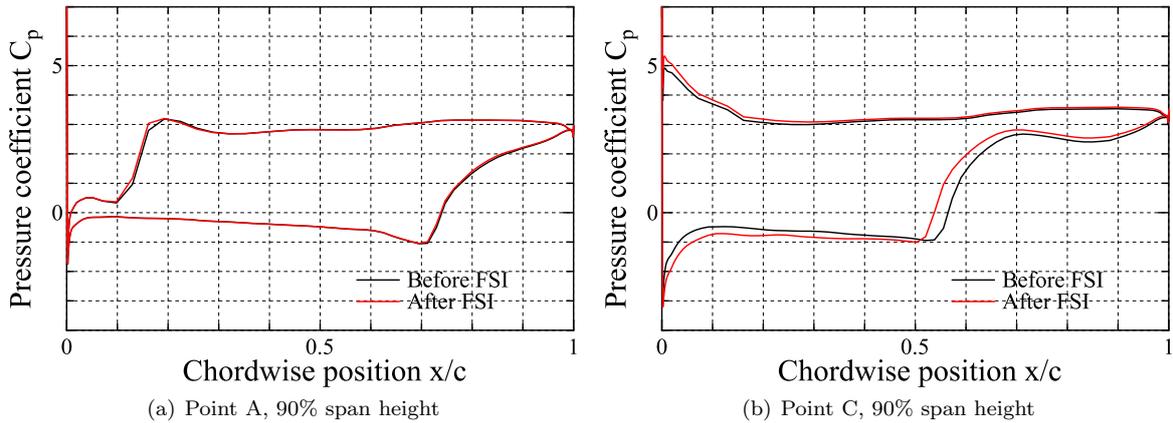


Fig. 6.16: Typical change in blade surface pressure distribution due to blade deformation

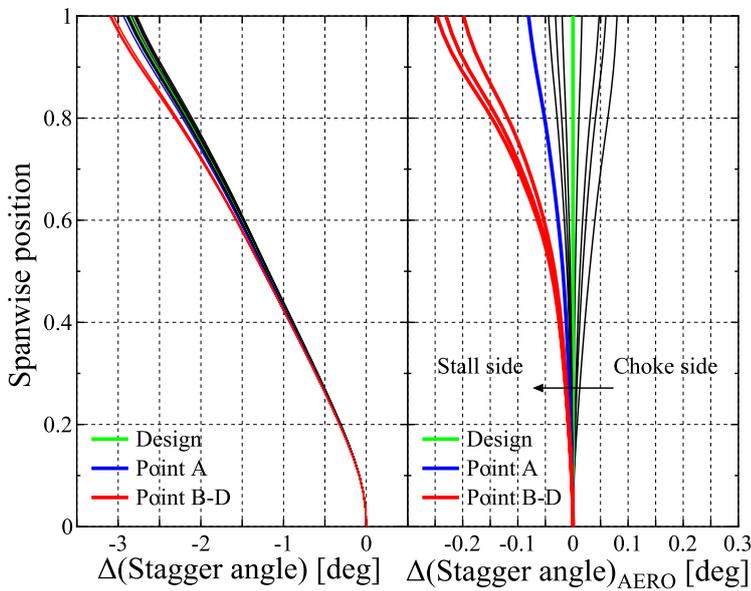


Fig. 6.17: Restagger angle at different operating points

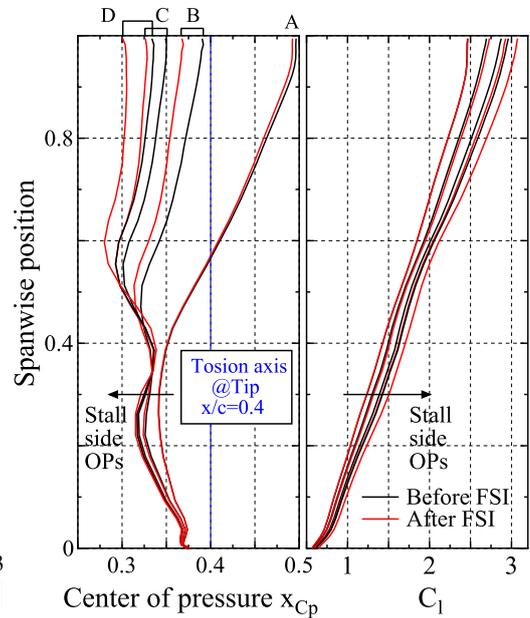


Fig. 6.18: Spanwise distributions of the center of pressure and lift coefficient

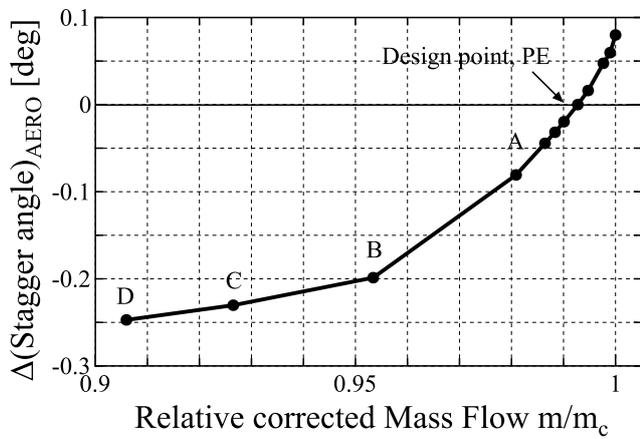


Fig. 6.19: Restagger angle at blade tip. Large restagger was induced with shock detach.

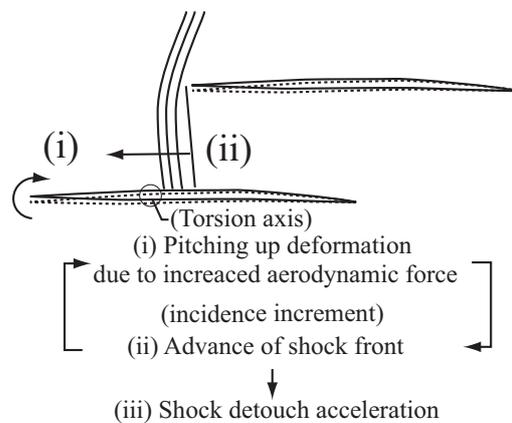


Fig. 6.20: Shock detach acceleration mechanism

## 6.5 連成振動解析によるファン振動特性

静解析では流れ場の変化に伴う翼変形の様子が数値解析によって捉えられ、作動点によって翼の形状が変化する様子が確認できた。最後に本対象に対する最後の連成解析の応用として、連成解析とモード同定に基づくフラッター解析を行いファン翼列に対してどのような結果が得られるかを述べる。

### 6.5.1 解析方法

フラッター解析に用いる流れ場は、100%回転数の設計点付近の作動点である PE 点である。定常流れ場を得た後に、そこでの流れ条件において連成解析を行うには、フラッター解析に取り込むよく振動モードを選定したのちに、初期条件として各振動モードに微小な擾乱を与えることが必要になる。フラッター解析では、もしフラッターのような振動が生じるとしたらたわみ、ねじりに対する低次の振動モード (1F, 2F, 1T) であると思われるため、下位 5 つの振動モードを取り込む。また、初期条件翼番号  $n_b = 1, 2, 3, 4, 5$  の 5 枚の翼の 1st ~ 5th のモード速度に対して、0.5%翼弦長の振幅に相当するモード速度を与える。各翼に対する初期条件をまとめ Table. 6.7 に示す。

Table. 6.7: Initial condition of the flutter analysis by FSI

Mode/Blade	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1F	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2F	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1T	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3F	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1C	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

: Given, modal velocity corresponding to maximum blade amplitude of 0.005c, -: Not given

連成解析の時間刻みは 1step を 1T モードの自由振動数を 5000 等分する時間刻みで行い、3 回の内部反復を行った。また、50 タイムステップごとに全翼の変位、速度、加速度を 1 サンプルするものとし 1T モード 2 周期目開始から 16 周期目の終わりまでサンプルした、全 1500 サンプルの瞬時データより空力弾性モードの同定を行う。

### 6.5.2 連成解析で得られる翼振動時間履歴と非定常流れ場の概観

Table. 6.7 の初期条件のもと連成解析を実行すると、翼振動の時間領域解が得られる。計算で用いた 11 枚の翼について得られたモード変位の時間履歴を Fig. 6.21 に示す。各振動モード変位は、各翼振動モード形状からその振動モードに対する最大変位位置の変位を示し、翼弦長さで無次元化して表示している。また時間は 1T 構造振動モードの周期で無次元化している。初期条件を与えた振動モードである Blade 1 ~ 5 では初期擾乱が周囲の空気の影響で減衰している挙動が見て取れる。一方で、初期条件を与えなかった振動モード (例えば、Blade 2 と Blade 11 の 1F モードなど) では、初期条件を与えられた翼の振動が翼間の流体を介して伝播し、振幅が大きくなる、即ちエネルギーを受け取っていることがわかる。このような挙動は全てのモードで確認でき、特に隣の振幅が比較的早く大きくなっている。初期条件を与えず、かつ初期条件を与えた翼から空間的に離れた位置にある Blade 7 ~ 10 ではかなり振幅が小さいままであるが、グラフの範囲を拡大すると振動している。

このように翼が減衰している間の変動流れ場を可視化したのが Fig. 6.22 である。Fig. 6.21 では、90%翼高さ断面の瞬時圧力について、時間平均圧力からの差

$$\tilde{p} = p(t) - \bar{p} \quad (6.3)$$

を示している。変動圧力は、主に初期擾乱を与えている翼から発生し翼列上流・下流に伝播し他の翼を振動させる。初期条件を与えていない翼からはほとんど圧力変動が発生していないことがわかる。この結果として Fig. 6.21 の時間変動が生じている。ただ、このままでは翼自由度間の空力的な連成がどのようになっているのか、また振動

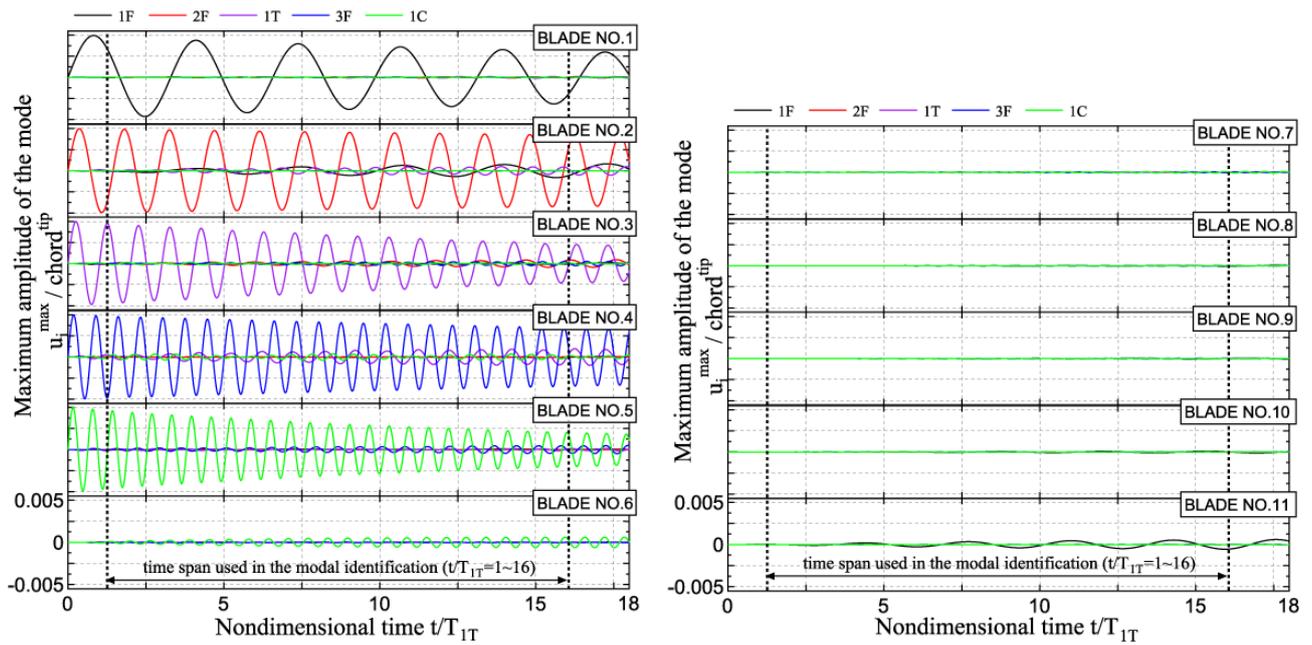


Fig. 6.21: Time history of vibration of all blades

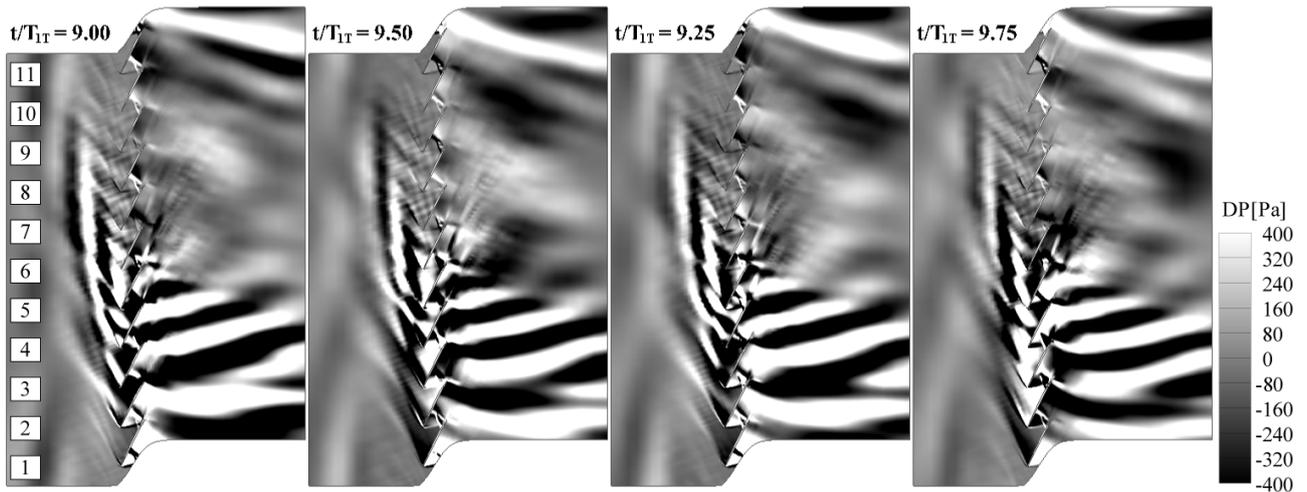


Fig. 6.22: Instantaneous unsteady pressure field around the blade at 90% span height

数や減衰率といった振動の基本的なパラメータも一見よくわからないことが改めて納得できる。こうした理由により、本研究ではモード同定法を振動解析結果の処理として援用しているのである。

### 6.5.3 翼列に空力弾性モード同定法を適用して得られる解について

以上のようにして時間領域の翼振動解が得られたので、本研究で提案するモード同定法により空力弾性モードを求めていく。ここでは、本対象のような多数枚かつ1枚の翼あたり3つ以上の構造自由度を含む振動翼列系において、空力弾性モード同定法を適用して得られる解がどのようなものであるかを説明する。

#### 空力弾性モード固有値

同定した空力弾性モードの時間方向の情報である、空力弾性モードの振動数と減衰率をプロットしたグラフを Fig. 6.23 に示す。この結果は Fig. 6.21 の横軸付近に示した時間幅のデータ 1500 サンプルより得られている。同

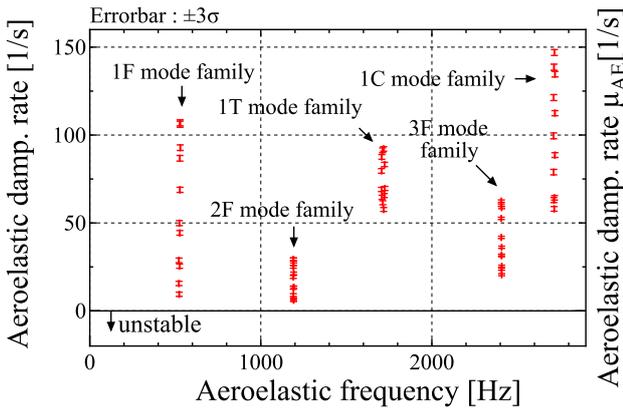


Fig. 6.23: Identified all mode families at point PE

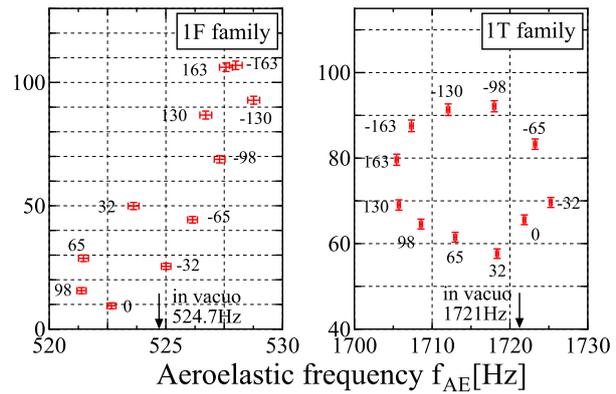


Fig. 6.24: Closeup to 1F and 1T mode families

定された空力弾性モードは、翼振動に伴う非定常空気力の影響を除いたモード（自由振動モード）ごとに特定の周波数帯に偏在する．低い振動数より、それぞれ 1F,2F,1T,3F,1C モードが支配的な振動となっている．これらの固有値の偏在した群を、モード群（mode family）と呼ぶことにする．

モード群は、それぞれの自由振動モードが支配的な自由度成分から構成される．翼間位相差により他の翼から受ける変動空気力の影響が異なり、空力弾性モードの各翼間位相差では振動数と減衰率が異なる．これは、2章で述べたように同一の翼が周期的に並べられている翼列に特有の空力弾性モード形状である．

モード群の中での固有値分布の例として、1F モード群、1T モード群に対応する固有値分布の拡大図を Fig. 6.24 に示す．空力弾性系の同定における誤差解析より得られたエラーバーは、同定結果の 99 %信頼区間である  $3\sigma$  を示している．両モード群も各固有値成分が十分判別できるほどエラーバーは小さく、この結果から 55 自由度の自由振動応答から空力弾性モードを適切に求められているといえる．また、最小二乗同定の際の決定係数  $R^2$  値は  $R^2 = 0.985$  であり、これは計算中で生じて翼に作用している変動空気力のほとんどすべての成分が翼振動の時間履歴によって説明されたということを示している．

空力弾性モード形状

空力弾性モードの同定により、モードの空間方向の情報である複素モード形状も振動数・減衰率と同時に求まる．本研究では、各モード群における空力弾性モードがどのような構造振動モードから構成されているかを示すために、空力弾性モードベクトルを構造振動モードの最大振幅に変換し、その最大値との比を空力弾性モードのモード間振幅比と定義し、これを用いてモード間の連成度合いを評価している．

Fig. 6.25 に、Fig. 6.21 から同定したモード間振幅比を示す．1F、2F、1C モード群ではモード群の振幅比は最大でも 2 %程度と顕著な連成は起こっていないことがわかる．3F モード群では、 $\pm 180\text{deg}$  に近い翼間位相差で 1C モードとの連成が最大 5 %程度生じている．

このように得られた空力弾性モードにおいて各自由度間の連成状況を調べることができ、例えばフラッター境界に近づくにつれてこの値が大きくなっていく場合は、自由度連成型のフラッターが起きているものと推定できるといった使い道がある．

6.5.4 翼面上の圧力変動場と局所仕事分布の可視化

圧力変動場の抽出手順

連成解析結果により得た翼面上の圧力変動のうち、同定した各空力弾性モードのモード変位、モード速度に同期する成分を後处理的に計算していく．

まず、翼面上の圧力変化を、各翼・各自由度の変位・速度により生じる成分であるとする．つまり、圧力変動の説明変数を各翼の変位と速度にとる． $n_b$  番翼のモード変位ベクトルを  $q_{n_b} = [q_{n_b}^1 \ \dots \ q_{n_b}^{N_f}]$  とし、翼面上圧力

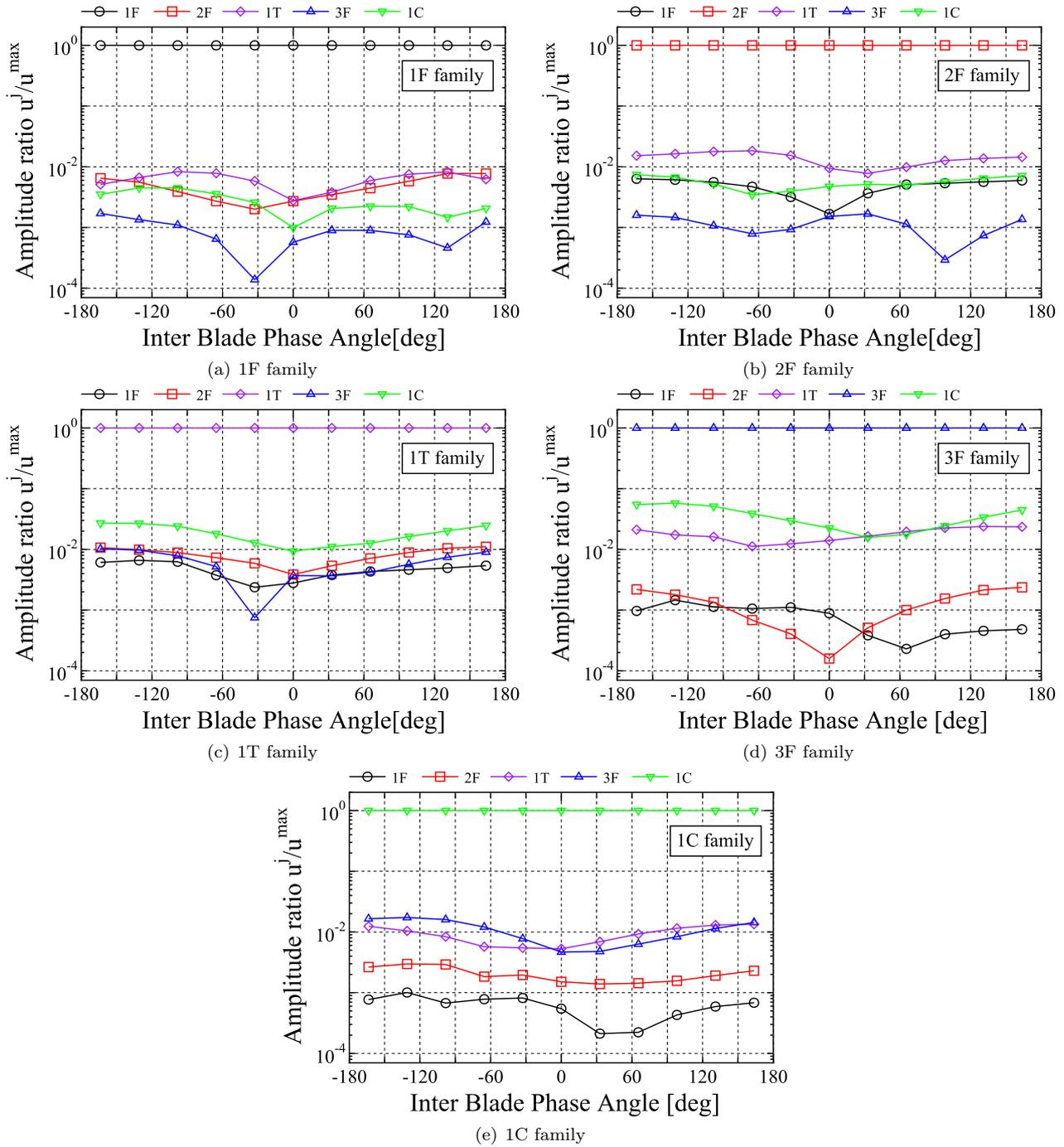


Fig. 6.25: Inter-structural-mode amplitude ratio

変動の翼振動由来で生ずる成分  $\tilde{p}_{n_b}$  が翼の運動に対して線形的であるとすれば，

$$\tilde{p}_{n_b} = \sum_{j=1}^{N_b} \sum_{n_f=1}^{N_f} \left[ \frac{\partial p_{n_b}}{\partial q_j^{n_f}} q_j^{n_f} + \frac{\partial p_{n_b}}{\partial \dot{q}_j^{n_f}} \dot{q}_j^{n_f} \right] = \frac{\partial p_{n_b}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{q} + \frac{\partial p_{n_b}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \quad (6.4)$$

と表すことが出来る．

振動翼列のモード同定の際の手続きと同じ要領で，翼列の周期性を利用して  $\frac{\partial p_{n_b}}{\partial q}$  を 1 番翼における量  $\frac{\partial p_1}{\partial q}$  に置き換えることで同定する係数を減少させる．そして，空力微係数の同定の際に用いた変形と類似の次のような変形を施し，Eqn. (6.5) を得る．左辺の縦ベクトルが求めるべき圧力の翼運動に対する微係数であり，モード同定で

用いたサンプリング時間内の圧力変動情報とモード変位情報にもとづいて最小二乗法により未知係数を同定する．

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \vdots \\ \tilde{p}_{N_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \mathbf{q}_2^T & \cdots & \mathbf{q}_{N_f}^T & \dot{\mathbf{q}}_1^T & \dot{\mathbf{q}}_2^T & \cdots & \dot{\mathbf{q}}_{N_f}^T \\ \mathbf{q}_2^T & \cdots & \mathbf{q}_{N_f}^T & \mathbf{q}_1^T & \dot{\mathbf{q}}_2^T & \cdots & \dot{\mathbf{q}}_{N_f}^T & \dot{\mathbf{q}}_1^T \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ \mathbf{q}_{N_f}^T & \mathbf{q}_1^T & \cdots & \mathbf{q}_{N_f-1}^T & \dot{\mathbf{q}}_{N_f}^T & \dot{\mathbf{q}}_1^T & \cdots & \dot{\mathbf{q}}_{N_f-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \mathbf{q}_1}^T \\ \vdots \\ \frac{\partial p_1}{\partial \mathbf{q}_{N_b}}^T \\ \frac{\partial p_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1}^T \\ \vdots \\ \frac{\partial p_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{N_b}}^T \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

翼面上の各点で変動圧力の翼運動に対する微係数が求まったら，これらの係数を用いて，1 番翼の各空力弾性モードに同期する成分は，各空力弾性モードに調和振動を仮定しておけば，空力弾性モード固有ベクトル  $[\psi \ \lambda\psi]^T$  と空力弾性モード固有値  $\lambda$  を用いることで，

$$\tilde{p}_1(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial p_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \text{Re} \left[ \begin{bmatrix} \psi \\ \lambda\psi \end{bmatrix} e^{i\text{Im}(\lambda)t} \right] \quad (6.6)$$

と表すことが出来る．この圧力変動は同一周期の調和振動の和であるから，これもまた調和振動である．これより圧力の振幅を計算し，翼面上のコンタープロットとして可視化する．

#### 局所仕事分布の抽出手順

自励空気力により翼面の単位面積当たりにされた空力仕事を，局所空力仕事という．この局所仕事を見ることで，翼面上のどのような流れ構造が空力減衰もしくは励振に作用しているかを判断することができる．

ここまでで各空力弾性モードに対する翼面上の圧力変動場は Fig. 6.6 により求まっているから， $n_b$  番翼の翼面上の単位面積当たりに働く空力仕事は，空力座標に移された固体モードの固有ベクトル行列  $\Phi_a = [\phi_1 \cdots \phi_{N_f}]_a$  ( $3 \times N_f$  matrix) と空力弾性モードを用いて，次のように計算することができる．

$$dW_{\text{local}n_b} = -\tilde{p}_{n_b} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{u}_a \quad (6.7)$$

$$d\mathbf{u}_a = \Psi_a \dot{\mathbf{q}}_{n_b} dt = \Psi_a \text{Re} \left[ \lambda\psi e^{i\text{Im}(\lambda)t} \right] \quad (6.8)$$

より，振動一周期の積分を行えば，

$$W_{\text{local}n_b} = \int_{t_0}^{t_0+T} -\tilde{p}_{n_b} \mathbf{n} \cdot \Phi_a \text{Re} \left[ \lambda\psi e^{i\text{Im}(\lambda)t} \right] dt, \quad T = \frac{2\pi}{\text{Im}(\lambda)} \quad (6.9)$$

として，各空力弾性モードにおける振動に対する局所的な仕事量が求まる．局所仕事は，空力弾性モードの固有ベクトル  $[\phi \ \lambda\phi]^T$  のノルムが 1 となるように規格化して可視化した．これは，空力弾性モードの振動数が殆どそのモード群の真空中モードの振動数に近いとき，計算された空力仕事は，空力弾性モードが単位エネルギー当たりの振動をしているときの振動一周期当たりの翼へのエネルギー流入になり，翼面全体で面積分をすると空力弾性モードの対数減衰率が得られる．

圧力振幅に対しても，空力弾性モードのノルムが 1 となるような振動に対する圧力振幅を示している．

#### 可視化された翼面上の自励空気力分布

このように，最小二乗法の応用とモード同定された空力弾性モードから翼面上の変動空気力成分を求めることができる．1F モード群に対する自励空気力の局所圧力振幅と局所仕事をそれぞれ Fig. 6.26, Fig. 6.27 に示す．同様に 1F モード群に対するものを Fig. 6.28, Fig. 6.29, 1T モード群に対するものを Fig. 6.30, Fig. 6.31 に示す．3F,1C モード群に対しても同様の情報が得られ，このようにして全ての空力弾性モードに対して局所圧力変動および空力仕事をたった 1 度の連成解析から得られる．

ここからわかることは，まず 1F モード群では翼間位相差 0deg に近いほど Fig. 6.26 の圧力変動が小さくなっており，また  $\pm 180\text{deg}$  の隣接翼と逆対称の運動状態に近くなるほど，翼負圧面前縁から翼間衝撃波に至るまでの超

音速領域，翼間衝撃波およびその背後で圧力振幅が大きくなっていくことである．また，Fig. 6.24 の固有値分布より翼間位相差が  $\pm 180$  に近いほど空力減衰が大きくなっており， $0\text{deg}$  では最小をとっている．また，Fig. 6.27 ではほとんどの翼間位相差で翼間衝撃波と負圧面前縁の超音速領域が空力減衰として作用していることから，これらの流れ構造が 1F モード群の主な空力減衰の源であることがわかる．

Fig. 6.28，Fig. 6.29 に示す 2F モード群では，どの翼間位相差でも空力減衰および圧力振幅は他の 1F，1T モードに比べて小さい．さらに Fig. 6.23 の固有値分布でも，他のモード群に比べて翼間位相差に対する空力減衰の依存性は小さく，また空力減衰の値自体も小さくなっている．このことから 2F モードの振動は変動圧力を誘起しにくいいため，空力減衰の絶対値自体が小さくなっていると考えることが出来る．また，変動圧力が小さい原因として，モード形状は 70 % 翼高さ付近に Span 方向の節をもっており 1 枚の翼の中で互いの運動方向の効果を打ち消すような逆対称の運動が生じているためではないかと思われる．

Fig. 6.30，Fig. 6.31 の 1T モード群では 1F, 2F モードに比べ複雑な圧力振幅分布をしているが，翼間衝撃波や前縁部分の振幅が大きいこと，またそこでの空力減衰が大きいことがわかる．

以上のように，本研究の連成解析手法とモード同定を組み合わせることで様々な振動モードに対するフラッター解析をたった 1 度の解析により得ることができる．これは，同時にたった 1 つの構造振動モードしか取り扱えない既存手法と比べると，複数の振動モードの翼振動を俯瞰的に観察でき，系全体の空力弾性モード固有値・固有ベクトルを定量的に得ることができることが本研究でとったアプローチの利点であるといえる．また，局所的な流れ現象と空力仕事の相関関係を調べることにしても，局所的な圧力振幅応答を連成解析結果から再構築することで，既存手法である翼を強制振動した場合の解析と同様に行うことができることがわかった．

## 6.6 6 章のまとめ

本章では，本研究で開発した流体構造連成解析手法およびその結果を用いたモード同定手法を二次元の理論解析結果を用いた検証から実形状のファン翼列に対する振動解析へとレベルを引き上げるために，典型的な遷音速ファンである NASA Rotor 67 を題材とした静変形-ファン性能の連成解析およびフラッター解析を実施した．

NASA による試験結果を用いた検証により，翼根付近の前縁剥離を伴う失速点付近の流れ場に対してはまだ改善の余地があるものの，流量を変化させた時のファン作動特性は定性的に模擬できることが示された．

静変形-ファン性能の連成解析からは，翼変形はファン性能に大きな影響を与えないこと，翼間衝撃波が流路間に存在する始動状態の流れ場においては翼変形の流れ場に与える影響は小さいが低流量側に作動点を移し翼列が不始動状態になるのに伴いねじり戻りが急激に大きくなること，不始動状態では非連成・連成の両解析間にねじり戻りに伴う翼間衝撃波が前進する挙動により連成解析の方が流れ場を失速側に評価することがわかった．

下位 5 モードを取り込んだフラッター解析では，二次元の解析の際と同様に翼間が自励空気力により連成すること，モード同定が高い精度で行えることがわかった．そして，NASA Rotor 67 の空力弾性系では空力弾性モードは各構造振動モードの運動が支配的な「モード群，Mode family」を形成し，翼間位相差の違いにより空力減衰や振動数が真空中のものから変化するという翼列の基礎的な空力弾性系の特徴を捉えることができた．また，連成解析中で生じた変動圧力の空力弾性モード成分を求めることで翼面に作用する自励空気力を再構築し，局所的な流れ場が空力減衰や励振にどのように作用しているかを解析できることを示した．

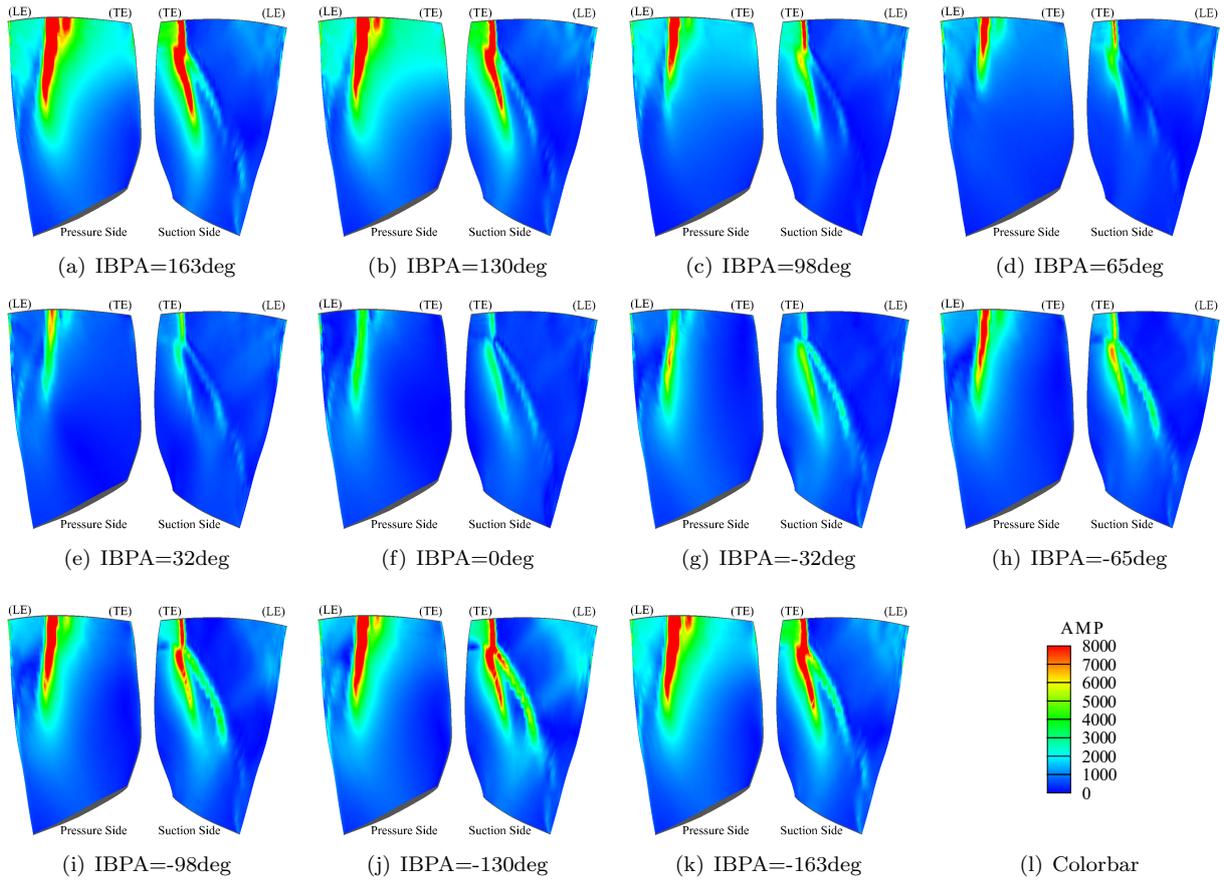


Fig. 6.26: Self-excited pressure amplitude of 1F mode family

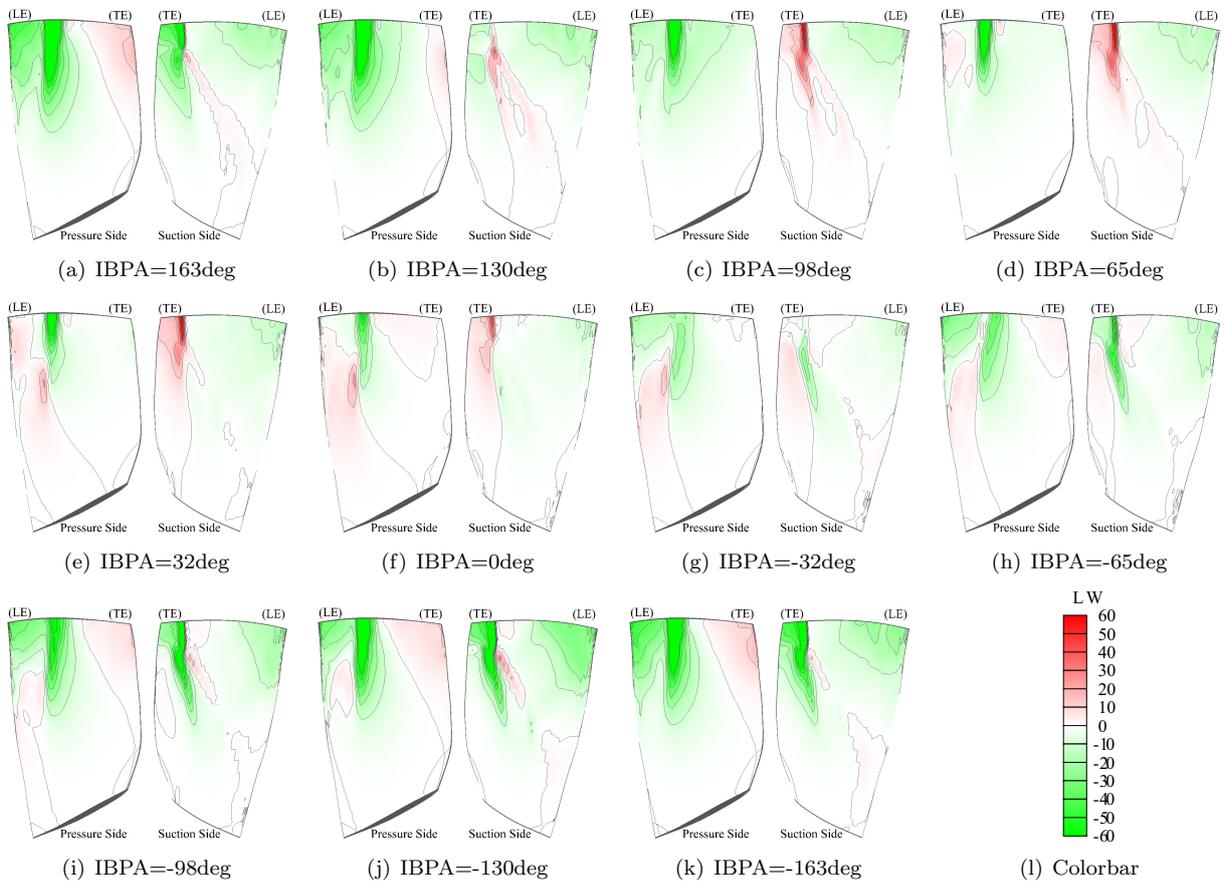


Fig. 6.27: Local aerodynamic work of 1F mode family

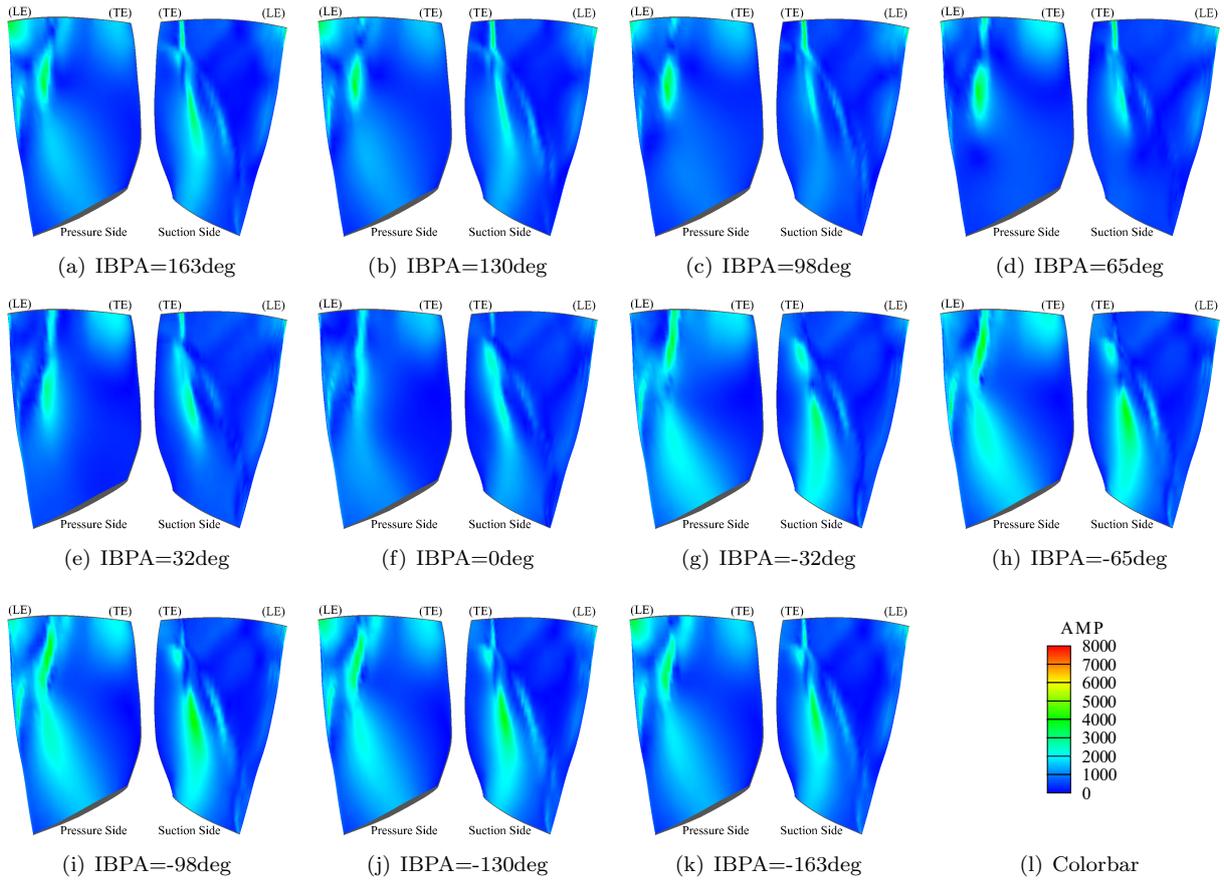


Fig. 6.28: Self-excited pressure amplitude of 2F mode family

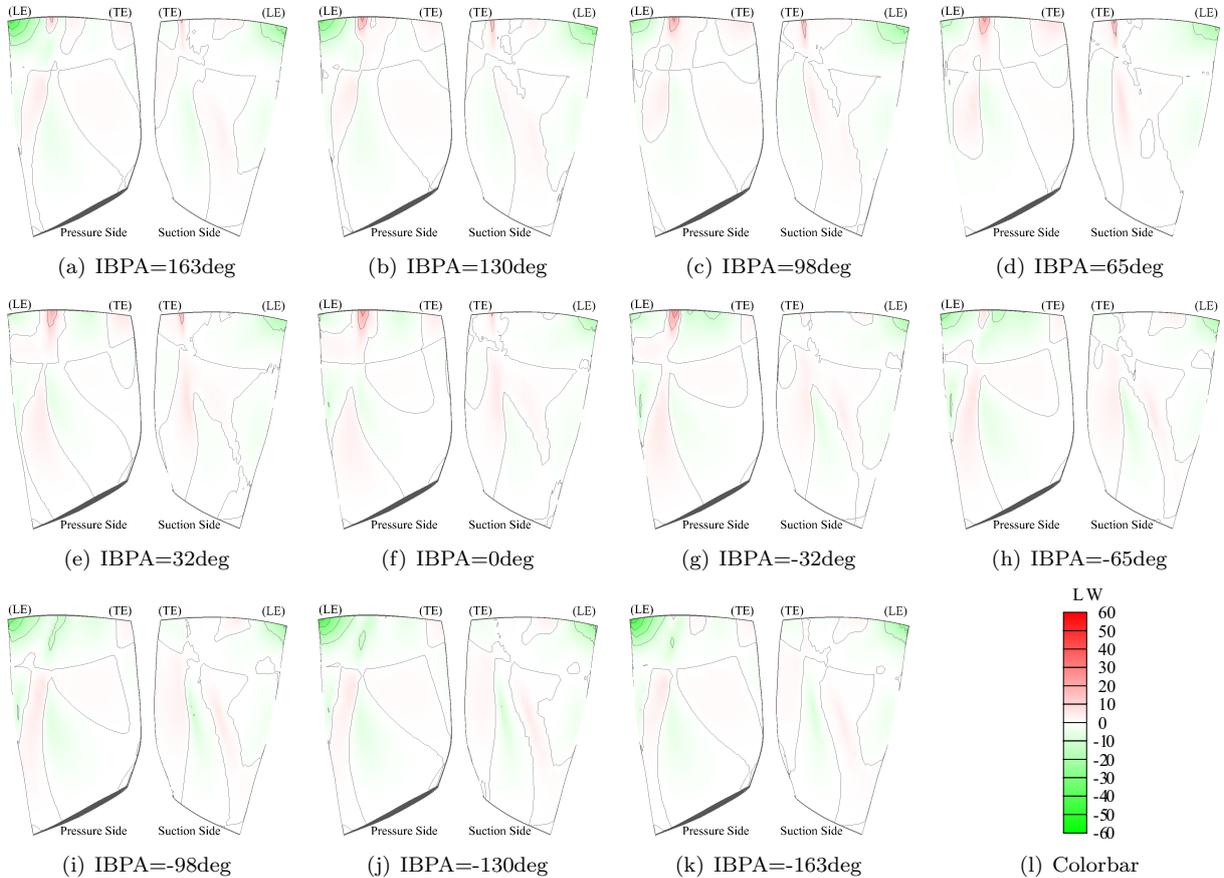


Fig. 6.29: Local aerodynamic work of 2F mode family

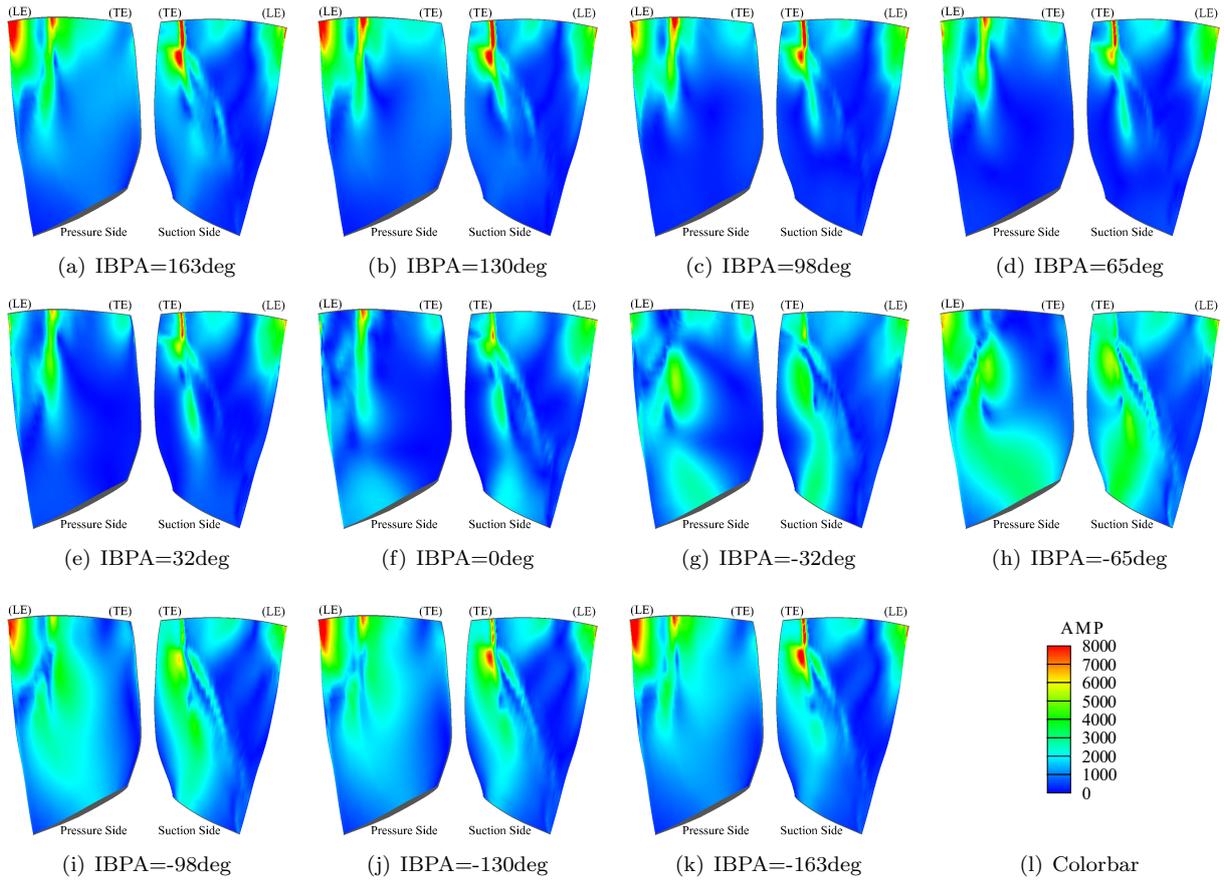


Fig. 6.30: Self-excited pressure amplitude of 1T mode family

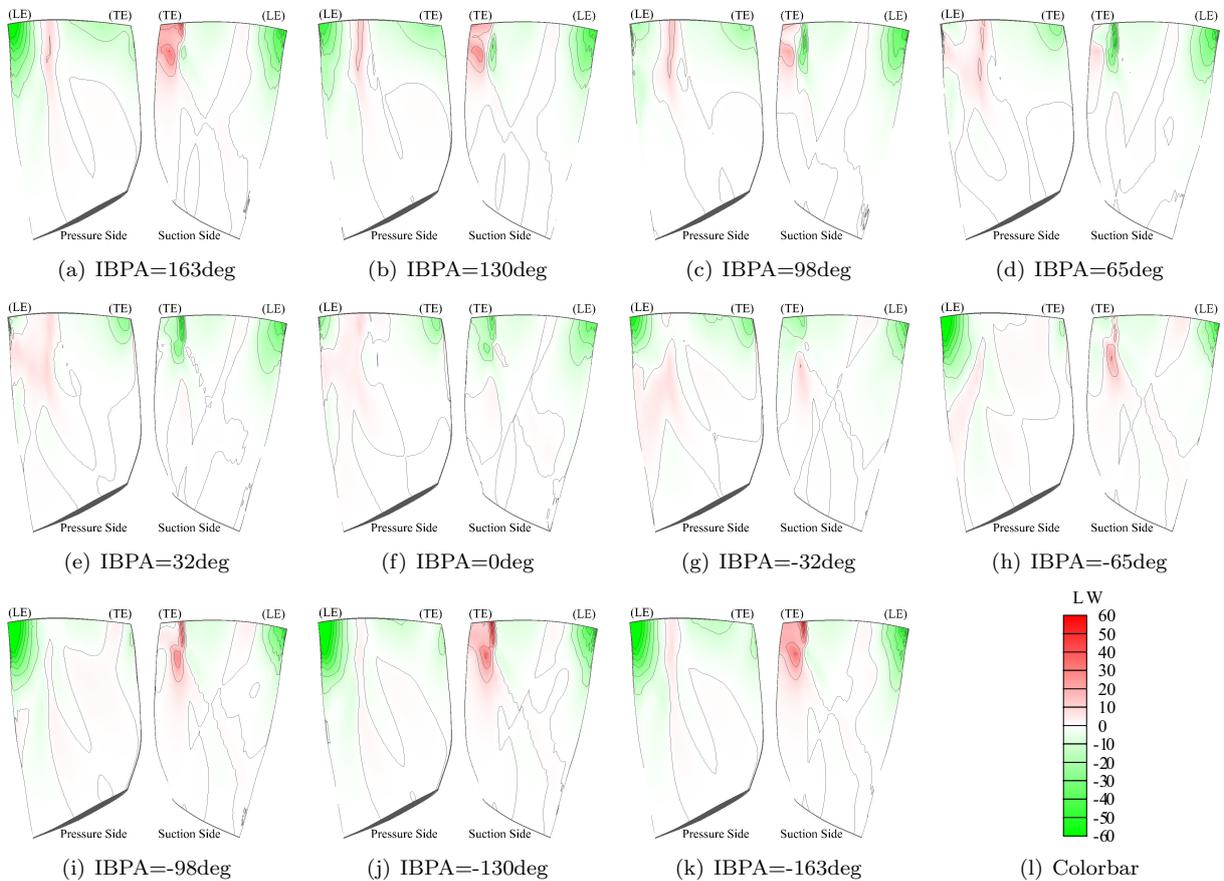


Fig. 6.31: Local aerodynamic work of 1T mode family

## 第 7 章 ファン動翼に生じる遷音速翼列フラッターの 解析

本章では、本研究の最終段階として連成解析を試験的にフラッターが確認された遷音速ファンリグを対象に応用し、発生したフラッターの発生機構および関連する流れ現象を明らかにすることを目指す。また、翼の質量を変化させた解析を行い、遷音速失速フラッターに振動モード形状の変化がどの程度影響しているかを調べ、類似するフラッター現象の解析において構造振動モード間の連成を考慮する、空力弾性方程式に基づく解析の必要の有無を検討する。

## 7.1 解析対象 - ECO-CEFS1 ファン

### 7.1.1 解析対象の概要

解析対象は、(株)IHI により開発された遷音速ファンリグである ECO-CEFS1 である。このファンは Murooka [109] らによって、高バイパス比化に伴うファン径増大を抑えるために高比流量を実現するための研究開発において設計されたファンのうちの 1 つである。Fig. 7.1(a) にファンおよび流路の子午面形状を、Fig. 7.1(b) にファン動翼の概形を示す。単純な前縁形状をもつ NASA Rotor 67 に対して、このファンは翼端付近で前縁が回転軸方向前方に張り出したような形 (Swept) をしている。Table. 7.1 に、CEFS1 の概要を示す。翼枚数は 18 枚であり、近年の高バイパス比エンジン向けファンとしては少ないほうに分類される。またアスペクト比は 1.6 であり、NASA Rotor 67 と近い値をしている。翼構造は中実の 64 チタン (Ti-6Al-4V) であり、リグ試験供試体は剛性の高いディスクをもつブリスクで構成されている。そのため構造減衰は非常に小さく、トータルの減衰力には空力減衰が支配的となっている。

CEFS1 はリグ試験において部分回転数の失速側作動点でフラッターが発生することが判明した。Fig. 7.2 に試験で取得されたファン特性マップを、Table. 7.2 に、ファンの失速側作動点における作動安定性限界の要因をまとめて示す。フラッターは 80 %、82.5 % 回転数の狭い回転数範囲において 1 次たわみモード (1st flexure mode) で生じ、マップ中ではフラッター境界が安定作動領域に鋭く食い込むようなかたちで存在している。マップ中でフラッター境界がこのように見えていることから、フラッター境界は Flutter bite と呼ばれることも多い。このように、部分回転数のサージ線付近で発生するフラッターを失速フラッターと呼び、特に流れ場が遷音速のものを遷

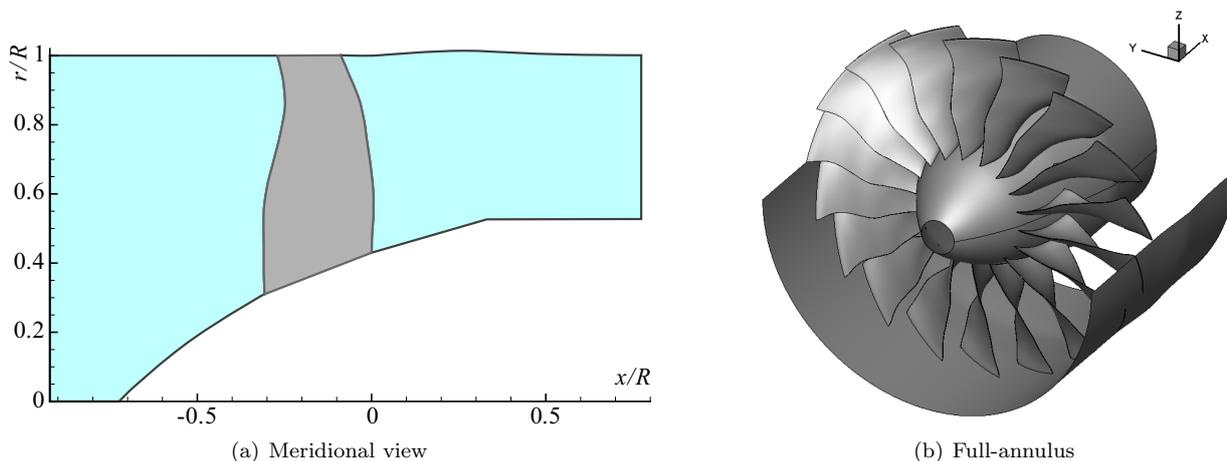


Fig. 7.1: IHI ECO-CEFS1 fan rig

Table. 7.1: Specifications of CEFS1 fan

No. of blades	18 (Blisk)
Aspect ratio	1.6
Tip relative Mach No.	1.4
Material	Ti-6Al-4V (Solid): $E = 111.0[\text{Gpa}]$ , $\mu = 0.34$ , $\rho = 4.43[\text{kg/m}^3]$

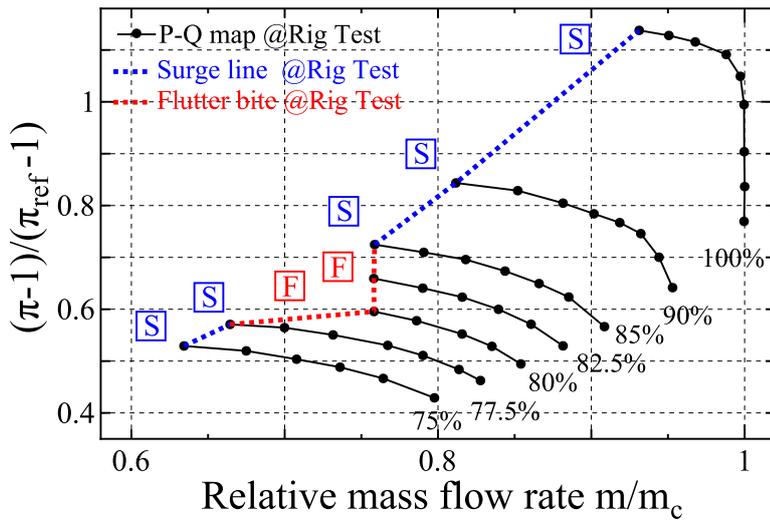


Table. 7.2: Stability limit of CEFS1

Speedline [%DP]	Stability limit
75.0	Surge
77.5	Surge
80.0	Flutter (1F, 249.5Hz)
82.5	Flutter
85.0	Surge
90.0	Surge
100.0	Surge

Fig. 7.2: Characteristic of CEFS1 and stability limit

音速失速フラッターと呼ぶ。フラッターの発生過程として、ある作動線にそって回転数を上げていった際に、フラッター境界の下側にかかるかたちでフラッター境界を通るか、回転数を一定にして流量を減少させていきフラッター境界をまたぐという、二種類の入り方がある。それ以外の回転数、即ち低回転数側の 75 % ~ 77.5 % 回転数および高回転数側の 85 % ~ 100 % 回転数ではサージによって絞り側の運転が制限される。

本対象のフラッター発生機構に関する先行研究は、Aotsuka らによって行われている [22] [110] [111] [112] [113]。

本章では、この部分回転数におけるフラッターを連成解析で再現し、その発生機構や空力弾性モードの特徴、フラッターに關与する流れ現象を明らかにすることを旨とする。

### 7.1.2 数値解析の設定

#### 解析条件

本研究では、部分回転数のフラッター境界が連成解析によって再現されることを確認するために、フラッター境界前後のある程度幅をもった回転数領域の低流量側作動点を中心に解析を行い、数値解析においてフラッター境界を算出する。そのため、対象とする回転数は定常流れ解析に対して 70 % から 90 %、フラッターの解析では設計回転数比 70 % から 85 % とした。

計算領域の取り方は、NASA Rotor 67 の計算と同様、定常流れ解析では動翼 1 ピッチを計算領域に取る。またフラッターの解析領域としては、試験で確認された 80 % 回転数のフラッターである翼間位相差 80deg が実現され、また計算リソースの範囲で極力広い翼間位相差が実現されるように、ファン半周（動翼 9 枚）を計算対象とし、両端は周期境界条件で接続する。このとき、ファン半周を周期的に取り扱っているため、周方向の周期性を考えると、空力的には周方向の節 1 本を与えられていることと等価になる。その結果、連成解析では節直径が偶数の空力弾性モード（ND = 0, ±2, ±4, ±8, ±10 の合計 9 個 × 計算で取り込む構造振動モードの数）が得られることになる。

#### CFD 格子と FEM 構造モデル

解析に用いた格子を Fig. 7.3 に示す。翼間は Rotor 67 の解析と同様マルチブロック構造格子で離散化され、翼端間隙部にも格子を配置しており、1 流路あたりのブロック数は 16 個である。固体壁面上の最小格子幅は約  $3.0 \times 10^{-6}$  [m] であり、85 % 回転数においては翼面のほぼ全域で無次元壁面距離  $y^+ < 2$  が保たれている。しかし、前縁の曲率部分では境界層が非常に薄く、流れが加速されるために  $y^+$  は他の部分より大きく、ここを含めると  $y^+ < 5$  となっている。主要な部分における格子数は Table. 7.3 に示すとおりであり、合計セル数は 1 流路当たり約 230 万点である。

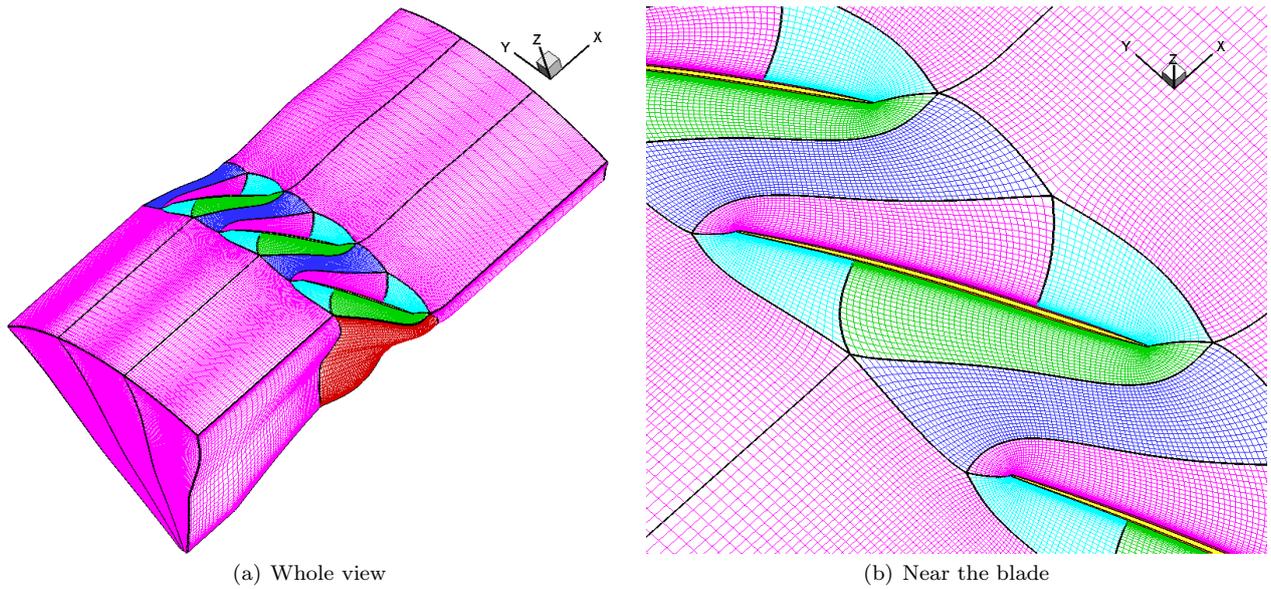


Fig. 7.3: CFD grid of CEFS1

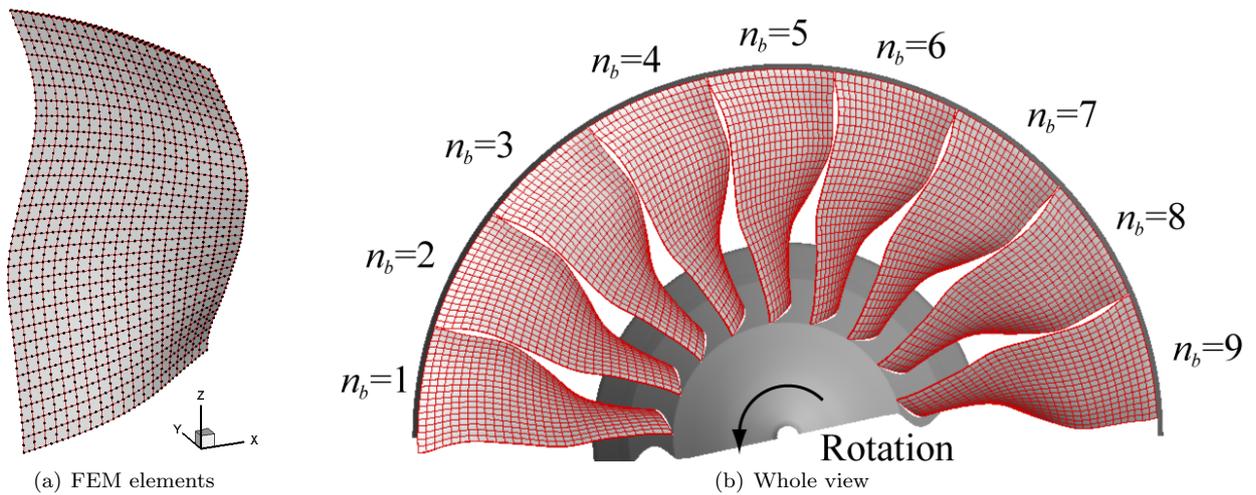


Fig. 7.4: FEM elements of CEFS1

Table. 7.3: Size of CFD Blocks

Direction	cells
Chordwise	120
Blade pitch	108
Spanwise	97
Tip clearance	23
Total cells	2327872

Table. 7.4: Size of FEM elements

Direction	Elements	Nodes
Chordwise	19	39
Spanwise	29	59
Thickness	2	5
Total	1102	6450

各回転数の解析においては、80%回転数における翼形状で作成された格子から翼の遠心力による変形のみを考慮し解析対象の回転数の格子をモーフィングにより取得した。また、翼振動解析においては翼端間隙をブロック分割していることから代数的な格子移動手法の導入は困難であるため、各振動モード変位に対する格子応答関数を格子モーフィングソルバによって生成することで、翼振動時の流路間および翼端間隙部の格子の運動を実現した。

構造解析に用いる有限要素モデルを Fig. 7.4 に、主要な方向の要素数および節点数を Table. 7.4 に示す。Fig. 7.4(a) の単翼の有限要素モデルは、翼弦方向、翼高さ方向、翼厚み方向にそれぞれ 39 点、59 点、5 点を配置した 20 点六面体二次要素で構成される。また、境界条件は翼根で全自由度の変位を 0 に束縛する。この要素数では翼

Table. 7.5: Boundary conditions for CEFS1 configuration

Boundary	Boundary conditions	
Inlet	Steady	Fixed $p_t$ , $T_t$ , and flow angle, extrapolated $R^-$
	Unsteady	Giles's 1D NRBC
Outlet	Steady	$p$ : Simple radial equilibrium, $v, T$ : Extrapolated
	Unsteady	Giles's 1D NRBC
Blade surface	Steady	$v$ : Non-slip static wall, $T, p$ : Extrapolated
	Unsteady	$v$ : Non-slip moving wall, $T, p$ : Extrapolated
Hub wall	Both	$v$ : Non-slip wall, $T, p$ : Extrapolated
Casing wall	Both	$v$ : Non-Slip wall, $T, p$ : Extrapolated
Pitch direction	Steady	Periodic (1 blade)
	Unsteady	Periodic (9 blades)

根とディスクの結合部分や前縁・後縁に格子が集中しておらず応力解析にはふさわしくないが、翼のグローバルな変形量および低次の高々数個の振動モード形状に対する解析精度としては十分であると考えられる。Fig. 7.4(b)に、ファン半周の構造モデル構成を示す。NASA Rotor 67 の際と同様に、動翼前方から見た反時計回りの回転方向に対してある翼に対して負圧面側に位置する翼の番号が大きくなるように翼番号を定義し、これにより振動解析や翼間位相差の定義がなされる。

#### 境界条件

定常流れ解析，非定常流れ解析どちらも，基本的な境界条件は NASA Rotor 67 の解析で用いたものに準ずる。本解析に用いている境界条件を，Table. 7.5 にまとめて示す。Rotor 67 と唯一異なるのは，本解析では翼端間隙を考慮するために，ケーシングにおいて滑り壁条件ではなく，粘着条件を用いることである。粘着条件は，ケーシングは慣性系に静止しており，CFD では回転系での計算を行っているので，壁面速度  $v_{\text{wall}}$  を回転速度に基き  $v_{\text{wall}} = -\omega \times r$  ( $r$  は半径) と与えている。

#### CFD コードの構成

CEFS1 の解析では，Table. 7.6 に示す CFD コードの構成を用いる。NASA Rotor 67 の解析からの変更点として主なものは，以下のとおりである。まず，流れ場の滑らかさと計算の安定性を重視し，MUSCL 法による再構築における勾配制限関数に Minmod リミターではなく Van-Albada の limiter を用いる。また，失速フラッターに関する数値解析であることを意識し，NASA Rotor 67 で失速点付近流れ場における前縁剥離部分やその下流に関連した流れ場の再現度に疑問が生じたことから，改めてモデル変数やレイノルズ応力の構成式が異なる 3 種類の異なる乱流モデルに対して計算安定性や流れ場の特徴を検討する（最終的には Spalart-Allmaras モデルでフラッター解析を行う）。さらに，限られた計算リソースでできるだけ広い作動範囲でフラッター解析を行えるように，陰解法部分のアルゴリズムを再考した。具体的には，スレッド並列化に対するオーバーヘッドが大きい LU-SGS に基づく方法ではなく，理想的な並列化効率が得られるように設計されたアルゴリズムである，Red-Black Gauss-Seidel 法に基づく TCPGS 法を用いている。

Table. 7.6: Numerical methods for flow simulations

Governing equation	3D-RANS, Finite Volume Method, ALE formulation
Inviscid term	SHUS [65] +3rd MUSCL, Van-Albada limiter
Viscous term	2nd order central difference
Time derivative	(Steady) Euler implicit, (Unsteady) 2nd order 3 points Backward difference
Implicit relaxation	TCPGS [73] with Red-Black Gauss-Seidel relaxation
Turbulence model	Spalart-Allmaras [75], Wilcox's $k - \omega$ [78], AJL- $\omega$ [81]

## 7.2 構造解析

フラッター計算に先立ち、翼の製造形状逆変換および各 Speedline における翼形状と振動モードを求めた。まず逆変換の結果を Fig. 7.5 に示す。動翼を翼端側から見た Fig. 7.5(a) からは、NASA Rotor 67 で生じるような明瞭なねじり戻り挙動ではなく、翼端部では並進方向の変形が大きいことがわかる。同時に動翼前方および側方から見た結果も Fig. 7.5(b), Fig. 7.5(c) に示し、有限要素モデルの破綻がなく正しく逆変換ができていると考えられる。

Fig. 7.5(a) で明瞭なねじり戻り量が翼端で観察出来にくいのは、遠心力による翼構造の変形特性に大きく関係していると考えられる。各回転数における翼変形および振動モードの変化を Fig. 7.6 に示す。まず、Span 方向のねじり戻り量の変化である Fig. 7.6(a) より、30 % 回転数より下の低回転数側では一旦ねじれがスタガ角を増す方向に誘起され、30 % 回転数から 40 % 回転数の間ではスタガ角がわずかに減る方向に転じていることがわかる。また、Span 方向に単調なねじり戻り挙動をしていた NASA Rotor 67 とは異なり、Span 方向のねじれ戻り角分布には 2 つのピークが見て取れる。30 % span から 40 % Span にかけて、また 80 % から 100 % Span にかけては遠心力が単純な積重様式におけるねじり戻り方向（即ち、スタガを減らす方向）とは異なり、ねじり戻りをキャンセルする方向に変形するようにスタッキング軸が調整されていることがわかる。本解析対象の静的な構造特性は以上のように理解でき、設計回転数で翼端部分のねじり戻り量は設計回転数においても約 0.9deg と、2.7deg 以上もねじり戻りが生じていた NASA Rotor 67 に比べて非常に低い値を示している。

構造振動モード解析の結果として、Fig. 7.6(b) にキャンベル線図を、Fig. 7.7 に構造振動モード形状の例として 80 % 回転数における下位 8 個のモード形状を示す。Fig. 7.6(b) のキャンベル線図からは、回転数に対する振動数変化の挙動は複雑であることがわかる。低回転側の 0 % から 20 % 回転数にかけては 6 次と 7 次の振動モードが、過回転側の 120 % から 140 % 回転数にかけては 5 次と 6 次の振動モードが接近し縮退しているような挙動をしている。しかし、本章のフラッター解析範囲とした 70 % 回転数から 85 % 回転数では各構造振動モードは縮退せず、振動数は回転数に対して単調に変化している。Fig. 7.7 の構造振動モード形状を見ると、下位から 1 次たわみ (1F)、2 次たわみ (2F)、1 次ねじり (1T)、3 次たわみ (3F) が NASA Rotor 67 と同様に現れる。5 次の振動モードは本研究では Edgewise(1E) と呼ぶことにし、翼の辺に沿って斜めに節が入るモード、6 次は翼端部における翼弦方向曲げ (Chordwise bending, 1C) モード、さらに高次には曲げとねじりが複合したような 1T2F モードおよび 4F モードが見られる。本研究ではフラッターが起きた 1 次モードより下位の 5 モード (1F, 2F, 1T, 3F, 1E) をフラッター解析に用いるものとする。

なお、構造振動モード形状は 70 % 回転数から 85 % 回転数の範囲では定性的にはあまり変化せず、回転数を変えても Fig. 7.7 に似た形状が現れることを付記する。

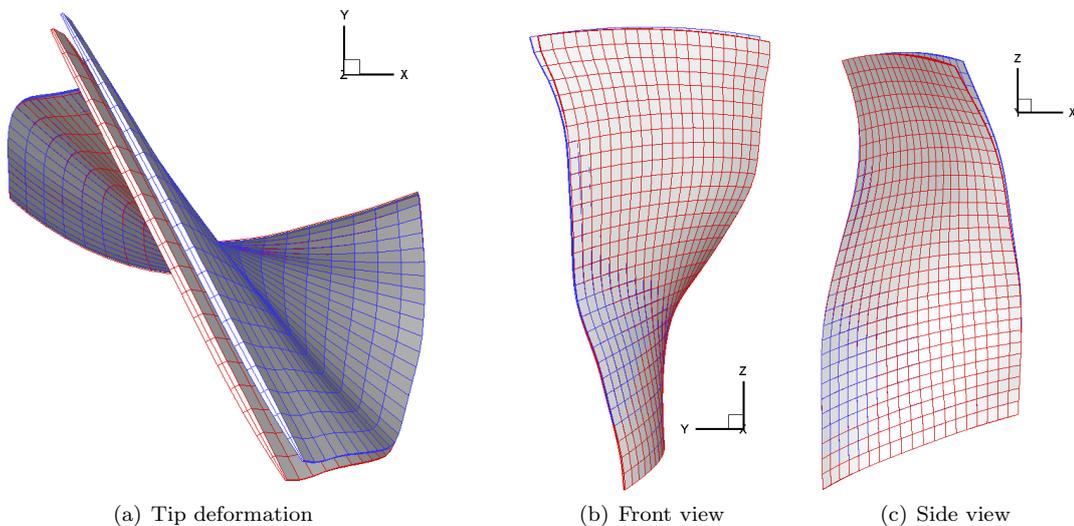


Fig. 7.5: 'Hot' blade shape at 100% design speed and transformed 'Cold' shape

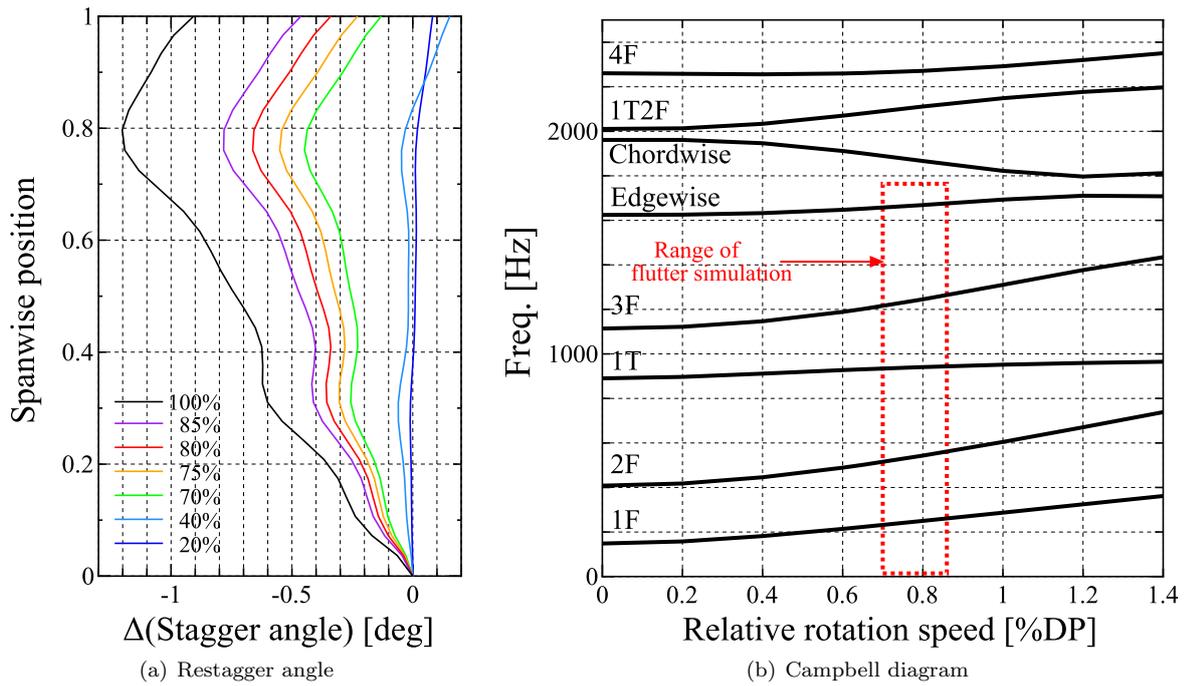


Fig. 7.6: Blade deformation for different rotating speed and Campbell diagram

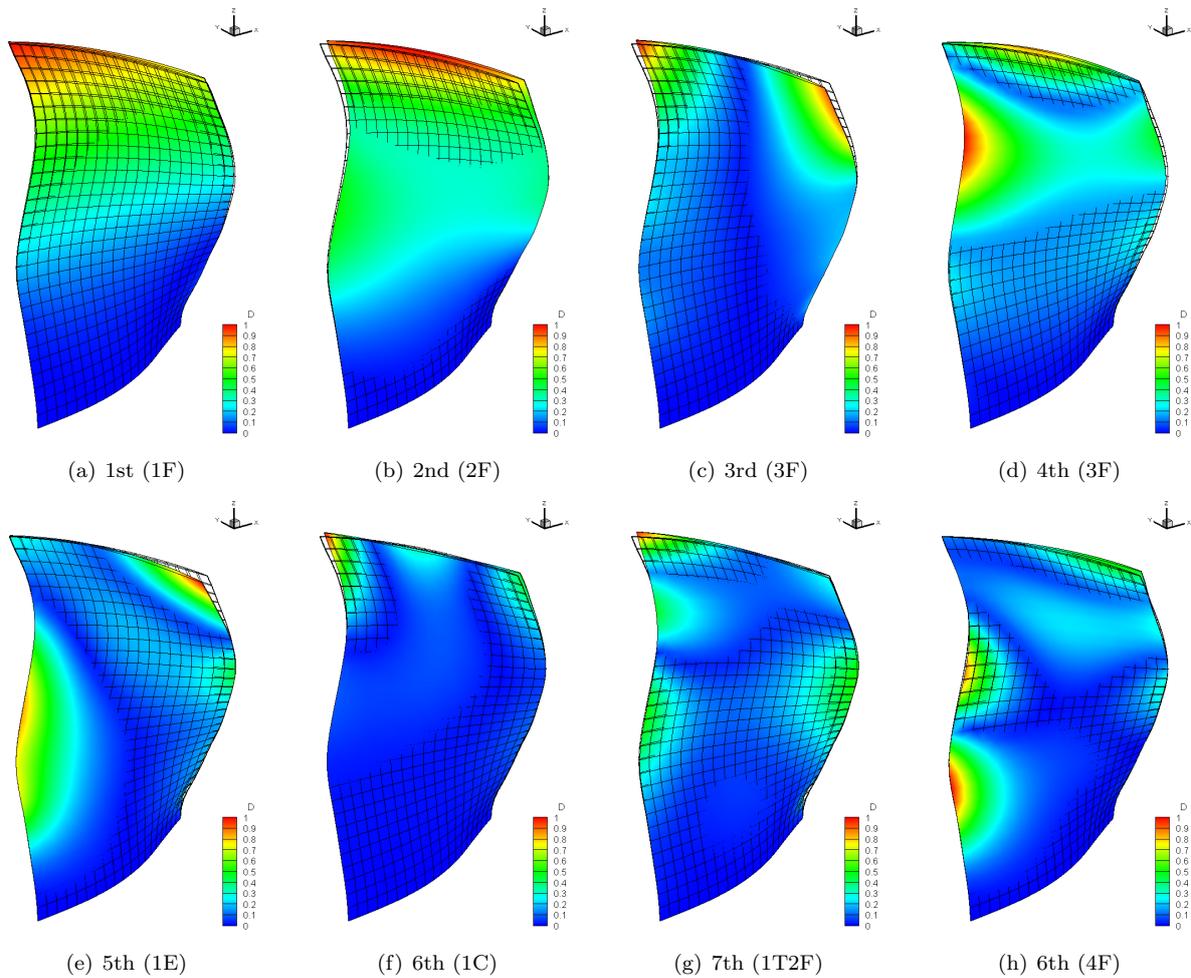


Fig. 7.7: Structural modeshapes at 80 % rotating speed

## 7.3 定常流れ場の解析

本節では、フラッター解析の基盤となる定常流れ解析を行う。前章の NASA Rotor 67 における解析では、失速点付近の流れ場において特に Hub 側の前縁剥離起因すると思われる計測値との乖離が生じてしまったので、改めて乱流モデル依存性を確かめたのちに、解析対象を含む回転数域で定常解析を行い、フラッター境界付近の流れ場の特徴を調べる。

### 7.3.1 乱流モデルの影響

まず、予備解析として乱流モデルの影響を検討し解析に用いるモデルを決定する。解析対象の翼回転数はフラッターが確認された設計回転数比 80 % で行う。特性曲線の算出には格子の入口・出口における諸量を算出し、また翼後方の諸量の比較は翼根後縁より 20mm の位置にて行う。

検討に用いる乱流モデルとして、ターボ機械流れの解析でよく用いられる 2 方程式型渦粘性モデルである Wilcox の  $k-\omega$  モデル [78]、1 方程式型渦粘性モデルの Spalart-Allmaras モデル [75] (SA)、2 方程式型・2 次非線形渦粘性モデルで Reynolds 応力を歪速度・渦度の 2 次式で近似する AJL- $\omega$  モデル [81] を選択した。

各乱流モデルに対して与えた入口境界条件を Table. 7.7 に示す。本対象における入口乱れ度は 1 % 程度と小さいが、本解析では十分に検証された遷移モデルを導入していないことから、基本的な方針として外部流の解析において「全域乱流」として取り扱う、一様流に対する境界条件に基づくものを用いた。

Spalart-Allmaras モデルでは、 $\hat{\nu}_t = 4\nu_{\text{inlet}}$  とする。2 方程式型の  $k-\omega$ 、AJL- $\omega$  では乱れ度を 1 % とし、一様流の乱れ減衰挙動を決める  $\omega$  は翼弦長と入り口流速から減衰の時間スケールを決め、 $\omega = 10V_{\text{inlet}}/c$  とした。ここに  $V_{\text{inlet}}$  は入口流速、 $c$  は Tip 部の翼弦長である。

Table. 7.7: Inlet boundary conditions for each turbulence model

SA	$\hat{\nu}_t = 4\nu_{\text{inlet}}$
$k-\omega$	$Tu = 1\%, \omega = 10V_{\text{inlet}}/c$
AJL- $\omega$	$Tu = 1\%, \omega = 10V_{\text{inlet}}/c$

ここで、乱流遷移に対する取り扱いについて少々コメントを付け加えておく。「全域乱流」の取り扱いは、モデル・格子依存の擬似的な層流領域さえ生じなければ計算上簡便である。しかし、現実には前縁ごく近傍では境界層は層流になっており、前縁半径部分を回りこむ間に剥離した流れが乱流遷移する剥離流遷移 (Separation induced transition)、境界層が主流乱れを拾って乱流になるバイパス遷移 (Bypass transition)、発達した速度分布のもとで自然に擾乱が不安定になる自然遷移 (Natural transition) のいずれかの過程を経て翼弦方向のどこかで乱流の境界層になるという流れ場になっているはずである。しかし、乱流遷移がどこで起こるかは定かではないため、陽に遷移位置を指定してしまうのも難しい。そのため、今回用いた「全域乱流」の取り扱いは詳細な情報やモデルがない上での次善の策であるといえ、実際の流れの状態には則していない可能性も十分にありうる。

#### 特性曲線

背圧を変化させることで流量を変化させ、3 種類の乱流モデルでファンの回転数一定特性曲線を取得した結果を Fig. 7.8 に示す。高流量側では圧力比が高めに算出されており、低流量になるにしたがい試験結果と同じ程度の圧力比になってくる。得られた特性曲線は乱流モデル間で多少の差があるものの、ほぼ同じ曲線上に乗っていると判断できる。以下では、3 つの乱流モデルで流量に近いものを選び、高流量側の作動点を X 点、フラッター境界付近で低流量側の作動点を Y 点とし、得られた流れ場を比較していく。

#### 翼後方の流れ場

低流量側の作動点では流れ場が乱流モデルによる影響を受けやすいことを確認するために、翼後方における全圧、全温上昇、流れ角を比較した。作動点 X、Y に対するものをそれぞれ Fig. 7.9、Fig. 7.10 に示す。ここで、流れ角は負の値が大きいほど動翼により大きな旋回成分が与えられている。

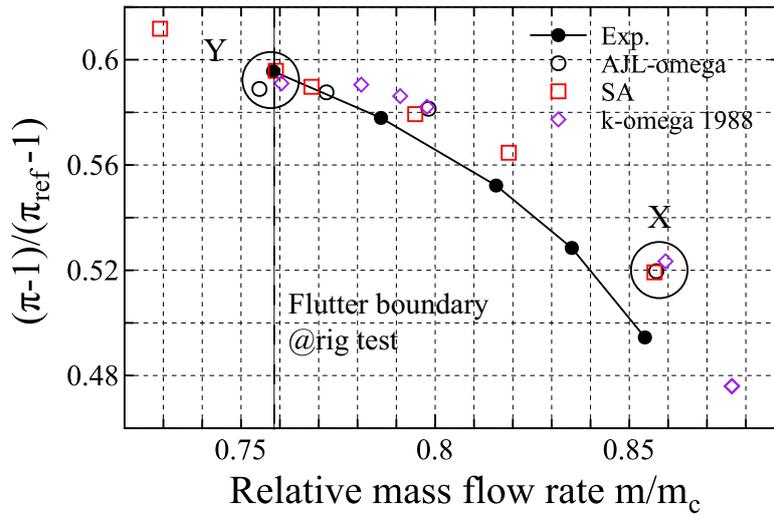


Fig. 7.8: Calculated characteristic curve at 80% rotating speed

まず作動点 X では、0 から 90 % 翼高さまではどのモデルでもほぼ同じ流れパターンとなっており、乱流モデルの依存性は低いと判断できる。また 90 % 翼高さ位置以上では主として全温上昇分布に若干の差が認められる。これに対して作動点 Y では各乱流モデルで流れパターンが大きく異なっており、特に Wilcox の  $k-\omega$  モデルで他 2 つに比べ大きな差が生じている。特に全温上昇分布を見ると、midspan では Wilcox の  $k-\omega$  が最も大きく、ついで SA, AJL- となっている。70 % 翼高さ以上では逆に大小関係が逆転し、Wilcox の  $k-\omega$  は全温上昇は小さく、SA, AJL- は同程度である。流れ角の大小関係と全温上昇の大小関係は、流れが各翼高さ断面に束縛されているなら一致するはずであるが、例えば 50 % 翼高さ位置を見ると、大小関係は対応していない。 $k-\omega$  モデルでは他の 2 モデルに比べ 70 % 翼高さ付近で流れ角が小さくかつ全温上昇も小さいことから、この位置で翼面上の比較的大規模な剥離に起因する低速領域が存在するものだと考えられる。

剥離領域とその下流の低速領域

次に、作動点 X において翼の負圧面から剥離した流れとその下流の低速領域を可視化し、翼面付近の流れを調べる。翼負圧面上の流れと、低速領域の可視化として回転系における相対マッハ数 0.4 以下の領域を示したものが Fig. 7.11 である。流線が寄り集まっている箇所は剥離が始まっている部分、逆に広がっている部分は再付着をしかけている領域として解釈できる。どのモデルでも共通しているのは翼根からある翼高さまで前縁剥離が生じていることである。

しかし、その挙動はモデルによって大きく異なっている。SA, AJL- モデルでは 50 % 翼高さ付近で前縁剥離が終わり、それ以上の翼高さで付着流になっているのに対して、全温分布が他の 2 つと大きく異なった Wilcox の  $k-\omega$  モデルでは、より高い翼高さ位置（およそ 70 % 程度）まで前縁剥離がせり上がっており、その下流で大きく低速領域が発達している。これが Fig. 7.10 において 70 % 翼高さ以上で  $k-\omega$  モデルの全温上昇が小さかった原因であると考えられる。

また、前縁剥離下流において SA, AJL- モデルの間にも大きな差が認められる。AJL- では前縁剥離した流れはほとんど midspan の下流に向かって流されていくのに対して、SA では前縁剥離した低速流れの一部が midspan より上に翼面上を伝って貫入し、負圧面に存在する垂直衝撃波足元の剥離の大きさを広げているようにみえる。

SA モデルと AJL- の翼面上の剥離領域の大きさの違いに関しては乱流モデルの検証段階における軸対称ディフューザ問題の結果と共通している点があり、AJL- モデルでは低速領域は確かに形成されるものの壁面上で流れが逆流する剥離領域はほとんど生じない、剥離が起きにくいモデルであった。本解析結果でもそのような特徴が共通して現れているものだと考えられる。

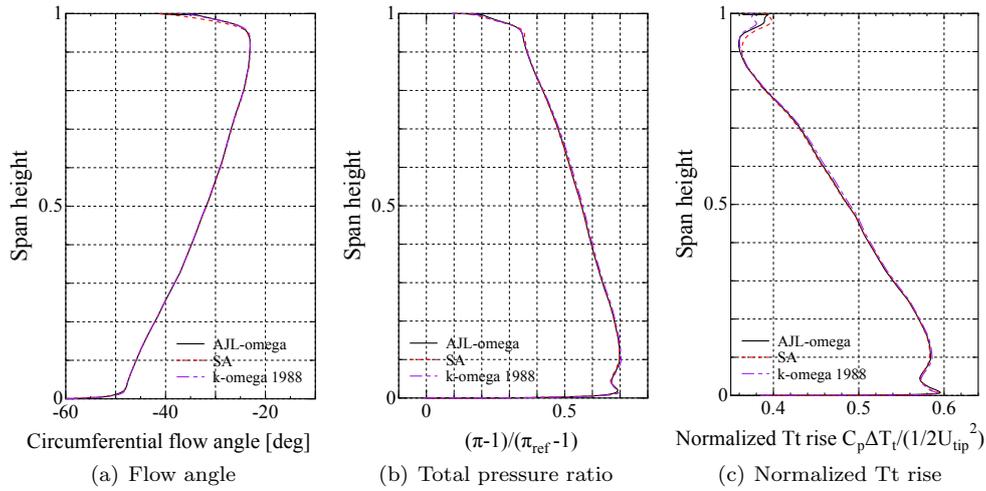


Fig. 7.9: Radial flow pattern after the rotor, point X

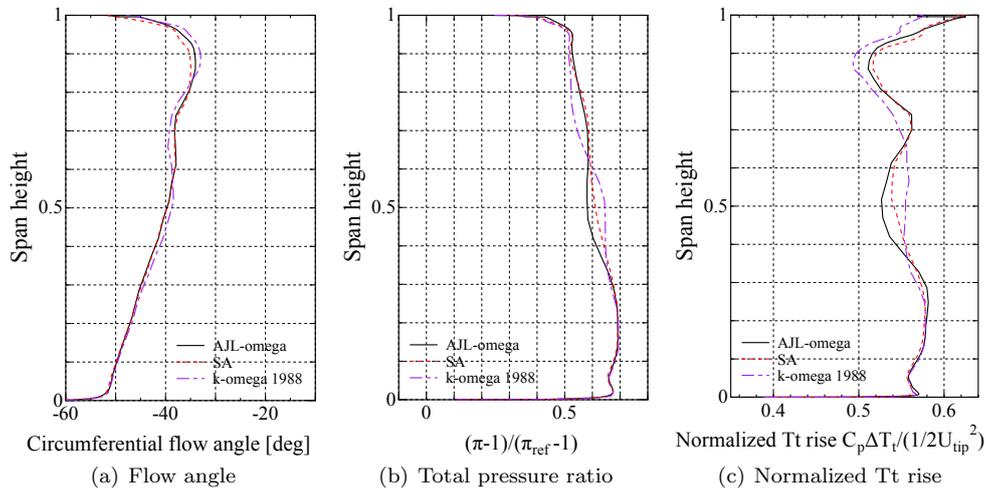


Fig. 7.10: Radial flow pattern after the rotor, point Y

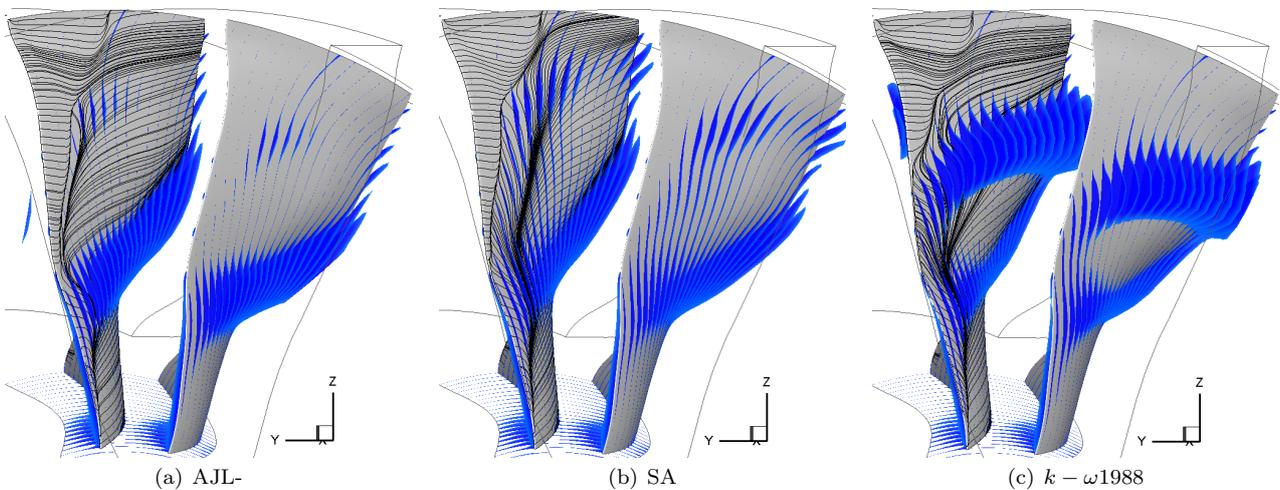


Fig. 7.11: Streamlines of blade surface and low-speed region at point Y (below relative Mach = 0.4)

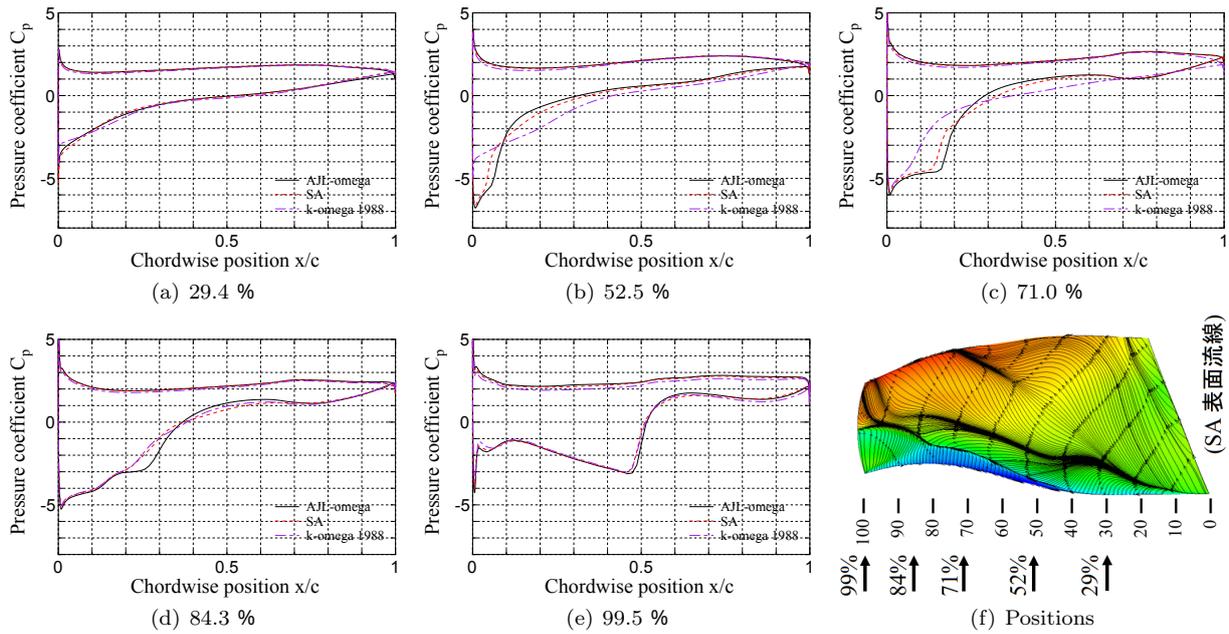


Fig. 7.12: Pressure coefficient distributions in every span height position

各翼高さ位置における圧力分布

最後に、翼面上の圧力分布を見ることで、翼面付近流れの加減速について考える。Fig. 7.12 に、各翼高さ断面における圧力係数分布を示す。モデルごとの差が大きい、特徴的な 5 断面を示している。まず、29.4 % 翼高さ断面では全てのケースで亜音速で前縁剥離をしているので、流れ場翼面上で超音速になることはなく、前縁で圧力が低く平坦になることはない。52.5 % 高さにおいて、SA および AJL- は、負圧面前縁が超音速になりおよそ 5 % 翼弦長に垂直衝撃波が位置する。剥離の小さい AJL- の方が SA よりも衝撃波が下流側に計算されており、他の翼高さ (71 %, 84.3 %) 断面でも同様の傾向が見られる。k- $\omega$  モデルはようやく 71 % 翼高さにおいて前縁超音速になりかけるが、すぐに減速してしまう。84.3 % では、剥離の小さい AJL- モデルのほうが他 2 つに比べて衝撃波の圧力上昇がシャープである。なお、84.3 % 断面で前縁から 15 % 翼弦長位置に見られる圧力上昇は、翼が前縁付近で逆のキャンバがついたような形をしており、前縁で膨張した超音速流れが一度軽く圧縮されているからであると思われる。

7.3.2 乱流モデルの決定

以上モデル依存性の確認として 3 種の乱流モデルによる予備解析を実施した。この結果を元にして、以後の解析で使用する乱流モデルを決定する。まず Wilcox の k- $\omega$  モデルを用いない理由として、他の 2 モデルに比べ前縁剥離位置が明らかに高い Span 位置まで来ており、NASA-Rotor 67 の解析でも類似の現象により動翼後方の流れ場が定性的に異なっていたことが挙げられ、多数決的に棄却してもよいと考えられる。

次に AJL- $\omega$  モデルと SA モデルでどちらを選ぶかであるが、以上の解析より剥離領域の挙動に感度があることがわかったがどちらが良いかと結論付けるのは実際の流れ場の情報をより詳細に知らないとわからない。そこで次策として、数値解析的な取り扱いやすさという観点からモデルを選定することにする。流れ場の観点ではない点からの理由として、Spalart-Allmaras モデルは他者のフラッター解析においてもよく採用されており、さらに計算量が少なく収束性が良いことが挙げられる。AJL- $\omega$  モデルは 2 次の非線形渦粘性モデルであり、ひずみ速度テンソルと渦度テンソルの積の項に関する計算量が非常に大きく、SA モデルに比べて長い解析時間を要する。以上の検討から、本解析対象においては Spalart-Allmaras モデルを用いて以後の解析を行う。

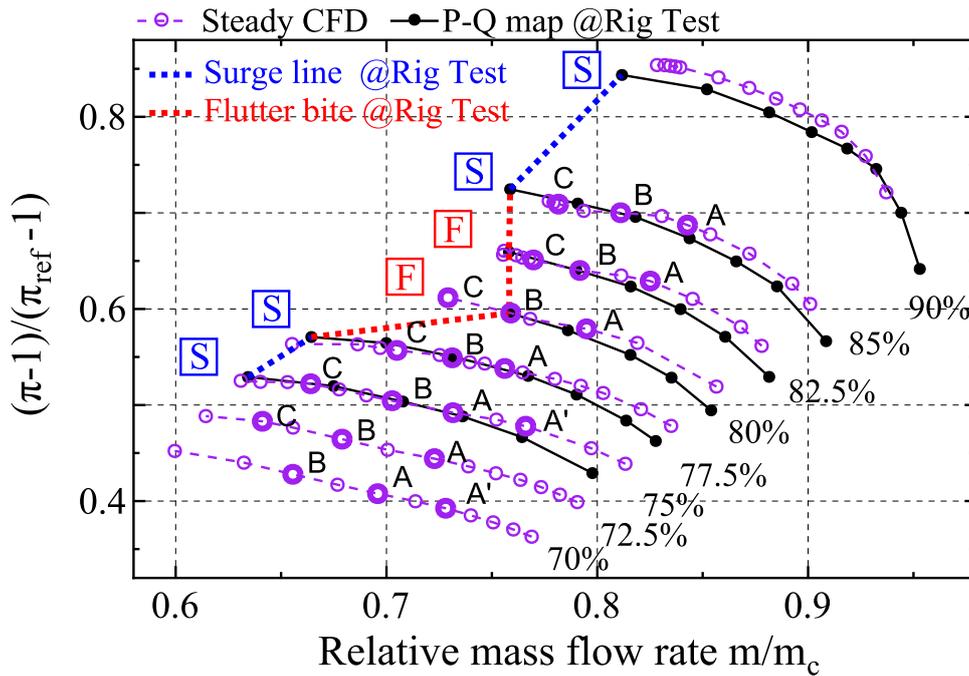


Fig. 7.13: Comparison of fan characteristic map of CEFS1 between CFD and Experimental results

### 7.3.3 ファン特性マップ

Spalart-Allmaras モデルを用いて定常流れ解析を行い、70 %回転数から 90 %回転数にわたりファン作動特性を取得した。特性マップを Fig. 7.13 に示す。Fig. 7.13 中の各線の系列が回転数一定の特性曲線であり、 に試験結果、 に計算結果を示している。図中 F は低流量側でフラッターが生じた回転数、S はサージが生じた回転数を示している。試験結果ではフラッター境界は 80 %から 85 %回転数において、約 76 %チョーク流量比を堺に垂直にマップに切り込んでおり、その他の回転数ではフラッターではなくサージが生じている。計算結果は 75 %から 85 %回転数において高流量側で圧力比を過大に算出するものの、回転数変化に対する圧力比への感度がよく捉えられていると判断できる。また、特に低流量側でよく特性曲線が一致しているが、これが物理的に流れ場を正しく捉えられていることを示すものではなく局所的な流れ場の比較を行う必要があると考えられる。

このマップをもとに各作動点における流れ場の特徴を調べていく。本研究では作動点を指し示すために、各回転数一定特性曲線において高流量側作動点から低流量側作動点に向かい A,B,C,D 点と名前をつける。作動点を指し示す際には、回転数と点の名前より区別することにする。

### 7.3.4 フラッター境界付近における流れ場の特徴

ここからは定常解析結果の流れ場について確認していく。これから見ていくように、フラッター境界まわりの回転数における各作動点では作動条件に対して流れ場が非常に大きく変化する。そのため、低回転数側から順番に流れ場を見ていき、最後にフラッター境界付近に特有の流れ場の特徴を述べる。

流れ場のおおまかな特徴は、以下の 2 つでおおまかに把握することができると考えられる。

- 翼面上の剥離領域の広さとその位置、表面流線
- 衝撃波の翼弦方向位置と

そのため、本小節では翼面上の限界流線と軸方向の逆流領域を図示するとともに、代表的な流路高さ位置 62 %、84 %における相対マッハ数を観察する。

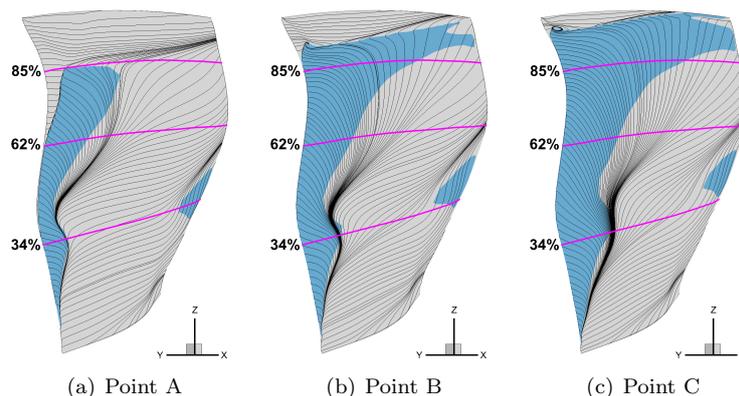


Fig. 7.14: Limiting streamline on the blade surface on 72.5 % speedline

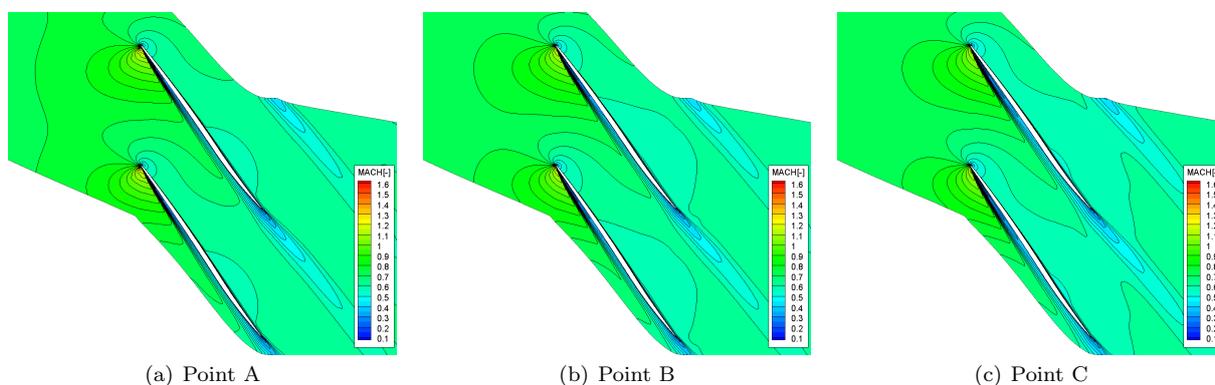


Fig. 7.15: Relative Mach number around the blade at 62% span on 72.5 % speedline

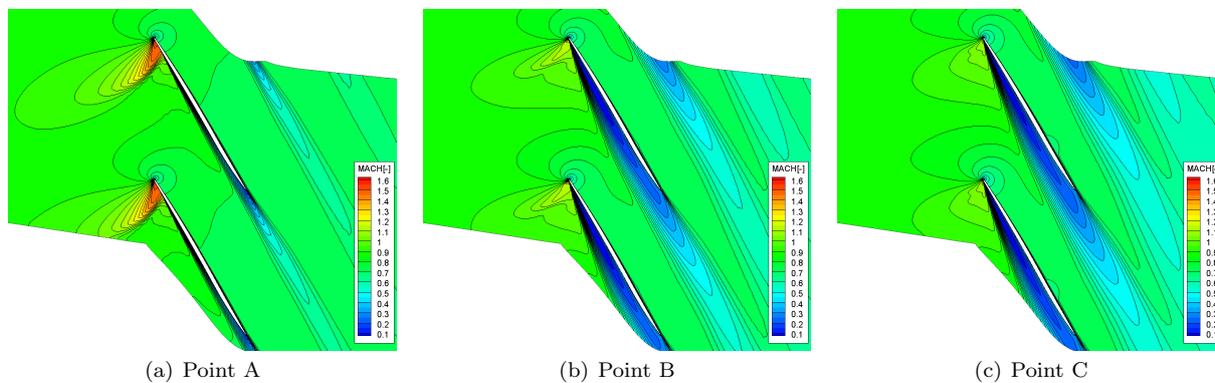


Fig. 7.16: Relative Mach number around the blade at 84% span on 72.5 % speedline

72.5 %回転数, 75.0 %回転数 (低回転数側の作動点)

まず、試験におけるフラッター境界より低回転数側にある作動点である 72.5 %, 75.0 %回転数に関して見ていく。Fig. 7.14, Fig. 7.17 はそれぞれ 72.5 %, 75.0 %回転数各作動点における翼面上の限界流線を示している。また、図中青で示した領域は翼面上で負の軸流速度をもつ領域であり、翼面直上で流れが逆流していることを示している。これらでは、高流量側の A 点の段階から、翼根から約 60 % Span 位置にかけた広い範囲で前縁剥離が生じている。そして B 点, C 点と低流量側に作動点を移すに従い剥離領域は高 Span 位置かつ下流に向かって拡大していく。特に C 点では約 85 % 以下の大部分の翼高さにおいて前縁剥離が生じてしまっており、また約 85 % 以上の Span 位置ではほぼ全面で逆流が生じている。

ここで見られた剥離領域の拡大は翼間の相対マッハ数分布でも明瞭に確認できる。62 % Span 位置, 84 % Span 位置の翼間相対マッハ数分布を, Fig. 7.15, Fig. 7.16, Fig. 7.18, Fig. 7.19 に示す。翼面上限界流線において、

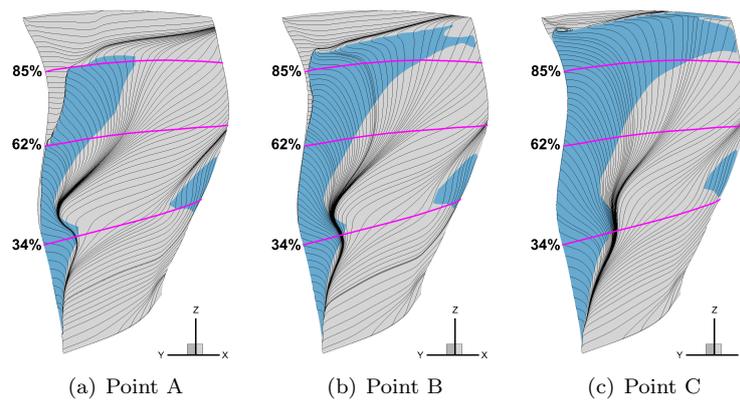


Fig. 7.17: Limiting streamline on the blade surface on 75.0 % speedline

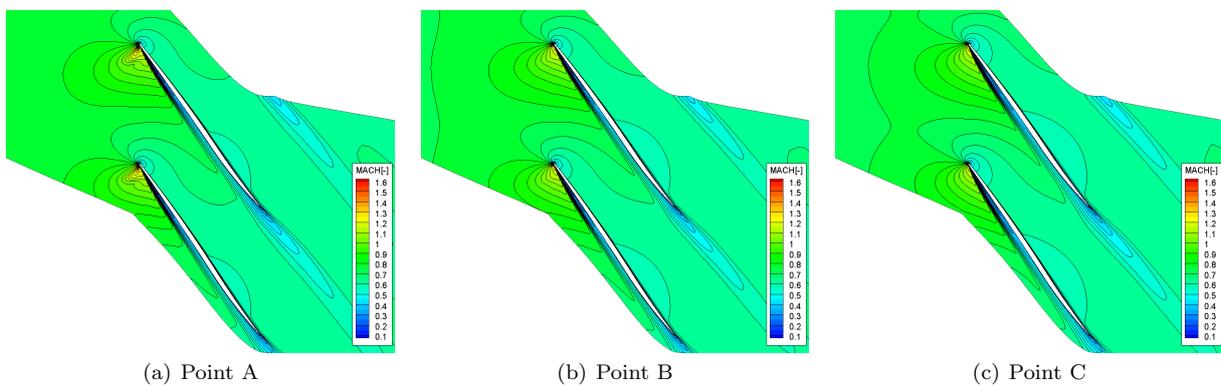


Fig. 7.18: Relative Mach number around the blade at 62% span on 75.0 % speedline

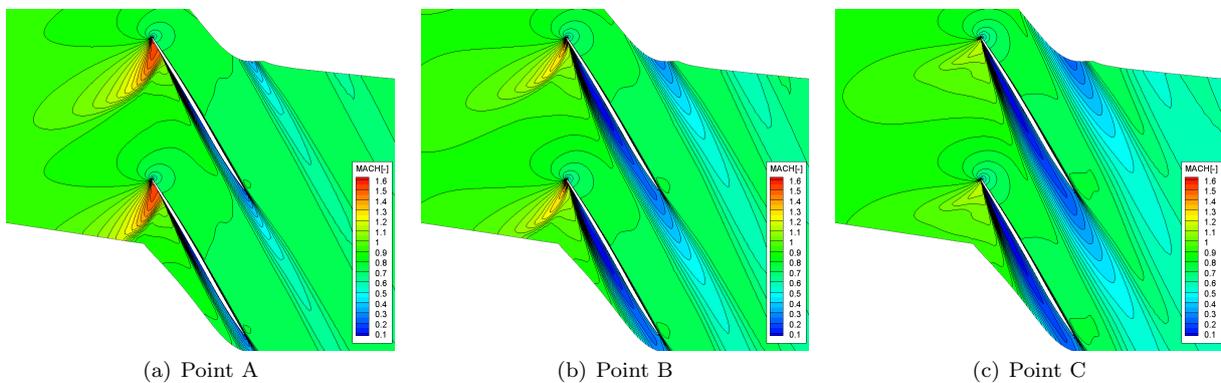


Fig. 7.19: Relative Mach number around the blade at 84% span on 75.0 % speedline

低流量側に向かうにつれて逆流領域が翼端側に大きく広がった 72.5 % , 75.0 % では , Fig. 7.15 , Fig. 7.18 を見ると , 作動点 A の段階から 62 % Span 断面には衝撃波のような急激なマッハ数変化は前縁付近に確認できず , 前縁から翼厚さ程度の薄い剥離が生じている . この 62 % Span 断面の流れ場は流量を絞り作動点 B,C に移っても急激に肥大することはなく , 翼面上の流れ場で示した逆流領域は確かに大きくなっているように見えるが , 翼間の流れ場には大きな差は見られない .

一方 84 % Span 断面の Fig. 7.16 , Fig. 7.16 では , 作動点 A で前縁から約 10 % chord 長さ程度の領域に離脱衝撃波が見られ , その足元で翼厚さ程度の薄い剥離が生じている . この断面では流量に対する感度が大きく , 流量をを B,C と絞るに連れて 72.5 % , 75.0 % 回転数とともに前縁部分で大きく剥離するようになる . ただ , 75.0 % 回転数ではまだ衝撃波の足が負圧面前縁に入射している . ここで見られている , 翼弦方向に広がる大きな剥離領域が翼面上の逆流領域と対応している .

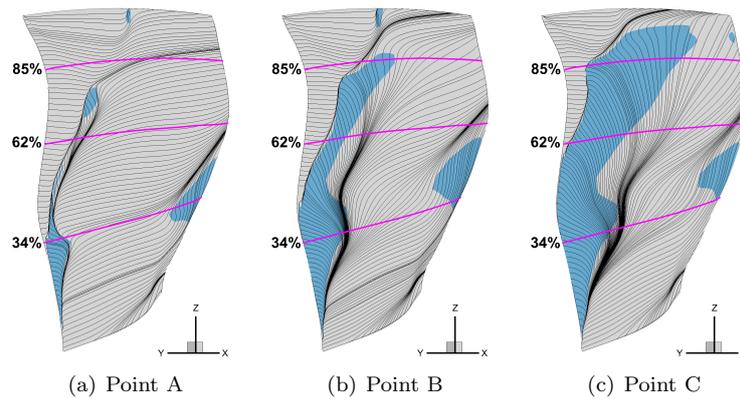


Fig. 7.20: Limiting streamline on the blade surface on 80.0 % speedline

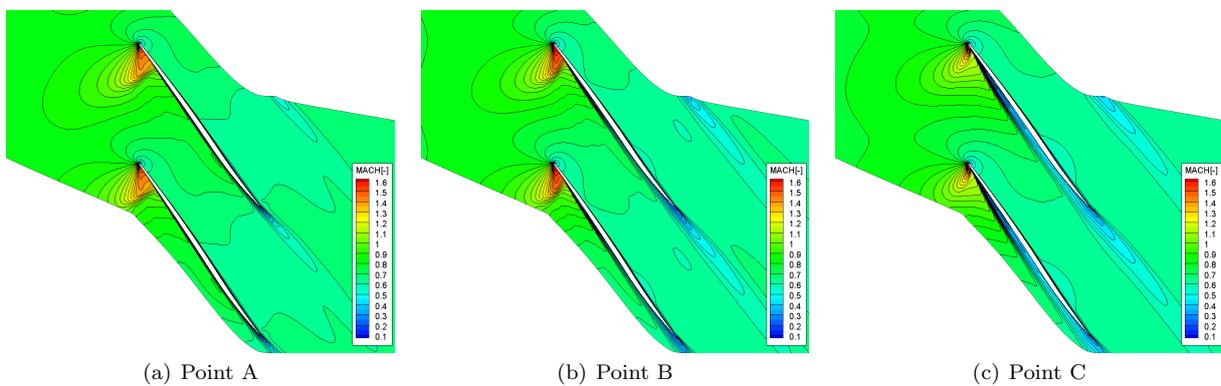


Fig. 7.21: Relative Mach number around the blade at 62% span on 80.0 % speedline

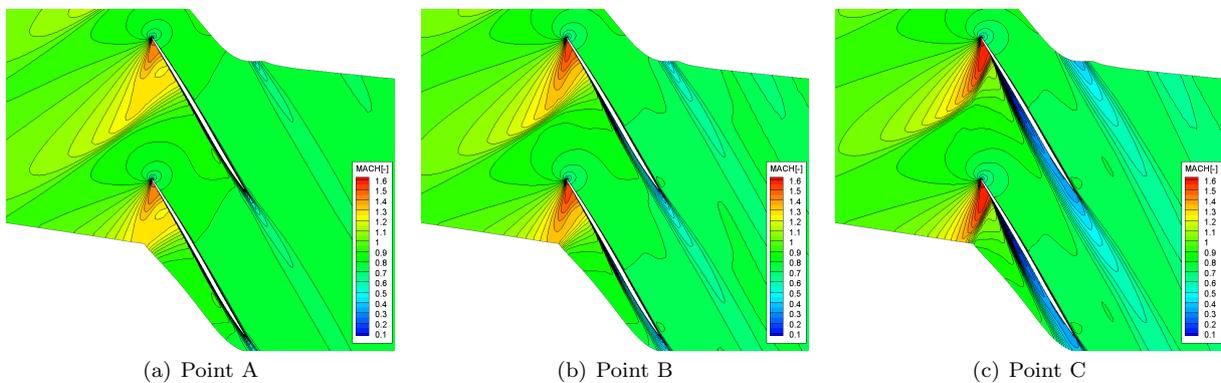


Fig. 7.22: Relative Mach number around the blade at 84% span on 80.0 % speedline

以上に見てきたような、大部分の Span 領域で前縁剥離が生じており、絞り側の作動点に向かうにつれて翼間衝撃波が消失し、それとともに急激に高 Span 位置における低速領域が肥大化するという現象が低回転数側における翼面付近流れ場の特徴であるといえる。

80.0 %回転数 (中回転数側の作動点)

次に、試験におけるフラッター境界を含む高回転数側の作動点を代表し、設計点回転数比 80.0 %の流れ場について見ていく。翼面上流線および 62 % , 84 %翼高さ断面における翼間流れ場の様子をそれぞれ Fig. 7.20 , Fig. 7.21 , Fig. 7.22 に示す。

Fig. 7.20 に示す翼面上流線では、A 点から B 点にかけては前縁剥離は midspan より翼根側にとどまっているが、試験におけるフラッター境界をまたぐ B 点から C 点の間で急激に前縁剥離の位置が Tip 側に移動し、72.5 % , 75.0 %の A 点と同様約 60 %翼高さまで広がる。また、前縁剥離の拡大に伴い前縁剥離の起こっていない高 Span

位置の衝撃波足元における剥離領域も拡大している。しかし、低回転数側の作動点 C で見られたように、剥離領域が前縁まで到達するという事はない。

翼間流れであるが、これまで見てきた低回転数側の作動点とは異なり、Fig. 7.21 に示すように 62 % Span 断面でも衝撃波が生じるようになる。そして衝撃波は B 点、C 点と流量を絞るに連れて前進し、その足元の剥離領域も大きくなる。84 % Span 断面の Fig. 7.22 では、流量を絞るにつれて衝撃波上流における超音速領域のマッハ数が大きくなり、衝撃波が強くなるとともに、作動点 B から C の間で足元の剥離領域が急激に大きくなる。特に試験でフラッターが発生した点より失速側の作動点 C では剥離領域が衝撃波の足元を前縁側に押しやっているように見える。このように 85 % 翼高さで剥離領域が肥大化する原因として、衝撃波が強くなり、衝撃波-境界層干渉が激しくなることと、翼間側の前縁剥離が大きくなり、翼面上を伝って輸送される低速の流体の量が大きくなることの 2 つが考えられる。

#### 85.0 % 回転数（高回転数側の作動点）

さらに回転数を上昇させた、試験においてフラッターが発生しない 85 % 回転数の翼面上流線および 62 %、84 % 翼高さ断面における翼間流れ場の様子をそれぞれ Fig. 7.23, Fig. 7.24, Fig. 7.25 に示す。

Fig. 7.23 に示す翼面上流線からは、作動点 A, B, C と流量を絞るに連れて 30 % Span 位置付近の前縁剥離が大きくなる様子が観察できる。しかし、前縁剥離の終わる Span 高さは他の回転数よりも小さく、低流量側の C 点にいたっても前縁剥離位置は 35 % Span 程度にとどまっている。また、前縁剥離の広がっている方向に関しても低回転数側の作動点とは違いが見られ、72.5 %、75.0 %、80.0 % 回転数では半径方向に広がり、Tip 側に低速の逆流領域が溜まる傾向にあるのに対して、85 % 回転数では半径方向ではなくむしろ翼弦方向に流されているように見受けられる。

さらに回転数を上げ 85 % になると、Fig. 7.24 における 62 % Span 断面で衝撃波足元の剥離領域が 80 % 回転数と比べて薄くなるとともに、それより翼端側の 84 % Span 断面でも衝撃波は翼間側に近づき始動状態の流れ場に近づくと共に、大きな剥離は見られなくなる。

#### 各回転数の流れ場のまとめ

以上見てきたように、本解析結果からは、フラッター境界前後の流れ場は回転数と流量に応じて翼前縁部分において剥離/付着流が切り替わったり、衝撃波が翼面上を大きく移動するような、作動条件に対して極めて敏感に変化する状態にあることがわかる。

しかし、ここまで見てきた流れ場は非常にモデル依存性の大きいものであることを意識する必要があると思われる。例えば、乱流モデルを変えたり、乱流モデルのある項の評価（例えば SA モデルにおける  $f_{t2}$  項の有無）や、非定常計算を行ったりすると、Span 方向の前縁剥離位置が変化したり、Fig. 7.20 の C 点に見られるような、Hub 付近で発生した剥離領域が翼面を伝って Tip 方向に貫入する様子が大きく異なったりしてしまう。

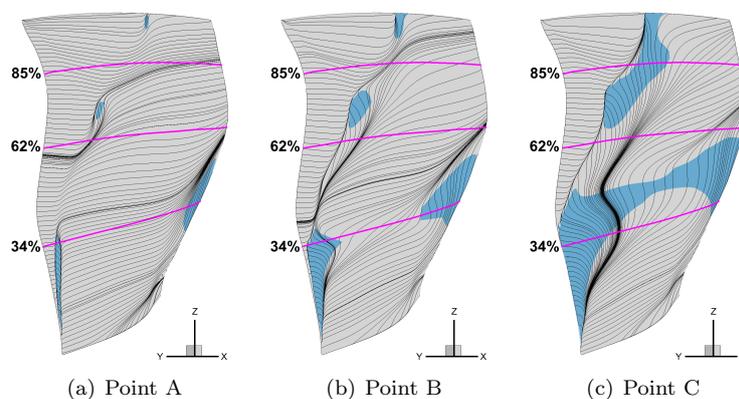


Fig. 7.23: Limiting streamline on the blade surface on 85.0 % speedline

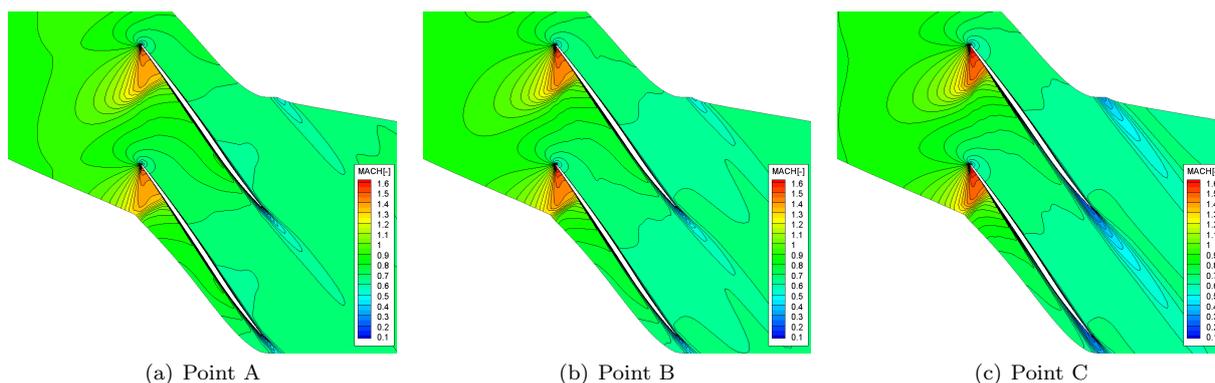


Fig. 7.24: Relative Mach number around the blade at 62% span on 85.0 % speedline

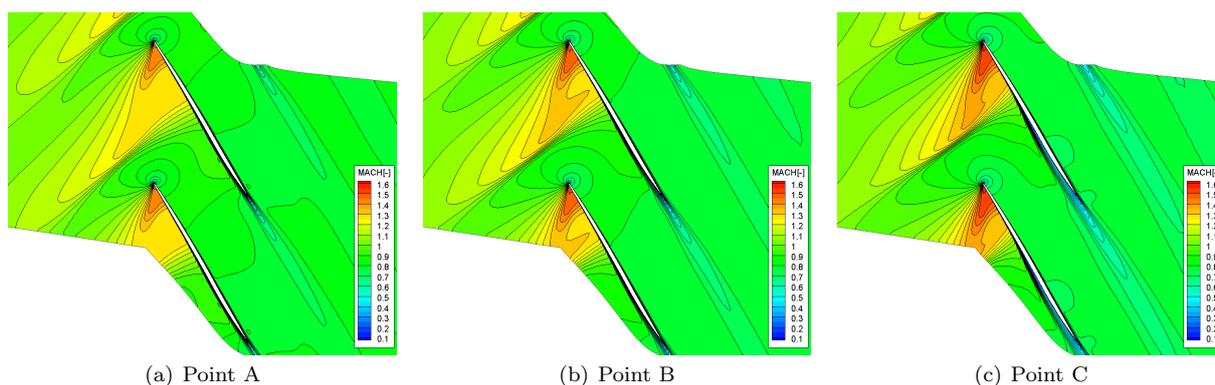


Fig. 7.25: Relative Mach number around the blade at 84% span on 85.0 % speedline

### 7.4 翼列フラッター解析とフラッター境界

ここまでの解析により、フラッター境界付近の回転数領域においてどのような流れ場の変化があるかを把握することができた。ここからは、フラッター境界を求めるべく翼振動の解析に移行する。本節では、自由振動応答に基づくフラッター解析における誤差評価ののちに計算結果としてのフラッター境界を求めていく。

#### 7.4.1 解析条件

フラッター解析は、Fig. 7.13 に示すように、各回転数における作動点 A' から C にかけて合計 22 点について行い、マップ上を網羅的に解析することでフラッター境界を算出する。翼に与える初期擾乱は、NASA Rotor 67 のにおけるフラッター解析と同様のパターンで Fig. 7.8 のように与える。時間刻みは 1F モードの真空中周期を 5000 等分するよう定め、CFD において 3 回の内部反復をかける。そして 50Timestep おきにモーダル変位、速度、加速度のサンプリングを行う。このとき、1F モードに対しては 1 周期あたりおよそ 100 サンプルがなされる。また翼振動解析は予め行った予備的な解析に基き 1F モード 8 周期の 40000Step を基準に行い、モード同定は最初の 1 周期の情報を捨てた 5000Step 目から 40000Step までの 700 サンプルから行う。このときの同定誤差の評価については後に述べる。

#### 7.4.2 空力弾性モードの固有値分布

連成解析によって得られる空力弾性モードの固有値分布は、NASA Rotor 67 の解析によって得られたものと定性的には同様であり、Fig. 7.26 のように計算で取り込んだ構造振動モードに対応するモード群が生じる。空力弾

Table. 7.8: Initial condition of the flutter analysis by FSI

Mode/Blade	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1F	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2F	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1T	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3F	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1E	-	-	-	-	-	-	-	-	-

: Given, modal velocity corresponding to maximum blade amplitude of 0.005c, -: Not given

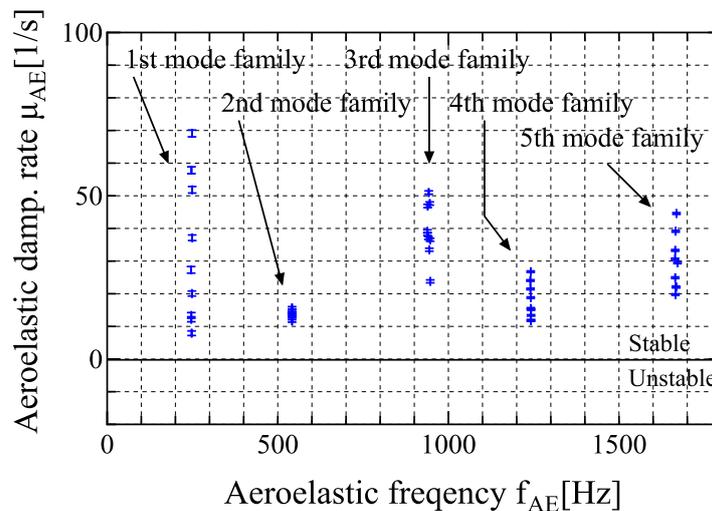


Fig. 7.26: An example of all aeroelastic eigenvalues (at 80% speedline, point A)

性モード減衰率の最低値が負になる場合にフラッターが発生するといえ、この評価により正しくフラッター境界が捉えられことは、第 5 章の平板翼および翼列を題材とした検証問題から確認されている。

### 7.4.3 同定誤差の評価

#### 決定係数 $R^2$ 値

フラッター解析を行った結果の、各作動点における同定結果の不確かさについて考える。Table. 7.9 に、モード同定時の最小二乗推定における決定係数  $R^2$  を示す。表中の (F) は各回転数で流量を絞っていった際に最初に 1F モード群の減衰率が正から負に転じる点であり、(F) 点とそれより高流量側の作動点の間でフラッターが発生していることを示している。まず表からわかることは、75.0 % 回転数以上のフラッターが生じる点より高流量側の作動点では、 $R^2$  は 0.99 以上の非常に高い値を示しており、モード同定の精度を落とすような事象は生じていないことがわかる。

次いで高い  $R^2$  の値を示しているのは、70.0 % 回転数 B 点、72.5 % 回転数 B 点、75.0 % 回転数 B 点、77.5 % 回転数 C 点であり、おおよそ 0.97 程度となっている。これらの作動点では  $R^2 > 0.99$  を示した作動点ほどではないものの、誤差の小さい同定結果が期待できると予想される。

最後に、以上の作動点に比べて非常に低い  $R^2$  を示したのは、定常流れ場解析において翼端部に大きな前縁剥離が生じていた、低回転数側の 72.5 % 回転数 C 点と 75.0 % 回転数 C 点である。これらの作動点ではモード同定がうまくいっているか否かここから判断するのは難しく、別の指標とともに総合的に評価する必要があると考えられる。

Table. 7.9: Coefficient of determination  $R^2$  at each FSI points

Operating points / Speedline	70.0	72.5	75.0	77.5	80.0	82.5	85.0
A'	0.998	-	0.998	-	-	-	-
A	0.996	0.994	0.993(F)	0.998	0.998	0.998	0.998
B	0.975	0.974	0.973	0.995(F)	0.998	0.998	0.998
C	-	0.869	0.720	0.972	0.996(F)	0.998(F)	0.998

#### サンプル数の同定結果への影響

次に、モード同定に用いたサンプル数が十分であることを確認するために、サンプル数の同定結果への影響を調べる。ここで同定結果を評価する指標として、フラッターの発生に重要となる最小空力減衰の推移および統計的に求めた 99 % 信頼区間の片幅を用いる。

Fig. 7.27 に、同定に用いたサンプル数に対する同定結果の最小空力減衰の変化を、また Fig. 7.28 にその 99 % 信頼区間の片幅を各回転数の結果に分けて示す。Fig. 7.27 において、 $R^2$  が十分高いと判断できる 77.5 % 以上の作動点においては、400 サンプル程度から同定結果はほぼ一定となっており、0 減衰点をまたぐこともない。したがって、これら  $R^2$  が高い作動点では 700 サンプルを用いた結果は、モード同定の面からは十分信頼性の高い結果であるといえる。

次に相対的に低い  $R^2$  を含む 72.5 % 回転数と 75.0 % 回転数においては、特に 75 % 回転数 C 点でサンプル数に対してフラッター境界をまたぐ大きな変動が生じており、誤差棒も他の作動点に比べて非常に大きい。72.5 % 回転数でも誤差棒の大きさは異なるものの、フラッター境界を誤差棒がまたいでおりサンプル数に対して十分同定結果が落ち着いていないが、700 サンプルの結果では安定側に位置している。したがって、これらの作動点で得られた同定結果は参考として考察に用いるものとする。

Fig. 7.28 に示す誤差棒の半幅の推移は、どれもサンプル数に対して  $-1/2$  乗から  $-1$  乗の間の変化をしており、たとえ  $R^2$  値が小さい 75 % 回転数 C 点であっても、サンプル数を増やせば同定結果が落ち着いてゆくことが期待される。しかしながら、例えば 75 % 回転数 C 点で初期の誤差棒の大きさである  $10[1/s]$  から  $1[1/s]$  程度までこ

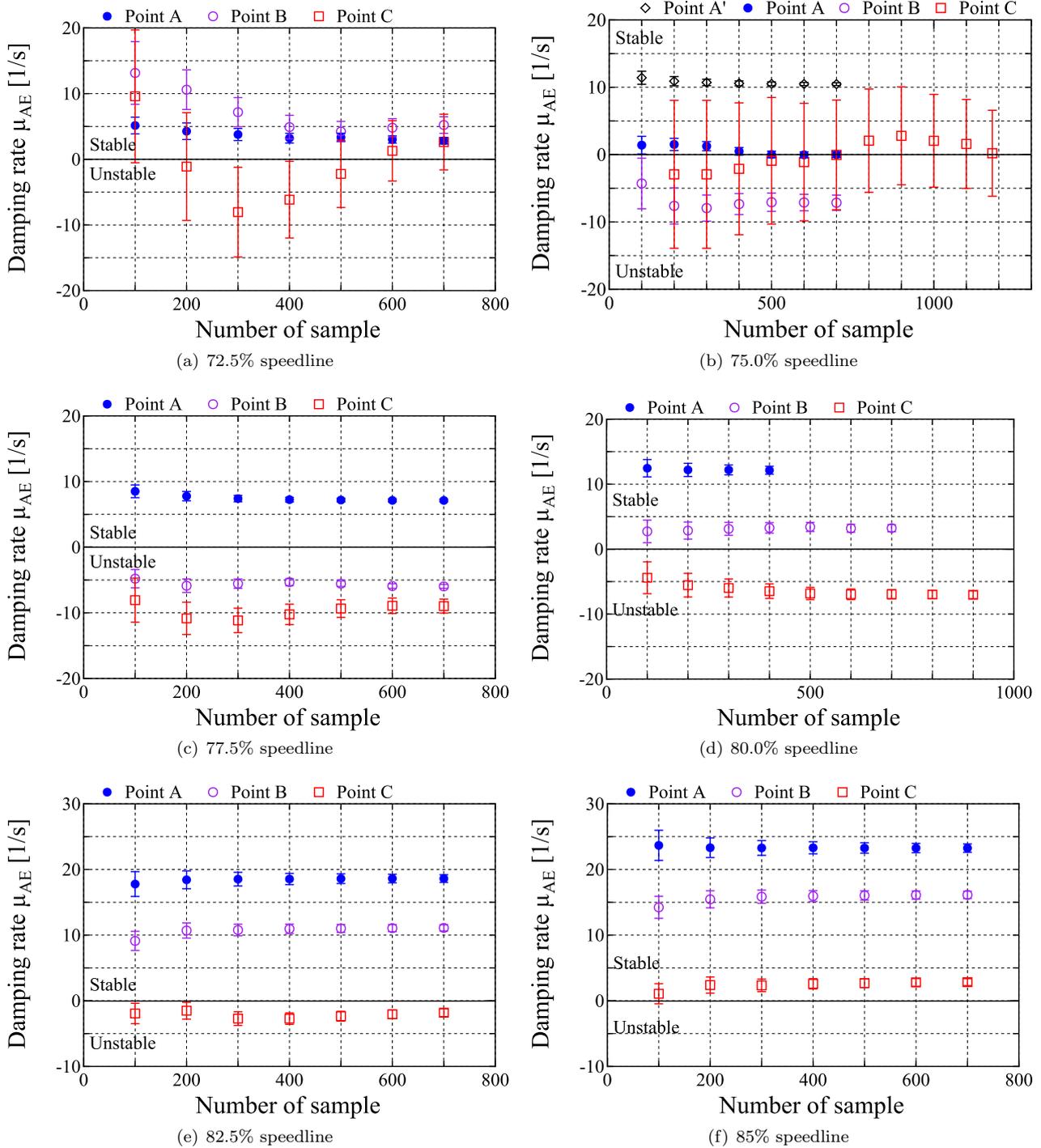
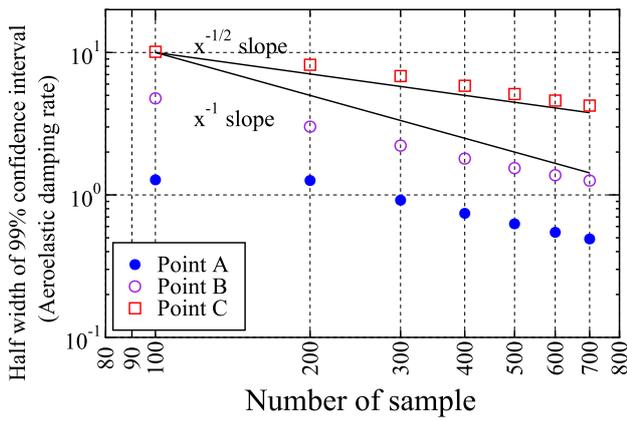


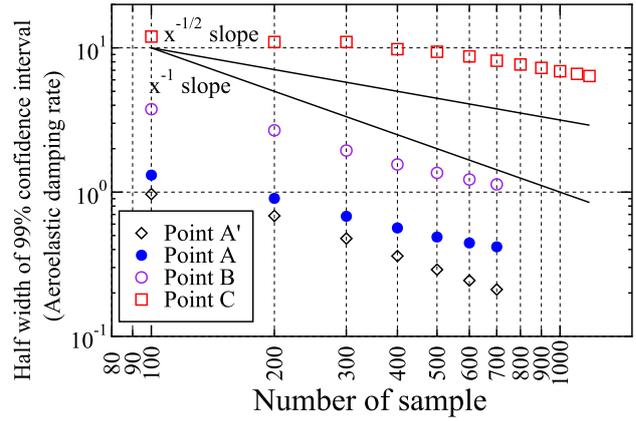
Fig. 7.27: Effect of the number of sampling on identified minimum aeroelastic damping rate in 1F mode family

の誤差棒が小さくなり、正減衰・負減衰のどちら側に固有値が存在するかを示すためには、誤差とサンプル数が  $-1/2$  乗の関係にあるとすると本解析結果の 100 倍のサンプル数が必要であり、1F モードの振動 800 周期、実時間にして約 3.2 秒の解析が必要となってしまふ。CFD でこの時間スケールを扱うことは非常に困難であると考えられ、今回対象とする系では 1 計算パターンに対して高々 8 周期程度しか計算できていないことから、72.5 % 回転数や 75.0 % 回転数のような  $R^2$  の低い点の同定を精度よく行うことは不可能であるといえる。

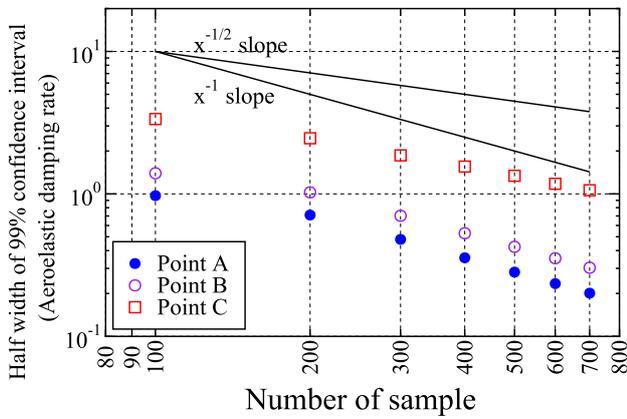
一方、サンプル数やその時間幅を十分長く取れるような実験的手法によれば、このような CFD 手法特有の問題は回避できる可能性がある。例えば、ティップタイミングシステムのような非接触の動翼振動計測手法を用いるこ



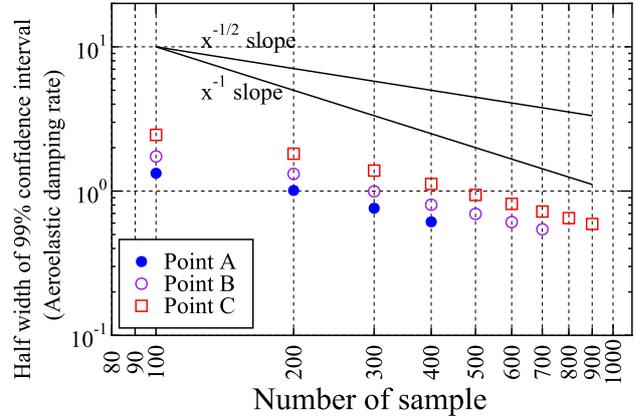
(a) 72.5% speedline



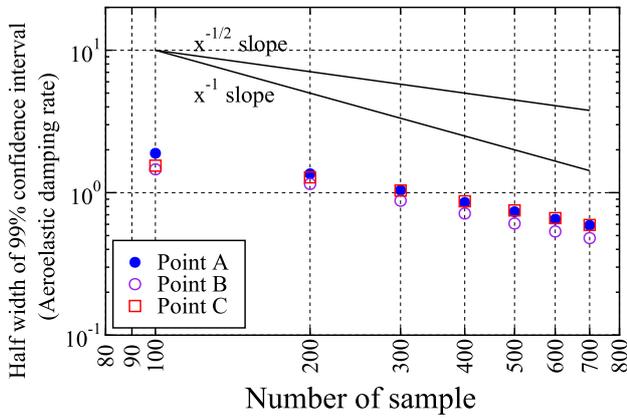
(b) 75.0% speedline



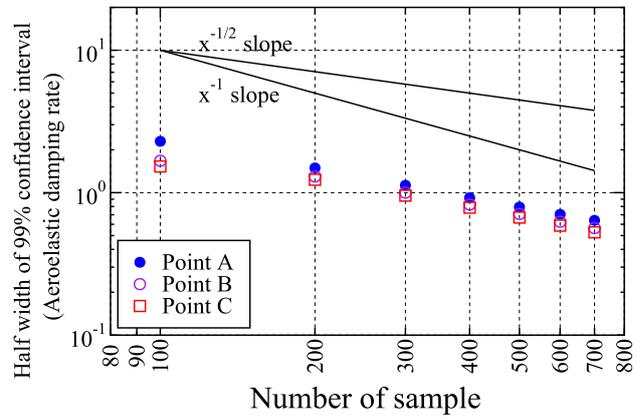
(c) 77.5% speedline



(d) 80.0% speedline



(e) 82.5% speedline



(f) 85% speedline

Fig. 7.28: Effect of the number of sampling on identified minimum aeroelastic damping rate in 1F mode family

とで，回転機械の作動中における空力弾性モードや減衰率を定量的に求めることができるかもしれない。

7.4.4 1F モード群の各作動点における空力弾性モード

フラッター境界の推定法

誤差解析を経て、フラッター解析結果が信頼できるといえる作動範囲が明らかになった。こうしてようやくモード同定結果に基づいたマップ上のフラッター境界について考えることができる。本研究における、マップ上におけるフラッター境界を決定する方式を Fig. 7.29 を用いて説明する。ここにはある作動線上のフラッター解析点 A, B, C があり、モード減衰率  $\mu_{AE}$  が求まっている様子を示している。モード減衰は B 点から C 点で負に転じるとする。そこで、B 点と C 点の間でモード減衰は連続的に変化し、必ず 0 減衰となる作動点があると考え、この 0 減衰になる点の流速および圧力比を  $m_F, \pi_F$  とし、B 点と C 点のモード減衰率と流量、圧力比から線形内挿および外挿より求める。誤差棒の範囲まで考えることもできるが、簡単のために誤差棒は考えないことにした。

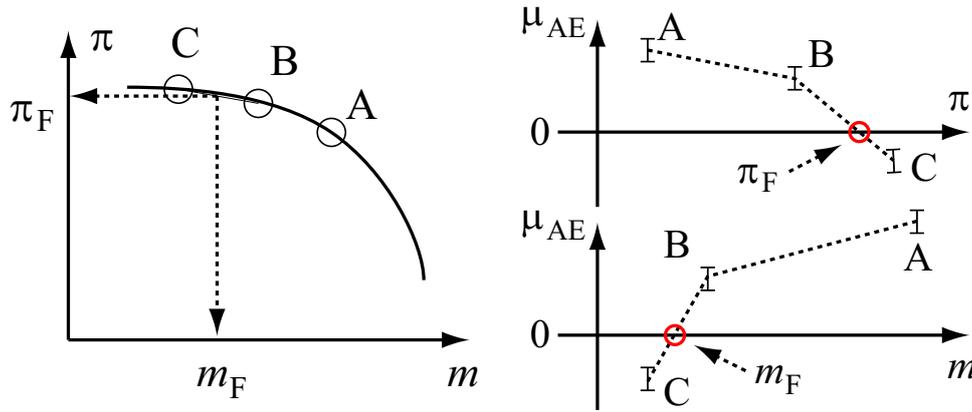


Fig. 7.29: Estimation of flutter boundary from obtained aeroelastic damping rate

空力弾性モードの分布と翼間位相差

同定された 1F モード群の減衰率の推移を各回転数に対して示したものが Fig. 7.30 である。前述のとおり、翼振動 7 周期ぶんの時間履歴から同定された結果を示している。まず、85.0 % 回転数ではフラッターは生じず、全ての計算点で減衰率が正となっている。フラッターは 82.5 % 回転数から 75.0 % 回転数にかけて生じており、フラッター境界の前後では誤差棒がフラッター境界にかぶっていないこと、および Fig. 7.27, Fig. 7.28 において統計誤差がサンプル数に対し単調減少する領域までサンプル数を稼げており、したがって十分なサンプル数を確保出来ていることから、流れを絞っていった場合のフラッター境界を定めることができる。フラッターは 82.5 % 回転数では翼間位相差 80deg で生じ、80.0 % 回転数から 75 % 回転数にかけては 40deg で生じている。

フラッターが生じているかどうか判別できないのが Fig. 7.30(a) に示す 72.5 % 回転数の B 点から C 点の間であり、この領域ではモード同定結果がサンプル数を重ねていくと変化しうると考えられる。ただ、かなり楽観的な見方をすれば C 点の空力減衰の推定値が正になっているので 72.5 % 回転数では作動線全域でフラッターは生じないと考えることもできるが、やはりそう判断することには違和感がある。したがって 72.5 % 回転数では B 点までのフラッター境界は定めることができるが、C 点では定めることができないと結論付ける。

流量に対する減衰率の感度

Fig. 7.30 に示した、各回転数における 1F モード群の最小減衰率をファン流量に対してまとめ、それらの 99 % 信頼区間と共に Fig. 7.31 に示す。どの回転数においても流量を減少させると減衰率は 0 に近づき、フラッターの発生に近づいていることがわかる。また、どの程度「急に」フラッターが発生するかという観点から減衰率の流量に対する勾配を見ると、フラッターが発生していない 70.0 % 回転数、72.5 % 回転数では流量の減少に対して空力減衰の減少が鈍化しており、下に凸のような格好になっている。一方、負減衰の作動点を含みフラッターが発生する 75.0 % 回転数から 85.0 % では、フラッター境界前後の作動点で減衰率が最も急勾配になっていることがわ

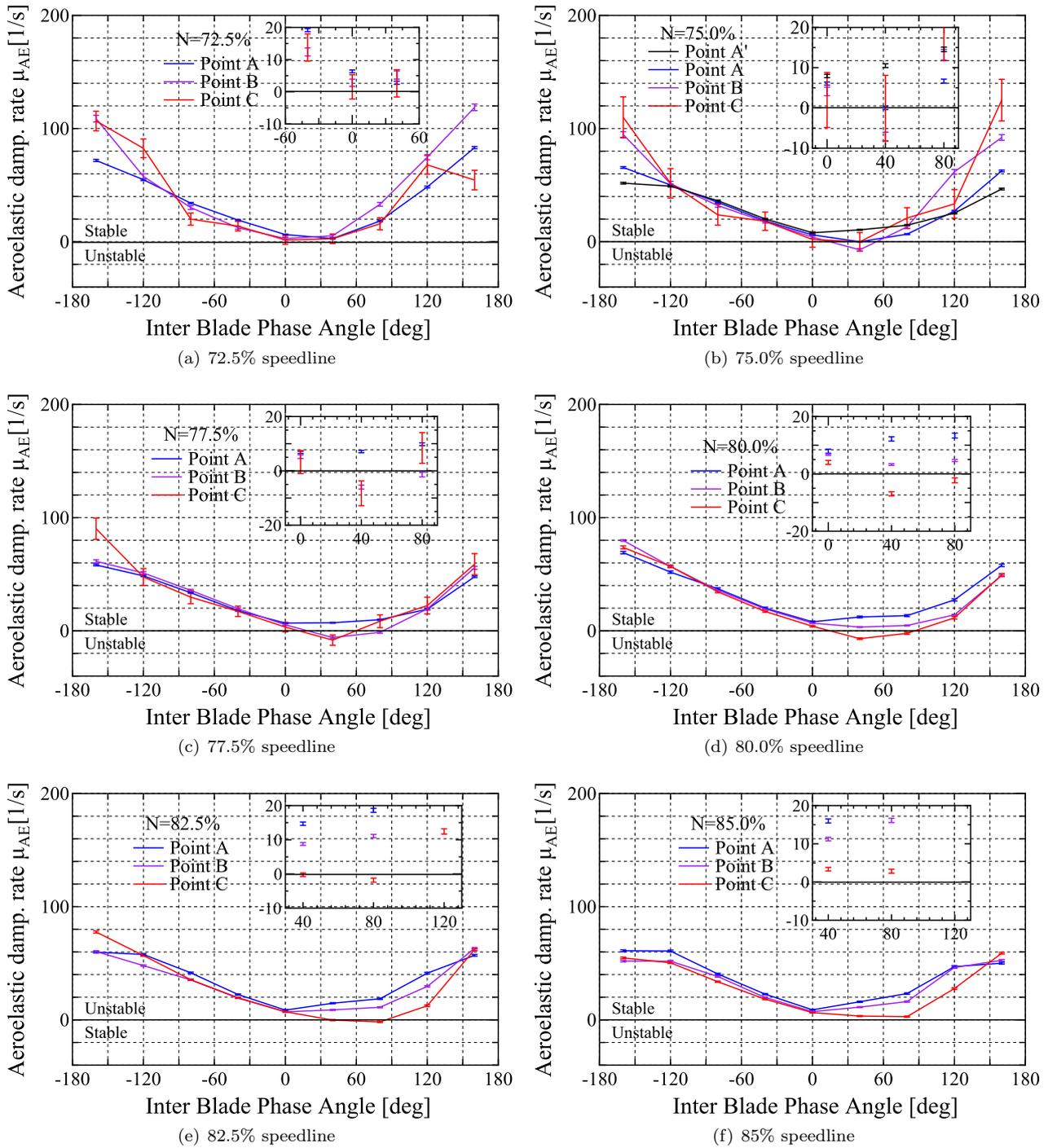


Fig. 7.30: Aeroelastic damping rate of 1F mode family on each speedline

かる．また，72.5%回転数の最も低流量側にある作動点以外では，フラッター境界付近では信頼区間幅も十分小さく，ほぼ一本の線としてとしてフラッター境界を考えてもよいと思われる．

構造特性のフラッター境界への感度

ここで，連成解析では考慮していなかった「構造減衰」がフラッター発生源にどの程度の影響を及ぼすかを考えるために，空力減衰の大きさと比較することで構造減衰の感度を考えておく．Fig. 7.31には，3種の構造減衰  $\zeta$  の大きさ ( $\zeta = 0, 0.1, 0.05\%$ ) も示している．ここで，構造減衰  $\zeta$  に対する減衰率  $\mu$  は

$$\mu = \zeta \omega \tag{7.1}$$

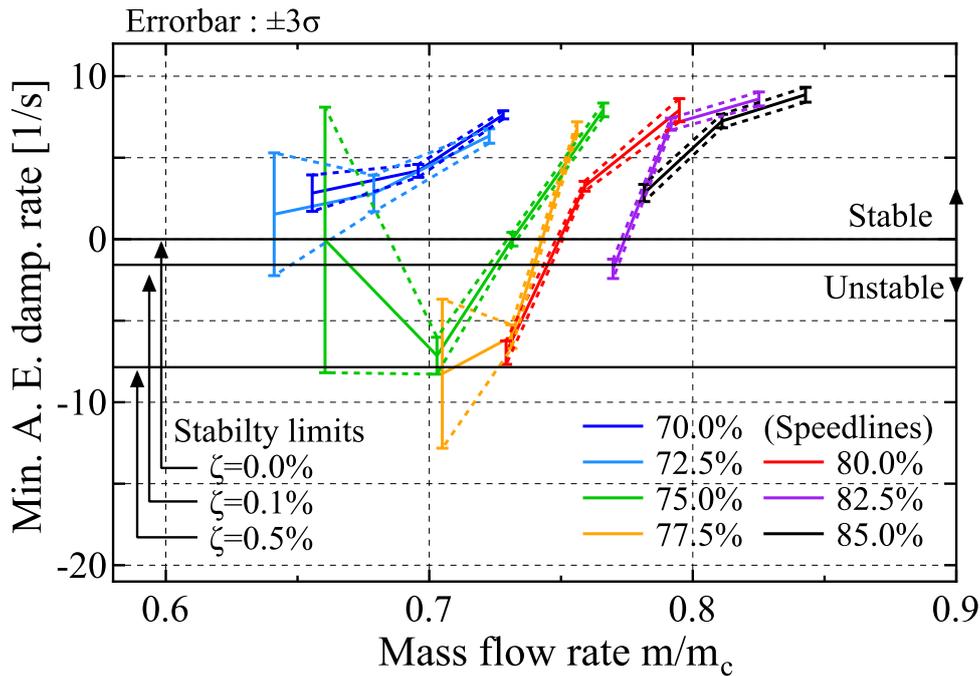


Fig. 7.31: Relationships between mass flow rate and least stable damping rate

と、固有角振動数を乗じた形で表わされる．ここでは、固有角振動数は 80 % 回転数の固有振動数を基準とし、1565[rad/s] と与えている．プリスクに対する典型的な構造減衰の値は第 2 章の Fig. 2.4(b) に示したハンマリング試験による May らの計測結果 [56] を参照すると、ほとんどの翼で 0.05 % 以下となっている．この計測結果より、構造減衰は大きく見積もっても 0.1 % 以下が推定値として妥当な値だと考えられる．Fig. 7.31 の各構造減衰値と最小減衰モードの減衰率の位置関係を見るに、フラッター境界前後の作動点で空力減衰は非常に急激に負減衰に転じるので、0.1 % 程度の構造減衰ではほとんどフラッター境界は変化しない．また、その 5 倍の値である 0.5 % 程度をもって、ようやくフラッターが回避される．したがって、本対象で生じるフラッターのフラッター境界はおおよそ空力減衰の正負で判断してもよいと考えられる．

構造特性として構造減衰以外に考えなくてはならないのは「ミスチューニング」である．本研究では、ミスチューニングがどれほど空力弾性モードに影響を与えるかを、付録 E において調査した．その結果、製造公差によって生じる程度のミスチューニングでは、フラッターに寄与する最小空力弾性モード減衰率はチューン系のものほとんど変化しないことが確認されている．

特性マップ上のフラッター境界

Fig. 7.30, Fig. 7.31 を元に、得られた減衰率と作動点の位置より、Fig. 7.29 で示したような減衰率に関する線形内挿で求められた作動点からフラッター境界を算出して Fig. 7.32 に示す．ここで、85 % 回転数についてはフラッターが発生しなかったためフラッター境界の終端点を空力減衰値を用いた外挿により求めている．この図より、80 %、82.5 %、85 % の高回転数側の作動点では、フラッター発生の有無や試験結果におけるフラッター境界が定性的に再現されているといえる．しかし一方で、低回転数側の 77.5 %、75 % においてもフラッターが生じており、試験結果が部分的に再現されない結果となった．

以上をまとめると、モード同定手法によって求めたフラッター境界は部分的に試験結果と相容れるが相容れない箇所もある．しかしそのようなフラッター境界前後でも、「モード同定自体はフラッター境界を定める上で十分な精度で行われている」「本対象はプリスク構造で、構造減衰や製造公差程度のミスチューニングがフラッター境界に与える影響はほとんどない」ことがいえる．

したがって、試験結果との不一致は試験環境と数値解析に何らかの差があるはずだと考えられる．そして、その差が生じている原因としては、

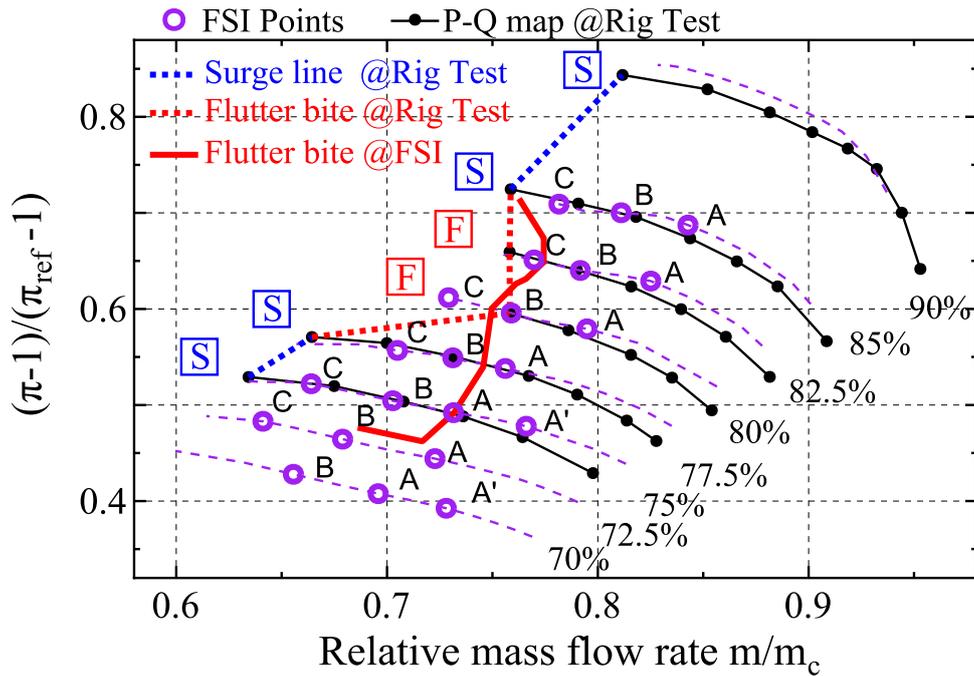


Fig. 7.32: Flutter boundary of 1F mode family calculated by FSI simulations

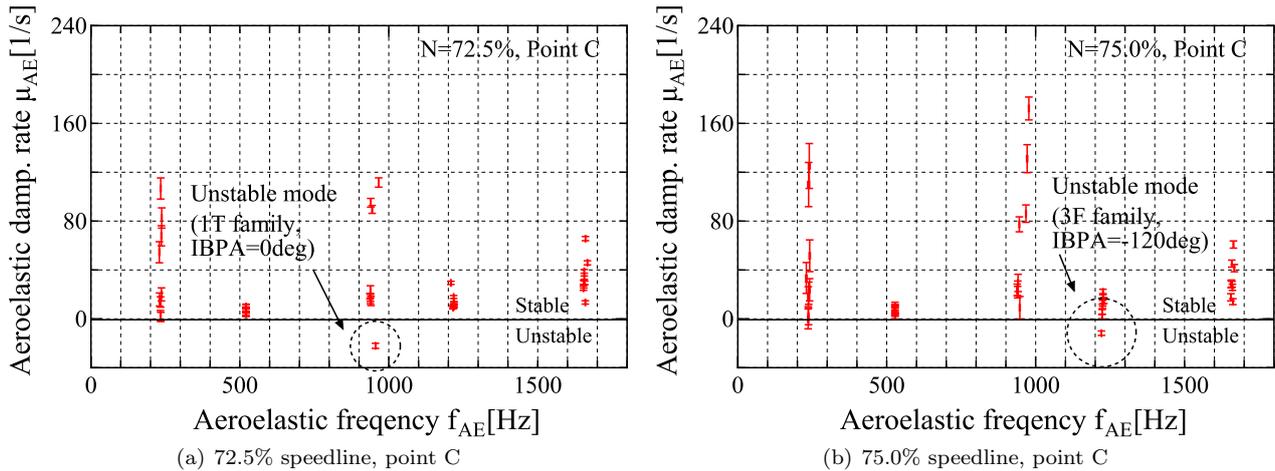


Fig. 7.33: Unstable aeroelastic mode except 1F family detected by modal identification

- 「フラッター境界の不一致」は、構造モデル由来、フラッター解析手法由来である可能性は小さく、CFDで扱っている流れ場に起因している可能性が高い。
- フラッター境界より低回転数の「失速点に近い作動点」では、CFDと実際の流れ環境のずれがある。

といった理由によって生じていると考えられる。

### 7.4.5 1Fモード以外の不安定モード

ところで、72.5%、75%回転数では共にC点付近でフラッター境界がモード同定結果から決定できないと述べたが、このとき同定された全空力弾性モードの減衰率、振動数を Fig. 7.33 に示す。これらの作動点では、解析を行う前は1F以外の高次モードは安定であると予想していたが、それに反して72.5%で1Tが、75%回転数で3Fモードが不安定であると評価されている。この原因としてまだ固有値が十分収束していないか、計算中で発現している流れ場に原因があるものと予想される。計算で発現している流れ場については後に述べる。

7.4.6 翼負荷パラメータ，無次元振動数，マッハ数で整理した 1F モードフラッター境界

翼列におけるフラッター境界は，特性曲線上の位置のほかに翼負荷パラメータ，無次元流速，翼相対マッハ数といった様々なパラメータを用いて「経験的に」整理されてきた [114]．ここで無次元流速は半翼弦長さ  $b$ ，翼振動の角振動数  $\omega$ ，翼相対流速  $V$  を用いて

$$\frac{V}{b\omega} \tag{7.2}$$

と表わされる．無次元流速は翼振動周期に対する相対的な流速の大きさを表すものであって，通常古典的な非失速フラッターであれば流速が大きいほど，即ち  $V/b\omega$  が大きいほどフラッターが発生しやすい傾向がある．また，この逆数  $b\omega/V$  は無次元振動数と呼ばれる．Fig. 7.34 に典型的なフラッター境界の位置を示す．例えば失速フラッターを扱った文献 [19] [24] では，特定の代表 Span 断面におけるインシデンスと無次元振動数を用いた整理がされている．マップ上およびインシデンスと無次元流速を用いてフラッター境界を表すと Fig. 7.34(a) によりなり，無次元流速が大きくなると高インシデンス領域でフラッターが発生する．また，文献 [25] で述べられているような過回転側作動点で生じるような超音速非失速フラッターは，フラッター境界は経験的に Fig. 7.34(b) のように無次元流速とマッハ数で整理されることがある．

ここでは，これまで用いられてきた経験的な整理という観点から CEFS1 のフラッター発生領域の特徴を調べ，フラッター境界付近の流れ領域や無次元パラメータについて述べる．

Fig. 7.35 に，80 % Span 断面を基準翼高さ，流れ状態のリファレンス位置を翼前縁より 40 % 軸 chord 長だけ上流として相対流速，相対マッハ数，インシデンスを取り，計算結果のフラッター境界を各パラメータで表示する．まず，Fig. 7.35(a) にインシデンスと無次元振動数で整理したフラッター境界を示す．点線は回転数一定の特性曲線を示し，各回転数では翼振動数は一定である．しかし周速一定のもとで軸流速度が変化するために低流量側の作動点ほど高インシデンスとなり，無次元流速はインシデンスに対して右下がりの関係となる．フラッター境界はインシデンス 8deg ~ 9deg といった高負荷状態に，また無次元流速 3.2 ~ 3.4 の，幅にして 10 % 未満の非常に狭い帯域に位置している．無次元振動数の上限は 82.5 % 回転数と 85 % 回転数の間のフラッター境界，下限は 72.5 % 回転数と 75 % 回転数の間のフラッター境界である．

翼上流の状態とフラッター境界との関連をより理解しやすいように，Fig. 7.35(b) に，80 % 翼高さにおける上流相対マッハ数とインシデンスをパラメータとしてフラッター境界の位置を示す．これを見ると，相対マッハ数 0.9 から 1 にかけて「上流マッハ数が音速に近づき，かつ高インシデンスの状態」にフラッター境界が位置していることがわかる．

インシデンスと無次元振動数で表したフラッター境界の位置に関しては，過去に観察されている失速フラッターとの類似性が見て取れる．Stargardt らによる高アスペクト比 ( $AR = 3.6$ ) のパートスパンシュラウド付きファンリグである TS22 による試験 [24] で観察されたフラッター境界を Fig. 7.36 に示す．高インシデンスかつ狭い無次元流速の幅でフラッターが生じている様子は，本研究の解析結果 Fig. 7.35(a) と非常によく一致している．

以上より，CEFS1 で生じるフラッターは，Fig. 7.32 に示したように特性マップ上では部分回転数低流量側の作動点で生じる遷音速失速フラッターであるといえる．また，フラッターが生じる際の流れ場は，高 Span 位置で翼前縁付近に超音速流れ領域と離脱衝撃波を有する遷音速流れと Midspan から Hub 付近で生じる前縁剥離によって特徴付けられており，Tip 付近の翼相対マッハ数が 1 に近い作動状態で発生している．

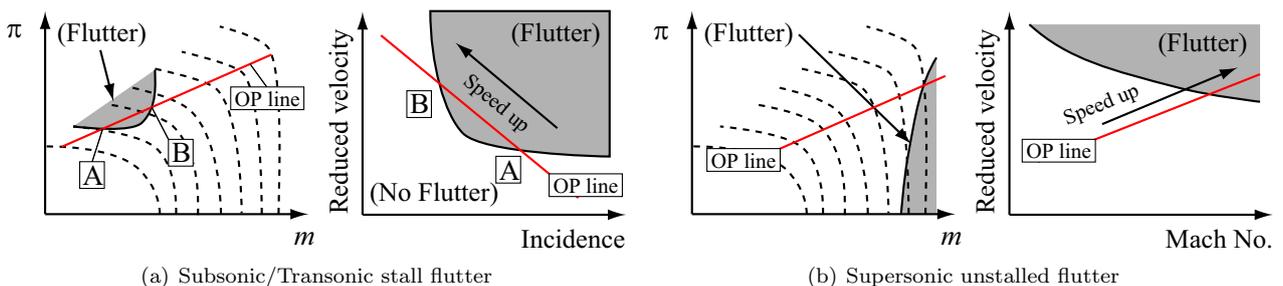
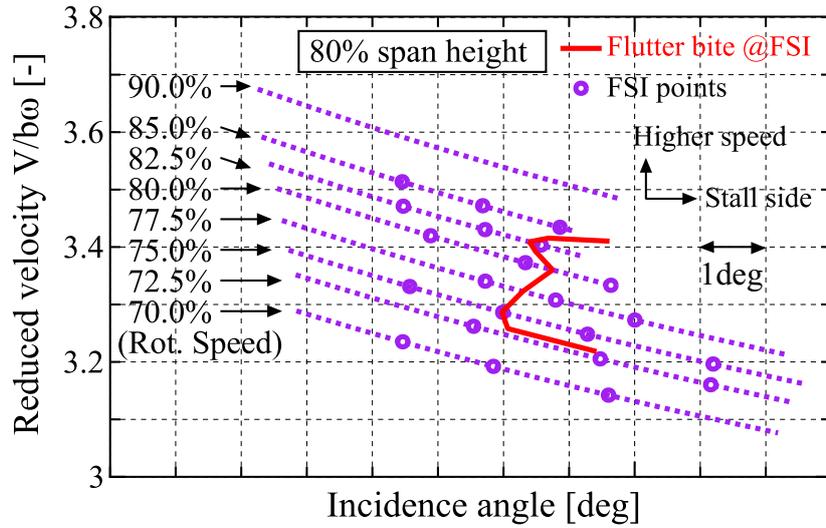
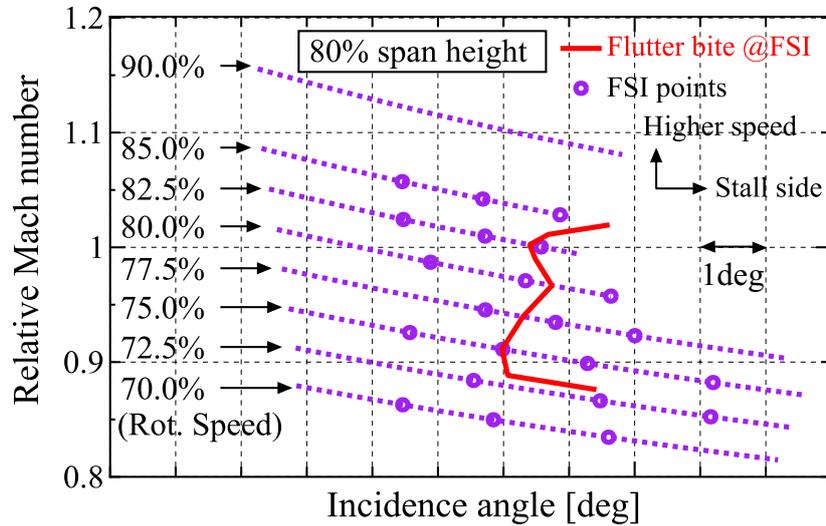


Fig. 7.34: Typical positions of flutter boundaries shown in a fan map and by empirical parameters [114]

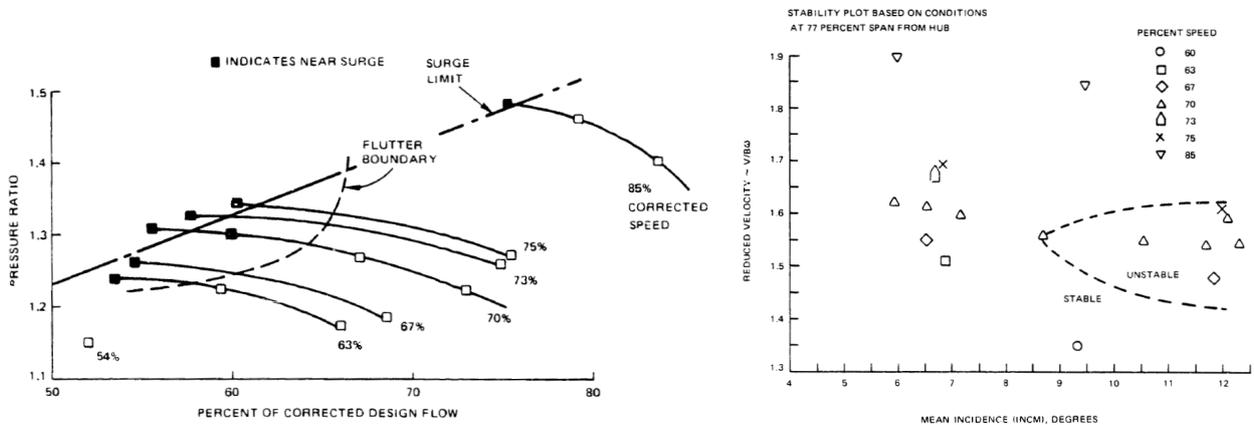


(a) Incidence angle and reduced velocity



(b) Incidence angle and relative Mach number

Fig. 7.35: Positions of flutter bite of the CEFS1 fan indicated by different flow and aeroelastic parameters



(a) Fan map

(b) Incidence angle and reduced velocity

Fig. 7.36: Positions of flutter bite of TS22 fan rig [24]

### 7.5 フラッター境界近傍の非定常空気力特性

計算されたフラッター境界は試験を部分的に再現するが、低回転数側で特にフラッター発生の有無という点で試験との乖離が起きている．そこで、フラッター発生に寄与している流れ構造を定性的に調べるために、翼面上の局所的な自励空気力を調べ、流れ場の特徴がフラッターの発生にどう関与するかを考える．

#### 7.5.1 局所的な自励空気力分布の概観と衝撃波の役割

本解析対象における流れ場の大きな特徴は、衝撃波の位置や剥離の形態が、回転数や流量によってかなり敏感に変化することである．したがって、フラッターの発生に関してはこのような条件に敏感な流れ場が影響していると考えるのが自然であると思われる．このことを示すために、翼面上の変動圧力について、各回転数においてフラッターを起こす空力弾性モードの自励空気力成分を 6.5.4 に示した方法で可視化し、さらに各 Span 断面での寄与をまとめたものを Fig. 7.37 から Fig. 7.48 に示す．

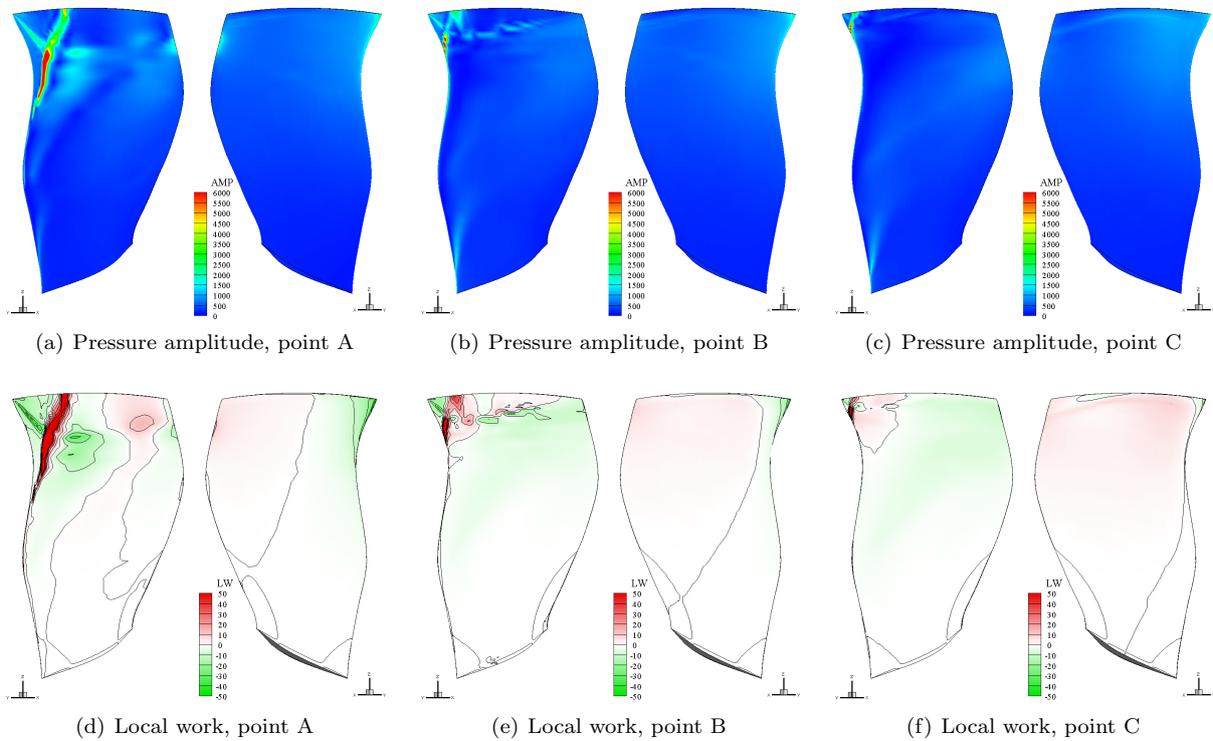


Fig. 7.37: Unsteady aerodynamic force acting on the blade surface on 72.5% speedline (1F mode family, IBPA=40deg), points A, B, C: out of flutter

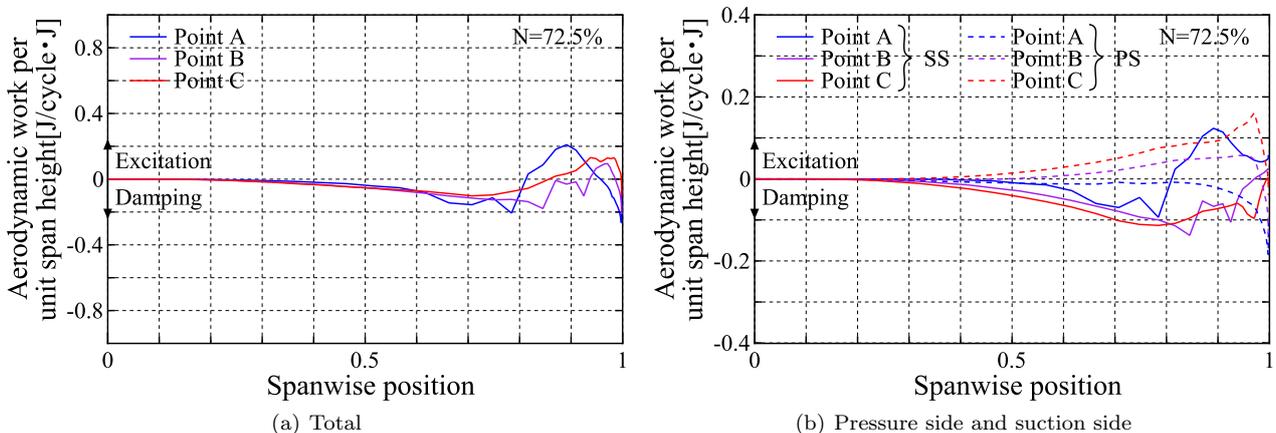


Fig. 7.38: Spanwise distributions of aerodynamic work on 72.5% speedline

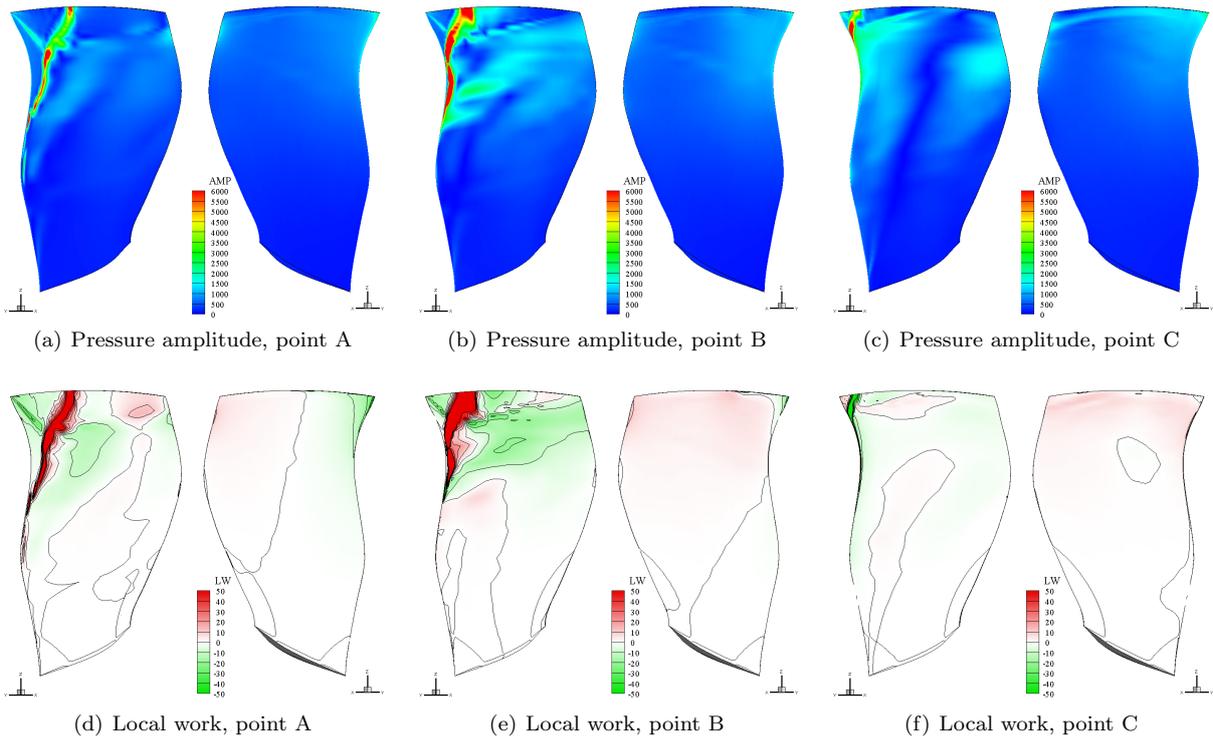


Fig. 7.39: Unsteady aerodynamic force acting on the blade surface on 75.0% speedline (1F mode family, IBPA=40deg), point A': out of flutter, points A, B, C: in flutter

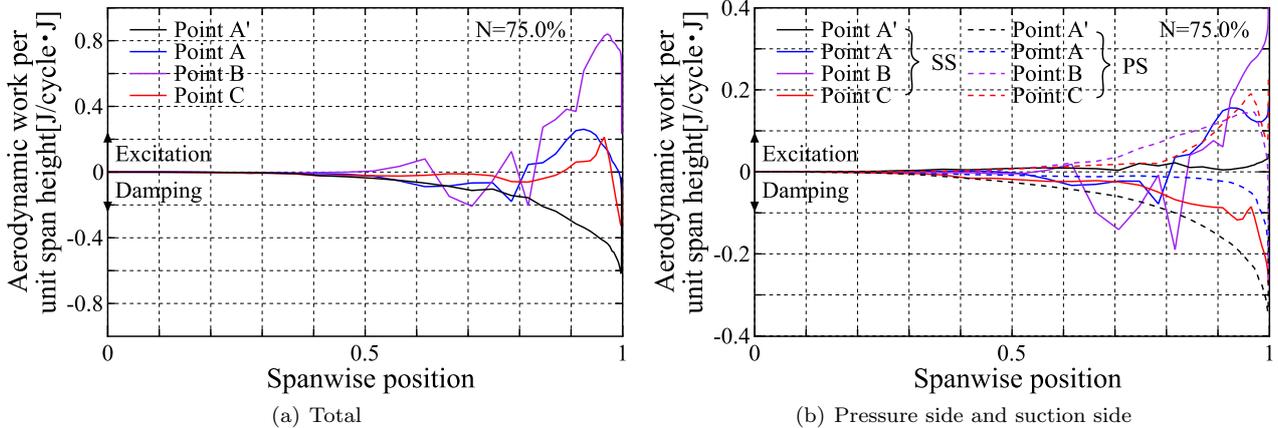


Fig. 7.40: Spanwise distributions of aerodynamic work on 75.0% speedline

72.5 % , 75 %回転数 (低回転数側のフラッター境界)

まずフラッターが起らない 72.5 %回転数の圧力振幅と局所空力仕事分布を Fig. 7.37 に示す . A 点においては , 翼負圧面上に入射している離脱衝撃波の部分で圧力振幅が大きくなっている . B 点 , C 点では A 点に比べて衝撃波の足元は前縁方向に移動し , Tip 側前縁の軸方向前方に張り出した「フォワード・スウェプト」な部分にわずかに残っているものの , ほぼ翼面上から消失しているといえる . Fig. 7.37 の空力仕事分布では , A 点で負圧面上の衝撃波部分で空力仕事が大きくなっている . しかし , B 点まで流れが絞られると負圧面上の離脱衝撃波がさらに前縁側に移動し , 翼面上で占める面積が減少することで , 衝撃波足元の励振効果は弱まっていると考えられる . また , Fig. 7.31 の 72.5 %回転数では A , B , C 点と絞るにつれて空力減衰の減少が鈍化していることから確認できる . その一方で正圧面上では空力仕事が増加しており , このバランスで全体として正の空力減衰を維持している . Fig. 7.38(a) に示す Span 方向の空力仕事分布からは , 約 40 %翼高さより翼端側で空力仕事または減衰が大きくなっていることがわかる . さらにこれを正圧面側の寄与と負圧面側の寄与に分解したのが Fig. 7.38(b) である . A 点では負圧面上で 80 % Span から 100 % Span にかけて正の空力仕事が生じており ,

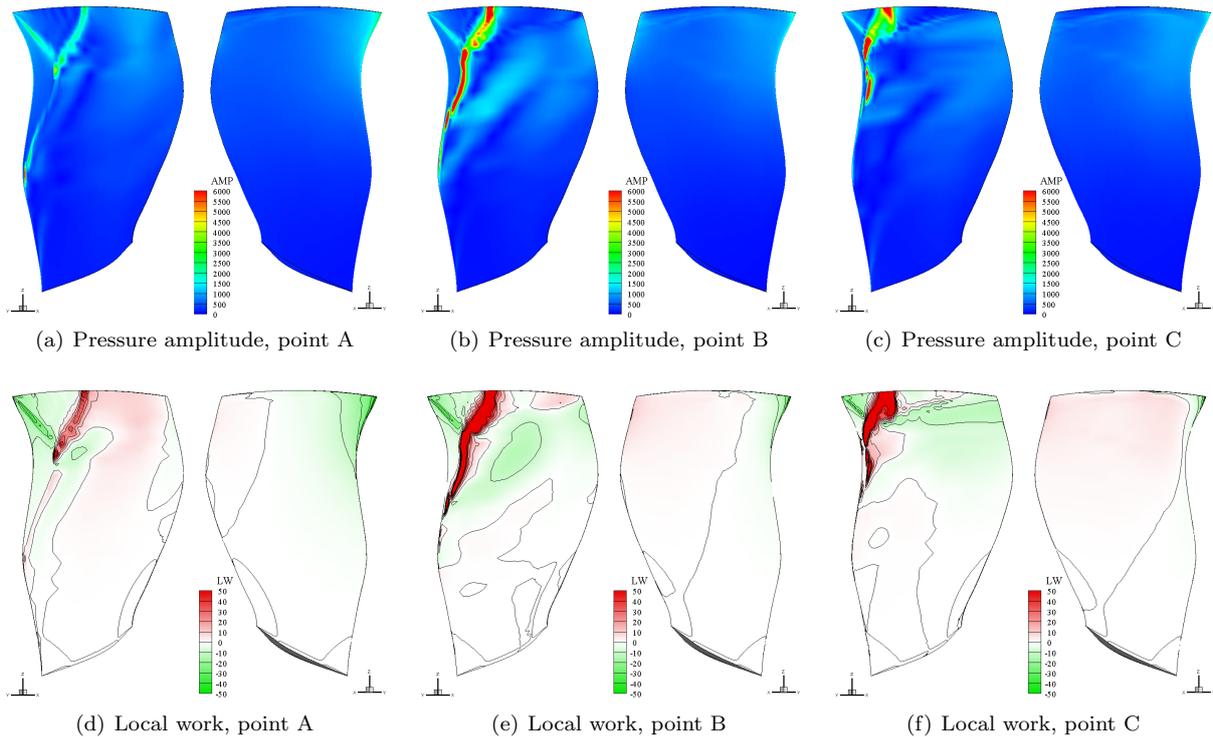


Fig. 7.41: Unsteady aerodynamic force acting on the blade surface on 77.5% speedline (1F mode family, IBPA=40deg), points A, B: out of flutter, point C: in flutter

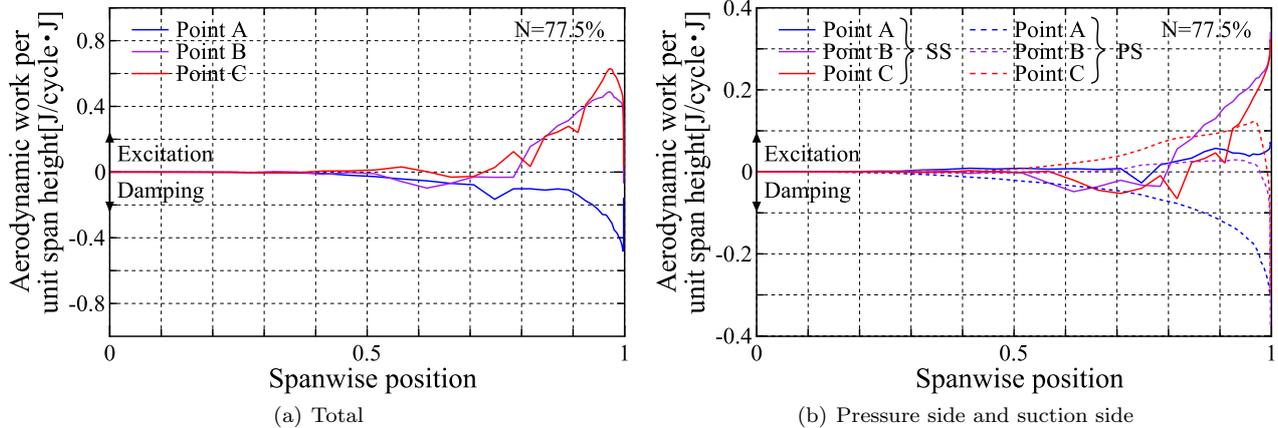


Fig. 7.42: Spanwise distributions of aerodynamic work on 77.5% speedline

これは前縁部分の衝撃波に対応する．一方，衝撃波がほとんど消失する B, C 点では負圧面のほとんどの翼高さで自励空気力は減衰力として作用している．一方正圧面側は流量を絞るに連れて空力仕事が増加するという，負圧面側と逆の傾向となっている．

72.5% から 75% まで回転数を上げるとフラッター境界が現れる．この回転数でも負圧面の衝撃波および正圧面が主な励振源であって，A 点はちょうど中立安定点付近で，フラッターの発生する B 点でも同様である．この変化は Fig. 7.40(a) Span 方向の変化を見ると，主として 80% Span より翼端側で生じており，A' 点から A 点の間，A 点から B 点の間で，正圧面・負圧面共に励振力が增大している．正圧面・負圧面の寄与に分解した Fig. 7.40(b) からは，フラッターに寄与する空力仕事増加は正圧面・負圧面双方で生じていることがわかる．衝撃波の有無に着目してみると，負圧面からほぼ完全に衝撃波が消失する B 点と C 点の間では，負圧面全体が安定側の寄与に転じており，このとき Fig. 7.31 におけるトータルの空力も零減衰に近くなっている．したがって，衝撃波が翼面上に存在することが翼振動に対して負の減衰力として作用し，フラッターの原因となっていると考えられる ..

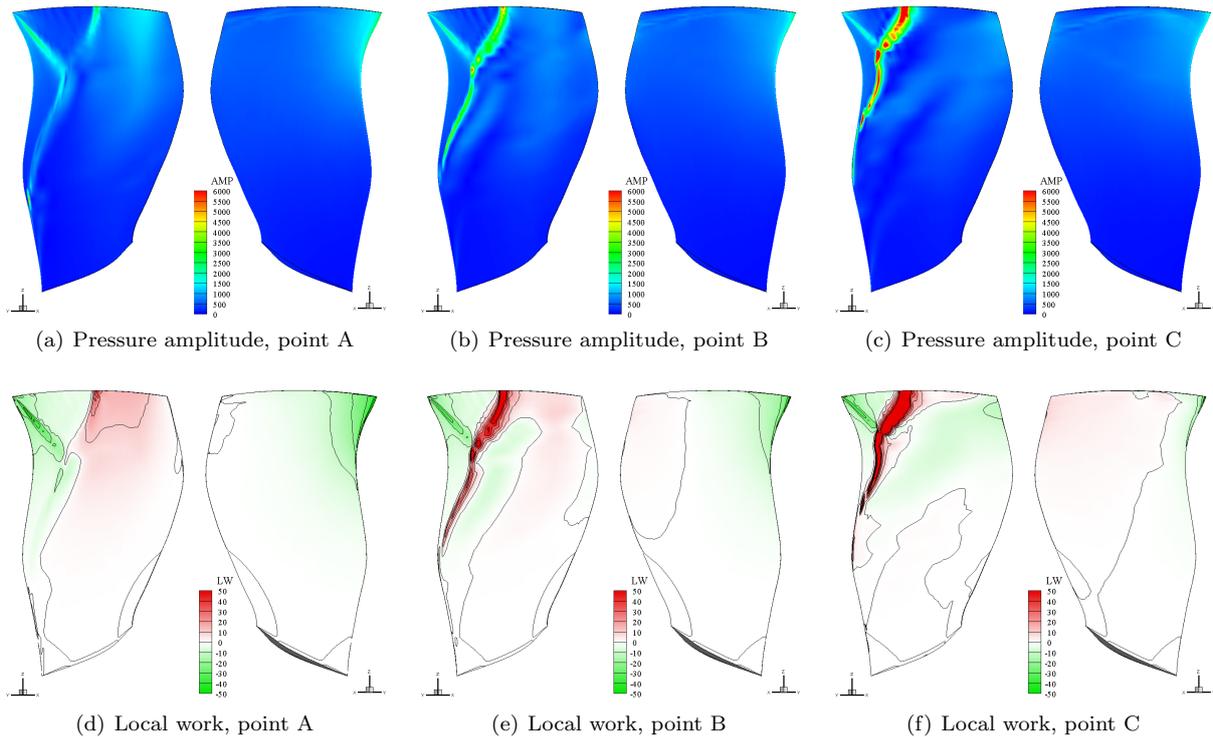


Fig. 7.43: Unsteady aerodynamic force acting on the blade surface on 80.0% speedline (1F mode family, IBPA=40deg), points A, B: out of flutter, point C: in flutter

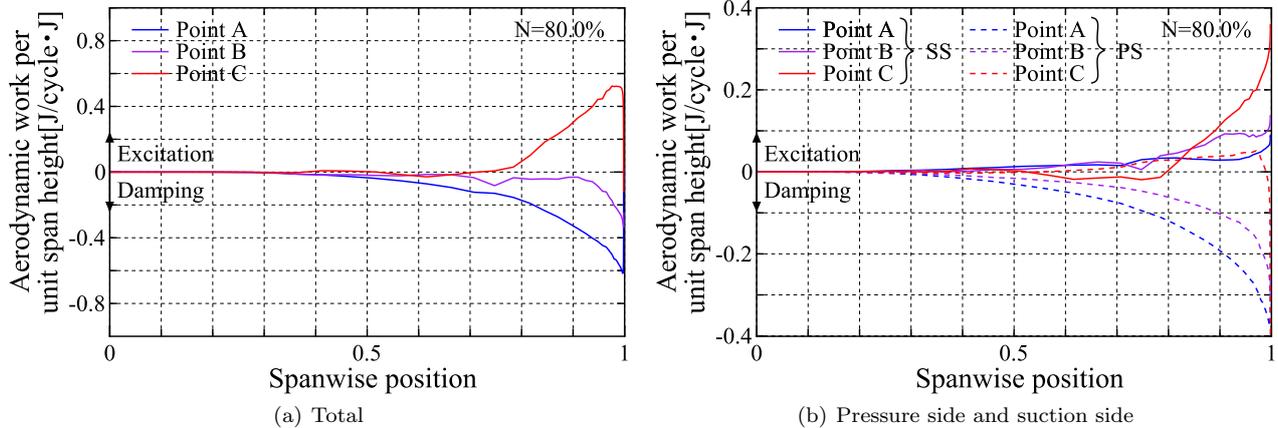


Fig. 7.44: Spanwise distributions of aerodynamic work on 80.0% speedline

77.5 % , 80.0 % ( 中回転数のフラッター境界 )

77.5 %回転数の Fig. 7.41 と 80.0 %回転数の Fig. 7.43 でもコンターの様子は同様の傾向となっている。ただ、A 点においてはこれまで見てきた 75 %回転数以下よりも衝撃波は後縁側に位置しており、B 点、C 点と流量を絞るに連れて前方に移動し、圧力振幅と空力仕事が増加する。正圧面で不安定に寄与する領域が拡大する現象も 75 %回転数以下と同様の傾向である。そして、Fig. 7.42(a), Fig. 7.44(a) に示す翼高さ方向の空力仕事分布より、衝撃波の前進とともに負圧面の 80 %翼高さ以上の空力仕事が増え、また正圧面でも翼高さ方向に一樣に空力仕事が増える。このことから、フラッターの発生に負圧面の衝撃波足元だけでなく正圧面側の挙動も寄与しているということがわかる。また、72.5 %と 75 %の低回転数側との違いは、衝撃波が翼面上から消失せず、サージ点近くの C 点においても前縁付近に留まっている。そのため、「衝撃波の前進による負圧面の負減衰量の増大」と「流れを絞ったことによる正圧面の負減衰量の増大」が同時に生じて、Fig. 7.31 にプロットしたように流量に対して非常に急激に空力減衰が減少していると考えられる。

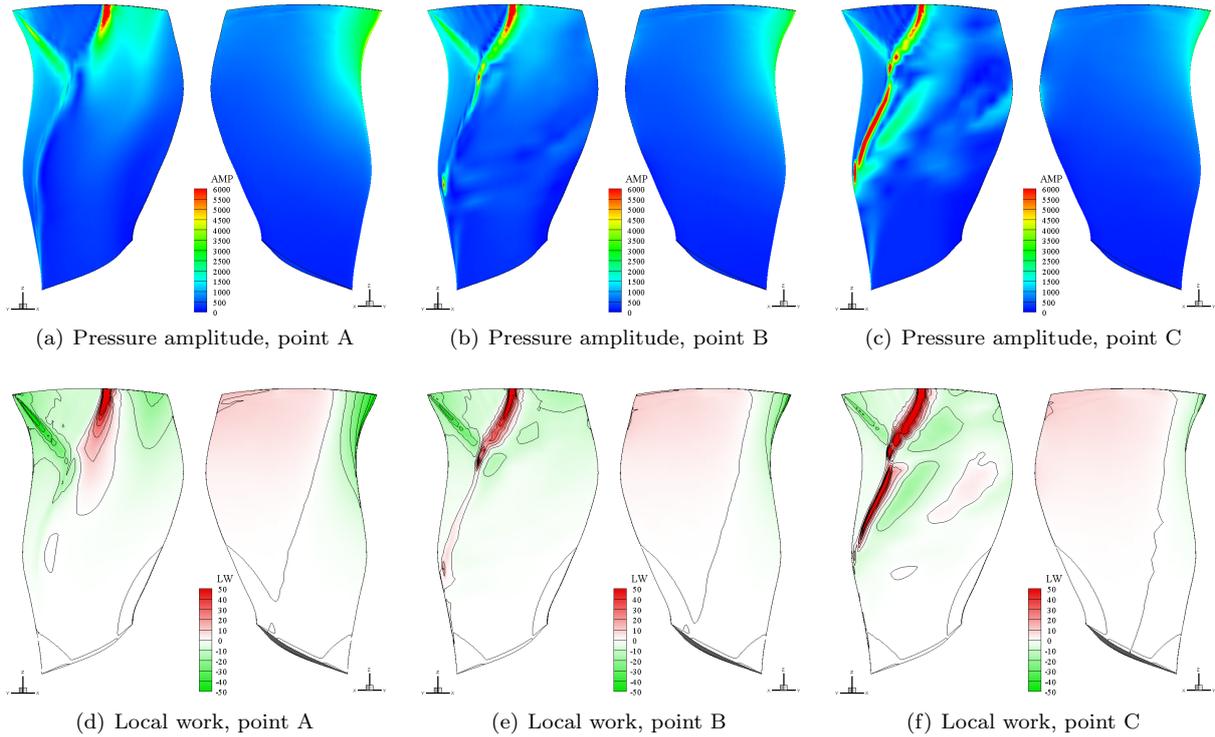


Fig. 7.45: Unsteady aerodynamic force acting on the blade surface on 82.5% speedline (1F mode family, IBPA=80deg), points A, B: out of flutter, point C: in flutter

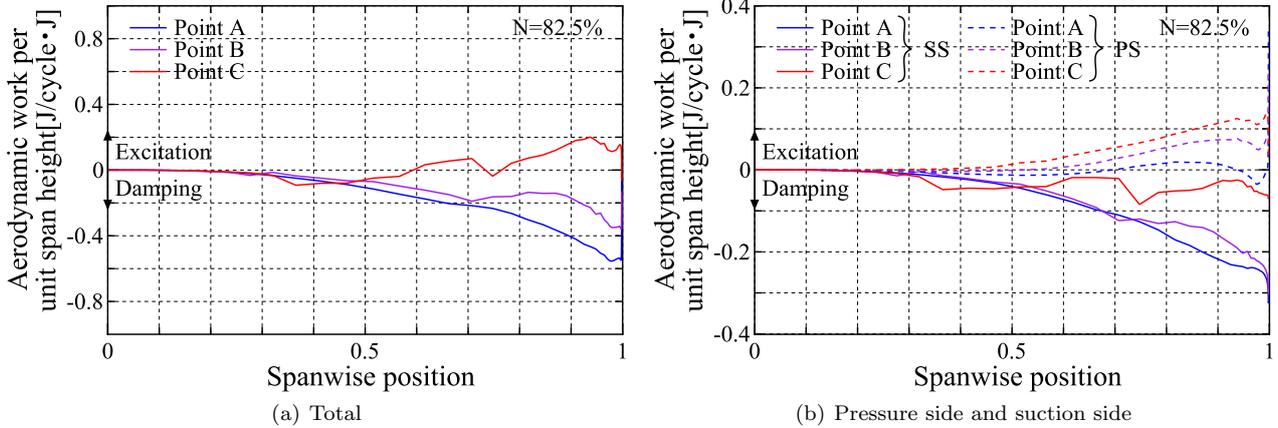


Fig. 7.46: Spanwise distributions of aerodynamic work on 82.5% speedline

82.5 %回転数, 85.0 %回転数 (高回転数側のフラッター境界)

フラッターが発生した最大回転数の 82.5 %回転数では, それ以下の回転数と不安定になる翼間位相差が異なる. しかし Span 方向の空力仕事分布である Fig. 7.46(a) を見る限りやはり定性的には 80 %, 77.5 %回転数における変化と同様の傾向である. 即ち, A, B, C 点と流量を絞るにつれ, 衝撃波の前進に伴う負減衰増加と正圧面の不安定域の拡大が同時に起こる.

フラッターは 85.0 %で発生しなくなる. Fig. 7.44(a), Fig. 7.46(a), Fig. 7.48(a) より翼高さ方向の空力仕事分布を 82.5 %, 85.0 %の両者で比較すると, 回転数を上げるにつれて負圧面側の空力仕事が減衰側に移動している. Fig. 7.48(a) より, 最も絞り側の C 点における空力仕事分布を低回転数側の作動点 (例えば Fig. 7.44(a)) と比べると, 離脱衝撃波の位置は低回転数の場合よりも下流側に位置しており, またその足元での圧力振幅も小さくなっている. このように衝撃波の位置に関しては 72.5 %, 85.0 %の場合のように消失しても後縁側に位置しすぎてもフラッターが起こらなくなることから, 空力減衰は衝撃波位置に対して非常に大きな感度があるといえる.

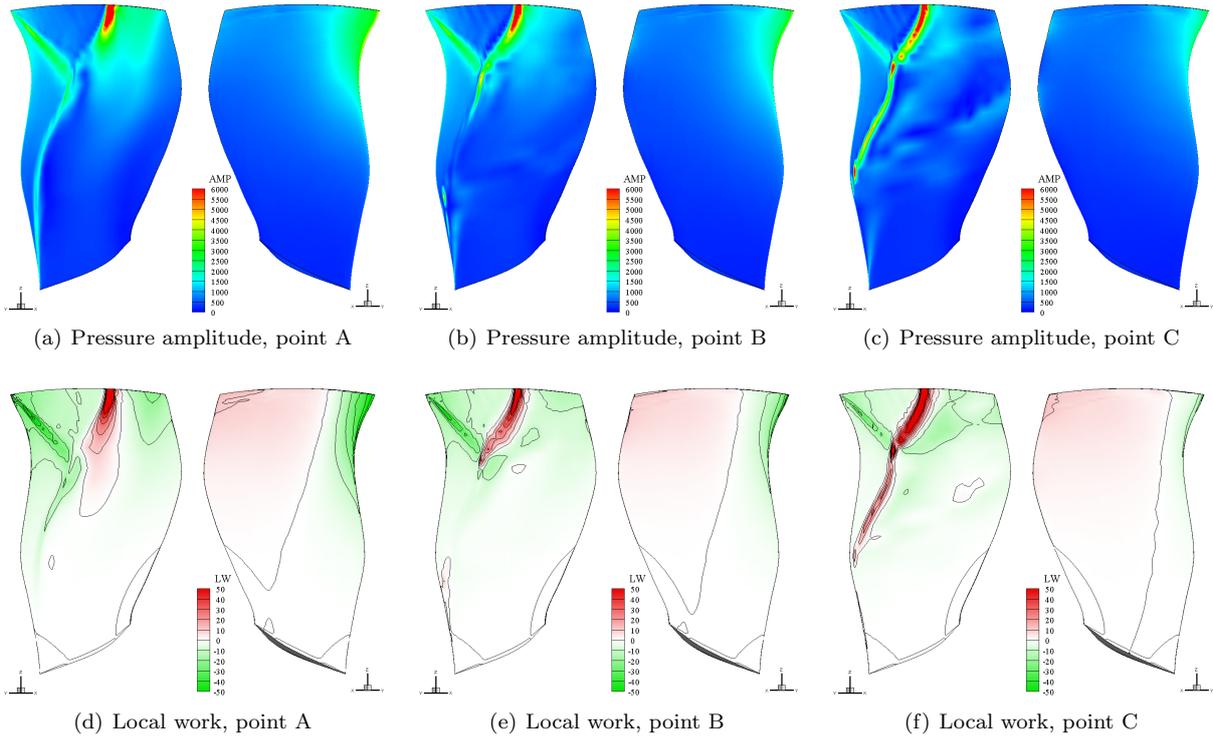


Fig. 7.47: Unsteady aerodynamic force acting on the blade surface on 85.0% speedline (1F mode family, IBPA=80deg), points A, B, C: out of flutter

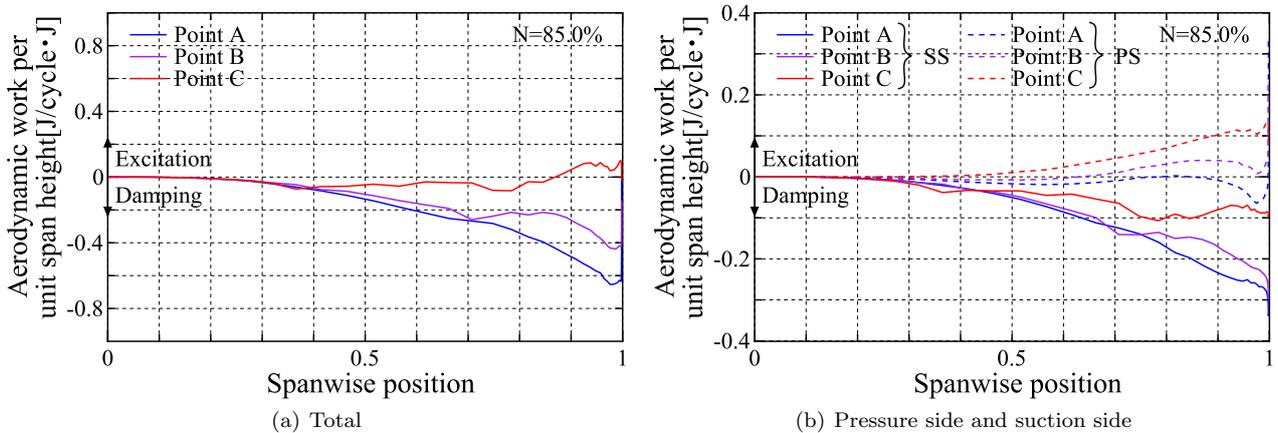


Fig. 7.48: Spanwise distributions of aerodynamic work on 85.0% speedline

各回転数に対するまとめ

各回転数における空力仕事の挙動とフラッター境界との関係を整理するために、まず負圧面の空力仕事分布をフラッター境界前後で俯瞰してみよう。Fig. 7.49 には、各回転数におけるフラッター境界前後の作動点について、負圧面の空力仕事を並べたものである。低回転数側の 72.5 % , 75 % の間で離脱衝撃波が翼面上に残るようになると同時にフラッター境界が現れてフラッターに入ることや、回転数を高くすると離脱衝撃波の位置が後縁側に移動するとともに空力仕事の大きさも定性的に減少している様子が明瞭に見て取れる。

負圧面・正圧面の空力仕事に対する寄与に関して、それぞれの面で空力仕事の和をとったものを各作動点でまとめ、Fig. 7.50 に示す。実線が負圧面、破線が正圧面で、70 % ~ 80 % 低~中回転数における挙動を示している。正圧面では、どの回転数でも流量に対して単調減少しており、この挙動が低流量側でフラッターに入る一因である。一方負圧面は、70 % から回転数を上げると全体的に底上げされるような挙動をしている。特に、72.5 % ・75 % 回転数の間での強い離脱衝撃波の出現に伴い、高流量側でも励振側に作用するようになっている。

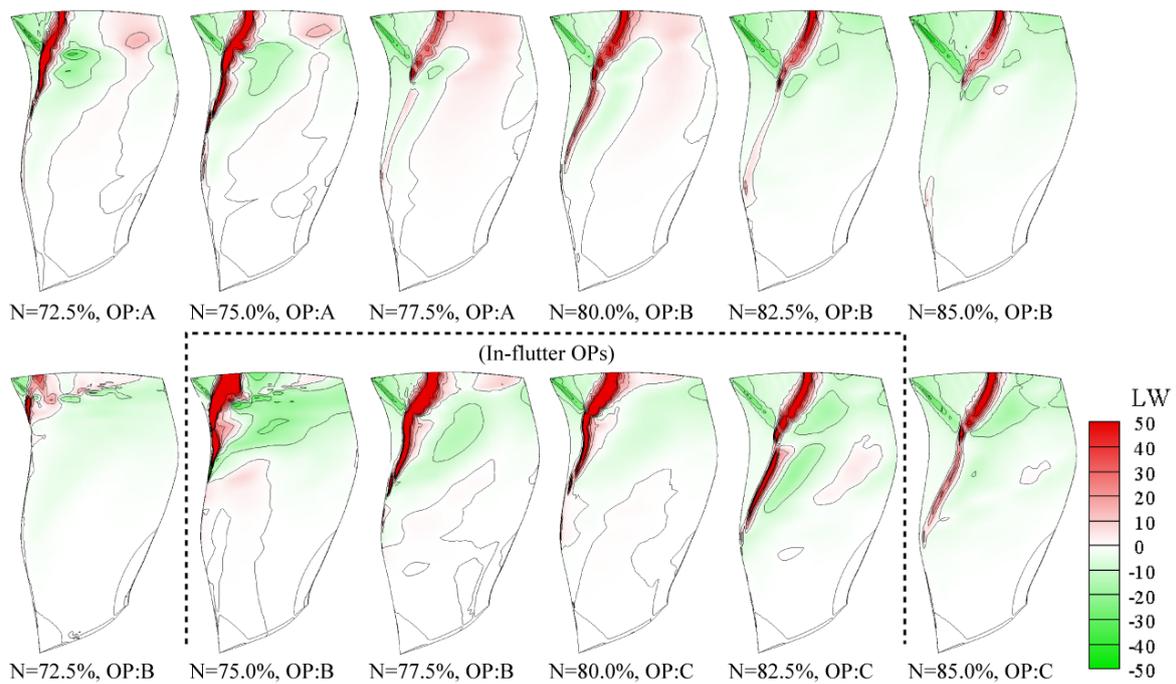


Fig. 7.49: Overview of local aerodynamic work of the flutter modes acting on the suction surface between the flutter boundary

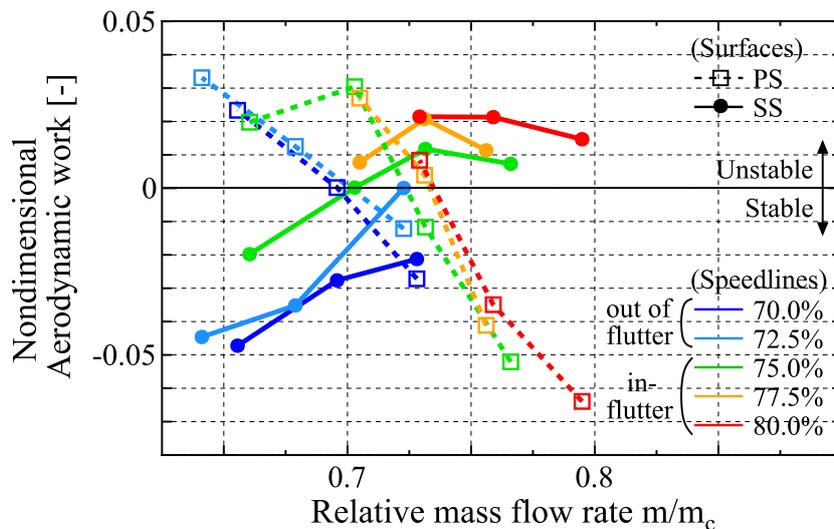


Fig. 7.50: Summary of contribution of suction and pressure sides to the aerodynamic excitation

以上の空力仕事の分布や衝撃波位置の観察より、局所的な圧力振幅及び空力仕事の傾向はどの回転数のフラッター境界をまたいだ変化でも定性的には同様であり同様の物理的現象を起源に持つフラッターであると考えられる。各回転数においてフラッターに入るシナリオは次のようにまとめられる。

- 72.5 % : 高流量側の作動点 A では負減衰に寄与する離脱衝撃波が負圧面上に残っている。しかし正圧面の負減衰はそれほど強くない。流れを絞ると正圧面の負減衰量は増大するが、負圧面の衝撃波が消失するため、フラッターは生じない。
- 75.0 % ~ 82.5 % : 流量を絞ることで負圧面の離脱衝撃波が前進し、負圧面側の負減衰量が增大する。しかし 72.5 % と異なり衝撃波は翼面上の留まっており、正圧面の負減衰量の増大が同時に起こる。そのため流量減少に対して急激に空力減衰が損なわれ、フラッターに入る。

- 85.0 % : 流れを絞っていった時の局所的な空力仕事の挙動は 82.5 % 以下と変わらない。しかし、82.5 % 以下の他の回転数と比べて衝撃波位置が後縁側に位置しており、衝撃波足元の圧力振幅・負減衰が共に小さいことから、フラッターは生じない。

では、流量を絞っていった際に空力仕事の分布の変化の特徴を決定づけている「共通する物理的現象」とは一体何なのだろうか？ 1つは衝撃波の位置と流れ場の関係であり定常的なもので、もう1つは流れ場中での擾乱の伝播である。今回取り扱った遷音速流れ場において腹側で負減衰域が増加するを理解するためには、翼の振動に伴い生じる変動流れ場が翼間でどのように伝わっているか、ピッチ間に部分的に存在するような離脱衝撃波部分を含め、どのように上流・下流に擾乱が伝わるのか、という事を通じて知る必要があると思われる。

### 7.5.2 低回転数側のフラッター境界不一致の原因の考察

これまでの議論で、CEFS1のフラッター境界に関する計算結果についてわかったことを改めてまとめると以下のようになる。

- 80.0 % , 82.5 % , 85.0 % 回転数といった、高回転数側での試験でフラッターが確認された領域では、連成解析結果はフラッターの発生やそのマップ上の位置を再現する
- 75.0 % 回転数から 77.5 % 回転数にかけて低回転数側の作動線では、試験ではフラッターが生じないにもかかわらず、連成解析結果ではフラッターが発生する。
- 流量を絞ると負圧面上の衝撃波が消失することが、72.5 % 回転数でフラッターが生じなくなる理由である。

それでは、なぜ 75.0 % 回転数から 77.5 % 回転数で本来なら生じないはずのフラッターが計算で生じてしまったのだろうか？ 上に挙げた 3 つ目の事項「フラッターが生じなくなると、絞り側の作動点で衝撃波足元の励振力がほぼ消失する」ことを考えると、原因としては衝撃波の足元の位置や、そのまわりの流れ場にありそうだ。そこで、過去に行われた、本対象と類似する流れ領域の空力試験の報告を参考に、CFD と実試験条件の差について考える。

#### 遷音速域における翼列流れの非定常性について

ファン動翼に用いられるような薄翼翼列において、失速点付近のような高いインシデンスをもつ遷音速流れ場で衝撃波の足元がどのような流れ場になっているかということの参考になる報告として、Lepicovsky らによる NASA のフラッター試験用風洞を用いた試験 [115] が挙げられる。彼らは、前縁付近に逆キャンパーをもつスタガ角 60[deg]、ソリディティ 1.53 のファン翼端を模した翼列を用い、インシデンス 10 度の高負荷条件でマッハ数を 0.5 から 1.2 までスイープした空力試験を実施した。その中で、彼らは流入マッハ数が 0.9 から 1 を超える際に、翼前縁付近に配置された非定常圧力センサで非常に特徴的な波形が現れることを発見している。

Fig. 7.51 に、前縁から 6 % の位置のセンサ出力波形を引用して示す。流入マッハ数 ( 図中  $Ma_{IN}$  ) が 0.8 程度のときは、亜音速の前縁剥離流によって生じるランダムな圧力変動波形となっている。しかし、マッハ数を上げていくと流入マッハ数が 0.95 から 1.0 にかけて山形の波形が断続的に生じるようになり、波形の下限は一様になっている。彼らは、この圧力下限が「超音速流れのもの」であって、山型波形が現れるときは、センサ上方は亜音速の流れになっており、前縁部分で超音速流と亜音速流が非定常に切り替わっているのだと説明している。

このように、衝撃波や剥離が関連して自励振動を起こす非定常の流れ場は、総称して遷音速バフェットと呼ばれる。Lepicovsky らにより報告された現象は航空機主翼に用いられるスーパークリティカル翼とは異なり、鋭い前縁から生じる前縁剥離が関連したものであると思われるが、剥離域の大小と衝撃波の運動が互いに影響されながら流れ場の非定常性が生じているのだと思われ、この点は共通していると思われる。

#### 数値解析における流れの非定常性について

このような試験結果が存在することを念頭に置いて、今回の CEFS1 において、低回転数側のフラッター境界付近でバフェットに似た現象が計算結果に現れるかどうかを調べてみる。今回最初に定常流れ解析を行ったのは、

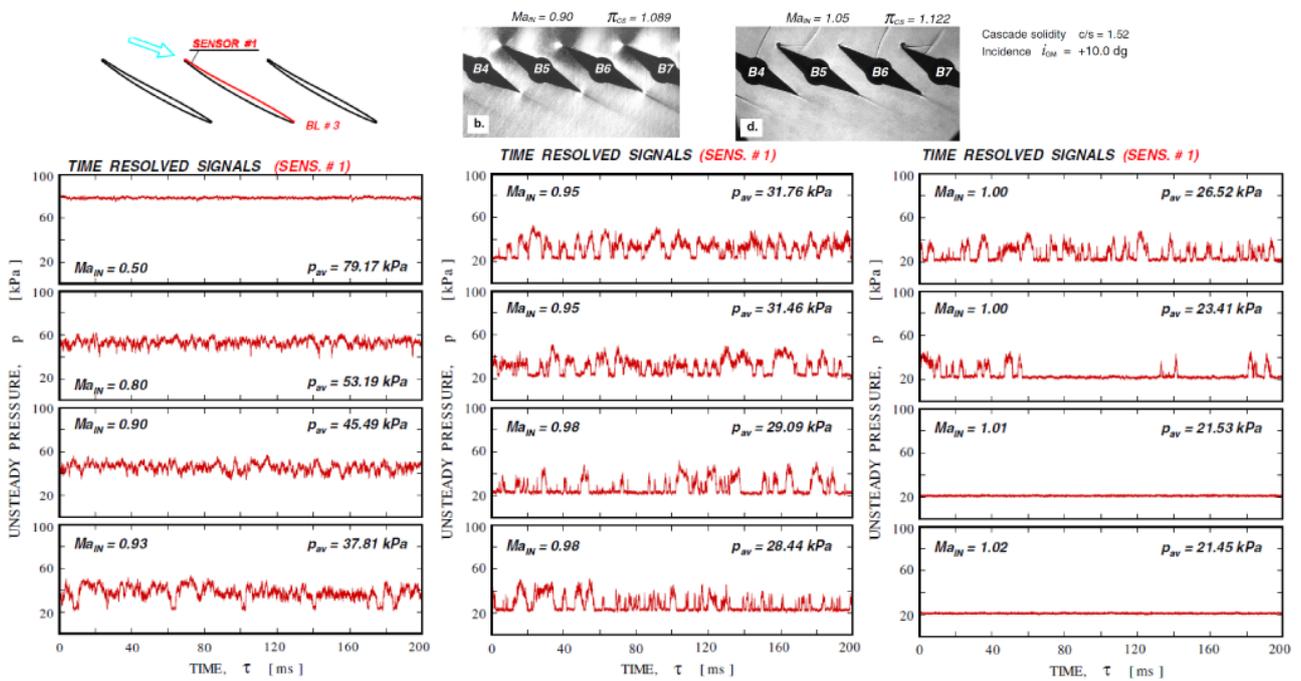


Fig. 7.51: Time-resolved wall pressure signal at the leading edge of two-dimensional cascade obtained by the tests conducted by NASA [115], from subsonic to supersonic inlet speed, at the incidence angle of 10[deg]

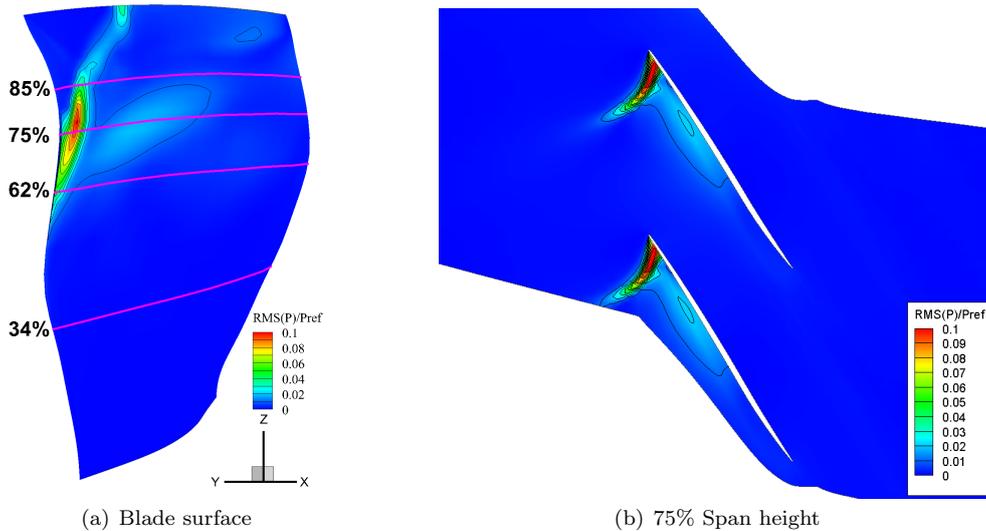


Fig. 7.52: Root mean squares of pressure fluctuation obtained by time-accurate CFD with  $f_{t2}$  term of Spalart-Allmaras model, at point A on the 75% speedline

Spalart-Allmaras モデルにおいて全域乱流の取り扱いをすべく  $f_{t2} = 0$  としたものであった。この乱流モデルを用いた条件では、Fig. 7.13 に示すマップ上の全ての計算点で定常流れ場は収束していた。

そこで、 $f_{t2}$  項を有効にした Spalart-Allmaras モデルを用いて再度低回転数側で発生したフラッター境界付近の定常流れ解析を試みる。ここで対象とする作動点は 75% 回転数の作動点 A であり、Fig. 7.32 よりこの作動点はフラッター境界直上に位置する。計算は 1 流路を周期境界で接続し、定常解析と同様の境界条件を与え、翼振動は行わない。このようにして局所時間刻み法によって定常解析を試みると、流れ場の変動が生じて定常解がもたらなくなったことから、フラッター解析と同じ時間刻み幅を用い、時間二次精度の Time-accurate な時間発展を行った。

まず、翼面上の圧力変動に着目し、流れ場のどこで非定常性が現れるかを観察する。Fig. 7.52 に、局所圧力変

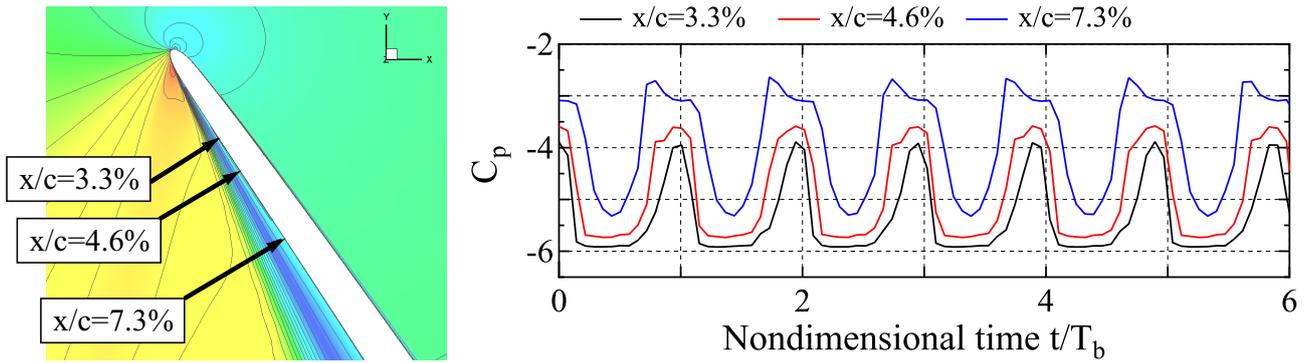


Fig. 7.53: Time history of blade surface pressure near the leading edge at 75% span height,  $f_b = 450\text{Hz}$ , three different positions are shown.

動の二乗平均値 (Root mean squares, RMS)  $\tilde{p}_{\text{RMS}}$  を示す。これは、瞬時値  $p(t)$  と時間平均値  $\bar{p}$  を用い、圧力変動値のアンサンブル平均として

$$\tilde{p}_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (p(t_i) - \bar{p})^2} \tag{7.3}$$

と定義される。なお、無次元化は入り口全圧  $p_t$  を用いている。まず Fig. 7.52(a) の翼面上について見ると、約 60 % Span から 85 % Span にかけて入口全圧に対して最大 10 % 程度の非常に大きな圧力変動が生じていることがわかる。そして、その位置は前縁付近に位置する離脱衝撃波の足元に局在していることがわかる。また、衝撃波下流翼弦中央にわたる剥離域にも圧力変動がある部分が広がっている。圧力変動は 75 % Span 程度で非常に高くなっていることから、Fig. 7.52(b) に 75 % Span 断面の流路中における圧力の RMS を示す。翼面上の様子からも分かる通り、前縁付近の衝撃波が非常に大きく振動していること、変動は下流の剥離域にまでわたっていることが改めて確認できる。

では、この変動による波形の特徴はどうだろうか。波形の特徴を調べるために、変動圧力の大きい部分における圧力変動の時間履歴を Fig. 7.53 に示す。ここでは、翼弦方向の位置を前縁から 3.3 %、4.6 %、7.3 % の 3 つの位置を見ている。圧力変動の周波数  $f_b$  はおよそ  $f_b = 450[\text{Hz}]$  で、時間軸はこの周期  $T_b$  で無次元化し、また圧力係数は入口動圧で無次元化している。数値解析によって圧力波形はほとんど周期的であり、Fig. 7.51 で実験的に取得された波形に見られるようなランダム性は確認できない、これは数値解析においては RANS を用いており、乱流に起因するランダムな変動成分が現れていないことによると考えられる。最も前縁側に位置する 3.3 % では、1 周期の半分程度が圧力の下限に達し平坦な時間履歴となっているが、残りの半分の時間では三角状に立ち上がるスパイク状の波形が観察されている。このように前縁付近でスパイク状の波形が現れ、圧力の下限はほぼ一緒になっているという様子は、Lepicovsky らによる観察結果に見られているものと同様である。また、4.6 %、7.3 % と下流側に移るにつれて低圧の圧力になっている時間は短くなり、圧力が大きくなっている時間幅が増えていることから、衝撃波が前縁まわりを往復的に運動していることがわかる。以上のことより、 $f_{t2}$  項を有効にした SA モデルで生じている衝撃波近傍の非定常性は、Lepicovsky らが観察した遷音速パフエツト様の変動流現象である可能性が高い。

衝撃波とその下流領域がどのように変動しているかを、パフエツト 1 サイクルについて Fig. 7.54 に 75 % Span 断面の相対マッハ数分布の瞬時値を用いて示す。時刻  $t = 0$  では最も前縁側に位置している衝撃波は、 $t = 2/4T_b$  にかけて後縁側に向かって移動し、それとともに剥離領域も小さくなっていく。しかし、 $t = 2/4T_b$  で最下流に到達した衝撃波は  $t = 3/4T_b$  にかけて剥離域を大きくしながら前縁側に移動し、再び  $t = 0$  の状態に戻っている。

このようにパフエツトが前縁部分で発生した場合には、時間平均流れ場もまたその変動の影響を受けると考えられる。Fig. 7.55 に、75 % Span 断面の翼面上静圧分布を代表して示す。Fig. 7.55(a) に、時間平均の静圧分布をパフエツトの起きない  $f_{t2}$  項なしの計算結果とパフエツトの起きた  $f_{t2}$  項ありの結果を比較して示す。パフエツトの起きない場合では定常な衝撃波が負圧面に形成され、これによるシャープな静圧上昇が明瞭に見て取れる。一方

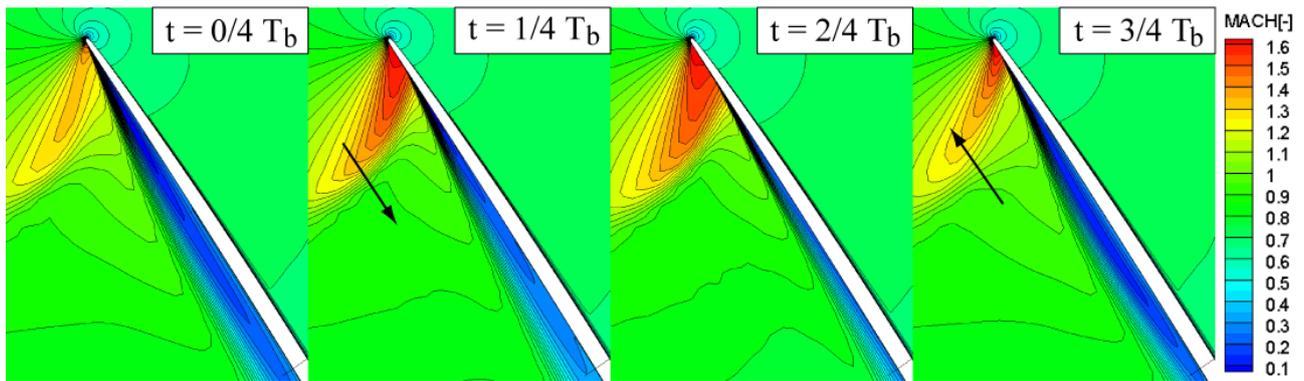


Fig. 7.54: Typical shock motion within one buffet cycle. Relative Mach number is shown.

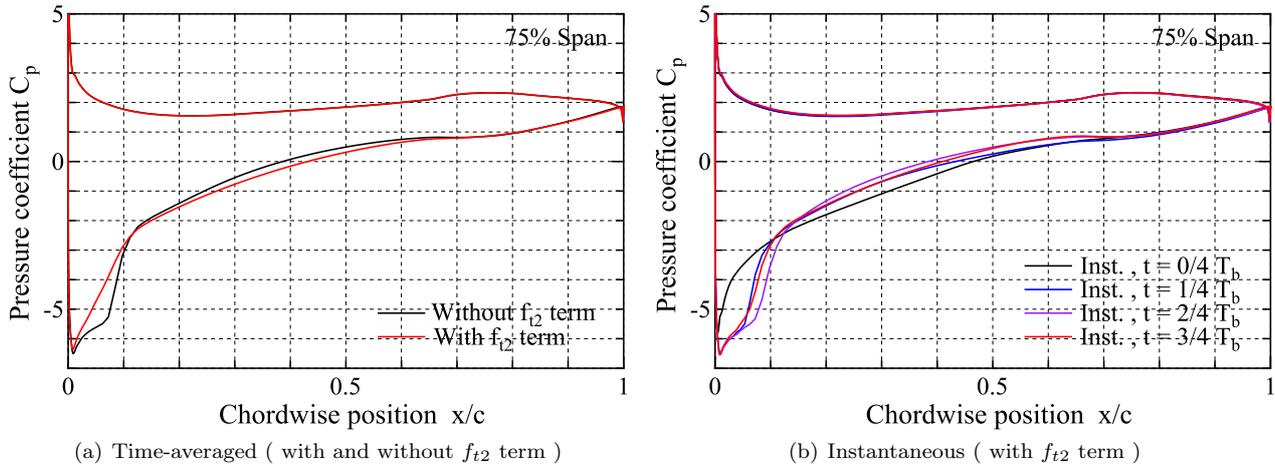


Fig. 7.55: Blade surface pressure distributions at 75 % span height

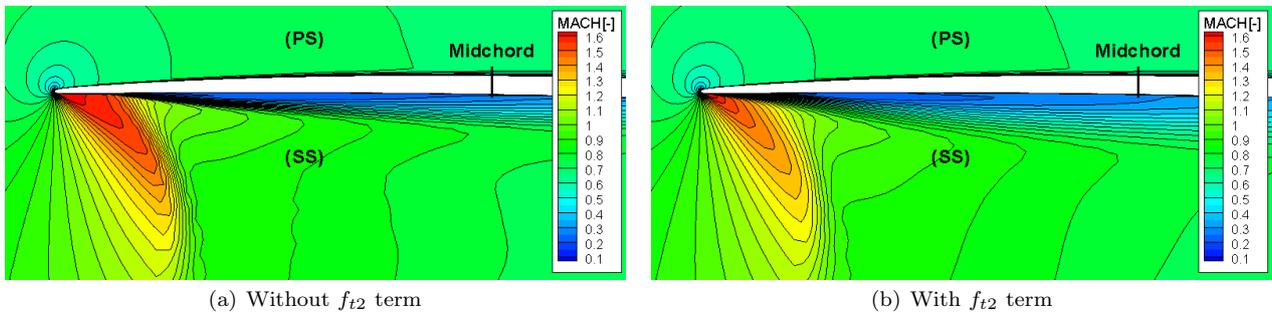


Fig. 7.56: Time-averaged relative Mach number at 75 % span height

で、パフェットが起きる結果を時間平均した圧力分布は明瞭な衝撃波構造はもはや確認されず、前縁から 10 % 翼弦長さ位置にかけてほぼ直線的に静圧が上昇している。このように、時間平均流れは衝撃波が消失したような様相を呈しているが、Fig. 7.55(b) に示す瞬時静圧分布を見ると、衝撃波による静圧上昇は確かに存在している。

パフェットが存在しているときは、前縁付近のマッハ数分布も存在していないときとは異なったものになる。Fig. 7.56 に、75 % Span 断面の時間平均マッハ数分布を示す。パフェットが生じない Fig. 7.56(a) では前縁付近の流れは衝撃は足元まで完全に付着しており、付着域でほとんど一定のマッハ数が保たれている。しかし、パフェットが発生する Fig. 7.56(b) では、衝撃波足元の剥離領域が間欠的に前縁に向かって遡上するために、前縁半径の終わったあたりから剥離が生じている。また剥離領域部分の低速部分も Fig. 7.56(a) より大きくなっており、衝撃波に由来すると思われるマッハ数の急勾配部分も、空間的に拡散している。

以上で述べた、時間平均および瞬時流れ場の SA モデルの構成による違いに関する議論より、パフェットの有無で時間平均流れ場が大きく変わってしまうことを通じて筆者がコメントしたいことは、

- シャープな衝撃波が定常的に存在するような流れ場と、衝撃波やその下流の剥離領域が常に大きく変動し続けており時間平均流れ場が影響されてしまうような流れ場では、衝撃波足元において翼の運動に対する応答の性質が異なり、したがってフラッター解析結果に大きな影響が出るのではないか。
- 衝撃波足元はフラッターの発生に対して励振側に作用しているため、時間平均流れ場に明瞭な衝撃波構造が見られない場合には、衝撃波による励振作用が消失するのではないか。
- したがって、低回転数側のフラッター境界における試験結果との齟齬はこれらの作動状態において遷音速バフェットが前縁側で生じていることに起因するのではないか。

ということである。

バフェットの有無による時間平均流れ場の違いが衝撃波足元の励振力、すなわちフラッター解析結果に対してどのような影響を与えるかは、残念ながらここまでの結果では十分明らかではない。フラッター解析を行うためには、まず定常流れ解析を行い、時間平均流れ場を求める必要がある。したがってこのことを検討するためには、まずバフェットの発生を適切に考慮したフラッター解析を行い、対象となる流れ場を模擬していく必要がある。しかし、バフェットが起きているような流れ場の「定常解」が、定常の RANS 解析から正しく求まるということはほとんど期待できないと考える。それは、バフェットは衝撃波の振動を含んでいるために、衝撃波振動に起因するレイノルズ応力は乱流現象に由来するレイノルズ応力とは物理的に異なると考えられるため、乱流現象に基づくレイノルズ応力のモデリングのみでは不十分だからである。そのため、例えば、翼振動とバフェット現象が全く無関係であると考え、URANS により時間平均流れ場を得た後に、翼振動に関する変動成分だけを選択的に解くために、得られた時間平均流れ場まわりに線形化 RANS を周波数領域で解くといったアプローチが考えられよう。

しかしながら、このバフェットの発生やその変動成分に関しても一般的な乱流モデルで正しく捉えられるのかは明らかではなく、本小節で見てきたように、同じ SA モデルでも壁面付近の取扱いを少し変更するだけでバフェットが生じたり、生じなかったりするといった具合に、非常に大きなモデル依存性があると考えられる（筆者はその他の乱流モデル、例えば AJL- $\omega$  モデル、安倍らの  $k-\varepsilon$  モデルに Kato-Launder 補正を用いたモデルなどでも試験的に計算を行ったが、バフェットが計算中で起こるかどうかはモデルに依存してしまう。そして、その依存性はどうか前縁の離脱衝撃波前で乱流になっているか、層流のままかといった事項に関連しているように思われる。）このような流れ場を数値解析によって適切に取り扱い、かつフラッター解析のようなマルチ・フィジックス解析につないでゆくためには、実際の流れ場を試験データを通じてより深く理解すると同時に、実際に起きている流れ現象の影響を考慮できるように、モデル選択や数値解析における戦略に一層の注意を要すると思われる。

## 7.6 モード同定の精度悪化の原因の考察

72.5%回転数と75.0%回転数の作動点Cでは、他の作動点に見られないほど極端にモード同定の精度が極端に悪化していた。本節ではこの原因について流れ場の観察を通じて考察し、連成解析の結果を空力弾性モードの同定に用いることの出来る条件を考えていく。

### 7.6.1 流れ自身の変動成分について

72.5%回転数と75.0%回転数の作動点Cの計算結果に見られる時間平均流れ場において特徴的だったのは、他の作動点において見られないほどに、翼端付近において前縁剥離に起因する低速領域が発達していることであった。このことから、モード同定の精度悪化は翼列の失速や剥離流に関連した不安定な流れ現象が計算中で起こっていたためであると考えられる。

この仮説を確かめるために、翼に作用する合力の軸方向成分に対する離散フーリエ解析結果を用いて計算中で

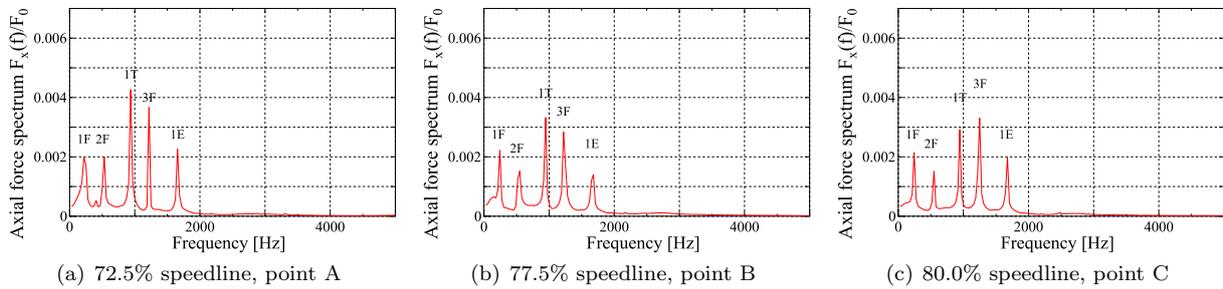


Fig. 7.57: Power spectrum of axial aerodynamic force acting on the blade at operating points without flow instability

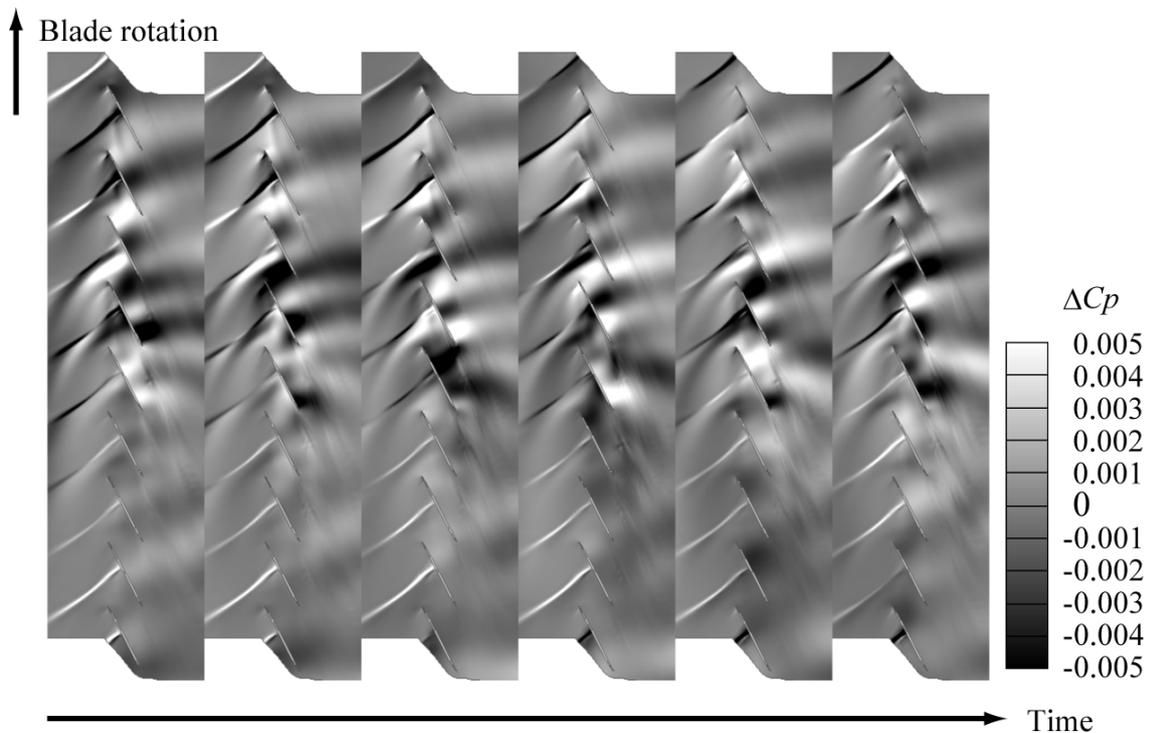


Fig. 7.58: Generation and propagation of pressure fluctuation due to the motion of the blade (95% span position, point C on 80% speedline)

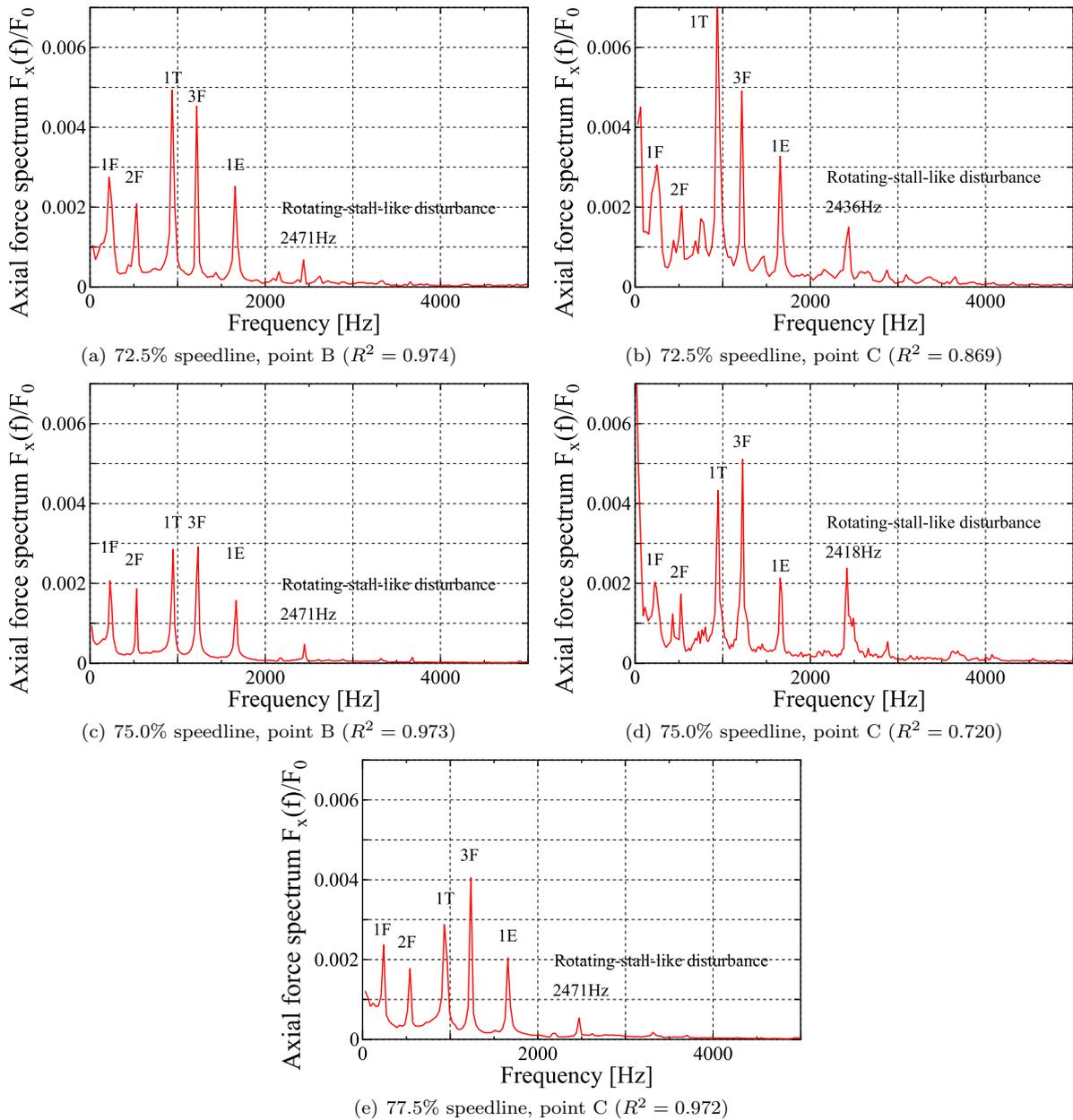


Fig. 7.59: Power spectrum of axial aerodynamic force acting on the blade at subsonic-like near-stall operating points

発見している流れ変動成分を調べる．ここでは、各翼に作用する変動空気力の合力をを翼ごとに離散フーリエ解析し、そうして得た振幅を全ての翼について平均した結果を示す．

まず、フラッター境界の決定において支障のない程度に空力弾性モードが精度よく求めた作動点の振動解析中の軸方向空気力成分の周波数解析結果を Fig. 7.57 に示す．どの作動点においても翼構造振動モードの周波数付近のピークのみが確認でき、計算中における流れの変動成分としては、翼の運動を原因として生じる流れ変動成分が支配的であることがわかる．

このときの 95 % Span 断面における瞬時変動圧力場を Fig. 7.58 に示す．ここからは流れの不安定に起因するような変動成分は確認できず、翼振動に伴い生じた圧力波が計算領域を伝播している様子のみが見られている．

次に、モード同定の  $R^2$  値の低下が始まる点より低流量側の結果における周波数解析結果を Fig. 7.59 に示す．Fig. 7.59(a), Fig. 7.59(c), Fig. 7.59(e), に示している  $R^2$  値が 0.97 程度であった 72.5 % , 75.0 % 回転数 B 点 ,

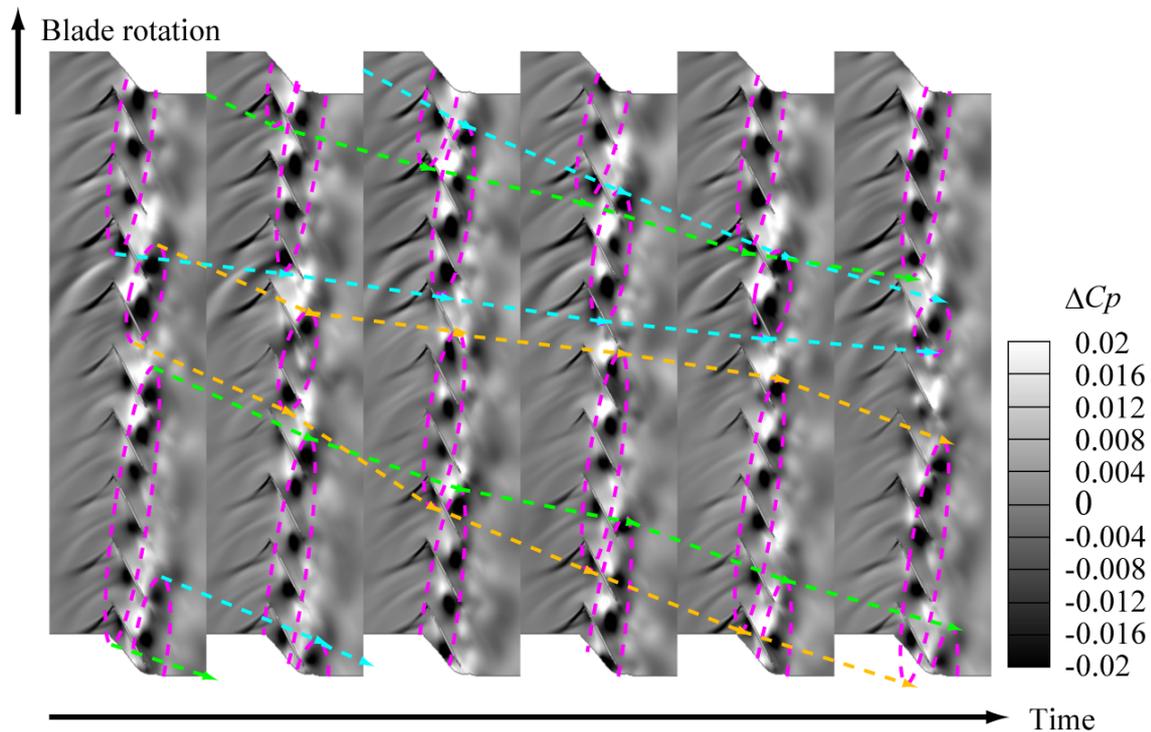


Fig. 7.60: Behavior of rotating-stall-like unstable flow at 95% span position ,point C on 75% speedline. Unsteady pressure is shown.

および 77.5 % 回転数 C 点では、翼振動周波数近傍以外に、構造振動モードにはない周波数成分である 2450Hz 付近の振動数が微小に生じている。

さらに  $R^2$  値が悪化しモード同定結果でフラッター境界が判定できない Fig. 7.59(b), Fig. 7.59(d) の 72.5 %, 75.0 % 回転数 C 点では、翼の振動数成分とは無関係だと思われる変動成分である、2450Hz 付近の変動成分がさらに大きくなっている。

最も  $R^2$  が小さかった 75.0 % 回転数 C 点について、瞬時圧力変動場を時間方向に並べた図を Fig. 7.60 に示す。Fig. 7.58 と同様 95Span 断面における値を示している。非常に特徴的に見て取ることができるのは、翼間翼列周方向に斜めに存在する低圧領域と高圧領域のなす列である。この列は翼端部分の剥離領域に対応しており、常に翼列間を移動している。図中黄色、緑色、青色で示す点線は複数翼にわたって存在するこれらの擾乱（ピンクの楕円で囲んだ領域）が動翼相対系を伝播する様子をわかりやすくするために示した補助線である。図の左から右へ時間の進む方向に観察すると、翼間に生じている擾乱は動翼回転方向とは逆向きに大きさを変えながら移動していることがわかる。このような圧力変動が生じる原因は、72.5 %, 75.0 % 回転数 C 点のような流れ場では翼端付近の低速領域が肥大化したことにより不安定な状態になっており、局所時間刻みから時間方向に流れ場を解く非定常解析に移行し、かつフラッター解析のために与えた初期擾乱により剥離領域に対応する低速領域が自発的な変動を引き起こし始めたためであると考えられる。

本研究における空力弾性モードの同定における定式化では、自励空気力である「翼の運動に起因して生じる流れ変動成分」の係数を同定するため、運動方程式に「翼振動に対して線形に説明できない成分」が含まれていると、こうした成分は誤差として同定結果に入り込むことになる。

このような成分が完全に翼の運動と無相関ならば、誤差が十分小さくなるまでサンプル数を稼ぐことで、同定結果に内在する統計的な誤差は小さく出来ると考えられるが、それには前述の誤差解析で検討したとおり、CFD としては不可能なほどの実解析時間を必要とすると考えられる。したがって、ここで改めてこのような流れ場では本手法によるフラッター解析は行えないことを強調する。

また、RANS に基づく乱流モデルを用いた場合に、定常流れ解析・非定常流れ解析にかかわらずこのような大

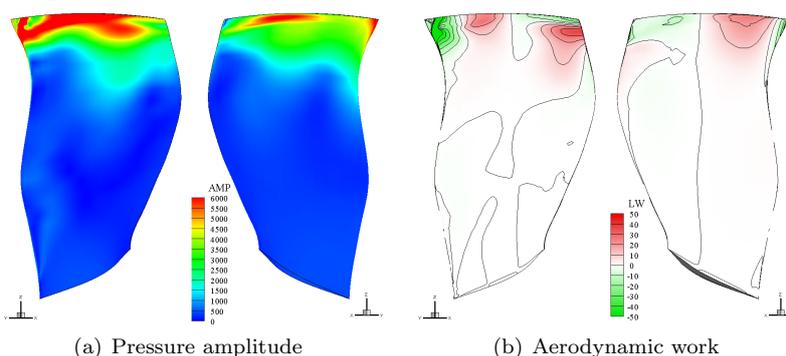


Fig. 7.61: Reconstructed self-excited aerodynamic force from FSI simulation (72.5 % speedline, 1T mode family, IBPA=0deg, calculated as "unstable aeroelastic mode")

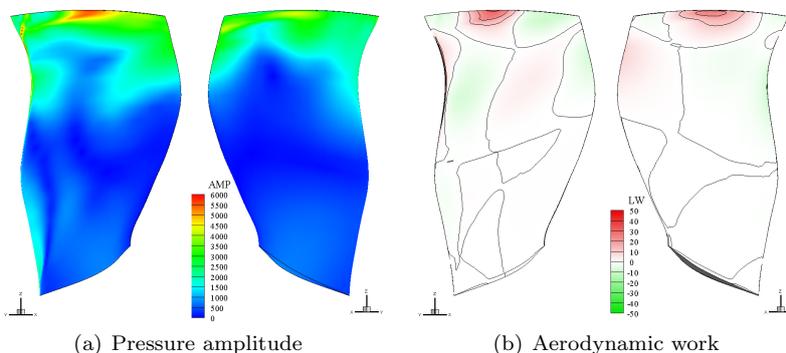


Fig. 7.62: Reconstructed self-excited aerodynamic force from FSI simulation (75.0 % speedline, 3F mode family, IBPA=-120deg, calculated as "unstable aeroelastic mode")

剥離を伴う流れが本当に正しく解けているのかどうかは、定かではない。特に剥離領域の大きさや圧力分布に着目した場合に、乱流モデルの結果は実際の流れ場とは全く異なる結果を返す可能性がある。そのため、現実の流れ現象を詳細に知る必要があるとともに、当然のことではあるが数値解析がどこまで使えるのかを知らなくてはならない。

ちなみに、このような翼の振動とは無関係な流れ変動が CFD によって現れる場合には、決められた翼の運動に対する変動空気力のフーリエ変換より自励空気力の係数を得るような、非連成のフラッター解析法を用いてもうまくいくことはないと思われる。それは、フーリエ変換は変換される信号に対して時間方向に完全に周期的であることを仮定しているため、翼振動と非同期な擾乱成分が生じた場合にはそれによる影響が十分小さくなるまでフーリエ変換に用いるサンプル数を増やさなければならず、したがって計算時間の無尽蔵な増大を招く可能性があるからである。

### 7.6.2 同定精度の悪化した点で同定された不安定翼振動について

7.4.5 では同定精度の悪化した点で不安定な空力弾性モードが 1F モード群以外に検出されたことを述べた。これらの不安定モードに対応する翼面上の自励空気力分布を示したのが Fig. 7.61, Fig. 7.62 であり、前者が 72.5 % 回転数 C 点、後者が 75 % 回転数 C 点のものを示している。圧力振幅は翼端部に負圧面・正圧面共に高い領域が偏在しており翼端付近における空力仕事も正の領域が大きい。モード同定においては、このような流れ場の不安定により発生する変動流体力によって翼が強制的に励振され翼振幅が増大している状態にある時間履歴を、自励空気力と誤認して拾ってしまっているのかも知れない。

## 7.7 空力弾性モードと翼質量の効果

最後に、連成解析によってのみ得ることができる構造振動モード間の空力的連成が本解析対象における遷音速失速フラッターの発生に対してどの程度影響しうるかを、振動モード振幅を調べることで考察する。

ここでは 80 % 回転数のフラッター境界に関して、翼の振動数を変えないように翼の比剛性  $\sqrt{E/\rho_s}$  を一定に保ちながら材料密度・ヤング率を変化させて流体力による構造振動モードの連成状態を変化させてその感度を見る。ここでは、基準となるチタン合金の密度

$$\rho_s = 4.43 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$$

の他に、以下の 2 密度

$$\rho_s = 1.8 \times 10^3 [\text{kg/m}^3] , \quad \rho_s = 0.9 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$$

に対して検討を行う。ここで前者は繊維強化プラスチック程度の材料密度、後者はさらにその半分の材料密度を想定しているこのとき、流体参照質量 (chord 長・span 長で定義) に対する翼質量の比である質量比  $\mu$  は、それぞれ

$$\mu = \frac{m_{\text{blade}}}{\frac{1}{4}\pi\rho c_{\text{ref}}^2 s_{\text{ref}}} = 101 , \quad 41.5 , \quad 20.5$$

となる。

### 7.7.1 Ti-6Al-4V の翼における空力弾性モード形状

まず、オリジナルの翼の機械的特性を用いた際の空力弾性モードに対する自由度間振幅比を Fig. 7.63 に示す。これは試験でフラッターが確認され数値解析においてもその発生点が良好に一致していた 80 % 回転数の、フラッターが発生している作動点である C 点のものである。モード間振幅比はどのモード群でもほとんどの翼間位相差で  $10^{-2}$  以下であり、構造振動モードはほとんど空力的に連成していないことがわかる。2F モード群が最大で 2 % 程度 1T モードとの連成がみられるが、2F モードはフラッターの起こらないモードなのでフラッター境界に与える影響はないと考えられる。

このように、オリジナルの翼では振動モード形状はほとんど真空中のそれと一致しているため、空力弾性モードを考える際に考慮する自由度として、全翼で同一の翼振動モードを考えれば十分であると考えられる。

### 7.7.2 翼質量の振動特性への感度

では、翼の質量を変化させた際に空力弾性モードがどのように変化するだろうか。Fig. 7.64 に、3 種の材料密度に対する連成解析より同定されたモード固有値を示す。ここで最も質量が軽い  $\mu = 20.5$  において、振動数 225Hz 以下の空力弾性モードは同定誤差が非常に大きく、正しい同定結果が得られていないものと考えられるが、それ以外の同定結果では正しい同定結果が得られていると考えられる。図からはどの材料密度に対しても負減衰となる空力弾性モードが存在し、フラッターが発生することがわかる。また、翼の密度を減少させると空力弾性モード振動数の変化が大きくなることがわかる。

Fig. 7.64(b) には、3 種の材料密度における作動点ごとの空力減衰の変化を示す。軽い翼においては空力減衰の絶対値自体は大きくなるが、フラッター発生点である 0 減衰点はほとんど変化しておらず、今回対象とした CEFS1 に生じる遷音速失速フラッターにおいては翼質量の感度は非常に小さいことがわかった。

このように翼質量の感度が小さいことを理解するために、Fig. 7.65 に 3 種の材料密度を用いた際の C 点における 1F モード群の構造振動モード間振幅比を示す。どの材料密度の結果でも 1T モードの振幅比が他の構造振動モードと比べて最も高いことから、1F モードはと最も連成しやすいといえる。しかしながら、各翼間位相差の中で相対

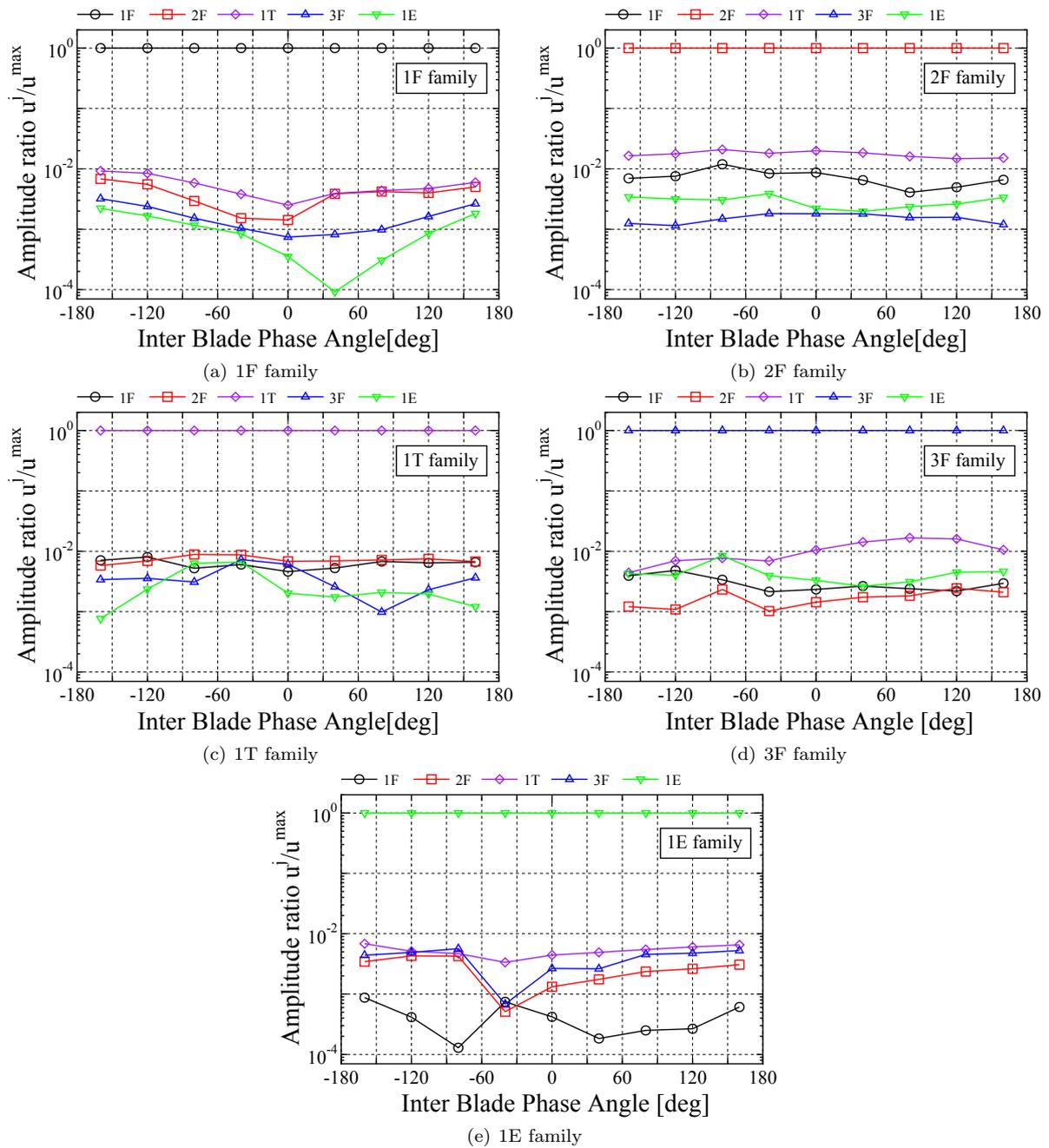


Fig. 7.63: Maximum amplitude ratio of aeroelastic modes at point C on 80% speedline

的に振幅比が大きいのは  $IBPA = \pm 160 \text{deg}$  および  $IBPA = -130 \text{deg}$  であり、フラッターモードである  $IBPA = 40 \text{deg}$  は相対的に低い値を示している。特に翼質量が最も軽い  $\mu = 20.5$  の場合でも 2% 程度であり、空力弾性モードはほとんど 1F モードの形状をしている。このように、フラッターモードにおいて振動モード形状の変化が小さいことが翼質量の感度が非常に小さいことの原因であると考えられる。

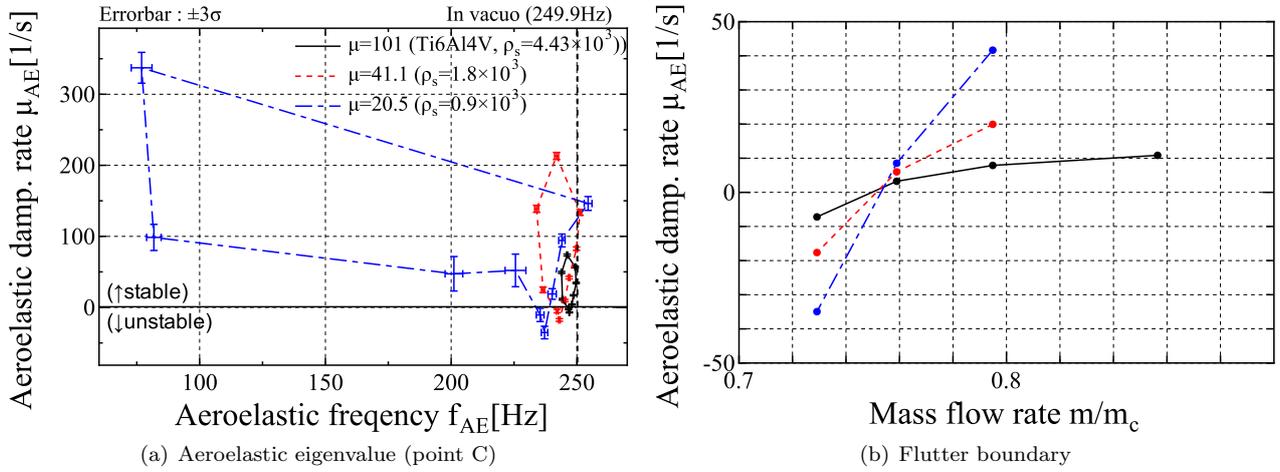


Fig. 7.64: Effect of massratio on the transonic stall flutter on the 80% speedline

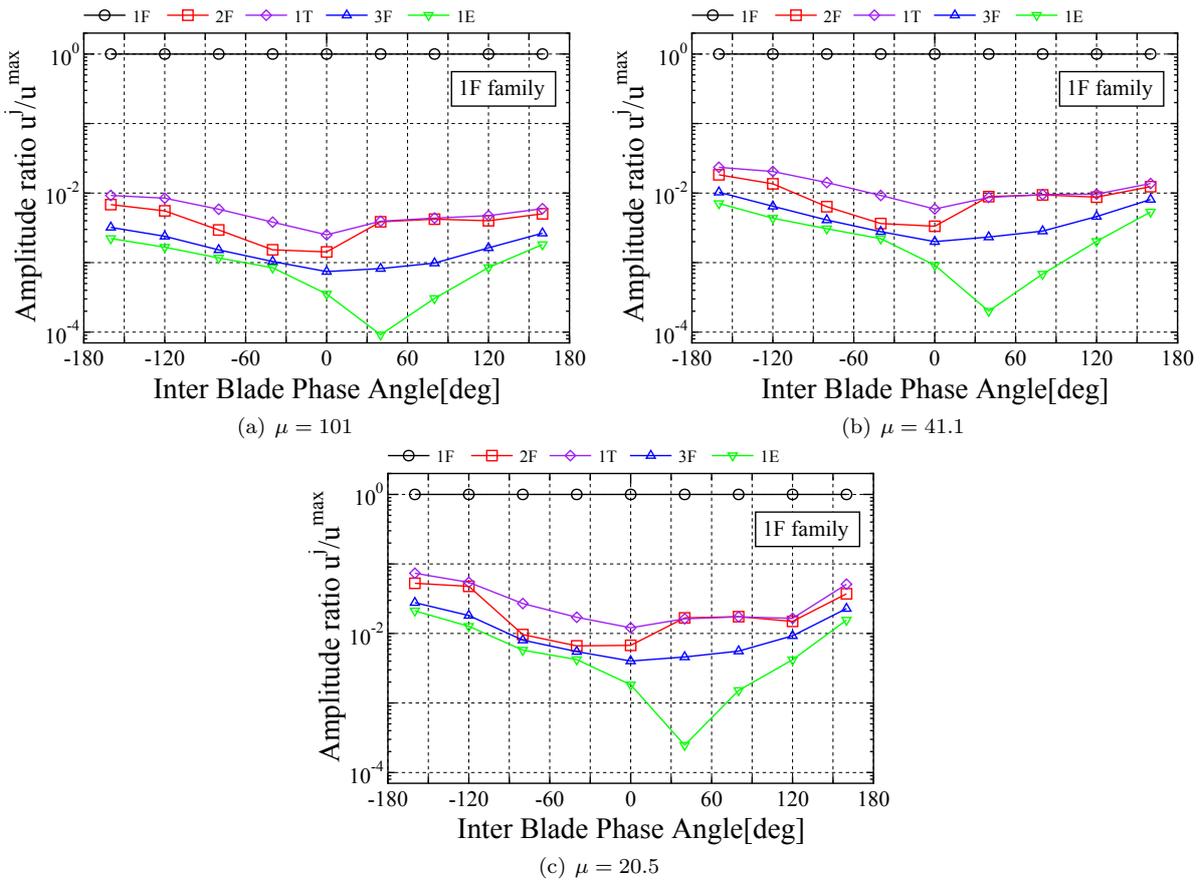


Fig. 7.65: Maximum amplitude ratio of aeroelastic modes

## 7.8 7 章のまとめ

本章では、流体構造連成解析とモード同定法を用いた翼列フラッター解析を、実際にフラッターが発生したファンリグのフラッター解析に用いてフラッターの発生原因や空力弾性モードの構成、翼構造特性の感度を明らかにすることを旨とした。

定常流れ場を対象とした解析においては、広範囲の解析に先立ち、80%回転数における解析結果より使用する乱流モデルを検討した結果、フラッター境界付近の低流量側作動点では流れ場の乱流モデル依存性がかなり大きいことがわかり、最終的に本研究では数値解析上の取り扱いやすさから Spalart-Allmaras モデルを使用することにした。

フラッター境界を含む広範な回転数と流量域におけるマップを取得し、翼面付近の流れ場と代表的な 2 つの Span 断面における流れ場を調べた。その結果、

- 低回転数側の作動点では低流量側に作動点を移すに伴い前縁のほとんどの Span 位置で剥離が生じ、また生じた低速領域が Tip 側に集積し大きな低速領域が形成される。
- 回転数を上昇させるのに伴って前縁剥離の起こる Span 高さは小さくなっていくとともに高い Span 位置で大きな剥離は見られなくなる。

といった流れ場の変化が観察された。このことから、フラッター境界前後の流れ場は回転数と流量に応じて翼前縁部分において剥離/付着流が切り替わったり、衝撃波が翼面上を大きく移動するような、作動条件に対して極めて敏感に変化する状態にあることがわかった。

続いて、定常解析で取得された流れ場を用いて、連成解析による翼列フラッター解析を行った。フラッター発生点を求める前に、モード同定に伴う同定誤差を評価し、また流れ場や空気力の周波数解析結果と関連付けてその誤差要因を評価した結果、

- 流れ自体が不安定にならず、変動空気力のほとんどが翼の振動由来の自励空気力である場合には、モード同定の  $R^2$  値も高く、エラーバーも十分小さいため、精度よく空力弾性モードが得られる。
- 翼端付近で大規模な剥離が発生する低回転数側の失速点付近作動点においては、翼の振動と無関係な変動流体力が CFD にて生じるため、自励空気力に対する信号が埋もれてしまい、 $R^2$  値は小さく、エラーバーも大きくなる。このような場合には、同定された空力弾性モードはフラッターの有無を判別するのに十分な精度を有さない。

ことが明らかとなった。また、同定された空力減衰に対する信頼区間幅とサンプル数に対する関係、誤差が増大した状態における流れ場の観察から、CFD において翼振動と無関係に不安定な流れが生じている領域で安定性を判別できるまでサンプル数を増やすことは、シミュレーションでは膨大な解析時間を要するために、事実上不可能であることが考察された。

求められたマップ上のフラッター境界において、高回転数特性曲線上では試験結果と近いものが得られたが、試験でフラッターが発生していない 80%より低回転数側においてもフラッターが発生する結果が得られた。フラッター解析の結果を元に翼面上の局所的な変動圧力場および空力仕事を可視化した結果、解析において生じた翼列フラッターは、基本的にどの回転数でも

- 作動点を失速側に移すに伴って翼負圧面上の衝撃波の足元における空力励振効果が増大すること。
- 翼正圧面における空力減衰が損なわれ、正圧面で不安定に寄与する部分が増大すること。

以上の 2 つの効果が複合してフラッターが発生していることがわかった。また、低回転数側では、流量を絞ると負圧面上から衝撃波が消失するためにフラッターが生じなくなる。しかし、低回転数側のフラッター境界付近では衝撃波が非正常に振動する遷音速バフェットが起きており、時間平均流れ場がバフェットの起こる場合と起こらない場合とで異なっている可能性があることが考察された。これより、低回転数側のフラッター解析結果の試験結果との不一致の原因として考えられることは、翼振動に対する衝撃波足元の励振効果を実際より励振側に評価されているためにフラッター境界が低回転数側でも現れた可能性がある。

最後に、同定された空力弾性モードのモード形状を調べた結果、遷音速失速フラッターに寄与する空力弾性モードはほとんど単一の翼振動モードで構成されており、また翼質量に対する感度はほとんどないことがわかった。これより遷音速失速フラッターに対する検討を行う際には空力弾性方程式による定式化を用いて構造振動モード間の連成は考える必要がなく、単一モードに対するもので十分であることがわかった。

## 第 8 章 結論

## 8.1 結論

「流体構造連成とモード同定による多自由度翼列フラッター解析の研究」と題した本研究の概要およびその結果明らかになった知見をまとめると次のようになる。

ターボ機械におけるフラッターの分類として、主として非失速の流れ場で発生する古典的フラッター、サージ線近傍でみられる失速フラッター、過回転側の非失速作動点でみられる超音速非失速フラッター、チョーク側の作動点でみられるチョークフラッターに分類される。これらの分類は主としてフラッターが生じる流れ場に着眼した分類であり、構造特性や流体による翼振動特性の変化まで含めてフラッター現象を考えた場合には、プリスク構造では翼とディスク間の連成振動モードを、プロップファンのような軽量・低ソリディティの翼列では、翼の構造振動モード間の空力的な連成をも考慮しなくてはならない。

このようにフラッター現象の影響因子には様々なものがあるが、本研究では、その中でも軽量ファン翼やオープンロータやプロップファンといった要素に対して将来的に重要性が増してくると考えられる、構造振動モード間の空力的な連成をフラッター解析において取り扱う手法を研究した。特に、流体中における振動特性が雰囲気流体の影響によって真空中のものとは大きく異なってくるような、軽量・低剛性なターボ機械の翼に対する空力弾性評価手法を確立するために、非定常流れと翼振動、さらにそれらの相互作用を同時に解くことができる流体構造連成解析に着目し、これを利用した独自の翼振動解析手法を開発した。

本研究において開発されたフラッター解析手法の特徴は、

- 連成解析で得られた翼振動の時間履歴から空力弾性方程式の自励空気力項を同定し、自励空気力と翼振動モードが連成した振動モードである「空力弾性モード」を算出する。この定式化では、周波数領域法において CFD で算出した空力微係数を用いる際に必要となる「自励空気力データベース」を構築するために複数回の CFD 計算を実施する必要はない。したがって、流体機械の作動条件に則したフラッター解析をたった 1 度の解析で、迅速に行うことができるという時間領域の連成解析特有の利点がある。
- その一方で、周波数領域法では求めることが可能だが、これまで時間領域の連成解法を用いた研究ではほとんど求められてこなかった「空力弾性モード」を算出するので、振動数、減衰率、振動モード形状といった、振動工学的なパラメータを用いて連成解析結果がわかりやすく整理される。このように、本解析手法はシステム同定を用いて周波数領域法と時間領域法の利点を組み合わせているものである。
- 決定係数や統計的に評価された同定結果の信頼区間といった量を用い、同定誤差の解析・評価手法を含めてフラッター解析法を定式化しているため、ある計算結果に対して同定が上手くいっているか否かを判断することが出来る。

とまとめることができる。

また、CFD コード・FEM コード・CFD と FEM を組み合わせた流体-構造連成解析自体にも、

- 領域間接続・通信を自動で取り扱えるマルチブロック構造格子法や、並列性の高い陰解法の導入。
- 高次要素を用いた構造解析において、線形ソルバの収束性を大きく改善する前処理法の選択や製造形状逆解析法の導入。
- FEM 格子から CFD 格子に変位を内挿する際に、CFD 格子翼面の滑らかさを保つロバストな内挿手法である移動最小二乗法を用い、フラッター解析に適した、仕事保存型の変位・流体力通信法と組み合わせる。
- 格子の破綻を防いだり複雑な格子系における翼振動を実現するために、有限要素ソルバを用いた CFD 格子のモーフィング手法を用いる。

といった工夫を取り込み、翼高さ方向に大きくねじれていたり、翼端間隙があったりといった、ターボ機械翼列特有の複雑な形状に対しても品質の高い解析が行える連成解析手法を構築した。

構築した連成解析手法を、解析解や半理論解析解をもつ、平板翼のクラシカルフラッターおよび平板翼列のクラシカルフラッターを信頼性の高い参照解として位置づけ、フラッター発生点を含む流速範囲の空力弾性モードについて検証した結果、以下のことが明らかとなった。

- 単独翼・翼列を問わず、同定されたフラッター発生点までの空力弾性モードは、振動数、減衰率、モード形状のどれもが参照解とよく一致していた。また、フラッター速度も参照解とほとんど一致していた。したがって、本解析手法では翼振動モード間の空力的干渉や流体による振動数や減衰率の変化が適切に捉えられており、翼列フラッター解析手法として用いることができる。
- モード同定に用いるサンプル数を増やすと、推定値である空力弾性モード固有値は一定の値に近づく様子や信頼区間幅幅が小さくなってモード同定の精度が向上する様子が確認され、統計的に望ましい性質を備えている。
- 平板単独翼の並進モード分岐のような、減衰率が非常に大きく過減衰的な挙動を示す空力弾性モードについては計算初期にそのモードの情報が減衰してしまうこと、また参照解では調和振動を仮定し自励空気を求めていることから、同定結果を正しく評価するのは難しい。

提案する連成解析手法でフラッター発生点までの空力弾性モードが適切に捉えられることが確認されたため、典型的な遷音速ファンリグ試験機である NASA Rotor 67 および試験において失速フラッターが観測された CEFS1 に対する静連成解析およびフラッター解析を行った。

NASA Rotor67 に対する静連成解析およびフラッター解析を通して以下のことが明らかになった。

- ファン特性曲線に与える静変形の影響を調べるために、静変形と定常流れの解析を連成させた解析を行った。その結果、連成/非連成間の特性曲線はあまり変化せず翼変形はファン性能に大きな影響を与えないこと、翼間流れが始動状態から不始動状態に変化する過程において翼に大きなねじり戻りが誘起されること、不始動状態では非連成・連成の両解析間にねじり戻りに伴って翼間衝撃波が前進する挙動により連成解析の方が流れ場を失速側に評価することがわかった。
- 下位 5 モードを取り込んだフラッター解析では、空力弾性モードは各構造振動モードの運動が支配的な「モード群, Mode family」を形成し、翼間位相差の違いにより空力減衰や振動数が真空中のものから変化するという翼列の基礎的な空力弾性系の特徴が捉えられた。
- 連成解析中で生じた局所的な変動圧力について、運動に起因して線形に生じる成分を翼面上の圧力変動履歴からモード同定と同じ要領で最小二乗法によって求め、そこから各空力弾性モードに対応した成分を求めることで翼面に作用する自励空気を再構築し、局所的な流れ場が空力減衰や励振にどのように作用しているかを解析できることがわかった。

試験において失速フラッターが観測された遷音速ファンである CEFS1 に対する CFD 解析やフラッター解析を通じて、以下のことが明らかとなった。

- フラッター解析に先立って行った定常流れ解析より、
  - フラッター境界より低回転数側の 75 % 回転数以下の作動点では、低流量側に作動点を移すに伴い前縁のほとんどの Span 位置で剥離が生じ、生じた低速領域が Tip 側に集積し大きな低速領域が形成される。
  - 回転数を上昇させるのに伴って前縁剥離の規模は小さくなる。特に、80 % 回転数から高回転数側のフラッター境界である 85 % にかけて前縁剥離が起こる Span 高さ位置が小さくなっていく。

といったように、フラッター境界前後の流れ場は回転数と流量に応じて翼前縁部分において剥離/付着流が切り替わったり、衝撃波が翼面上を大きく移動するような、作動条件に対して極めて敏感に変化する状態にあることがわかった。

- 70 % 回転数から 85 % 回転数まで 2.5 % おきに回転数を変化させ、試験結果のフラッター境界を含む広範な作動点でフラッター解析を行った。また、フラッターが生じる空力弾性モードについて翼面上に作用する自励空気を再構築してフラッター発生機構について考察した。まず、誤差解析に基づき考察された本研究で用いたフラッター解析手法の適用範囲に関して、
  - CFD 中の流れ場が安定しており、翼振動振動数以外の変動成分が生じない流れ場では、空力弾性方程式を同定する際の決定係数が十分大きく、サンプル数が少なくても信頼区間幅はフラッター境界を判別できるほどに十分小さく、本研究の手法を用いることが出来る。

- CFD において旋回失速のように剥離流れが自発的に変動し流れが不安定になるような条件では、翼振動と無相関な変動流体力が生じ、信頼区間幅が非常に大きくなって同定精度が悪化する。そのため、このような場合には同定結果はフラッターの有無を判別するのに十分な精度を有さない。
- 同定された空力減衰に対する信頼区間幅とサンプル数に対する関係、誤差が増大した状態における流れ場の観察から、統計誤差を  $1/n$  にしようとする  $n^2$  倍の解析時間が必要となる。このことより計算時間の観点からは、解析可能な時間スケールが大きく制限される CFD を用いて翼振動と無関係に不安定な流れが生じている作動条件のシミュレーション結果から信頼性の高いフラッター解析結果を得ることは不可能である。

ということがわかった。また、連成解析で得られたフラッター境界やフラッター発生機構に関して、以下のことが明らかになった。

- フラッター境界において、高回転数側の特性曲線上では試験結果と近いものが得られたが、試験でフラッターが発生していない 80 % より低回転数側においてもフラッターが発生する結果が得られた。また空力減衰はフラッター境界付近で流量に対して非常に急激に変化するため、構造減衰の感度は殆ど無い。
- 解析において生じた翼列フラッターはどの回転数においても、(1) 作動点を失速側に移すに伴って翼負圧面上の衝撃波の足元における空力励振効果が増大すること、(2) 翼正圧面における空力減衰が損なわれ、正圧面で不安定に寄与する部分が増大すること、の 2 つの効果が複合してフラッターが生じていることが原因である。
- 低回転数側のフラッター境界付近では衝撃波が非定常に振動する遷音速バフェットが起きている可能性がある。バフェットが発生した場合、時間平均流れ場には明瞭な衝撃波構造が見られず、前縁の離脱衝撃波が消失したような流れ場になる。これより、低回転数側のフラッター解析結果の試験結果との不一致の原因として考えられることは、フラッター解析に用いた CFD コードの構成ではバフェットが起きていないために、翼振動に対する衝撃波足元の励振効果が実際より大きく評価され、フラッター境界が低回転数側でも現れたのだと考えられる。
- 最後に、同定された空力弾性モードのモード形状を調べた結果、遷音速失速フラッターに寄与する空力弾性モードはほとんど単一の翼振動モードで構成されていた。また翼質量を変化させた解析を行った結果、フラッター境界に対する感度はほとんどないことがわかった。これらのことより、遷音速失速フラッターに対する検討を行う際には空力弾性方程式による定式化を用いて構造振動モード間の連成は考える必要はなく、単一モードに対するもので十分であることがわかった。

## 8.2 今後の展望

本研究では、複数構造振動モード同士の自励空気力による連成や自励空気力による振動数変化を適切に捉えることのできる解析手法を構築することを目指した研究を実施した。そして流体構造連成解析の結果から翼列の「空力弾性モード」を算出し振動特性を評価するという新たな翼振動解析のフレームワークを提案し、基礎的な問題を通じた検証と実問題への応用例を示した。

その中で十分に実施できなかった事項や、応用過程で明らかになった翼振動を適切に捉えるために重要であると考えられる事項がいくつか存在する。最後にそれらについて記したいと思う。

### 8.2.1 プロップファンおよび Counter-Rotating Open Rotor への応用

本研究では提案手法の応用対象として二種類の遷音速ファンを扱った。空力弾性モードの同定結果によれば、1 次曲げモードの作動中の空力弾性モードはほとんど単一の構造振動モードで構成されていたため、フラッター解析としては連成解析の必要ないものに分類されると判断できる。しかしながら、例えば Fig. 1.1.2 で紹介したよ

うな二重反転プロペラや Advanced Turbo Propeller では、実際に振動数・振動モードが流体の影響を大きく受けるという実験的事実がある以上、単一モードの解析は許容できない。このような高速プロペラへの応用をもって初めて本研究の成果が最大限に活用されるものと考えられる。

本研究の応用の仕方として一点注意する事項があるとすれば、二重反転プロペラの流れ場や振動現象の、数値解析における取り扱いである。実現象としては、両動翼は非定常的に干渉しあっているため、流れ場や翼振動に対して単段の動翼単体として取り扱うことが妥当ではないことが懸念される。例えば流れ解析では、前段は軸方向流入としても良いと思われるが、後段は常に前段の作り出すスワールに晒されるため、解析に用いる定常流れ場をどう求めるかには Mixing plane などを用いた工夫が必要である。このように、単段レベルで定常流れ場を求めることが出来れば、段間の干渉を無視したフラッター解析には本研究の手法はそのまま適用できる。ファンの推進性能や流れ場は空気力による翼変形の影響を少なからず受けると予想され、それを評価するためには静変形を流れ場解析と連成させた手法が役に立つと思われる。

また、両段を計算領域として取り込み、前段・後段の干渉まで考慮した High-Fidelity な振動解析を行うとすれば、両動翼は常に「動・動翼干渉」による強制空気力に晒されることになる。したがってこのような系で空力弾性モードの同定を考える際には、例えばシステム同定の同定対象として、自励空気力項のみでなく、翼枚数と回転数に比例する強制空気力項まで取り込むといったように、強制空気力と自励空気力を明確に分離するような工夫をする必要があると考えられる。

### 8.2.2 システム同定手法の翼振動計測のリグ試験への応用

ターボ機械作動中における翼の減衰率を計測するのは、特に動翼で非常に難しいと言われている。それは翼が高速で回転しているからである。そのため、フラッター現象に限って言えば、特殊な振動計測を行わないリグ試験では通常フラッター発生点しか知り得ず、それ以外の作動点における減衰率（サブクリティカル減衰率ということがある）を評価できない。これは、安全な作動範囲で作動点を動かした際の減衰率推移をモニタリングできないということであって、原理的にはどの作動点でも空力減衰が求まる数値解析結果との相関を取り評価することが難しい。本研究でも、7章ではフラッター発生点（＝零減衰点）のみを試験結果との比較するにとどまっており、サブクリティカルな領域においての空力減衰は比較されていない。この領域の動翼の空力弾性モードや減衰率をモニターできれば、実現象や解析結果と試験結果の間のミスマッチに関する理解がより進むと考えられる。

動翼の減衰率を取得する手法としては、外部から電磁気力・空気吹付け・音響的といった手法で翼を特定の翼間位相差で強制加振し、自由減衰挙動から減衰率を計測する方法がある。しかし、加振を周方向のスピンングモードに同期させる複雑な制御が必要なこと、空気吹き出しでは流れ場を変えてしまうといった欠点もある。

システム同定を援用し、チップタイミングシステムなどで計測した翼振動の時間履歴から動翼に作用する自励空気力をダイレクトに推定することができれば、強制加振装置なしに全ての翼間位相差に対する翼振動の減衰率を知ることができる。このような計測が可能になれば、リグ試験中に常に減衰率をモニターし、減衰率が 0 に近づくと警告を出すようなオンライン・フラッター予知システムが作れるであろう。

### 8.2.3 高精度非定常流体解析と翼振動解析を接続するスケール分離型翼振動解析

第 7 章で取り扱ったファン動翼の遷音速失速フラッターは、部分回転数の失速側作動点という、非常に複雑な流れ現象が生じていると思われる作動状態で発生している。そのため、数値解析で本当にこのような流れ場が「正しく」解けているのか、言い換えれば、衝撃波の位置や剥離領域の大きさといったフラッターを捉えるうえで鍵となる物理現象が大きな妥当性を損なわない範囲で計算結果に反映されているか、という事項を追求する必要があると考えられる。

RANS による解析結果からわかる範囲では、部分回転数においては翼根付近はほぼ亜音速になっているが、翼端付近では相対流入流速が超音速となり、Span 方向に超音速・亜音速が切り替わるような遷音速の状態となっている。さらに失速側の作動点では、以下の流れ現象が共存・相互作用する流れ場を扱わなくてはならない。

- 翼根～翼高さ中央までの「前縁剥離」.
- 前縁剥離下流の低速流体が負圧面を伝って翼端方向に移動する「二次流れ」
- 離脱衝撃波と二次流れとの干渉
- 翼端付近に存在する「離脱衝撃波」と前縁剥離の切り替わり, 衝撃波バフエット
- 離脱衝撃波前方の超音速付着流域における「乱流遷移」

このような現象は, それぞれをとってみても CFD で再現するのは非常に難しい. ちなみに筆者らは, このうちの「前縁剥離」に着目した検討を行った. 一般的な 1 方程式・2 方程式型含む 5 種類の乱流モデル, 高次精度風上バIAS 差分法の WCNS による擬似直接解法を用いて, 前縁剥離を伴う薄翼翼列を対象とした流れ解析と, 圧力分布や剥離泡長さに着目した評価を行った [116]. インシデンスが小さい際は RANS は妥当な圧力分布を返すが, インシデンス 10deg という大インシデンスではどの乱流モデルでも剥離泡部分の圧力低下を全く模擬できないという結果が得られ, 複雑な乱流流れ場の CFD 解析の困難さを痛感するものであった. 前縁剥離 1 つを取り上げても上記のような状況であるから, ましてや二次流れや乱流遷移まで関与する流れ状態というのは, 一部の現象でモデルがうまく作用しないと他の部分の流れ場にその影響が及んでしまうため, 問題は一層複雑になる. また, 7 章で議論したように, 旋回失速や衝撃波バフエットに似た変動流れも実現象では生じていると思われる. このような条件のもとで「定常流れ場」が定常の RANS 解析によって安定に求まることはあまり期待できない.

近年着目されている, 乱流現象をある程度解像する非定常の流れ解析手法である Large eddy simulation (LES) や Detached eddy simulation (DES), Wall-modeled LES によれば, これらの困難がある程度克服されることが考えられる. しかしながら, 翼振動までを扱おうとした場合には, その計算コストの高さに起因する別の困難さがある.

翼列フラッター現象は, 周方向のスピンングモードで生じるため本質的に全周スケールの解析を要求する. しかしながら, LES や DES では乱流を解くために高密度の格子が必要であり, また時間スケールは翼振動の時間スケール (これは翼振動 1 周期あたり 10 (無次元振動数  $k = c\omega/2V = 0.3$ ) ~ 30 ( $k = c\omega/2V = 0.1$ ) Flow unit に対応.) となる. よって, 流れ解析に限った翼間 1 流路の解析ならまだしも, フルスパン・ファン全周の連成振動解析は二, 三十年後でもグランドチャレンジの域を出ないだろう.

したがって, LES や DES の翼振動解析への応用を考える際には, 流れ現象と翼振動現象の空間・時間スケール差を克服するために,

- 翼間単流路の「時間平均流れ場」は, LES/DES 結果を時間平均することで求める
- 翼振動に由来する「自励空気力」(即ち, 翼振動に起因する流れ場中の擾乱の発生・伝播現象) は時間平均流れ場だけに依存し, それ以外の流れ現象の変動成分の影響を受けないという仮定のもと, 線形化 Euler/RANS で解く

という, 解析手法分離型のアプローチが考えられる. 第 7 章で議論したような試験・解析間のフラッター境界のミスマッチの改善には, 詳細な非定常流れ解析や試験データによる, 流れ現象の理解に基づく適切な乱流モデル選択指針が確立されたり, 詳細解析結果を取り込む新たな翼振動解析フレームワークが開発されたりすることが期待される.

## 参考文献

- [1] 室岡武. “7 高バイパス比ファンの空力設計技術 (ガスタービンおよび航空エンジンの最新技術動向)”. GTSJ ガスタービンセミナー資料集 (36), pp.61-70, Jan. 2008.
- [2] 正木大作, 二村尚夫, 西澤敏雄. “低騒音ファン (基本型) の設計”. JAXA research and development report, JAXA-RR-10-002, Jun. 2010.
- [3] Repp, R., Gentile, D., Hanson, D., and Chundururu, S. “Design and Test of Fan/Nacelle Models Quiet High-Speed Fan Design”. NASA CR-2003-212369, Jul. 2003.
- [4] Fujimoto, T., Kusunoki, I., Ota, T., and Masaki, D. “A Study on Stacking Method in Advanced Fan Blade”. Proceeding of The International Gas Turbine Congress 2011, IGTC2011-ABS-0246, 2011.
- [5] 藤村哲司, 西川秀次, 守屋信彦, 今村満勇. “GENx エンジンの開発”. IHI 技報 Vol.48 No.3 (2008-9).
- [6] Rolls-Royce(著), 日本航空技術協会 (翻訳). “ザ・ジェット・エンジン”. 日本航空技術協会.
- [7] Jackson, P. “Aero engines”. IHS Jane’s All the World’s Aircraft Development and Production, pp. 1007-1011, 2014.
- [8] Gaffin, W. O. “Engine Component Improvement - Performance Improvement Program JT9D-7 3.8 Aspect Ratio Fan”. NASA -CR-159806, Jun. 1980.
- [9] “The Pratt and Whitney PW1100G Geared Turbofan Engine”. The Flying Engineer Technically and Operationally Commercial Aviation, 8th Jul. 2013.
- [10] “Completion of state tests of An-70 military transport aircraft powered by D-27 propfan engines”. Ivchenko Progress, 12th Jun. 2014.
- [11] “Website: Gas Turbine Engineering Research and Production Center SALUT - Production - Aeroengines - D-27”.
- [12] 中道二郎. “フラッター解析における連成力学”. 日本数値流体力学学会誌 第9巻 第4号 pp.116-121, Aug. 2001.
- [13] Kielb, R. E. and Imregun, M. “NASA Aeroelasticity Handbook Volume 2: Design Guides Part 2, Chapter: Aeroelasticity in Axial Flow Turbomachines”. NASA TP 2006-212490 Vol2/Part2, 2006.
- [14] McGee-III, O. G., Fang, C., and El-Aini, Y. “A Reduced-Order Meshless Energy Model for the Vibrations of Mistuned Bladed Disks: Part I Theoretical Basis”. Journal of Turbomachinery, Vol. 135, 061001-1, Nov. 2013.
- [15] Kielb, R. E., Barter, J. W., Thomas, J. P., and Hall, K. C. “Blade Excitation by Aerodynamic Instabilities - a Compressor Blade Study”. ASME Paper, GT-2003-38634, 2003.
- [16] Sanders, A. J. “Nonsynchronous Vibration (NSV) due to a Flow-Induced Aerodynamic Instability in a Composite Fan Stator”. Transactions of the ASME, Vol. 127, pp. 412-421, Apr. 2005.
- [17] Platzer, M. F. and Carta, F. O. E. “AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial-Flow Turbomachines Volume 1: Unsteady Turbomachinery Aerodynamics”. AGARDograph No. 298, Vol. 1, 1988.
- [18] Platzer, M. F. and Carta, F. O. E. “AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial-Flow Turbomachines Volume 2: Structural Dynamics and Aeroelasticity”. AGARDograph No. 298, Vol. 2, 1988.
- [19] Jeffers, J. D. and Meece, C. E. “F100 Fan Stall Flutter Problem Review and Solution”. Journal of Aircraft Vol. 12, No. 4, pp.350-357, Apl. 1975.
- [20] Weir, D. “Design and Test of Fan/Nacelle Models Quiet High-Speed Fan”. NASA CR-2003-212370, Jul. 2003.
- [21] Kontos, K., Weir, D., and Ross, D. “Quiet High Speed Fan II (QHFSF II): Final Report”. NASA CR-2012-217451, Aug. 2012.
- [22] Aotsuka, M., Tsuchiya, N., Horiguchi, Y., Yamamoto, K., and Nozaki, O. “Numerical Simulation of Transonic Fan Flutter with 3D N-S CFD Code”. ASME Paper GT2008-50573, 2008.
- [23] Sanders, A. J., Hassan, K. K., and Rabe, D. C. “Experimental and Numerical Study of Stall Flutter in a Transonic Low-Aspect Ratio Fan Blisk”. Transactions of the ASME, Vol. 126, pp. 166-174, Jan, 2004.

- 
- [24] Stargardter, H. "Subsonic/Transonic Stall Flutter Study Final Report". NASA-CR-165256, Pratt and Whitney Aircraft Group, Jun, 1979.
- [25] Halliwell, D. G. "Fan Supersonic Flutter: Prediction and Test Analysis". Procurement Executive, Ministry of Defence Aeronautical Research Council Reports and Memoranda R and M No. 3789, Rolls-Royce Limited, 1971.
- [26] Nagashima, T. and Whitehead, D. S. "Linearized Supersonic Unsteady Flow in Cascades". Procurement Executive, Ministry of Defence Aeronautical Research Council Reports and Memoranda R and M No. 3811, University Engineering Department, Cambridge, 1978.
- [27] Sagerser, D. A. and Ludemann, S. G. "Large-Scale Advanced Propfan (LAP) Program Progress Report". NASA Technical Memorandum 87067, 1985.
- [28] Mehmed, O. and Kaza, K. R. V. "Experimental Classical Flutter Results of a Composite Advanced Turboprop Model". NASA Technical Memorandum 88792, 1987.
- [29] Kaza, K. R. V., Mehmed, O., Narayanan, G. V., and Murthy, D. V. "Analytical Flutter Investigation of a Composite Propfan Model". NASA Technical Memorandum 88944, 1988.
- [30] Ducharme, E. H. "Velocity Scaled Aeroelastic Testing of an Unducted Fan". Massachusetts Institute of Technology Ph. D thesis, Sep. 1987.
- [31] 花村庸治, 田中英穂. "翼列における2自由度連成フラッタ 第1報, 非定常空気力の計算と実験". 日本機械学会論文集 32(244), pp.1823-1841, 1966.
- [32] 花村庸治, 田中英穂. "翼列における2自由度連成フラッタ 第2報, フラッタ速度と翼列条件との関係". 日本機械学会論文集 33(247), pp.377-389, 1967.
- [33] Clark, S. T. "Coupled-Mode Flutter for Advanced Turbofans". Duke University Master thesis, Mar. 2011.
- [34] Datta, A. and Johnson, W. "An Assessment of the State-of-the-art in Multidisciplinary Aeromechanical Analyses". The AHS Specialists Conference on Aeromechanics, San Francisco, CA, Jan. 2008.
- [35] Panovsky, J. and Kielb, R. E. "A Design Method to Prevent Low Pressure Turbine Blade Flutter". Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 122, pp. 89-98, Jan. 2000.
- [36] Shibata, T. and Kaji, S. "Role of Shock Structures in Transonic Fan Rotor Flutter". Proceedings of the 8th International Symposium of Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity of Turbomachinery, pp. 773-747, 1998.
- [37] Sikowski, P. D. and Hall, K. C. "A Coupled Mode Analysis of Unsteady Multistage Flows in Turbomachinery". Journal of Turbomachinery, Vol. 120, No. 3, pp. 410-421, Jul. 1998.
- [38] Hall, K. C. and Ekici, K. "Multistage Coupling for Unsteady Flows in Turbomachinery". AIAA Journal, Vol. 43, No. 3, pp. 624-632, Mar. 2005.
- [39] Vahdati, M., Simpson, G., and Imregun, M. "Mechanisms for Wide-Chord Fan Blade Flutter". ASME Paper GT2009-60098, 2009.
- [40] Vahdati, M., Sayma, A. I., Imregun, M., and Simpson, G. "Influence of Intake on Fan Blade Flutter". ASME Paper GT2014-25859, 2014.
- [41] Castanier, M. P. and Pierre, C. "Modeling and Analysis of Mistuned Bladed Disk Vibration: Status and Emerging Directions". Journal of Propulsion and Power, Vol. 22, No. 2, pp. 384-396, Mar.-Apr. 2006.
- [42] Nipkau, J., Kuhhorn, A., and Beirow, B. "Modal and Aeroelastic Analysis of a Compressor Blisk Considering Mistuning". ASME Paper GT2011-45849, 2011.
- [43] Beirow, B., Giersch, T., Kuhhorn, A., and Nipkau, J. "Forced Response Analysis of a Mistuned Compressor Blisk". Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 136, 062507, Jun. 2014.
- [44] Beirow, B., Giersch, T., Kuhhorn, A., and Nipkau, J. "Optimization-Aided Forced Response Analysis of a Mistuned Compressor Blisk". Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 137, 012504, Jun. 2015.
- [45] Mayorca, M. A., Vogt, D. M., Martensson, H., and Fransson, T. H. "Prediction of Turbomachinery Aeroelastic Behavior From a Set of Representative Modes". ASME Paper GT2011-46690, 2011.
- [46] Carstens, V., Kemme, R., and Schmitt, S. "Coupled Simulation of Flow-Structure Interaction in Turbomachinery". Aerospace Science and Technology, Vol. 7, pp. 298-306, 2003.
- [47] Vahdati, M., Sayma, A. I., Imregun, M., and Simpson, G. "Multirow Forced Response Modeling in Axial-Flow Core Compressors". Journal of Turbomachinery, Vol. 129, (2), pp. 412-420, Apr. 2007.
- [48] Kim, T. "System Identification for Coupled Fluid Structures: Aerodynamics is Aeroelasticity Minus Structure". AIAA Journal Vol. 49, No. 3, Mar. 2011.
-

- [49] Hall, K. C., Thomas, J. P., and Dowell, E. H. "Proper Orthogonal Decomposition Technique for Transonic Unsteady Aerodynamic Flows". AIAA Journal Vol. 38, No. 10, Oct. 2000.
- [50] McNamara, J. J. and Friedmann, P. P. "Flutter-Boundary Identification for Time-Domain Computational Aeroelasticity". AIAA Journal Vol. 45, No. 7, pp. 1546-1555, Oct. 2007.
- [51] Balajewicz, M. and Dowell, E. "Reduced-Order Modeling of Flutter and Limit-Cycle Oscillations Using the Sparse Volterra Series". Journal of Aircraft Vol. 49, No. 6, pp. 1803-1812, Nov.-Dec. 2012.
- [52] 山田均, 宮田利雄, 中島州一. "送風時の振動モード情報を利用した非定常空気力推定法の開発". 土木学会論文誌 No. 537, Vol. I-35, pp. 183-190, 1995.
- [53] 岩本政巳, 藤野陽三. "有限次数近似モデルに基づく橋桁の陽邸上空気力同定の適用性". 土木学会論文誌 No. 696, Vol. I-58, pp. 299-310, 2002.
- [54] 塩入淳平. "ガスタービン翼の振動の研究(第3報) 軸流機翼列翼のフラッタの一般理論". 機械試験所所報 第9巻 第6報, Nov. 1955.
- [55] 塩入淳平. "ガスタービン翼の振動の研究(第5報) 一般理論に対する補遺". 機械試験所所報 第10巻 第1報, Jan. 1956.
- [56] May, M. "Model Updating for the Aeroelastic ROM of a Modern Blisk". ISUAAAT13-S13-7, 2012.
- [57] 小野京右, 武川浩土. "一般粘性減衰系に対する複素モード解析解の力学的考察". 日本機械学会誌第63巻第608号, Apl. 1997.
- [58] 東京大学教養学部統計学教室編. "基礎統計学 III 自然科学の統計学". 東京大学出版会.
- [59] Donea, J., Huerta, A., Ponthot, J. P., and Ferran, A. R. "Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods". Encyclopedia of Computational Mechanics, John Wiley and Sons, Ltd.
- [60] Wilcox, D. C. "Turbulence Modeling for CFD Second Edition". DCW Industries, Inc., 1998.
- [61] 京谷孝史(著), 非線形 CAE 協会(編集). "よくわかる連続体力学ノート". 森北出版, 2008.
- [62] Roe, P. L. "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes". Journal of Computational Physics, Volume 43, Issue 2, pp.357-372, Oct. 1981.
- [63] Van Leer, B. "Flux-vector splitting for the Euler equations". Eighth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, Volume 170, pp.507-512, 1982,.
- [64] Liou, M. S. and Steffen, C. J. J. "A New Flux Splitting Scheme". Journal of Computational Physics, Volume 107, Issue 1, pp.23-39, Jul. 1993.
- [65] 嶋英志, 城之内忠正. "設計における数値解析の活用について(その12) ~一粒子的風上法とその検証~". 航空宇宙技術研究所特別資料 27号, 1994.
- [66] Shima, E. and Kitamura, K. "Parameter-Free Simple Low-Dissipation AUSM-Family Scheme for All Speeds". AIAA Journal, Vol. 49, No. 8, Aug. 2011.
- [67] 藤井孝蔵. "流体力学の数値計算法". 東京大学出版会, 1994.
- [68] Choi, Y. H. and Merkle, C. L. "The Application of Precondition in Viscous Flows". Journal of Computational Physics, Vol. 105, pp.207-223 (1993).
- [69] 山本悟. "超低速から超音速まで対応できる三次元凝縮計算コードの開発". 2001年ターボ機械・航空宇宙の空力伝熱セミナー, 2001.
- [70] 嶋英志. "圧縮性 CFD による低マッハ数流れ計算のための新しい陰的時間積分法". 第25回数値流体力学シンポジウム 講演論文集 C02-4, 2011.
- [71] 寺坂晴夫, 大林茂. "一般状態方程式を用いた圧縮性流体解析コードの開発(2)". 第17回数値流体力学シンポジウム 講演論文集 C11-2, 2003.
- [72] 嶋英志. "構造/非構造 CFD のための簡単な陰解法". 第29回流体力学講演会講演集, 1997.
- [73] 嶋英志, 北村圭一. "全速度スキームと前処理付陰解法を用いた空力音解析手法について". 第24回数値流体力学シンポジウム 講演論文集 C7-3, 2010.
- [74] 大宮司久明, 三宅裕, 吉澤徹. "乱流の数値流体力学 モデルと計算法". 東京大学出版会, 1998.
- [75] Spalart, P. R. and Allmaras, S. R. "A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows". Recherche Aerospaciale, No. 1, pp. 5-21, 1994.
- [76] Rumsey, C. L. "Apparent Transition Behavior of Widely-Used Turbulence Models". International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 28, Issue 6, pp.1460-1471, Dec. 2007.

- [77] Allmaras, S. R., Johnson, F. T., and Spalart, P. R. "Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model". Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7), ICCFD7-1902, Jul. 2012.
- [78] Wilcox, D. C. "Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models". AIAA Journal, Vol. 26, No. 11, pp.1299-1310, 1988.
- [79] Durbin, P. A. "On the  $k - \varepsilon$  stagnation point anomaly". International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 17, No. 1, pp.89-90, 1996.
- [80] Kato, M. and Launder, B. E. "The Modelling of Turbulent Flow Around Stationary and Vibrating Square Cylinders". 9th Symposium on Turbulent Shear Flows, Kyoto, Japan, paper 10-4, Aug. 1993.
- [81] K. Abe, Y. J. Jang, M. A. L. "An investigation of wall-anisotropy expressions and length-scale equations for non-linear eddy-viscosity models". International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 24, pp.181-198, 2003.
- [82] Giles, M. B. "Nonreflecting Boundary Conditions for Euler Equation Calculations". AIAA JOURNAL Vol. 28, No. 12, 1990.
- [83] 久田俊明, 野口裕久. "非線形有限要素法の基礎と応用". 丸善, 1996.
- [84] 鷲津, 宮本, 山田, 山本, 河合. "有限要素法ハンドブック I 基礎編". 培風館, 1981.
- [85] 梶島岳夫. "乱流の数値シミュレーション". 丸善, 1999.
- [86] 日本計算工学会 (編), 山田貴博 (著). "高性能有限要素法". 丸善, 2007.
- [87] 矢川元基・宮崎則幸編. "計算力学ハンドブック". 朝倉書店.
- [88] Ludwig, T., Merazzi, S., Gehri, A., Vos, J. B., Bucher, B., and Guillaume, M. "A Tool Chain for Aero-Elastic Simulations". Twelfth Australian Aeronautical Conference. Melbourne: Engineers Australia, pp.229-243, 2007.
- [89] Hounjet, M. and Meijer, J. "Evaluation of elastomechanical and aerodynamic data transfer methods for nonplanar configurations in computational aeroelastic analysis". NLR-TP-95690 U, National Aerospace Laboratory NLR, 1995.
- [90] Boer, A. D., Zuijlen, H. V. Z., and Bijl, H. "Comparison of the Conservative and a Consistent Approach for the Coupling of Non-matching Meshes". European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD, 2006.
- [91] Lancaster, P. and Salkauskas, K. "Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods". Mathematics of Computation, Vol. 37, No. 155, pp.141-158, Jul. 1981.
- [92] Carr, J. C., Beatson, R. K., Cherrie, J. B., Mitchell, T. J., Fright, W. R., McCallum, B. C., and Evans, T. R. "Reconstruction and Representation of 3D Objects with Radial Basis Functions". SIGGRAPH 01: Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, Aug. 2011.
- [93] Badcock, K. J., Moosa, A., and Richards, B. E. "Intergrid Transformation for Aircraft Aeroelastic Simulations". AIAA Paper 2003-3512, 2003.
- [94] Saad, Y. "Iterative Methods for Sparse Linear Systems Second Edition". Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2003.
- [95] Saad, Y. "Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems Second Edition". Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2011.
- [96] Theodorsen, T. "General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter". NACA Report No. 496, 1935.
- [97] Whitehead, D. S. "AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial-Flow Turbomachines Volume 1: Unsteady Turbomachinery Aerodynamics, Chapter III: Classical Two-Dimensional Methods". AGARDograph No. 298, Vol. 1, 1988.
- [98] Strazisar, A. J., Wood, J. R., Hathaway, M. D., and Suder, K. L. "Laser Anemometer Measurements in a Transonic Axial-Flow Fan Rotor". NASA TP-2879, Nov. 1989.
- [99] Chima, R. V. "Viscous Three-Dimensional Calculations of Transonic Fan Performance". NASA TM-103800, May. 1991.
- [100] Chuang, H. A. and Verdon, J. M. "A Nonlinear Numerical Simulator for Three-Dimensional Flows Through Vibrating Blade Rows". Journal of Turbomachinery, Vol. 121, No. 2, pp. 348-357, 1999.
- [101] Reddy, T. S. R. and Bakhle, M. A. "Aeroelastic Computations of a Compressor Stage Using the Harmonic Balance Method". NASA TM 2010-216240, Jul. 2010.

- [102] Elder, R., Woods, I., Patil, S., Holmes, W., Steed, R., and Hutchinson, B. "Investigation of Efficient CFD Methods for the Prediction of Blade Damping". ASME Paper GT2013-95005, 2013.
- [103] Doi, H. and Alonso, J. J. "Fluid/Structure Coupled Aeroelastic Computations for Transonic Flows in Turbomachinery". ASME Paper GT-2002-30313, 2002.
- [104] Sadeghi, M. and Liu, F. "Coupled Fluid-Structure Simulation for Turbomachinery Blade Rows". AIAA Paper AIAA 2005-0018, 2005.
- [105] Im, H. S., Chen, X., and Zha, G. C. "Detached Eddy Simulation of Transonic Rotor Stall Flutter Using a Fully Coupled Fluid-Structure Interaction". ASME Paper GT2011-45437, 2011.
- [106] Liou, M. S. and Yao, W. "Flutter Analysis for Turbomachinery Using Volterra Series". ASME Paper GT2014-25474, 2014.
- [107] Wilson, M. J., Imregun, M., and Sayma, A. I. "The Effect of Stagger Variability in Gas Turbine Fan Assemblies". Journal of Turbomachinery, Vol. 129, No. 2, pp. 404-411, 2006.
- [108] Janke, C., Karger, K., Gaun, L., Bestle, D., and Huppertz, A. "3D CFD Compressor Map Computation Process Accounting for Geometry Changes due to Off-design Operation Loads". ASME Paper GT2014-26131, 2014.
- [109] Murooka, T., Goto, S., Mizuta, I., and Kodama, H. "New Concept Design and Development of an Advanced Transonic Fan Rotor". IGTC2007 Tokyo TS-053, 2007.
- [110] 青塚瑞穂, 土屋直木, 堀口泰生, 山本一臣, 野崎理. "3次元非定常NSコードを用いたファンフラッタの数値解析". 第35回ガスタービン定期講演会講演論文集, Sep. 2007.
- [111] 青塚瑞穂, 土屋直木, 加藤大, 堀口泰生, 山本一臣, 野崎理. "ファン遷音速失速フラッタの発生機構の数値解析". 第36回ガスタービン定期講演会講演論文集, Oct. 2008.
- [112] Aotsuka, M., Tsuchiya, N., Kato, D., Horiguchi, Y., Yamamoto, K., and Nozaki, O. "Numerical Simulation of Transonic Stall Flutter in Fan Stage Configuration". ISUAAAT12, I12-S9-2, 2009.
- [113] Aotsuka, M. and Murooka, T. "Numerical Analysis of Fan Transonic Stall Flutter". ASME Paper GT2014-26703, 2014.
- [114] Snyder, L. E. and Burns, D. W. "NASA Aeroelasticity Handbook Volume 2: Design Guides Part 2, Chapter: Forced Vibration and Flutter Design Methodology". NASA TP 2006-212490 Vol2/Part2, 2006.
- [115] Lepicovsky, J., McFarland, E. R., Chima, R. V., Capece, V. R., and Hayden, J. "Intermittent Flow Regimes in a Transonic Fan Airfoil Cascade". NASA TM-2002-211375, Feb. 2002.
- [116] Tateishi, A., Watanabe, T., Himeno, T., and Inoue, C. "Unsteady Flow Simulation of Leading-edge Separation in Thin Airfoil Cascade: A Modification to Turbulence Model". ASME Paper GT2015-43849, 2015.
- [117] del Alamo, J. C. and Jimenez, J. "Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels". Physics of Fluids, Vol. 15, No. 6, pp. L41-L44, Jun. 2003.
- [118] "Turbulence Modeling Resource: 2D Zero Pressure Gradient Flat Plate Verification Case". NASA Langley reserch center, <http://turbmodels.larc.nasa.gov/>.
- [119] "Turbulence Modeling Resource: Axisymmetric Separated Boundary Layer". NASA Langley reserch center, <http://turbmodels.larc.nasa.gov/>.
- [120] Coles, D. "The law of the wake in the turbulent boundary layer". Journal of Fluid Mechanics, Vol. 1, pp.191-226, 1956.
- [121] Driver, D. M. and Johnston, J. P. "Experimental Study of a Three-Dimensional Shear-Driven Turbulent Boundary Layer with Streamwise Adverse Pressure Gradient". NASA TM-102211, 1990.
- [122] Grosvenor, A. D. "RANS Prediction of Transonic Compressive Rotor Performance Near Stall". ASME Paper GT2007-27691, 2007.
- [123] エリ・ランダウ(著), イェ・リフシッツ(著), 佐藤常三(翻訳), 石橋善弘(翻訳). "弾性理論(ランダウ・リフシッツ理論物理学教程)". 東京図書.
- [124] 日本機械学会編. "機械工学便覧 基礎編 2 機械力学". 丸善, 2004.
- [125] ホレーズ・ラム(著), 今井 功(翻訳), 橋本 英典(翻訳). "ラム流体力学 < 1 >". 東京図書.
- [126] 山本一臣, 高木亮治, 山根敬, 榎本俊治, 山崎裕之, 牧田光正, 岩宮敏幸. "CFD 共通基盤プログラム UPACS の開発". 第14回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 2000.
- [127] 向井純一, 山本一臣, 山根敬, 野崎理. "UPACS によるエンジン内部流れの計算". 航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2001 論文集, pp. 81-86, 2002.

# 付録 A コードの基礎的な検証

## A.1 流体ソルバおよび移動境界問題に対する検証

### A.1.1 流体ソルバおよび移動境界問題に対する検証

時間進行法における三点後退差分スキームの検証として、1[m]の衝撃波管を計算した。左の高圧室と右の低圧室に静止気体が封入されており、 $t = 0$ に仕切りが取り外される。作動流体を理想気体の空気とし、初期条件  $v_1$ [m/s],  $\rho$ [kg/m<sup>3</sup>],  $p$ [Pa] を次のように与えた (Sod's shock tube problem)。 $R_{gas} = 287.1$ [J/kgK] は気体定数である。

$$v_{1L} = 0, \rho_L = 1.0, p_L = 1.0 \times 10^5, T_L = \frac{p_L}{\rho_L R_{gas}} \quad (A.1)$$

$$v_{1R} = 0, \rho_R = 0.125, p_R = 1.0 \times 10^4, T_R = \frac{p_R}{\rho_R R_{gas}} \quad (A.2)$$

Case No.	スキーム	時間精度	$N_x$	$\Delta x$ [m]
Case 1	BDF3	2nd	100	1/100
Case 2	BDF3	2nd	200	1/100
Case 3	BDF3	2nd	2000	1/1000

格子幅を軸方向に 100 点, 200 点, 2000 点をとったケースをそれぞれ Case 1 3 とする。非粘性の計算で時間二次精度の時間進行を行い、 $7.2 \times 10^{-4}$ [sec] 後の結果を表示する。

Fig. A.1 に、流速、温度、圧力、密度に対するプロファイルを示す。格子を細かくするごとに最も格子の細かい解である Case 3 に近づいており、また異常な振動が生じていないことから、衝撃波を伴う圧縮性流体の流れ場が安定に解けていることがわかる。

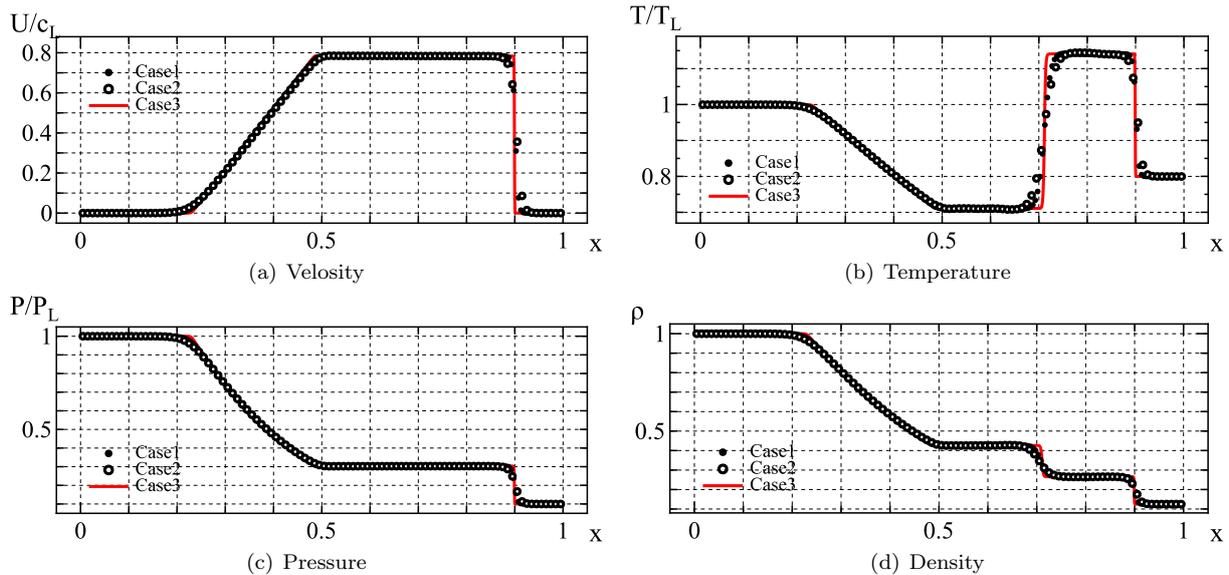


Fig. A.1: Results of shock-tube problem

## A.1.2 一様流保存問題

時間進行法に三点後退差分を適用した流体ソルバが一様流保存を満たすかどうか検証した。テストケースを Table. A.1 に示す。検証には  $50 \times 50$  の直交格子を用いた。格子が動いた際に生じる一様流からのずれがどれだけであるかを確かめる。スキームは、BDF2 は 2 点後退差分に有限体積的なヤコビアンの評価法を用いたもの、BDF3-1 は 3 点後退差分に BDF2 で用いた有限体積的なヤコビアンの評価法を用いたもの、BDF3-2 は 3 点後退差分に有限体積的なヤコビアンの評価法を多点後退差分に拡張したものをを用いた。

格子の移動のさせ方は次のようにする。対象とするのは一辺 1 の直交格子とし、各格子点の座標を  $\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi} = [1, 0, 0]^T, \boldsymbol{\eta} = [0, 1, 0]^T, \boldsymbol{\zeta} = [0, 0, 1]^T$  として、移動後の座標を次のように求める。

$$\mathbf{r}(i, j, k, t) = \mathbf{r}(i, j, k, 0) + X(t)\boldsymbol{\xi} + Y(t)\boldsymbol{\eta} + Z(t)\boldsymbol{\zeta} \quad (\text{A.3})$$

$$X(i, j, k, t) = A_x \sin(\omega t) \sin\left(\frac{D_{xx}\pi i}{N_i}\right) \sin\left(\frac{D_{xy}\pi i}{N_i}\right) \sin\left(\frac{D_{xz}\pi i}{N_i}\right) \quad (\text{A.4})$$

$$Y(i, j, k, t) = A_y \sin(\omega t) \sin\left(\frac{D_{yx}\pi j}{N_j}\right) \sin\left(\frac{D_{yy}\pi j}{N_j}\right) \sin\left(\frac{D_{yz}\pi j}{N_j}\right) \quad (\text{A.5})$$

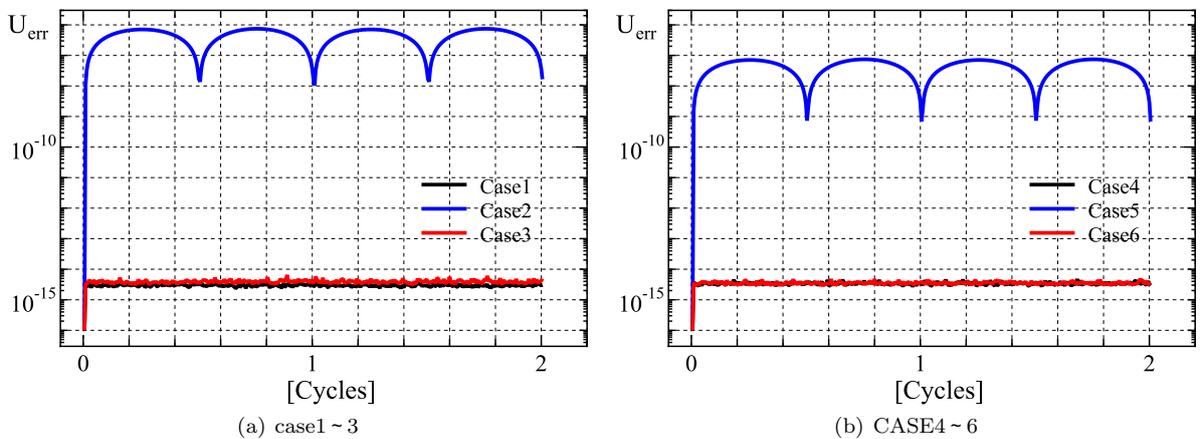
$$Z(i, j, k, t) = A_z \sin(\omega t) \sin\left(\frac{D_{zx}\pi k}{N_k}\right) \sin\left(\frac{D_{zy}\pi k}{N_k}\right) \sin\left(\frac{D_{zz}\pi k}{N_k}\right) \quad (\text{A.6})$$

$$D_{ij} = 1.0, A_x = 2.0, A_y = 2.0, A_z = 0 \quad (\text{A.7})$$

設定主流方向流速  $U_0 = 100\text{m/s}$  からの相対誤差  $|\frac{U-U_0}{U_0}|$  を格子変形 2 周期ぶんに対してプロットする。Case1 ~ 3 を Fig. A.2(a) に、CASE4 ~ 6 を Fig. A.2(b) に示す。Fig. A.2(a) より、時間項・流束項ともに有限体積的な評価をしている Case1 は、格子が動いても一様流に対し格子の移動で生じる流束が全てキャンセルされるため、一様流が維持されるという望ましい性質を備えている。三点後退差分で一様流を保存するような適切なメトリクス時間項評価をしなかった BDF3-1 を用いた Case2 は、保存量の時間項微分の差分評価の形式と、格子の運動速度

Table. A.1: Test cases of uniform-flow-preservation problem for the ALE solver

Case No.	Time derivative	Accuracy	Step/Cycle	CFL	Iteration
Case 1	BDF2	1st	5000	4-5	10
Case 2	BDF3-1	2nd	5000	4-5	10
Case 3	BDF3-2	2nd	5000	4-5	10
Case 4	BDF2	1st	5000	45-50	10
Case 5	BDF3-1	2nd	5000	45-50	10
Case 6	BDF3-2	2nd	5000	45-50	10

Fig. A.2: Time history of GCL error  $|\frac{U-U_0}{U_0}|$

に起因して生じるメトリック時間項の差分評価が異なるため、格子の移動に伴い生じる流束をキャンセルしることができず、誤差が生じて一様流が歪められてしまっていることがわかる。保存量の時間微分項の差分とメトリクス時間項の時間方向の形を整合させた BDF3-2 を用いた Case3 では、時間方向の 2 点スキームである Case1 と同様に一様流からの誤差が倍精度実数のものまで落ちていることから、時間方向の多点スキームを用いていても格子の運動に伴う解への影響をキャンセルできていることがわかる。また、Fig. A.2(b) の Case4~6 から、一様流からの誤差は CFL が大きい場合でも正しくメトリクス時間項を評価した BDF2 と BDF3-2 では  $10^{-14} \sim 10^{-15}$  と、CFL が小さい場合と同様である。本研究では BDF3-2 の結果のように、3 点後退差分でも一様流保存を満たすような格子運動の評価をしている。

### A.1.3 乱流モデルに対する検証

乱流モデルによって物体付近の流れ場が適切に解けていることを確認するために、以下の 3 つの問題に取り組み、妥当な結果を返すかを確認した。

1. DNS 結果のある、チャンネル乱流 ( $Re_\tau = 950$ ) [117]
2. 非圧縮流れ領域 ( $M = 0.2$ ) における平板乱流境界層 [118]
3. 逆圧力勾配で境界層剥離を生ずる軸対称ディフューザ [119]

このうち、[118] [119] は、NASA の Rumsey らによって乱流モデルの基礎的な検証問題がまとめられた Turbulence Model Resources に則した問題設定を行っている。

#### チャンネル乱流

二次元・非圧縮の平衡平板間（チャンネル）乱流では、平衡な 2 枚の平板の間の流れに完全に発達した速度分布が形成される。この速度分布や乱れ量はチャンネルの半幅  $h$  とレイノルズ数によって決まり、時間平均流れ場は流れ方向以外の速度成分をもたないことから、最も単純な壁乱流が生じる系の 1 つであるといえ、DNS による計算の結果が標準的な解として検証に用いられている。

代表速度  $u_\tau$ 、代表長さ  $h$  を用い無次元化された運動方程式は、

$$u_i = u_\tau u_i^+ , \quad x_i = h \tilde{x}_i , \quad p = \rho u_\tau^2 p^+ , \quad t = \frac{h}{u_\tau} t^+ \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t^+} + \frac{\partial u_i^+ u_j^+}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{\partial p^+}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\mu}{\rho u_\tau h} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left[ \frac{\partial u_i^+}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial u_j^+}{\partial \tilde{x}_i} \right] \quad (\text{A.9})$$

ここで無次元圧力勾配が 1 となるように代表速度（摩擦速度）をとり、粘性項の大きさが 1 となるような代表長さ  $l_\tau$ 、粘性スケールで無次元化した距離である壁座標はそれぞれ次のようになる。また、レイノルズ数はチャンネル半幅と摩擦速度を用い定義される。

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho} , \quad l_\tau = \mu / (\rho u_\tau) , \quad x_i^+ = x_i / l_\tau , \quad Re_\tau = \frac{\rho u_\tau h}{\mu} = \frac{h}{l_\tau} \quad (\text{A.10})$$

また、速度変動成分の運動エネルギーである乱れエネルギー  $k$  は、摩擦速度で無次元化された形で次のように算出される。

$$k^+ = \frac{1}{2} \overline{(u_i'^+ u_i'^+)} , \quad u_i'^+ = u_i^+ - \bar{u}_i^+ \quad (\text{A.11})$$

Fig. A.3 にチャンネル乱流の系の模式図を示す。二次元のチャンネル断面を計算領域に取り、流れ方向に周期境界条件で接続する。周期系で流れを駆動するためには、粘性による壁面せん断応力に釣り合う流れ方向の圧力勾配が必要であり計算中ではこれを主流方向にかかる体積力  $f$  として運動量式およびエネルギー式に加えている。体

積力は、チャンネル中央の時間平均流速が 100m/s (およそ  $M = 0.3$ ) となり釣り合うように対数則を用いて予め摩擦速度を見積もり、壁面せん断応力と体積力との釣り合いから

$$f \cdot 2Hdx = \tau_w dx \Leftrightarrow f = \tau_w/h = \rho u_\tau^2/h \tag{A.12}$$

を用いて与えた。また、作動流体は空気とし、壁面では標準温度 ( $T_w = 288.15[K]$ ) を与える。格子は流れ方向に 64 点、チャンネル幅方向に 128 点を用い、1 点目が  $y^+ < 1$  となるように作成した。

検証は高さ方向の時間平均流速と乱れエネルギー分布を Alamo らによる DNS データベースの結果 [117] と比較し行った。Fig. A.4 に結果を示す。Fig. A.4(a) の時間平均流速分布は Spalart-Allmaras モデル、Wilcox の  $k-\omega$  モデル、AJL- $\omega$  モデル軸方向流速のどれも DNS 結果によく一致しており、 $y^+ = 200$  程度までの対数則と、対数則から外れてチャンネル中央で最大流速をとるになる部分がよく再現されている。また、モデルごとに差は小さいが、Spalart-Allmaras モデルが最も DNS 結果に近い。また、中央部で DNS と同様のおよそ  $u^+ = 22.5$  となっていることから、速度分布および壁面せん断応力が正しく算出されていることがわかる。

Fig. A.4(b) にはチャンネル高さ方向の乱れエネルギー  $k^+$  の分布を DNS 結果と比較する。ここでは乱れエネルギーを変数としてもつ二方程式モデルの Wilcox の  $k-\omega$  モデル、AJL- $\omega$  モデルの結果を示す。AJL- $\omega$  モデルでは壁面付近の制御関数が精緻に作り込まれていることがわかる。一方壁面での減衰関数を用いていない Wilcox の  $k-\omega$  モデルでは、乱れエネルギーの挙動は DNS 結果とは異なっており、 $y^+ < 100$  の内層で小さい値をとっている。しかし、流速分布には問題がないことから、Wilcox の  $k-\omega$  モデルで簡単な壁乱流を取り扱えるといえる。

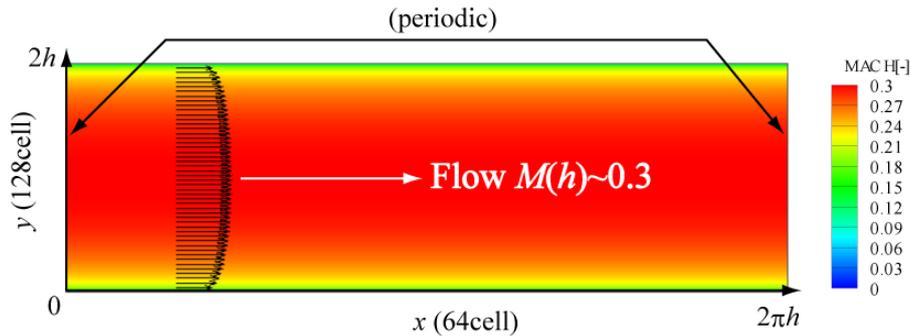


Fig. A.3: Schematic of the channel flow

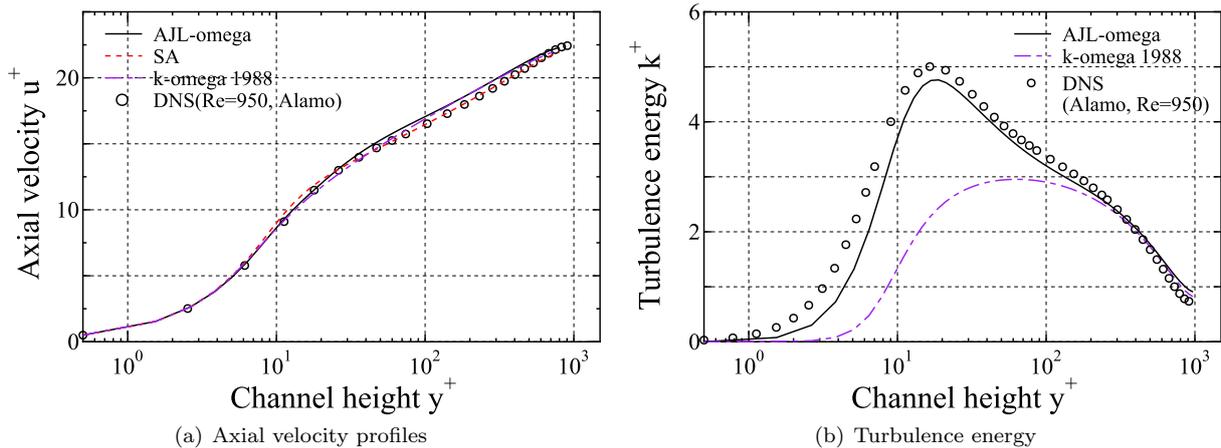


Fig. A.4: Validation results of channel flow at  $Re_\tau = 950$

平板乱流境界層

翼面上の境界層は流れ方向に発達するため、そのような流れ場についても正しく解けるかを確認する。Fig. A.5 に、Langley research center により定義された平板乱流境界層問題の概観 [118] を示す。主流がマッハ 0.2、標準状態の空気であり壁面上 ( $x > 0, y = 0$ ) で乱流境界層が発達する。

境界層の運動量厚さ  $\theta$ 、レイノルズ数、局所摩擦係数  $C_f$  は次のように表わされる。

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy, \quad Re_\theta = \frac{\rho_\infty U_\infty \theta}{\mu_\infty}, \quad C_f = \tau_w / \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \quad (A.13)$$

なお、摩擦速度  $u_\tau$  とそれを用い無次元化した壁面距離  $y^+$  はチャンネル乱流の場合と同様である。

Fig. A.6 に 3 つの乱流モデルにおける結果を示す。まず、 $Re_\theta = 1.0 \times 10^4$  の位置における壁面垂直方向の流速分布を Fig. A.6(a) に示し、速度分布に対する Coles による理論解 [120] と比較する。まず、Coles の分布であるが、対数則が  $y^+ = 1000$  まで確認できるとともに、そこから境界層外縁にかけて大きく対数則から速度分布が離れる外層が確認できる。Spalart-Allmaras モデルの結果はほとんどこれに一致しており、発達する境界層に対しても妥当な速度分布を返すと同時に、高度に調整されているモデルであることがわかる。Wilcox の  $k-\omega$  モデル、AJL- $\omega$  モデルでは対数則が現れる位置が開始位置が若干理論式より高く出ているが、定性的には妥当な範囲であると考えられる。次に摩擦係数に対する Karman-Schoenherr の関係式と比較する。これについても、モデル間に若干の差はあるものの、おおまかに既存の関係式と一致しており、結果は妥当であると考えられる。また、NASA の CFL3D コードによる Spalart-Allmaras モデルの結果も同時に示しているが、本研究のコードによる結果とほぼ一致しており、Spalart-Allmaras モデルが正しく導入できているものと考えられる。

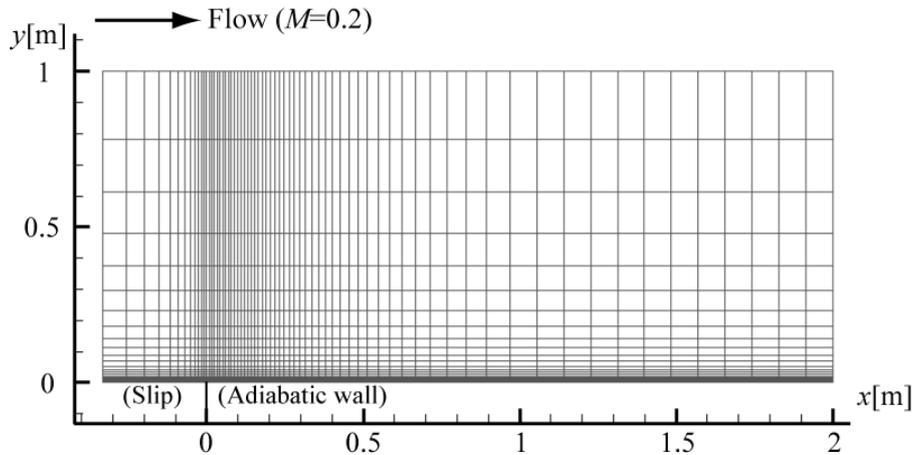


Fig. A.5: Computational setup of turbulent boundary layer on a flat plate

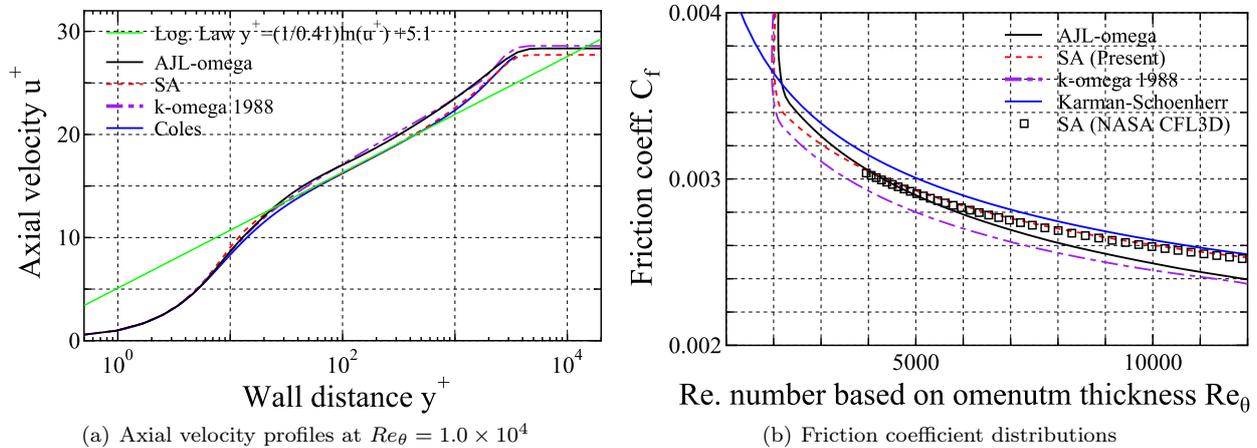


Fig. A.6: Validation results of two-dimensional zero-pressure-gradient turbulent boundary layer

## 軸対称ディフューザ

最後に、境界層が逆圧力勾配で剥離するケースである、軸対称ディフューザ流れに対する検証を行う。この問題は、Driver らによって行われた実験結果 [121] に基づいており、NASA の Turbulence modeling resource で取り上げられているのみでなく、Grosvenor によるターボ機械に用いられる CFD の検証を行った報告 [122] でも取り上げられるなど、様々なところで用いられている検証問題である。

Fig. A.7 に問題設定の概要の図を示す。半径 70mm の円筒上に発達する境界層が逆圧力勾配で剥離する問題で、外側境界のプロファイルは NASA により近似流線として与えられている。入口マッハ数は  $M = 0.088$ 、入口条件は標準状態大気とした。また、格子は軸方向に 178 セル、半径方向に 48 セル、周方向に 3 セルとした。

Fig. A.8 に 3 モデルによる流れ場の概観として、マッハ数分布を示す。どのモデルでも流線が急拡大する箇所では流れが減速し、 $x = 0.2$  の壁面付近で剥離による低速領域が形成される。Fig. A.9 に結果を示す。Fig. A.9(a) に示す、入口動圧と静圧で無次元化された軸方向の壁圧分布は定性的にはどれもよく実験結果と一致しているが、このケースに関しては Wilcox の  $k-\omega$  モデルが最もよく、次いで Spalart-Allmaras モデル、Ajl- $\omega$  モデルとなっており、モデルによって圧力係数に 0.025 程度の差が現れている。Fig. A.9(b) に、局所摩擦係数の軸方向分布を示す。壁面直上の流れが軸方向に逆流している、局所摩擦係数が負の領域を剥離泡の長さと考えると、この長さ自体はモデルによって大きな差があり、Wilcox の  $k-\omega$  モデルが実験に最も近いと考えられる。Spalart-Allmaras モデルは 0.1m ほど剥離泡の長さが大きく算出されており、一方で Ajl- $\omega$  モデルでは壁面で局所的に低速にはなっているものの、局所摩擦係数は負に転じず、逆流は生じていないことがわかる。

このように、比較的単純な設定の系でも、剥離が生じるか否か、またその長さなどに着目した場合にモデル間に大きな差が現れていると認識される。この検証からは、Wilcox の  $k-\omega$  モデルを基準にして Ajl- $\omega$  モデルは他の 2 モデルに比べ比較的剥離しにくく、Spalart-Allmaras モデルは剥離が流れ方向に伸びやすい特徴があることがわかったといえる。

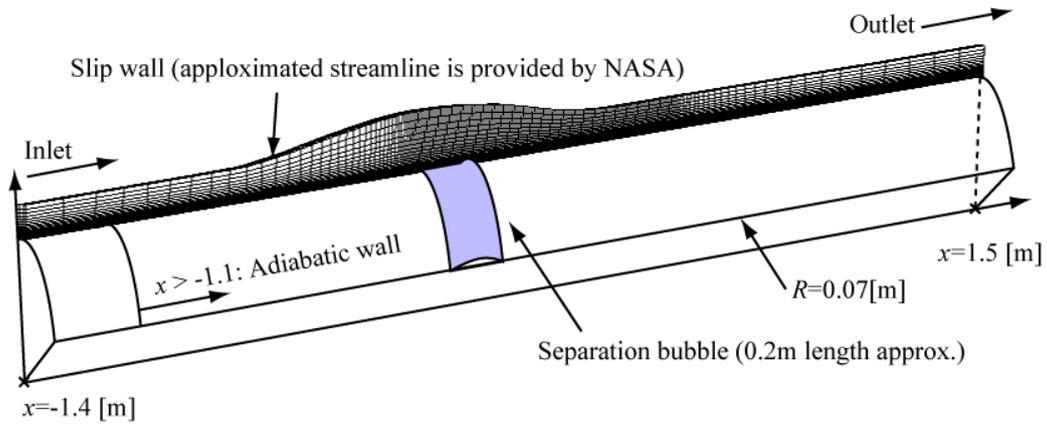


Fig. A.7: Schematic of Driver's axisymmetric diffuser problem

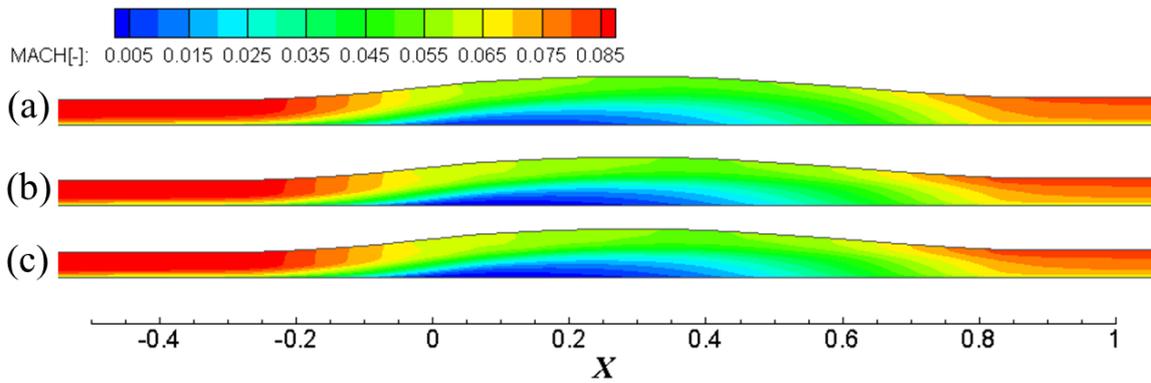


Fig. A.8: Mach number distribution around the separation bubble. (a): AJL- $\omega$ , (b): SA, (c):  $k-\omega$  1988

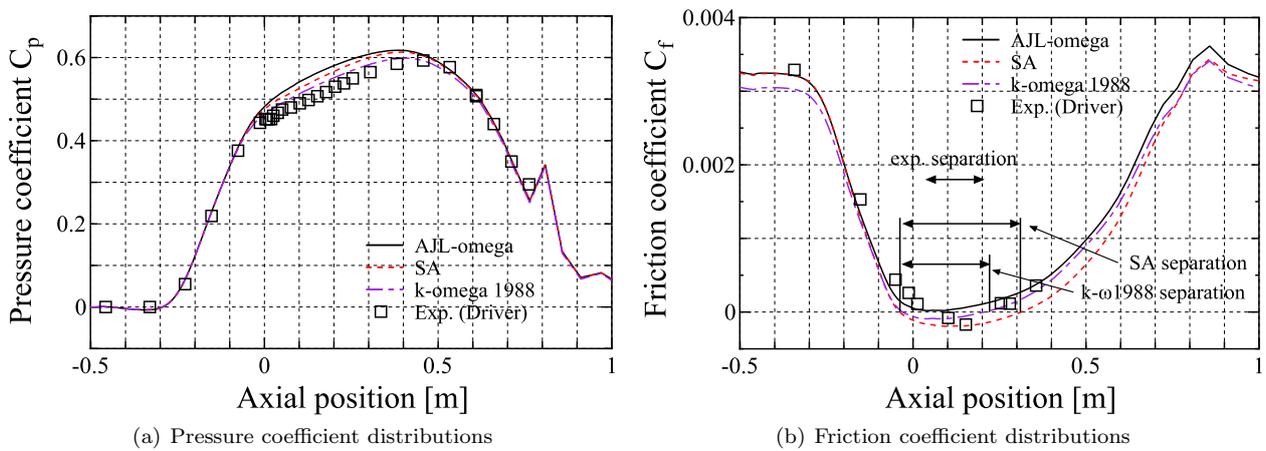


Fig. A.9: Axial distributions of  $C_p$  and  $C_f$  around the separation bubble

## A.2 固体ソルバに対する検証

### A.2.1 梁の有限変形

外力に対する有限変形の検証として、梁の有限変形問題に対する検証を行った。片持ち梁の先端に集中加重を載荷したときの先端中央面の変位を、有限変形梁理論による解と比較。梁理論による先端変位は、積分方程式 Eqn. (A.14) を満たす  $\theta_0$  について次で与えられる [123]。集中荷重の大きさに対する先端変位の変化を Fig. A.11 に示す。線型理論に基づく結果では梁の中央面の軸方向変位は生じないが、有限変形を考慮した本ソルバによる解は回転変位を考慮する歪を用いているため、連続体要素の剛体回転挙動が正しく評価されており、先端の軸方向変位が生じている。本ソルバによる計算結果はよく理論解の挙動を再現しており、弾性体の静的な大変形挙動を正しく解析できるものと考えられる。

$$L = \sqrt{\frac{EI}{2P}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}, \quad x = -\sqrt{\frac{EI}{2P}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}, \quad y = \sqrt{\frac{EI}{2P}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} \tag{A.14}$$

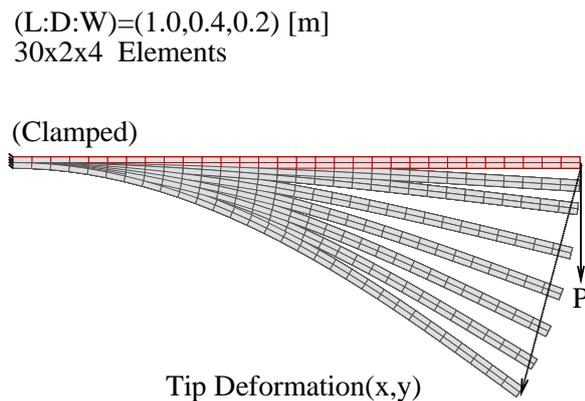


Fig. A.10: A schematic of the problem of finite deformation of a beam

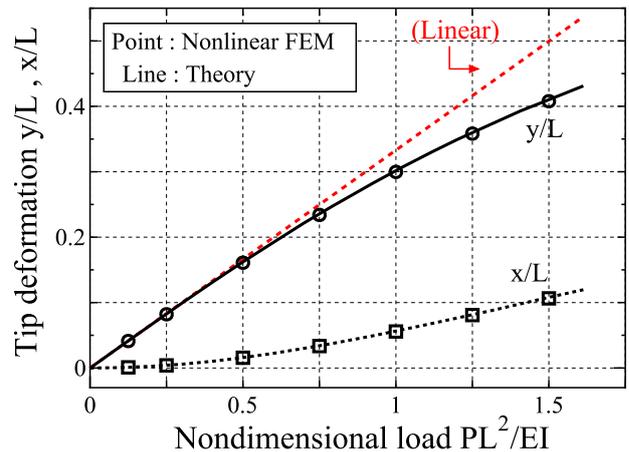


Fig. A.11: Tip deformation of the beam obtained by nonlinear FEM and a comparison to the theoretical result

### A.2.2 張力を有する梁の振動数

接線剛性マトリクス中の内部応力項の検証として、両端支持された梁に軸力をかけたときの固有振動数の変化を、梁の運動方程式による解と比較する。軸力は、一端の支持部の変位境界条件を  $u_0 = \epsilon_0 L$  として与える。このとき、軸力  $P$  は歪から求められ、境界条件を適用して求めた振動数は Eqn. (A.16) となる。Eqn. (A.16) は、断面 2 次モーメントが十分小さく、細い梁に対しては復元力として張力が支配的になり、弦の振動方程式に帰着するものである。本小節は、このように剛性と張力場の両方が復元力として作用する系に対する検証である。

ここでは、断面が  $b = 0.02\text{m}, h = 0.05\text{m}$  の長方形、長さ  $L = 1.0\text{m}$  の梁について検証を行った。320 要素、1865 節点の離散化を行い、境界条件は一端支持・もう一端は張力をかけるため、変位境界条件のある単純支持とした。

Fig. A.13 に梁理論による解と本コードによる計算結果を示す。引っ張りの歪を与えると振動数は単調に増加し、逆に圧縮の歪を与えると振動数は減少し、0 になった時点で座屈が生じる。引張・圧縮の両方の歪において振動数

の変化が適切に捉えられていることがわかる．本検証結果より，本コードの接線剛性項が正しく導入されていると考えられる．

$$\rho A \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad P = EA\varepsilon_0 \tag{A.15}$$

$$\omega^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left[ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{I}{A} + \varepsilon_0 \right] \frac{E}{\rho} \tag{A.16}$$

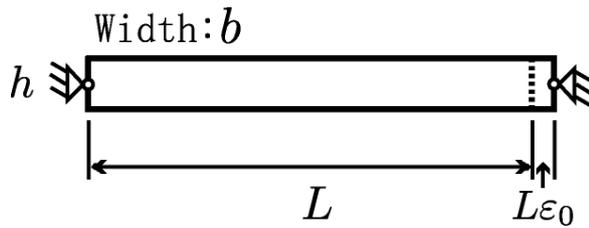


Fig. A.12: Beam with axial strain

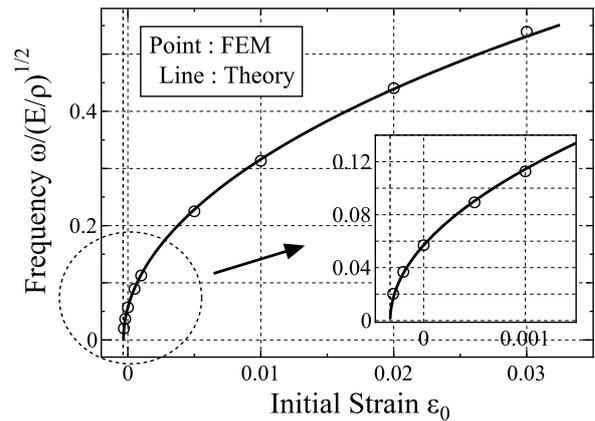


Fig. A.13: Frequency after deformation (compared to theoretical results)

### A.2.3 片持ち板のモード解析

弾性体の有限要素モデルに対するモード解析の妥当性の検証として，片持ち板のモード解析が正しく行えているかどうかを確認する．片持ち板の計算条件は，Fig. A.14において  $a = 0.25, b = 0.10, h = 0.001$ [m] で，a 方向，b 方向，h 方向にそれぞれ 20,15,2 要素を取った 600 要素 3586 点である．また，物性値として鉄（ヤング率  $E = 211$ [Gpa]，ポアソン比  $\nu = 0.3$ ，密度  $\rho = 7800$ [kg/m<sup>3</sup>]）を与えた．

固有振動数を低いほうから 4 個 Table. A.2.3 にて文献値（板曲げ方程式の近似解）[124] と比較すると，4 モードともよく一致している．モード形状を Fig. A.15(a) ~ Fig. A.15(d) に示す．

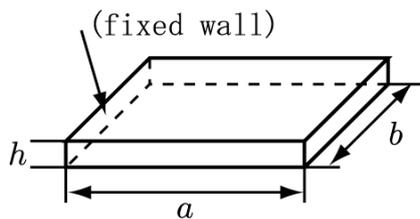


Fig. A.14: Plate

Table. A.2: Natural frequency of a clamped plate [124]

mode No.	Present calc	Reference [Hz]	difference
1	13.7659	13.7187	0.003441
2	71.9436	71.8521	0.001273
3	86.127	85.5667	0.006548
4	229.4852	228.831	0.002859

## A.3 流体-構造連成法に対する検証

### A.3.1 付加質量効果の再現

連成解析で振動問題を解く際には，空気力が時系列で正しく解けているか（強制振動による変動空気力の検証）と同様に，その空気力が正しく構造の運動方程式に受け渡され，連成系の運動が正しく予測できているのかを確

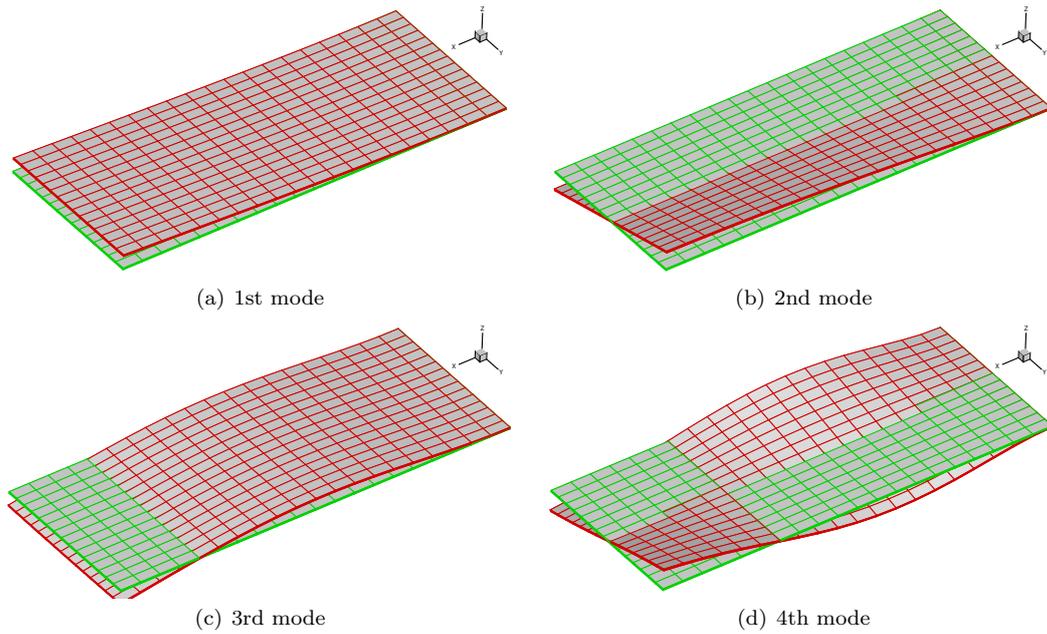


Fig. A.15: Four lowest modes of an one-side clamped plate

かめなければならない．本研究では流体-構造連成系の振動として理論的な予測が容易な，付加質量による流体中における振動数変化を再現し連成手法の検証とした．付加質量の項の由来は空気力であるから，付加質量の効果の再現により，連成系が正しく時間発展できていることが確認できると考えた．

### 完全流体中の物体の振動

静止した完全流体中での物体の運動方程式は次式で与えられる．

$$(M_0 + M_{add})\ddot{x} = F_{out} \quad , \quad (I_0 + I_{add})\ddot{\alpha} = N_{out} \tag{A.17}$$

ここで， $M_0$  は物体の質量， $M_{add}$  は流体中における物体の付加質量で，物体に働く表面圧力を積分した際に出てくる，物体加速度に比例する項の係数であり，質量の次元をもつ． $F_{out}$  は物体に働く流体力以外の外力である．

計算対象として，並進運動に対するものとして 2 次元の剛体円柱を，回転運動に対するものとして 2 次元の楕円柱を考える．円柱の半径を  $a$ ，楕円柱の長軸と短軸をそれぞれ  $a, b$  とする．固体の密度を  $\rho_s$ ，雰囲気流体の密度を  $\rho_a$  とする．このとき質量と付加質量，慣性モーメント，付加慣性モーメントはそれぞれ次のようにまとめられる [125]．

$$M_0 = \rho_s \pi R^2 \quad , \quad M_{add} = \rho_a \pi R^2 \quad (\text{for cylinder}) \quad , \tag{A.18}$$

$$I_0 = I_0 = \rho_s \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2) \quad , \quad I_{add} = \rho_a \frac{\pi}{8} (a^2 - b^2)^2 \quad (\text{for ellipse}) \tag{A.19}$$

運動方程式を一自由度の振動系とする．円柱が，真空中で振動数が  $\omega_0$  となるようばね定数  $k_0 = M_0 \omega_0^2$  ( $I_0 = I_0 \omega_0^2$ ) のばねにつながれているとき，流体中で発現する振動数  $\omega$  は，

$$(M_0 + M_{add})\ddot{x} = -k_0 x \rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\mu}{1 + \mu}} \quad , \quad \mu = \frac{\rho_s}{\rho_a} \tag{A.20}$$

$$(I_0 + I_{add})\ddot{\alpha} = -k_0 \alpha \rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\mu}{f(a, b) + \mu}} \quad , \quad f(a, b) = \frac{(a^2 - b^2)^2}{2ab(a^2 + b^2)} \tag{A.21}$$

となり、流体中の振動数は付加質量によって低下する。感覚的には、円柱と流体が同じ密度であるときは振動数が  $1/\sqrt{2}$  倍になる。

最小格子幅は、両格子に共通で  $1.0 \times 10^{-3}$  [m]、真空中振動数は 1 [sec] とした。円柱に対しては半径  $R = 1$ 、初期条件を  $x_{ini} = 0.01R, \dot{x}_{ini} = 0$  とした。楕円柱に対しては長軸  $a = 1$ 、短軸  $b = 0.5$ 、初期条件を  $\alpha_{ini} = 1.0$  [deg]、 $\dot{\alpha}_{ini} = 0$  とした。また、雰囲気流体は標準状態の空気 ( $\rho_a = 1.29$  [kg/m<sup>3</sup>],  $T_0 = 273.15$  [K]) とした。固体密度を、 $\rho_s = 0.10, 0.20, 0.50, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, 20.0, 50.0, 100, 200, 500$  [kg/m<sup>3</sup>] の 12 パターンとした。計算開始時から 10 [sec] ぶんを計算し、変位のゼロクロスの時間間隔から振動数を計算した。

## 結果と考察

設定した固体/流体密度比と発現した周波数比の結果を、ポテンシャル流の理論から導かれた振動数比と併せて Fig. A.17 に示す。並進運動のみを含む円柱と回転運動を含む楕円柱共に理論解をよく再現する。したがって、本スキームでは物体質量と発現周波数の関係を正しく捉えていると考えられる。

本検証中では、微小変形のモードが回転運動を含む場合、流体力の変位同期成分の受け渡しが正しく行われないと振動数が理論解を再現せず、連成解析は正しい結果を返さないことがわかった。楕円柱の問題設定において、流体ソルバ側で空気力を計算する際に固体の運動を線形化した位置の表面形状  $S = S_0$  を用いて流体力を算出したものと、振動解析時における変形中の表面形状  $S = S(t)$  を用いて流体力を算出したものの発現周波数を比較した。Fig. A.18 にその結果を示す。

変形中の表面形状  $S = S(t)$  を用い表面力を算出した場合、圧力の平均成分が 1 次の微小項として固体に伝達される。回転運動を線形化したモードによる運動は、線形化位置からずれると表面積が必ず増大する。そのため、平均圧力と表面積変動の積が変動流体力に乘る。これは変位同期成分として、回転運動に対して復元側に作用し、理論解と大きなずれを生む原因になる。この結果から、モード法を採用したモード別の微小振動解析を行うには、運動方程式の線形化された位置で流体力を算出する表面形状を評価する必要があることが確認された。

以上より、本研究で採用した計算手法により、運動が線形化された微小変形振動に対しては、固体の運動を線形化した位置の表面形状  $S = S_0$  を用いて流体力を算出することで、流体-構造連成振動を適切に取り扱えらる。

### A.3.2 静空気力による変形

本小節では、本研究で採用したソルバ分離型反復解法における、流体構造連成系の静変形解析の妥当性を検証する。

問題設定として、Fig. A.19 に示すような 0.1 [m] 四方、厚さ 1 [mm] の板の四辺が固定され、片面には 1 [atm] の圧力が、もう片面は 0 [atm] で表面力がかからない状態を考える。この系に対して、次の 2 通りの方法で板の変形を求め、面外変位について評価する。

1. 有限要素法のみによる解析を行う。表面力は、要素表面においてガウス積分を行い、各節点に内挿関数の重みで等価節点力として分配される。
2. 流体ソルバのもつ圧力の値を各構造節点に Linear-CVT 法で節点力として与え、構造ソルバへ転送する。構造ソルバは流体ソルバから与えられた節点力をもとに変位を算出する。

前者は表面力を重みつき残差法にならって各節点に分配する方法であり、構造要素表面上で面積分を実行するが、後者は流体ソルバの連成面上で面積分を実行し、各節点に集中荷重として分配するという点が異なる。表面力の扱いにこのような差がある為、双方の結果は必ずしも厳密に一致するわけではない。本検証問題で確認したいことは次の 2 つである。まず、表面力を形状関数の重み付き積分として入力した場合と、流体ソルバから節点力として入力された場合で、十分同じと判断できる結果を返すか否か。もう一つは変位の補間が Linear-CVT 法により正しく行われているかである。

Table. A.3: Boundary conditions

Solid surface	Velocity: slip, Temperature and Pressure: extrapolation
Outer boundary	Uniform flow, Giles's one-dimensional non-reflective boundary condition

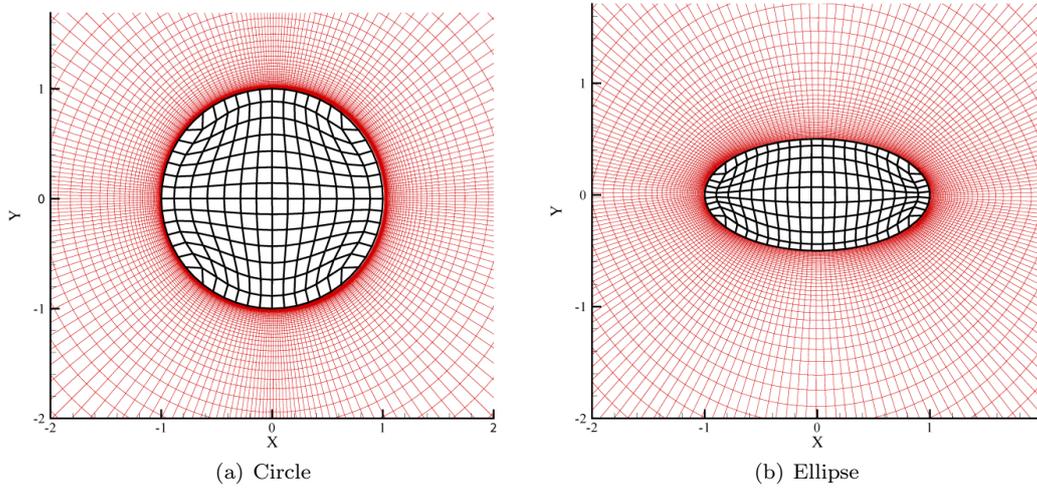


Fig. A.16: Computational grid for validation of added-mass effect

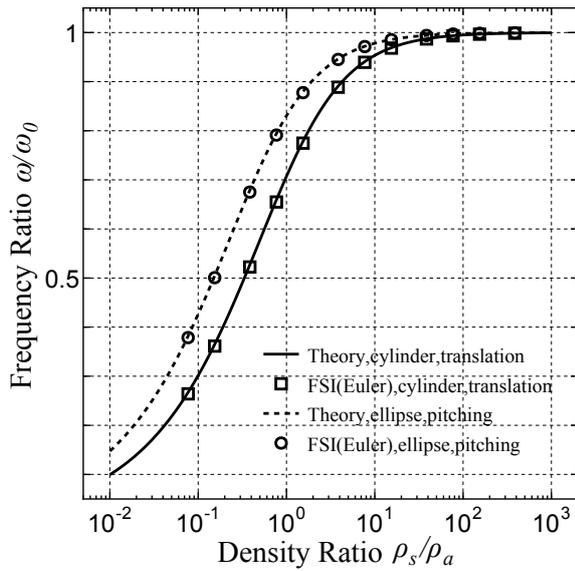


Fig. A.17: Frequency shift due to added mass effect (compared to theoretical result)

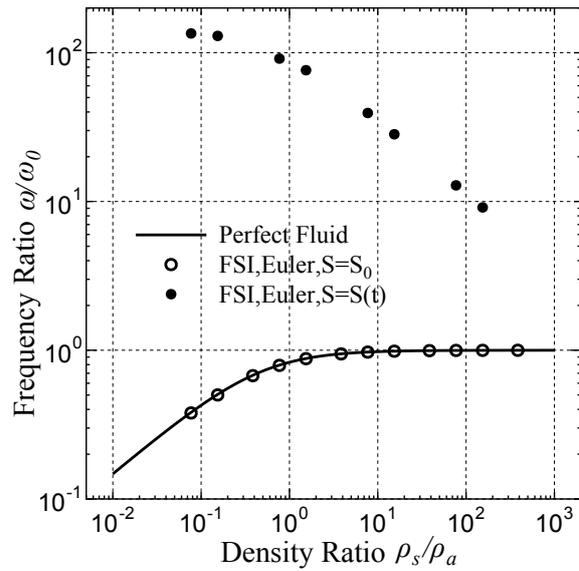


Fig. A.18: Adequate and inadequate evaluation of solid surface (dot:inadequate, hollow:adequate)

流体側連成面は  $30 \times 30$  セル，固体側連成面は  $15 \times 15$  要素で構成した．固体側の要素には辺上にも自由度を有する 2 次要素を用いているため，連成面上の自由度数は同程度である．静変形解析時は，流体ソルバ側で計算する表面力を算出する際に，変形中の表面形状  $S = S(t)$  を用いている．その理由は，固体ソルバ側でも表面形状が変形中のもので扱われるため，固体側の運動方程式を線型化した微小振動のときとは異なり，流体と固体の両ソルバで整合性が取れるという理由による．

検証結果

固体側で 10 回の反復を行った後の結果を参照する．このとき，解は十分収束していた．面外変位の最大値を比較したものを Table. A.4 に示す．有限要素法にそって表面力を導入した場合と，FSI によって導入された外力とではおよそ 0.032 % の差が生じているが，変形状のコンタを重ねて描画したもの Fig. A.22 を見ると，解の性質を大きく変えるものではないことがわかる．また，流体部分の最大面外変位と固体部分の最大面外変位にはおよそ 0.18 % の差が生じているが，これに関しては変位の評価点が完全に一致していないため，このような値が出たものと考えられる．全体的に見れば，変形状が極値をとり，形状表現に格子数が不足している部分を除けば，補間結果は良好である．

Table. A.4: Maximum out-of-plane displacement

	1:FEM only	2-1:FSI(Solid domain)	2-2:FSI(Fluid domain)
max(displacement/thickness)	0.866372	0.866090	0.864742
Relative difference	0	$3.254 \times 10^{-4}$	$1.881 \times 10^{-3}$

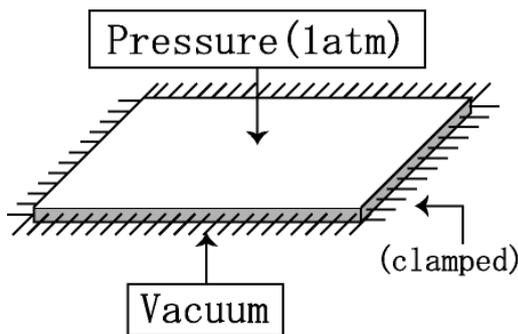


Fig. A.19: Pressureized plate

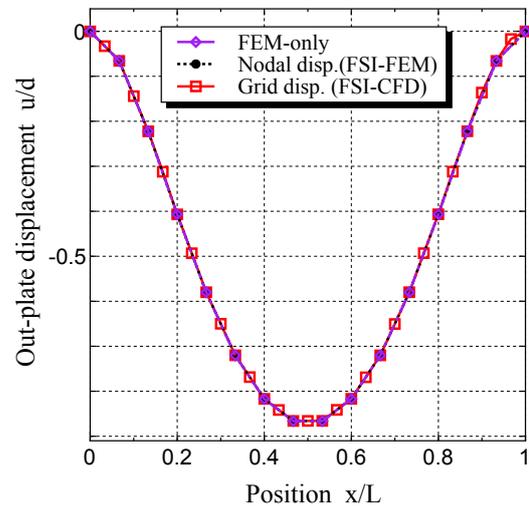


Fig. A.20: Out-plane displacement,  $z=0.5L$

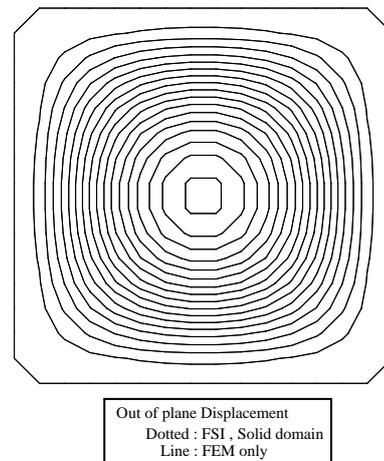
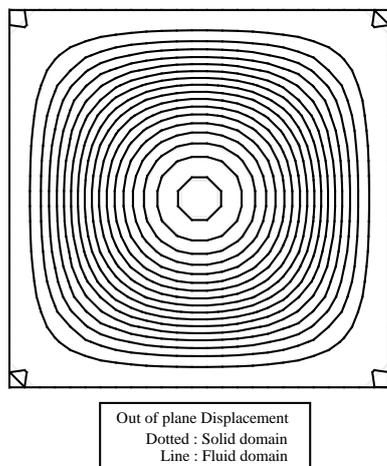


Fig. A.21: Out-plane Displacement of coupling surface Fig. A.22: Out-plane Displacement of coupling surface

## A.4 まとめ

本付録では、本研究で用いる数値解析手法の、流体解析コード・構造解析コード・これら2つのコードを接続するための連成解法モジュールのそれぞれに対して、基本的な問題を通じて検証を行うことで、用いた手法が正しく機能しているかを確認した。

本章における検証問題の選択の指針としては、流体関連振動を数値解析によって扱うときに、基本的な物理的効果が数値解析において正しく再現されることを示せるように、極力解析解が存在する問題を選択した。

移動座標系における解析コードにおいては、メトリクスの有限体積的な評価に加え、本研究対象のような非定常問題を解く際に時間項を高次精度化する場合において、メトリクスの時間項を時間進行法に応じた適切な離散化をする必要があることが示された。また、乱流モデルに対する検証より、本研究で用いる3つのモデルは境界層やチャンネル乱流といった単純な流れに対してはうまく機能すること、逆圧力勾配で剥離が生じるディフューザ流れに対しては、剥離が生じるか否か、またその長さなどに着目した場合にモデル間に大きな差が現れうることが確認された。

固体ソルバに対しては、ターボ機械の構造解析において重要になる、非線形有限要素法を用いなくては解析が行えない大変形挙動や定常応力場のある場合の振動モード解析に対する検証として、梁の大変形問題と張力を有する梁のモード解析に対する検証を行い、構造解析手法が正しく導入できていることを確認した。

連成解析手法の検証としては、まず付加質量による振動数変化を取り上げ、回転運動を線形化した場合には、運動方程式に渡される流体力は「運動の線形化位置における」表面形状を用いる必要があることが示された。

## 付録 B 並列計算法

多数流路を含む翼列振動解析においては、非定常流体解析を行うから、同格子数の定常問題に比べ計算負荷が高い。計算の効率を高めることで、解析対象系のモデル化の幅を広げたり、計算パラメタを多くとることが可能になる。計算効率を高めることは本研究では非常に有意義であったため、行ったことを簡単に記す。以下に使用した各計算機における代表的な並列化手法を述べる。

### パーソナルコンピュータにおける並列化

近年のパーソナルコンピュータは、1cpu あたり複数のコアを有するマルチコア型である。したがって、各コアに等しい流路数を割り当て計算させるようにすれば、計算時間はほぼプロセス数に反比例する。これは MPI を用いて境界の諸量を通信させながら計算を行った。翼列のような同じ計算負荷をもつ領域が複数用意されている場合には、並列化の効果は大きいといえる。

### 大型計算機における並列化

大型計算機においては、プロセス並列である MPI とスレッド並列である openMP、自動並列化を併用する場合、1 プロセスあたり 16 スレッドを超える並列化がなされることになる。したがって、どちらの並列化も効率的になされる必要がある。

大型計算機は、東京大学情報基盤センター所有の日立製作所製 SR-16000 を使用した。1 ノードあたり 32cpu を有し、64 (プロセス \* スレッド) までの並列化が可能である。第 6 章、第 7 章の翼振動計算は、各プロセスに翼間 1 流路を割り当て、1MPI プロセスあたり 16 スレッド並列を行った。したがって、スレッド並列の効率を高めることも計算時間短縮に有効である。

スレッド並列部では、配列の間接参照・計算順序に依存する部分・並列化するとデータの一貫性を保てない部分があるとその部分の並列化ができない。したがって、計算手続きの中からこれらを極力排除したり、openMP により手動で指示文を書き加えたりした。

陰解法部分である LU-SGS 法は、超平面ごとにループを回すからほぼランダムアクセスであり、並列化が困難である。これには、ループ変数を間接アクセスとし非構造的にデータを扱うことによって、超平面内のセルを各スレッドに等分配するような並列化を施し対応した。しかし 1 つの超平面を処理するごとにスレッド間の同期が入るためあまり効率的ではない。一方、並列化に適したアルゴリズムである Red-Black Gauss-Seidel 法を用いると、99 % を超える並列化効率を実現できる。

### 静連成解析における並列化

静連成解析では、別々に開発した CFD プログラムと FEM プログラムを MPI を用いて同時に起動し、通信を行うことで境界変位と流体力をやりとりした。別々のプログラムにする利点は、一体のプログラムにした場合に予想される複雑なメモリ管理を極力避けられることである。また、通信部を適切な位置に設けるだけで境界条件をやり取りできるので、連成解析では有効な手法であると考えられる。しかし、双方が通信待ち状態に入りプログラムが停止する「デッドロック状態」が発生しないように注意する必要がある。

## 付録 C マルチブロック法

ターボ機械翼列のように3次元に複雑な形を持つ流路の数値計算を行う際には、単一の構造格子を流路に張って解析を行うとスタガ角の大きい翼端部やソリディティの大きな翼根部で格子の歪がおおきくなりやすく、また翼端間隙部分の格子を作成することが困難になる。

そこで、CFDにおいては非構造格子や複数の構造格子をつなぎ合わせることで解析領域を離散化するマルチブロック法が一般に用いられる [126][127]。マルチブロック法ではブロック数が少ない場合は手動で接続関係をプログラムすれば良いが、ブロック数が多いと手動での対応が困難になるため、本研究では作成された格子に基き領域間の接続情報を自動で生成し、ソルバ中において自動で取り扱う工夫を行っている。

### 同一セル表面の探索とデータ生成

ここでは領域間接続情報の生成手法にの概略を述べる。Fig. C.1に複数のブロックの接続面の様子を示す。Block1~3の3つが同一の座標をもつ面同士でつながり合っている場合において、例えばBlock1とBlock2の間はFig. C.1右図のようにブロック境界におけるセル表面中央座標が一致する。したがって、計算を開始する前に各ブロックが「何番のブロックの」「何番の面と」共有する面をもつかという情報を生成しておけば、計算中に隣接ブロックの情報が必要になった段階で共有する面の情報を用いて情報を交換することが出来る。

探索は各ブロック表面について行う。全数探索では格子点数が大きくなると爆発的に処理に要する時間が増加してしまうので、各ブロックの  $x, y, z$  座標の最大値・最小値からなるバウンディングボックスによる交差判定と、面中央座標から作ったスカラー値（例えば  $x + y + z$  など）を用い二分探索を用いることで、処理に要する時間を削減している。

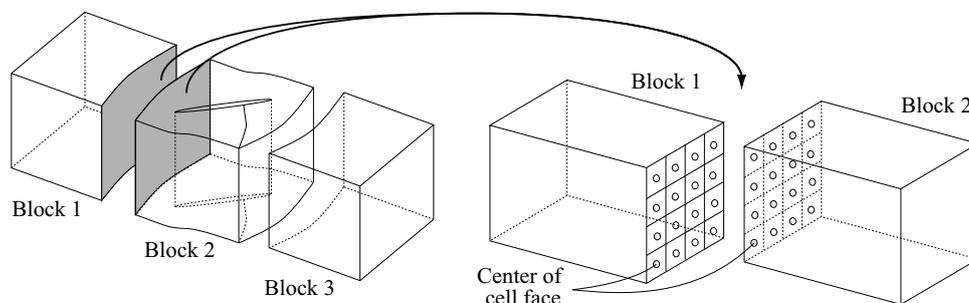


Fig. C.1: Cell faces of two blocks

### 接続情報の生成例

Fig. C.3のような3H-Oトポロジーに対して生成された接続情報をFig. C.2に示す。Fig. C.3のBlock1は4つのブロックとの接続を含んでいるがFig. C.2にそれが確認できる。多流路の翼列や回転翼列では隣接流路との接続は特別に取り扱う必要があり、接続が+側流路か、-側流路かも情報として含まれている。この情報は通信する流路の決定や、回転対称境界面で通信を行う際の速度ベクトルの回転に用いられる。3次元の翼列格子に対する接続情報の探索結果をFig. C.4に示す。色はそのセルがいくつの面と繋がっているかを示している。流路間はもちろん、翼端間隙部のような複雑な領域分割でも正しく接続情報を抽出できていることがわかる。ちなみに、このような接続情報を用いると、陽的流束の計算のみならず陰解法においてもブロック間を接続するグローバルな処理が可能となる。また、Fig. C.5のようなMPIで多ブロックを扱う必要のある場合にも、ブロック番号とプロセス番号の関係を用意して自動で通信処理を行うことが出来る。

```

1 | # THE NUMBER OF BLOCKS TO COMMUNICATION↓
2 |     4↓
3 | # 1:BLOCK TO COMMUNICATE ↓
4 | # 2:PERIODIC DIRECTION (1:+, 0:SAME, -1:-) ↓
5 | # 3:HEAD ADDRESS OF JCT(:) ↓
6 |     2     0     1↓
7 |     3     0    118↓
8 |     4     0    235↓
9 |     4    -1    532↓
10 |     0     0    829↓
11 | # TOTAL NUMBER OF JUNCTION AND JUNCTION DATA FOR NID= 1↓
12 |     828↓
13 | # JCT(1:5,1:M) 1:COM ADDRESS IN THIS BLOCK ↓
14 | #     2:OPPOSITE BLOCK ID ↓
15 | #     3:COM ADDRESS IN OPPOSITE BLOCK ↓
16 | #     4:PERIODIC JUNCTION (1:+,1 0:SAME, -1:-) ↓
17 | #     5-7:DIRCHK(+:SAME,-:DIFFER)↓
18 |     118  2     1  0  1  2  3↓
19 |     119  2     2  0  1  2  3↓
20 |     120  2     3  0  1  2  3↓
21 |     121  2     4  0  1  2  3↓
    
```

Fig. C.2: An example of inter-block connectivity dataset (for block No. 1 in Fig. C.3)

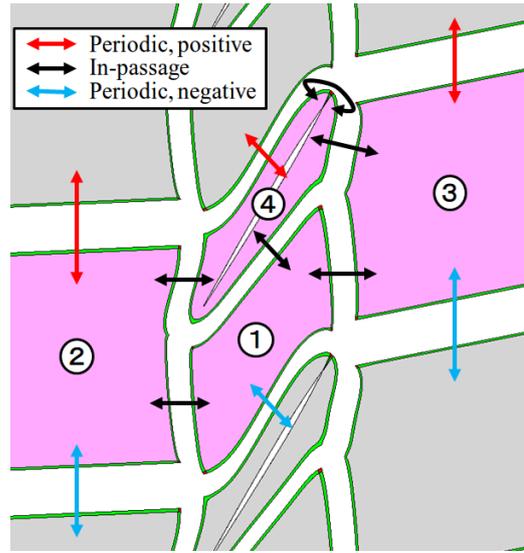
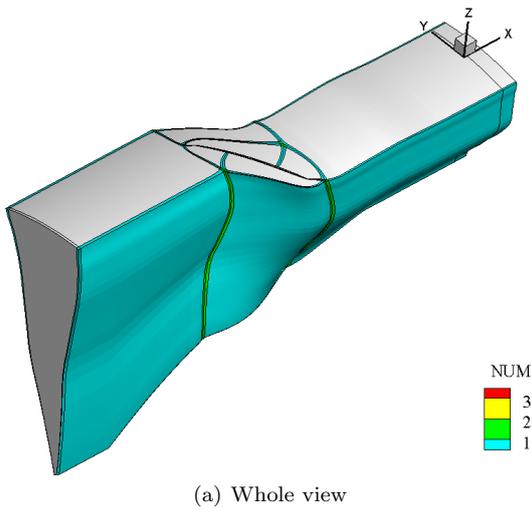
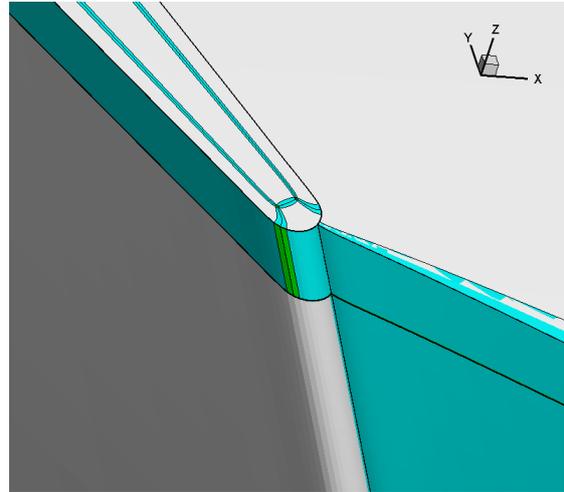


Fig. C.3: Inter-block connectivity in the 3H-O topology

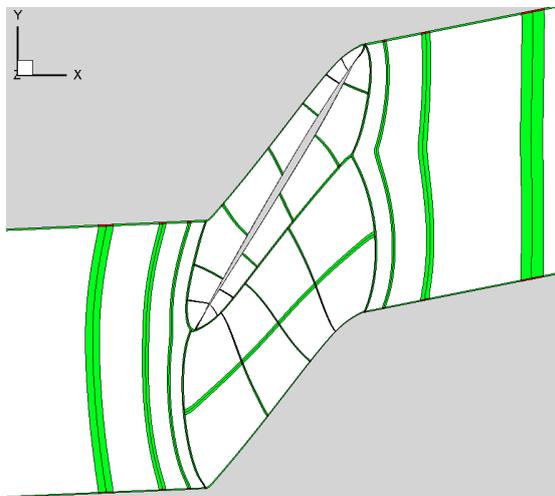


(a) Whole view

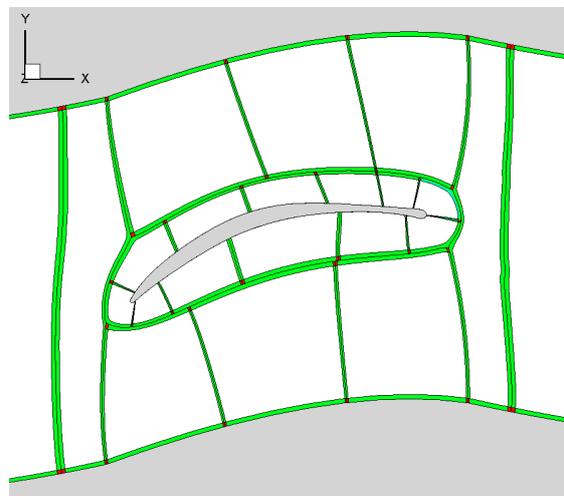


(b) Closeup around the trailing edge at the tip

Fig. C.4: The result of searching connectivity on the 3-D cascade mesh with the tip clearance



(a) Fifth standard configuration cascade



(b) Controlled diffusion airfoil

Fig. C.5: Partitioning of large grids for parallel computation using MPI

## 付録 D 連立一次方程式と固有値問題の解法

構造の方程式およびメッシュモーフィングは有限要素法によって離散化されるが、得られる方程式は疎な係数行列をもつ大規模な連立一次方程式となる。一般に、連立一次方程式の求解法として直接法と反復法がある。

直接法は係数行列を LU 分解し前進・後退代入により解を求める手法であり、代表的なものにスカイライン法やマルチフロント法が挙げられる。直接法は、反復法と異なり境界条件を正しく適用すれば行列の性質によらず解が求まるが、LU 分解により元の行列における零要素が非零要素になる（「Fill-in が生じる」という）ために、

- Fill-in を極力生じないような自由度番号の付け替えが必要。
- 非零要素の増加量を考慮するためのプログラミングが複雑になる、並列化が容易でない

という課題がある。また、係数行列を正行列で確保することはメモリ消費量の観点から現実的ではない。

反復法は何らかの初期解をもとに反復操作を行い連立一次方程式の解を近似的にもとめる方法で、常に同じ係数行列を反復に用いる Gauss-Seidel 法や SOR 法、クリロフ部分空間法的一种である共役勾配法、GMRES 法などがある。本研究のように二次要素を用いて有限要素法で離散化した場合、剛性行列は非優対角対称行列となり Gauss-Seidel 法や SOR 法は使えない。そこで本研究では対称行列に対するクリロフ部分空間法の共役勾配法を用いた。また、クリロフ部分空間法の反復回数は前処理行列に大きく依存することから、前処理についても工夫を施した。

本付録で記述する内容は、Saad による教科書（連立一次方程式：[94]、固有値問題 [95]）に非常に詳しく述べられている。一般に構造解析や行列ソルバは商用ソフトウェアが充実しているので、これらをブラックボックスとしてうまく使えばコードを自作する必要は無いのではないかと思われるかもしれない。しかし、本研究では汎用ソフトウェアではできない CFD・FEM コード間のより密な連携、高次要素を用いた構造解析に適した前処理の選択、さらに大型コンピュータでも用いられることを念頭に置き、自作によるメリットも少なく無いと判断し、これらの機能を FORTRAN で実装した。

### 共役勾配法

有限要素法により仮想仕事式を離散化し得られた連立一次方程式は、正定値対称な疎行列を係数行列  $A$  としてもつ連立一次方程式

$$Ax = b \quad (\text{D.1})$$

となる。ここで  $x$  は求めるべき解、 $b$  は右辺ベクトルであり、有限要素法の場合は外力と内力の差である。

Eqn. (D.1) の反復解法として、以下に説明する共役勾配法 (Conjugate Gradient method, CG method) を用いている。これは、係数行列  $A$  と初期残差  $r_0 = b - Ax_0$  からつくられる  $m$  次元のクリロフ部分空間 (Krylov subspace)

$$K_m(A, r_0) = \text{span}(r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots, A^{m-1}r_0) \quad (\text{D.2})$$

の正規直交基底  $v_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) を用いて、求める近似解を

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^m v_i y_i \quad (\text{D.3})$$

$$= x_0 + V_m y, \quad V_m = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m] \quad (\text{D.4})$$

と表すものである．ここで，係数  $y$  はクリロフ部分空間に射影された残差が 0 となるように定められ， $m$  次元の単位ベクトル  $e_1 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$  を用いて

$$V_m^T A V_m y = |r_0| e_1 \quad (D.5)$$

の連立一次方程式を解くことで求められる．ここで  $V_m^T A V_m$  は  $A$  が対称行列の場合には三重対角行列となり，トーマスのアルゴリズムによって反転することができる．

実用上はこれと等価な反復法が漸化式で表わされた形式を用いて逐次的に解を更新するように書き換えられ，数値計算に用いられる．共役勾配法のアルゴリズムを以下に示す．

Algorithm: 共役勾配法

1. 初期解  $x_0$  を設定，初期残差  $r_0 = b - Ax_0$ ， $p_0 = r_0$
2. for  $k = 0, 1, 2, \dots$ ; do
3.  $y_k = Ap_k$
4.  $\alpha_k = r_k^T r_k / p_k^T y$
5.  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ ， $r_{k+1} = r_k - \alpha_k y_k$
6. 残差判定  $\varepsilon = |r_{k+1}|$  が十分小さければ，終了
7.  $\beta_k = r_{k+1}^T r_{k+1} / r_k^T r_k$ ， $p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$
8. done

#### 前処理

共役勾配法は，係数行列  $A$  の固有値が 1 付近に密集しているほど収束が早く，そうでなく大きな固有値から小さな固有値まで幅広く含んでいる場合には収束しにくいという特徴がある．したがって，係数行列の性質を変化させるために，連立一次方程式 Eqn. (D.1) を等価な問題として書き換え，共役勾配法を用いる数値解析的技法が用いられる．これは前処理 (preconditioning) と呼ばれ，通常数値計算で共役勾配法などのクリロフ部分空間法と組み合わせて用いられる．なお，圧縮性流体解析において低マッハ数の流れを解析する際に用いられる「前処理」とは言葉は同じだが，ここでは連立一次方程式の反復法に用いる場合のことを指している．Eqn. (D.1) の等価な書き換えとして，左から行列  $M^{-1}$  を掛けると，

$$M^{-1} A x = M^{-1} b \quad (D.6)$$

が得られる．ここで  $M$  は前処理行列と呼ばれ，これによって反復法は行列  $M^{-1} A$  を用いればよくなる．

最も強力な前処理は  $M = A$  とすることであり，すると  $M^{-1} A = A^{-1} A = I$  となることから反復法は一回で収束する．しかしながら， $A^{-1}$  が求まるということは連立一次方程式がすでに解けているということであり，またこれを直接求められるのはよほど自由度数の小さい場合のみである．

そこで，行列  $M$  を  $A$  にできるだけ近くとるようにすることや  $M^{-1} A$  ができるだけ単位行列に近くなるように工夫した  $M$  を考え，それを前処理行列として使用することを考える．例えば， $A$  の対角成分のみを用いた「対角スケーリング」

$$M_{ij} = A_{ij} \delta_{ij} \quad (D.7)$$

や，そのブロック行列への拡張であるブロック対角スケーリング，CFD でよく用いられるような， $A$  の近似 LDU 分解に基づく SGS 前処理

$$M = (L + D) D^{-1} (D + U) \quad (D.8)$$

が挙げられる．

さて， $A$  が対称行列で共役勾配法を使うときには，前処理された連立一次方程式も対称性が保たれる必要がある． $M$  が， $A$  の不完全コレスキー分解 (Incomplete Cholesky factrization) により

$$M = LU \quad , \quad U = L^T \quad (D.9)$$

と表せたとすると， Eqn. (D.6) を計算することで

$$(LU)^{-1}Ax = (LU)^{-1}b \quad (D.10)$$

$$U^{-1}L^{-1}A(U^{-1}U)x = U^{-1}L^{-1}b \quad (D.11)$$

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \quad (D.12)$$

と，等価な連立一次方程式 Eqn. (D.12) に書き換えられる．ただし，

$$\tilde{A} = L^{-1}AU^{-1} \quad , \quad \tilde{x} = Ux \quad , \quad \tilde{b} = L^{-1}b \quad (D.13)$$

である． $\tilde{A}$  に前処理の効果がかかっていることは， $L, U$  が真に正しい  $A$  の LU 分解であった場合に  $\tilde{A} = I$  となることから理解できる．

Eqn. (D.12) を共役勾配法で解く場合に，前処理を用いた共役勾配法が前処理前の連立一次方程式の量  $A, x, b$  でどのように表わされるかを考えていく．初期残差は，

$$\tilde{r} = L^{-1}r_0 \quad (D.14)$$

$x$  の修正方向ベクトル  $p$  の初期値は， $\tilde{x} = Ux$  の関係より方向ベクトルにも同様の関係式が使えて，

$$\begin{aligned} p_0 &= U^{-1}\tilde{p}_0 \\ &= U^{-1}\tilde{r}_0 \\ &= M^{-1}r_0 \end{aligned} \quad (D.15)$$

と定めることが出来る．修正係数  $\alpha_k$  は，内積に関する関係

$$\begin{aligned} \tilde{r}^T \tilde{r} &= (L^{-1}r)^T (L^{-1}r) \\ &= r^T L^{-T} L^{-1}r \quad (L^{-T} = U^{-1} \text{を用いた}) \\ &= r^T M^{-1}r \end{aligned} \quad (D.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}^T \tilde{A}\tilde{p} &= p^T U^T L^{-1}AU^{-1}Up \\ &= p^T Ap \quad (U^T = L \text{を用いた}) \end{aligned} \quad (D.17)$$

より，

$$\alpha_k = \frac{\tilde{r}_k^T \tilde{r}_k}{\tilde{p}_k^T \tilde{A}\tilde{p}_k} \quad (D.18)$$

$$= \frac{r_k^T M^{-1}r_k}{p_k^T Ap_k} \quad (D.19)$$

残差の更新に関して，

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k - \alpha_k \tilde{A}\tilde{p}_k \quad (D.20)$$

$$L^{-1}r_{k+1} = L^{-1}r_k - \alpha_k L^{-1}AU^{-1}Up_k \quad (D.21)$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k Ap_k \quad (D.22)$$

修正係数  $\beta_k$  は， $\tilde{r}^T \tilde{r}$  の変形をした Eqn. (D.16) の関係を用いて

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^T M^{-1}r_{k+1}}{r_k^T M^{-1}r_k} \quad (D.23)$$

となり，方向ベクトルの更新に関しては，

$$\tilde{\mathbf{p}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{r}}_{k+1} + \beta_k \tilde{\mathbf{p}}_k \quad (\text{D.24})$$

$$U\mathbf{p}_{k+1} = L^{-1}\mathbf{r}_{k+1} + \beta_k U\mathbf{p}_k \quad (\text{D.25})$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = M^{-1}\mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k \quad (\text{D.26})$$

と書き換える事ができる．以上をアルゴリズムの形で表したのが以下の前処理付き共役勾配法である．

---

Algorithm: 前処理付き共役勾配法

---

1. 初期解  $\mathbf{x}_0$  を設定，初期残差  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ ， $\mathbf{z}_0 = M^{-1}\mathbf{r}_0$ ， $\mathbf{p}_0 = \mathbf{z}_0$
  2. for  $k = 0, 1, 2, \dots$ ; do
  3.  $\mathbf{y}_k = A\mathbf{p}_k$
  4.  $\alpha_k = \mathbf{r}_k^T \mathbf{z}_k / \mathbf{p}_k^T \mathbf{y}$
  5.  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$ ， $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{y}_k$
  6. 残差判定  $\varepsilon = |\mathbf{r}_{k+1}|$  が十分小さければ，終了
  7.  $M\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1}$  を解き， $\mathbf{z}_{k+1} = M^{-1}\mathbf{r}_{k+1}$
  8.  $\beta_k = \mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{z}_{k+1} / \mathbf{r}_k^T \mathbf{z}_k$ ， $\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k$
  9. done
- 

前処理行列  $M$  の作り方：ILU( $k$ ) 前処理

構造解析において効果的な前処理法として，不完全コレスキー分解 (Incomplete Cholesky factorization) または ILU 分解 (Incomplete LU factorization) がよく用いられる．これは，疎行列  $A$  をコレスキー分解または LU 分解した際には一般に  $A$  では零成分であった成分が非零成分になってしまう（これを Fill-in が生じるという）ところを，一定の決まりのもとで Fill-in を無視して LU 分解を続け，行列  $M = LU$  を作ることである．

Fill-in の落とし方には対角項と比べた成分の大きさを見張る方法「Fill-in Level」という序列づけに基き Fill-in を選択する方法がある．前者では前処理のために保存しなくてはならない  $L, U$  のために確保すべきメモリ量を LU 分解前に推定することが難しいため，本研究では，Fill-in Level に基づく方法を用いている．通常の LU 分解は以下のアルゴリズムでなされる．

---

Algorithm: LU 分解

---

1. for  $k = 1, 2, \dots, N$ ; do
  2. for  $j = k, k+1, \dots, N$ ; do
  3.  $U_{k,j} = A_{k,j} - \sum_{l=1}^{k-1} L_{k,l} U_{l,j}$
  4. done
  5.  $L_{k,k} = I$
  6. for  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ; do
  7.  $L_{i,k} = \left[ A_{i,k} - \sum_{l=1}^{k-1} L_{i,l} U_{l,k} \right] U_{k,k}^{-1}$
  8. done
  9. done
- 

下線部分が Fill-in の生じる元凶となっている項である．ちなみに上記の前処理のアルゴリズムであるが，行列の各成分をスカラーとして扱う通常の LU 分解ではなく，本研究の対象は 3 次元有限要素法であり，変位 3 成分のカップリングが強いとの認識から，各接点に対する変位 3 成分に対応する  $(3 \times 3)$  のブロック行列を各行・列の単位ブロック成分として疎行列を格納するブロック行圧縮形式 (Block Compressed Row Storage, BCRS) で取り扱っており，ILU 分解も  $(3 \times 3)$  のブロック行列を基本単位とするアルゴリズムに書き換えている．

Fill-in の生じ方を， $8 \times 8$  の行列を例にとって示すと，Eqn. (D.27) のようになる．

$$\begin{bmatrix}
 \circ & \circ & & & \circ & & & \\
 \circ & \circ & \circ & & & & & \circ \\
 & \circ & \circ & \circ & & & & \circ \\
 & & \circ & \circ & \circ & & & \\
 & & & \circ & \circ & \circ & & \\
 \circ & & & & \circ & \circ & \circ & \\
 & \circ & & & & \circ & \circ & \circ \\
 & & \circ & & & & \circ & \circ
 \end{bmatrix}
 \Rightarrow
 \begin{bmatrix}
 \circ & \circ & & & \circ & & & \\
 \circ & \circ & \circ & & F_1 & \circ & & \\
 & \circ & \circ & \circ & F_2 & F_1 & \circ & \\
 & & \circ & \circ & \circ & F_3 & F_2 & F_1 \\
 & & & \circ & \circ & \circ & F_3 & F_2 \\
 \circ & F_1 & F_2 & F_3 & \circ & \circ & \circ & F_3 \\
 & \circ & F_1 & F_2 & F_3 & \circ & \circ & \circ \\
 & & \circ & F_1 & F_2 & F_3 & \circ & \circ
 \end{bmatrix}
 \tag{D.27}$$

ここで， $\circ$  は元々の  $A$  の非零要素， $F$  は LU 分解によって生じた Fill-in である． $F$  の添字が Fill-in Level であり，次のように定められる．

- $A$  の非ゼロ要素は Level 0
- $A$  の非ゼロ要素同士から生じた Fill-in は Level 1
- Fill-in Level  $i$  と Fill-in Level  $j$  から生じた Fill-in の Level は Level  $i + j + 1$

不完全 LU 分解を行う際に，Level  $k$  まで Fill-in を考慮し，そうでないものは棄却し 0 として扱う．このような ILU 分解は  $ILU(k)$  と呼ばれ，Fill-in Level  $k$  を大きく取るほど厳密な LU 分解に近づき，強力な前処理として機能することが期待される．また， $ILU(k)$  は  $L, U$  の各成分を計算する前に  $A$  の非零要素の位置さえわかれば（つまり，格子が決まれば） $L, U$  の Fill-in の位置も判明するため，使用メモリ量が LU 分解前にわかることになるという，計算する上で便利な性質を持っている．本研究では，連立一次方程式の解きやすさおよび使用メモリ量を考慮に入れたうえで，格子モーフィングソルバには  $ILU(0)$  を，また固体の変形解析等には  $ILU(1)$  を用いている．

計算を行う上で注意しなければならない点は，不完全 LU 分解を行う上で  $U$  の対角項が非常に小さくなったり， $U$  の逆行列が存在しなくなることである．こうなってしまうと  $M$  を反転する際の前進代入・後退代入が行えず CG 法が収束しないという，前処理に起因する数値不安定に陥ってしまう．これを防ぐため，ILU 分解に用いる行列は  $A$  ではなく，小さい量  $\varepsilon_{\text{mod}}$  を用いて

$$A_{\text{mod}} = A + \varepsilon_{\text{mod}} \text{diag}(A)
 \tag{D.28}$$

などと，対角項を増した行列  $A_{\text{mod}}$  を前処理行列の算出に用いることで回避可能である．ただし  $\varepsilon_{\text{mod}}$  を大きく取るほど前処理は弱くなってしまふ．本研究では格子にもよるが  $\varepsilon_{\text{mod}} = 0.001 \sim 0.03$  程度の値を用いている．もちろん，このような修正は収束した CG 法の解には影響ない．

#### 前処理の効果の例

構造解析においてどの程度前処理が重要かを，本研究における具体例を通じて示す．対称としたのは第 7 章で扱った CEFS1 ファン動翼の有限要素モデルで，総節点数は 6450 であり有限要素モデルとして 20 点 2 次要素を用いて離散化している．20 点 2 次要素を FEM モデルとして用いたとき，1 つの節点に対して直接干渉しあう節点は 160 節点程度で自由度にすると 3 次元なので 480 自由度程度，言い換えれば 1 つの行に対する非ゼロ成分がおおよそ 480 個存在し，これは 3 次元方程式の 2 次精度差分法で生じる 7 点ステンシルなどと比べると非常に大きいこと，またターボ機械の翼は翼端付近で非常に薄くなるため，アスペクト比の大きい要素が必然的に生じてしまうことから，このような有限要素モデルは一般的に用いられている Fill-in を考慮しない ICCG 法（不完全コレスキー分解前処理付き共役勾配法）では非常に解きにくいものとなる．離散化で生じた FEM モデルの非ゼロ要素パターンを Fig. D.1 に示す．非ゼロ要素は帯行列としても見ることができ，この帯巾が小さくなるように節点番号の付け替えを行っている．

CEFS1 ファン 100% 回転数における，後述の固有値解析の際に必要な連立一次方程式  $Kx = Mv_1$  ( $k$ : 剛性行列， $M$ : 質量行列) を解いた時の反復回数を，複数の前処理間で比較してみる．ここで，右辺のベクトル  $v_1$

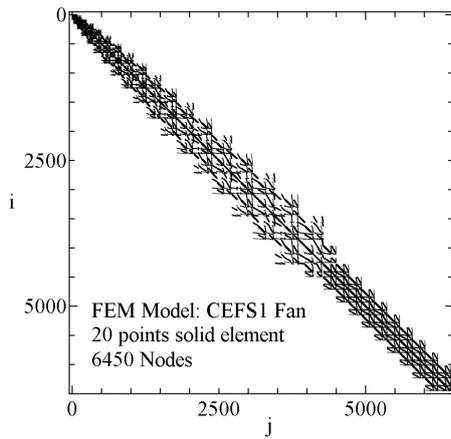


Fig. D.1: Non-zero element pattern of CEFS1 FEM model

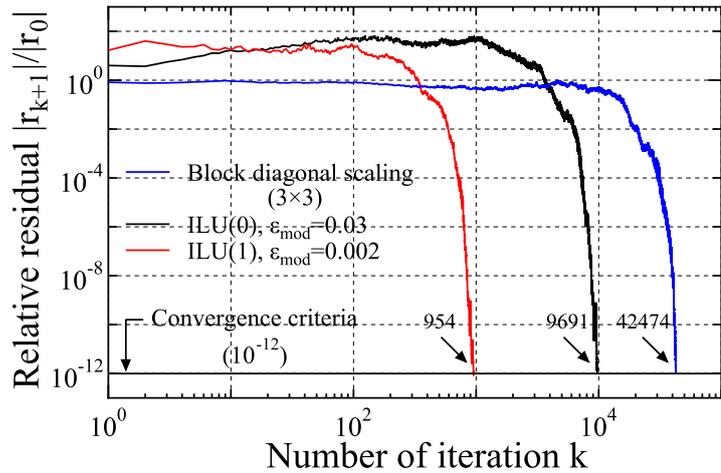


Fig. D.2: Effect of preconditioning on iteration number in Conjugate Gradient method

は乱数から生成されたものを用いている．収束判定は残差が初期残差の  $10^{-12}$  まで減少したら収束したと判定するようにした．使用した前処理は

- $M$  として  $A$  の  $(3 \times 3)$  ブロック対角行列を用いた，ブロック対角スケーリング
- Fill-in を考慮しない ILU(0)
- Fill-in を Level 1 まで考慮する，ILU(1)

の 3 種類であり，下のものほど強力な前処理として機能する．

Fig. D.2 に，これら 3 つの前処理を用いた際の共役勾配法における残差履歴を示す．横軸は反復回数である．最も反復回数の小さいものは ILU(1) の 954 回であり，次いで 10 倍程度の開きがあって ILU(0) の 9691 回，最も遅いのはブロック対角スケーリングで 40000 回以上の反復回数がかかってしまっている．このように，前処理によって大きく反復回数が異なっており，安定かつ高速に解を得るためには問題に合った強力な前処理が必要となることが実感できる．連立一次方程式がより高速で解けることは，同様に連立一次方程式求解の過程を含む固有値解析に対してもメリットがある．一般に共役勾配法は自由度数以下の反復で収束すると言われるが，ここで挙げた例においては，ブロック対角スケーリングのような弱い前処理を用いると収束が遅くなり数値誤差が蓄積し，自由度数より多くの反復数を必要としているのだと考えられる．

固有値解析法：Arnoldi 法

構造振動モードを求めるためには，Eqn. (D.29) に示す局所線形化された運動方程式の一般化固有値問題

$$\omega^2 M \phi = K \phi \tag{D.29}$$

および標準固有値問題に変換された形の

$$\left( \frac{1}{\omega^2} \right) \phi = K^{-1} M \phi \tag{D.30}$$

を解くことを述べた．係数行列の次元が大きいことから，固有値解析においても連立一次方程式同様に近似的な求解法が必須となる．以後，一般的な記述のために  $1/\omega^2 = \lambda$ ,  $K^{-1} M = A$  とし，Eqn. (D.30) は次のように書ける．

$$A \phi = \lambda \phi \tag{D.31}$$

固有値解析には，前述のクリロフ部分空間の性質を固有値解析に用いる Arnoldi 法を用いる．Arnoldi 法はクリロフ部分空間の正規直交基底を求める方法だが，固有値解析においては固有値問題をクリロフ部分空間に射影することで問題の次元を縮小させるのに用いられる．

いま, L2 ノルムが 1 である初期ベクトル  $v_1$  があるとし, ここから  $m$  本の基底  $v_2, \dots, v_m$  を逐次的に求めていく. このアルゴリズムは, Gram-Schmidt の正規直交化法を用いて,

Algorithm: Arnoldi 法

1. for  $j = 1, 2, \dots, m$ ; do
2.  $w = Av_j$
3. for  $i = 1, 2, \dots, j$ ; do
4.  $h_{ij} = v_i^T w$  ( $i = 1, 2, \dots, j$ )
5.  $w = w - h_{ij}v_i$
6. done
7.  $h_{j+1, j} = |w|, v_{j+1} = w/|w|$
8. done

と書ける. ここで直交化の段階における係数たち  $h_{ij}$  をまとめた行列はヘッセンベルグ行列と呼ばれ,

$$H_m = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1, m-1} & h_{1m} \\ h_{21} & \cdots & & h_{2m} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & h_{m, m-1} & h_{mm} \end{bmatrix} \quad (\text{D.32})$$

のような形を持つ. この行列は, 固有値問題 Eqn. (D.31) の解  $\phi$  を

$$\phi = v_i \theta_i = V_m \theta, \quad V_m = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_m] \quad (\text{D.33})$$

と新たな座標ベクトル  $\theta$  を用いて近似したうえで, Eqn. (D.31) のガラーキンの近似を左から  $V_m^T$  をかけ求めると,

$$V_m^T A V_m \theta = \lambda V_m^T V_m \theta \quad (\text{D.34})$$

$$[v_i^T A v_j] \theta = \lambda [v_i^T v_j] \theta \quad (\text{D.35})$$

$$H_m \theta = \lambda \theta \quad (\text{D.36})$$

のように, 次元縮小させた固有値問題に出現する. Eqn. (D.36) の固有値問題を LAPACK を用いて解くことで固有値  $\lambda$ , 固有ベクトル  $\theta$ , が求まり, 最終的に固有値問題の近似解は固有値  $\lambda$ , 固有ベクトル  $\phi = V_m \theta$  と求めることができる.

クリロフ部分空間の次元数をどれだけ取るかが解に影響するが, 本研究では低次の数個の翼振動モードが精度よく求まれば良いので,  $m = 50$  とした. また, 初期ベクトル  $v_1$  の各成分は一様乱数から生成した.

## 付録 E ミスチューニング

ファンや圧縮機の翼振動特性に大きく影響を与える要素のうちの1つに、各翼の振動特性のばらつきが挙げられる。フラッターや強制振動応答といった翼列の振動を考える際には、まず簡単のために、基本的な場合として各翼の構造特性が全て等しいという、周方向に完全な周期性（周期的対称性、Cyclic symmetry）を仮定する。このように周方向の不均一性が全くない場合はチューン系（Tuned system）と呼ばれる。チューン系の流体中における自由振動解である空力弾性モードは以下の（解析的な）特徴をもつ。

- 空力弾性モードのモード振幅は、各翼で等しい。
- 空力弾性モード内において、同一構造振動モード間では、隣接翼と一定の翼間位相差をもつ。

しかしながら、実際にはどの翼の機械的性質も「全く等しい」はずはない。製造公差や、特にフラッターの観察を目的とした振動計測やリグ試験においては、計測器の取り付け（歪みゲージや埋め込み型圧力センサなど）によって、「各翼同士ではわずかに機械的特性がばらついているだろう」と考えるのが至って自然である。このように翼毎に機械的性質が異なる場合は、チューン系に対してミスチューン系（Mistuned system）と呼ばれる。ミスチューン系では、周期的対称性を仮定したチューン系での議論に基づいた空力弾性モード形状の特徴はもはや失われ、ばらつきを考慮した振動解析が必要になる。

ミスチューニングがあると、翼列の空力弾性モードに対して周期性が崩れた結果、Fig. E.1 に示すように、空力弾性モード形状に「Mode localization」と呼ばれる、高振幅になる翼が周方向の特定の位置に偏在する現象が生じる。また、翼間位相差もチューン系のものとはずれてしまう。

ミスチューニングは、フラッターと強制振動応答それぞれに対して以下のような異なる影響を与える。

- 強制振動応答： 空力弾性モード形状が特定の翼に偏在化した結果、周方向に均一に励振されるのではなく、特定の翼だけの応答振幅がチューン系に比べて大きくなってしまう。すなわち特定の翼に大きな振動応力が生じることになり、強制振動応答の観点からは危険側に作用する。
- フラッター： 翼列フラッターは、通常周方向に位相速度をもつスピニング・モードで生じる。したがって、周方向の均一性が崩された結果、フラッターモードの空力減衰はチューン系と比較して大きくなる。即ち、フラッターに対しては安定側に作用する。フラッターの抑制という観点からは、振動特性の違う翼を周方向に交互に配置する「Alternative mistuning」が有効であるとされている。

このようなばらつきがどのように翼振動特性に影響を与えるのかを知ることは、チューン系による解析結果と実際の振動現象を相互に参照して振動現象を理解するうえで、非常に重要であると考えられる。そこで本付録では、

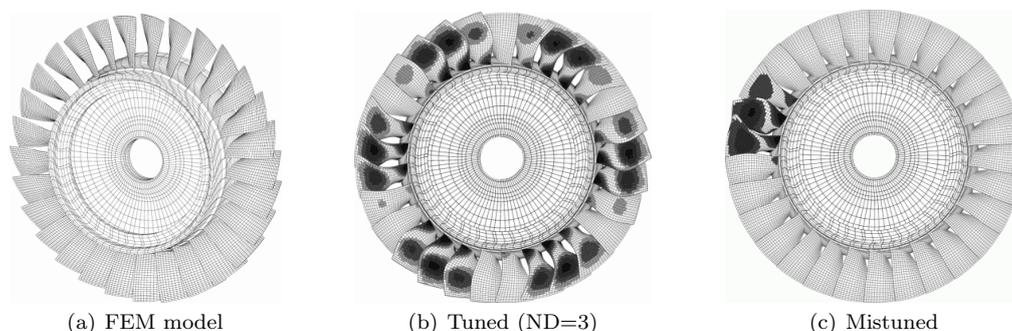


Fig. E.1: Vibration mode shape of a bladed disk obtained by FEM structural analysis (from [41]). Large mode localization can be seen in the mistuned case.

ミスチューニングの感度がどの程度あるかを，翼ごとの機械的特性のばらつき度合いを確率的にモデリングしてフラッター特性への影響度合いを調べた．

振動方程式とばらつきのモデリング

ミスチューニングの感度がどの程度あるのかを検討する際には，まずミスチューニングの起源が何かを考える必要がある．製造時に起こる「ばらつき」に関しては，翼の幾何形状や材料特性のばらつきといった事項に起因すると考えられ，これらのばらつきは翼毎に固有振動数，構造振動モード形状を変化させる．

ここでも，May らの計測結果 [56] を参考に，翼構造特性のばらつきについて考えてみる．May らの行った翼 22 枚の固有振動数の計測結果から推定した翼ごとの固有振動数の標準偏差は，計測装置のついていない翼の振動数に対しておよそ 0.17 %，計測装置（ピエゾ素子）のついていない翼でおよそ 0.5 % であった．この値から考えれば，構造特性のばらつきは固有振動数にして 1 % 未満程度だと考えるのが自然であろう．

本研究のフラッター解析手法では，チューン系における線形化自励空気力係数行列を算出することから，連成解析を行いモード同定を行えばチューン系の空力弾性方程式は同定されたことになる．自励空気力係数行列は特定の Traveling wave mode の運動に対して与えられているわけではなく，各翼の運動に対するものであるため，振幅・翼間位相差一定の Traveling wave mode がミスチューニングによって崩された場合に適用しても問題はない．また，ばらつきの原因が製造公差のみであり，翼の振動数が高々数%の範囲内のずれであれば，その係数行列への影響はほとんどないと考えられる．したがって，ミスチューニングの影響の検討指針として，「チューン系からの差として構造特性のばらつきをモデル化し，空力弾性方程式の解の特性を調べていけば良い」といえる．各翼の固有角振動数がチューン系のまわりでチューン系の平均値に対し  $\varepsilon$  倍の標準偏差をもつ正規分布に従うばらつきがあるとすると  $i$  番翼の固有振動数は平均 0，標準偏差  $\varepsilon$  の正規乱数に従う確率変数  $\delta_i$  を用い，チューン系の  $1 + \delta_i$  倍になる．Fig. E.2 に，振動数がばらついている翼列の各翼が自励空気力によって連成している状態を模式的に表した図を示す．このときの空力弾性方程式は，モード剛性行列が固有角振動数の二乗であることから，次で表わされる．

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_{N_b} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_{N_b} \end{bmatrix}}_{\text{mistuning effect}} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N_b} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{N_b} \\ A_{N_b} & A_1 & \cdots & A_{N_b-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_2 & \cdots & A_{N_b} & A_1 \end{bmatrix}}_{\text{self-excited aerodynamic force identified in the tuned system}} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_{N_b} \\ B_{N_b} & B_1 & \cdots & B_{N_b-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_2 & \cdots & B_{N_b} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_{N_b} \end{bmatrix} \tag{E.1}$$

$$\Lambda_i = (1 + \delta_i)^2 \Lambda_0 \quad (\text{Modal stiffness matrix for } i \text{ th blade, } \Lambda_0: \text{ tuned system}) \tag{E.2}$$

各翼の構造振動モード固有振動数にのみばらつきを導入していることから，このモデル化には以下の仮定がある．

- 固有振動数のばらつきは，翼構造の剛性マトリクスを  $(1 + \delta_i)^2$  倍することで実現されていることに相当する．
- 翼構造振動モードの固有ベクトルは変化していないから，質量行列，モーダル質量は変化していない．
- チューン系からの空力弾性モード振動数の変化は数%以内と小さく，翼形状および構造振動モード形状はチューン系のもものと等しいため，自励空気力係数はほとんど変わらない．

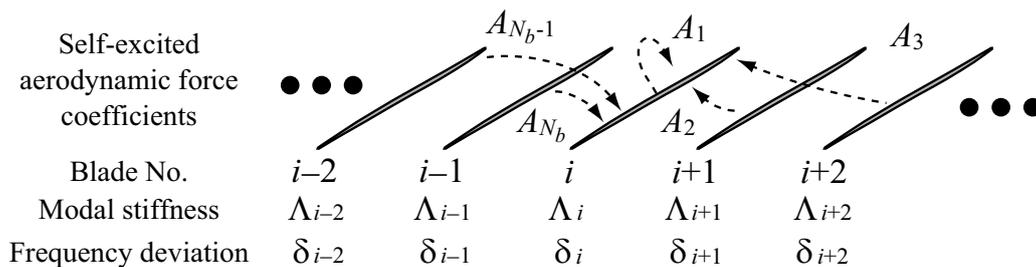


Fig. E.2: Mistuned cascade with self-excited aerodynamic force

ここで、空気力係数行列をチューン系のものに凍結した理由についてコメントしておく。第一の理由として、CFD を用いた空気力係数行列の算出は非常に長い計算時間を要するため、製造公差のようなわずかな翼形状の違いや、それが構造振動モード形状や振動数に与える影響を忠実に考慮し、モンテカルロシミュレーションに基づいて翼形状のばらつきが空気力係数行列のばらつきとして伝播することを統計的に考慮することは非常に困難だからである。第二の理由は、ミスチューニングの本質は「翼構造の機械的特性のばらつきによるシステムの対称性の崩れ」であるため、構造特性の変化のみ（例えばモード剛性）にその効果を一任させるほうがモデル化として単純であるためである。

このようにミスチューンをモデル化した空力弾性方程式 Eqn. (E.1) の固有値解析によってミスチューン系の空力弾性モードが得られ、統計的な評価のもとでフラッター特性がどのように変化するか、ばらつきの振動特性に与える影響はどの程度かを考えることができる。

#### 解析結果の処理方法

解析結果は、チューン系では翼枚数から一意に定まる翼間位相差  $\sigma$  [deg] および空力減衰  $\mu$  [rad] とし、二次元平面内の点  $(\sigma, \mu)$  のまわりの微小領域  $d\sigma d\mu$  の中に存在する空力弾性モード固有値の個数の期待値を  $P(\sigma, \mu)d\sigma d\mu$  [個] と定義する。 $P(\sigma, \mu)$  [個/(deg · (1/sec))] は確率密度関数 (Probability density function, PDF) の一種と考えることができ、 $\sigma\mu$  平面全体での積分値は空力弾性モードの個数になる。また、 $P$  の分布から空力弾性モードがチューン系に比べてどの程度変化しうるかを知ることが出来る。 $P(\sigma, \mu)$  は、正規乱数によってばらつきを生成し多数のサンプルを行い、各領域の空力弾性モード固有値の数を数えて規格化し、ヒストグラムとして算出した。なお、翼間位相差の定義にも任意性があるが、ここでは 1 番翼と 2 番翼たった 2 つから求めた。

#### 解析対象と解析パラメータ

解析対象は第 7 章で扱った CEFS1 ファンの作動点のうち、フラッターが生じる Fig. 7.32 の 80 % 回転数 C 点とする。ミスチューニングの強度として、ばらつきの標準偏差をチューン系の固有振動数の 0.2 %、1 %、2 % とし、現実的なミスチューンの値から非常にミスチューンが大きい 10 倍までの範囲を対象とした。また、考慮した翼枚数は連成と同じファン半周に対応する 9 枚である。

#### 解析結果

##### 最小減衰モードの分布と積算確率

まず、フラッターの発生に関わる最小減衰モードに関して、翼間位相差と空力減衰の関係の分布について調べる。Fig. E.3 には、最小減衰モードの確率密度関数の等高線 ( $P = 2 \times 10^{-4}$ ) を示す。チューン系では、 $P$  は解析的にはデルタ関数となり、たった 1 点のみで非零の値をとり、空力減衰は最小となる。標準的なばらつきの大きさである 0.2 % ではモード減衰はほとんどチューン系と変わらず、翼間位相差に対しては  $\pm 15$  deg 程度のばらつきが生じることがわかる。ミスチューニング量を 1 %、2 % と大きくしていくにつれて、翼間位相差および空力減衰のばらつきは急激に増大する。特に翼間位相差に対しては 2 % ミスチューニング時に  $\pm 90$  度程度の変化が生じることがわかる。

Fig. E.4 には、 $P$  を積分することで得た累積確率分布

$$\int_{-\infty}^{\mu} \int_{-180}^{180} P(\sigma, \mu) d\sigma d\mu \quad (\text{E.3})$$

を各ミスチューニング量に対して示す。これは、开区間  $(-\infty, \mu]$  の範囲に最小モード減衰が存在する確率を示しており、 $\mu = 0$  の値は空力減衰が負減衰である確率、即ちある作動点において規定の機械的性質のばらつきをもつ翼でファンを構成したときにフラッターが発生する確率を示している。標準的なミスチューニング量の 0.2 % はほとんどチューン系の分布と変わらず、空力減衰やフラッターの発生点についてチューン系との差はほとんど無いといえる。しかしばらつきを大きくすると累積確率分布の段差は安定側にシフトしていくことから、統計的には空力減衰が大きくなり、空力弾性系は安定になっていることがわかる。

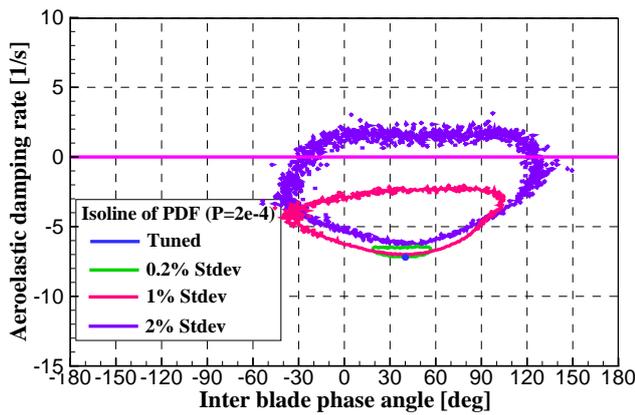


Fig. E.3: Isoline of PDF of the least stable AE mode in IBPA- $\mu_{AE}$  plane (80% speedline, point C)

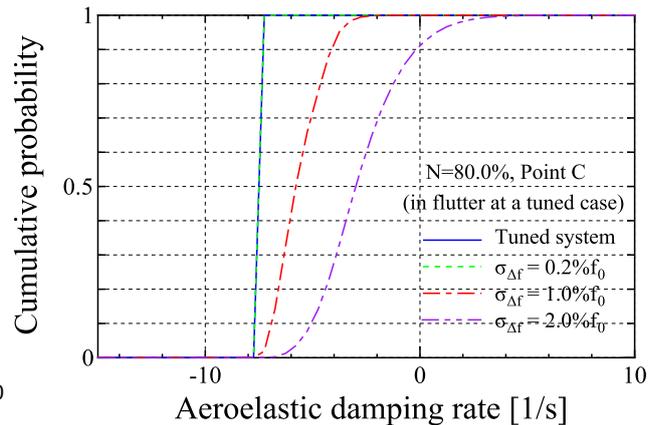


Fig. E.4: Sensitivity of mistuning on aeroelastic damping rate of the least stable AE mode (80% speedline, point C)

### 1F モード群の空力弾性モード固有値分布

Fig. E.5 に、1F モード群に属する空力弾性モード個数の期待値分布を、翼間位相差とモード減衰で整理し、ヒストグラムにして表したものを示す。Fig. E.5(a) に示すチューン系ではヒストグラムは分布を持たず、決まった翼間位相差が必ず実現される。そして、たった 0.2 % の固有振動数のばらつきによって空力弾性モードの周期性は容易に崩される。Fig. E.5(b) に示す 0.2 % のばらつきに対する結果を見ると、各空力弾性モードはチューン系に対する翼間位相差にピークを持つ、正規分布のような上に凸の分布に従っている。ピークの個数は 9 個であり、周方向の自由度に等しくなっている。各ピークによって翼間位相差のばらつき度合いは異なるが、最大でチューン系から 15deg 程度もの偏差が生じうる。しかしながら、モード減衰はほとんどチューン系のそれと変わらないため、一般的な製造公差により生じるミスチューニングではフラッターの発生点はほとんど影響を受けないといえる。

ミスチューニング量の大きい 1 % , 2 % の場合を Fig. E.5(c) , Fig. E.5(d) に示す。Fig. E.5(c) では 0.2 % に比べさらに分布の幅が広がっていると同時に、翼間位相差の平均 40deg , 80deg に対応するピークが融合しかけていることがわかる。そして、標準的なばらつきの 10 倍以上の値である 2 % では、翼間位相差の確率分布に 1 % の場合と比べて定性的に異なる点が現れている。フラッターが発生する翼間位相差の 40deg , 80deg 付近の 2 つのピークが融合してしまい、ヒストグラム上ではチューン系においてどちらの翼間位相差を起源としていたのかが曖昧になる。これは、翼間位相差 40deg , 80deg の 2 つの空力弾性モードにおいて翼構造のばらつきによって導入された弾性復元力のチューン系からの差分が翼同士の自励空気力による連成による周方向の結合の強さを上回ることが多くなるためであると考えられる。

### まとめ

ミスチューニングを固有振動数のばらつきとしてモデル化し、その感度解析をモンテカルロシミュレーションにより行った結果、CEFS1 について以下のことが明らかとなった。

- 製造公差によって生じるような、僅かな固有振動数のばらつきでも翼間位相差は影響を受け、それは本対象の場合 30deg 程度である。
- フラッター境界は製造公差程度のミスチューニングではほとんど影響を受けないと判断できる。
- ミスチューニングが非常に大きい場合には、周方向の結合が弱いモードがばらつきによって確率的に融合してしまうため、観測されたある空力弾性モードに対して、翼間位相差によってチューン系におけるどの振動モードと近いかを判断することは難しい。

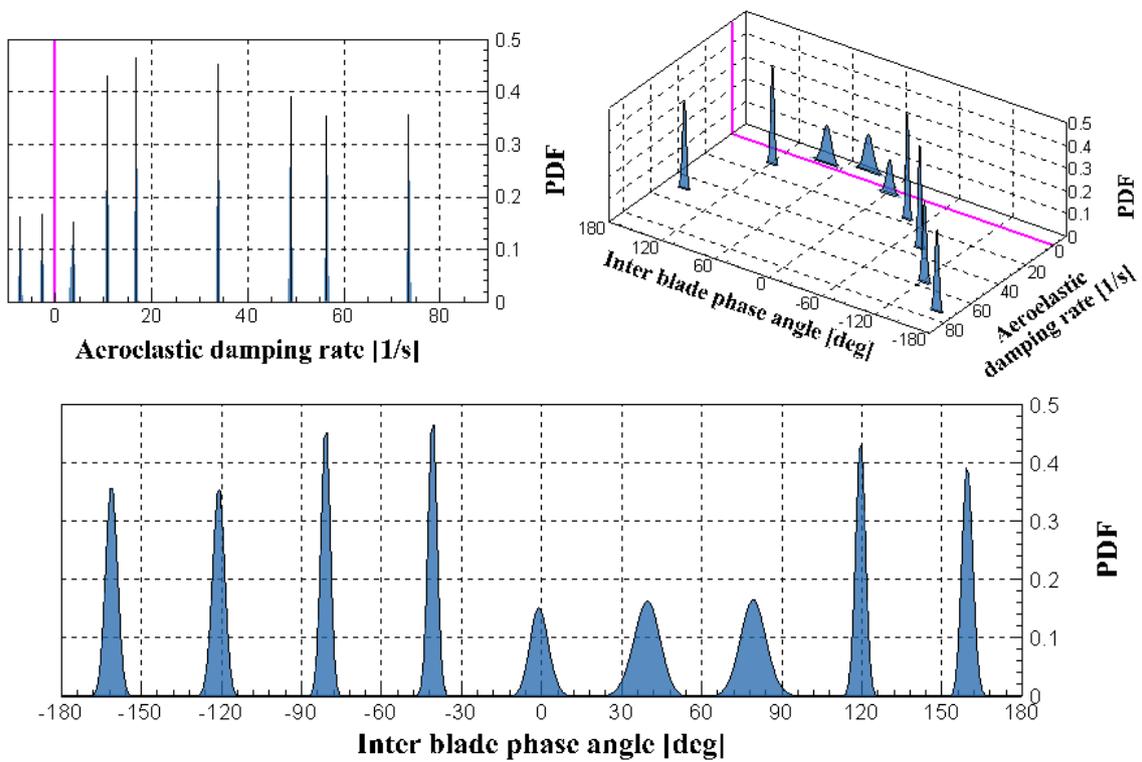
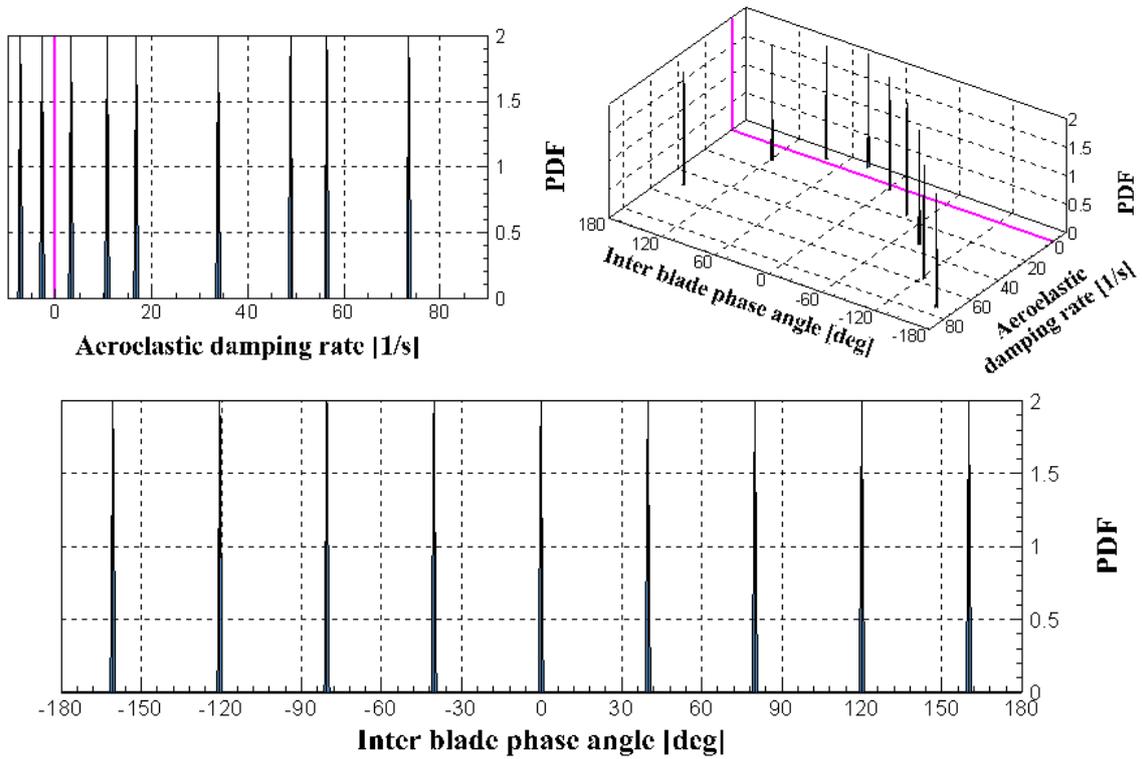
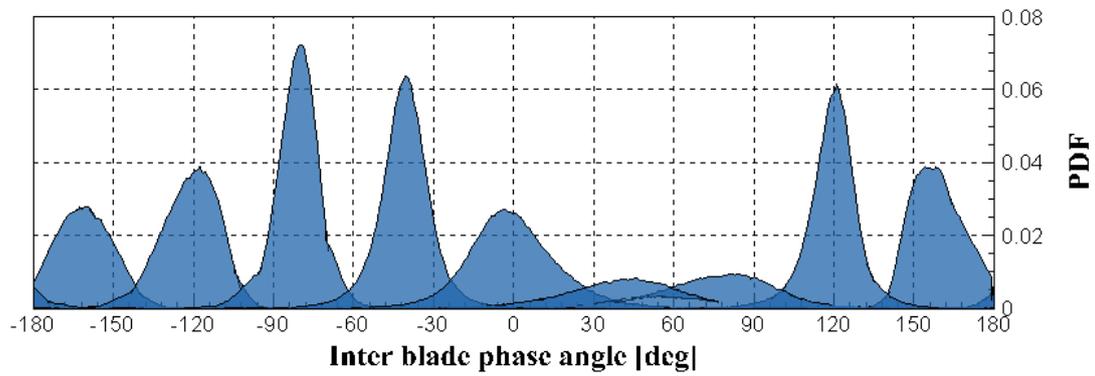
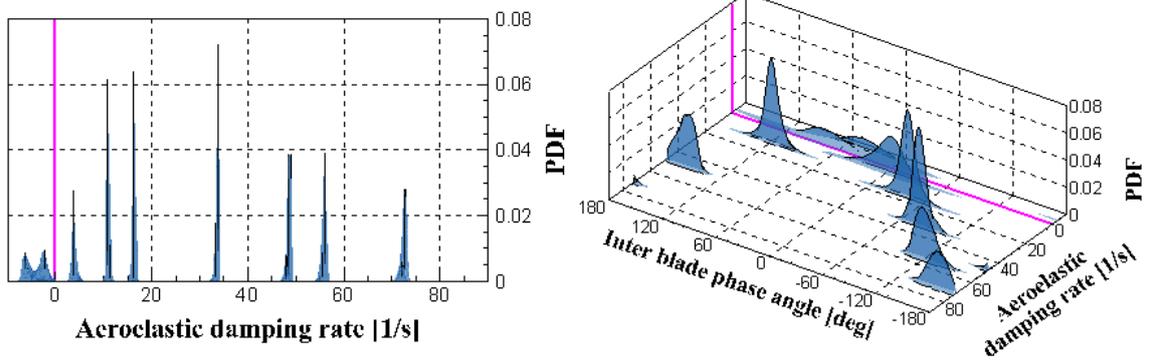
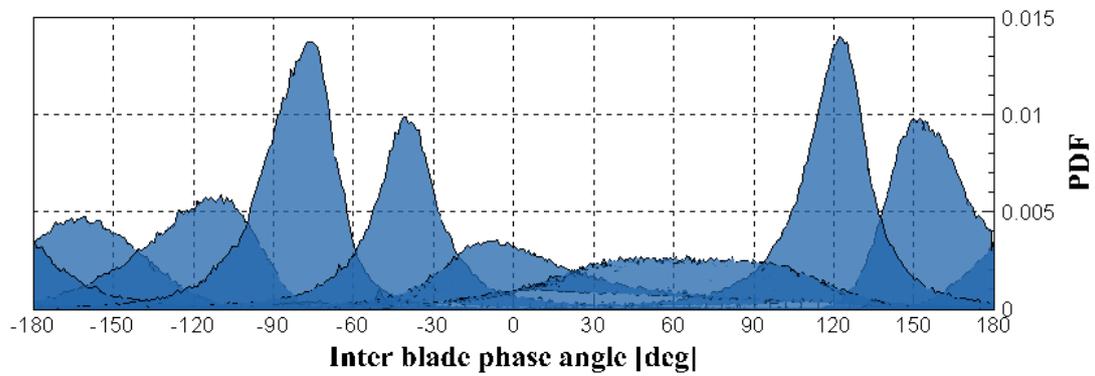
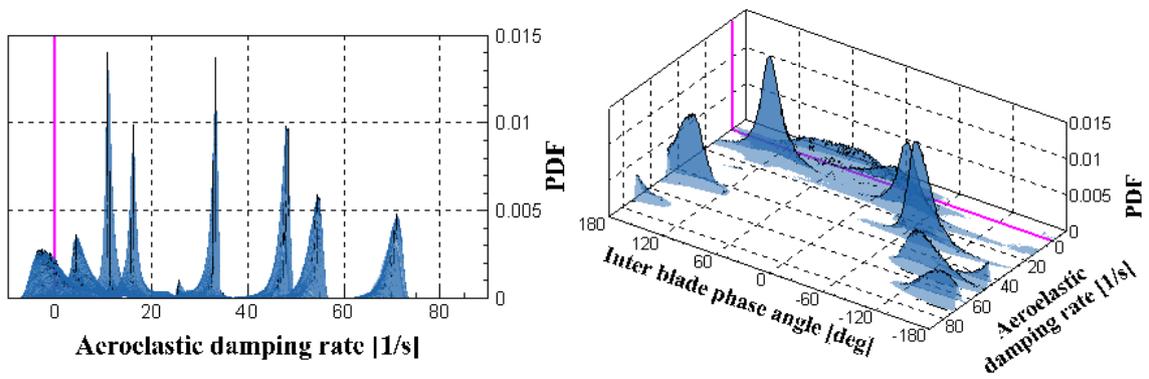


Fig. E.5: Effect of mistuning on inter blade phase angle and aeroelastic damping rate of 1F mode family (80.0% speedline, point C)



(c)  $\varepsilon = 0.01$



(d)  $\varepsilon = 0.02$

Fig. E.5: Continued.

## 謝辞

本研究を纏めるにあたり、多くの方々にご指導並びに助言を頂きました。ここに感謝の意を表します。

指導教員の渡辺紀徳教授に心より感謝いたします。本研究の発端は「軽い翼ではどのようなフラッターが起きるのか?」という単純なものだったように思いますが、このような問に対して答えるため、空気力学・構造力学・振動力学の三つの分野の知識を統合する、航空宇宙工学ならではの課題に挑戦させていただき、技術者を目指す上で貴重な経験をすることができました。研究方針が迷走した結果として非定常流の数値解析に挑戦した際にもやめさせることなく、研究経過の発表までさせて頂きました。そのうえ、多くの学外の方々と交流する機会を頂き、これらは研究を進める上で大いにやる気の維持に繋がりました。六年間のご指導に対し恩返しできるよう、また自立した研究者となれるよう、今後とも精進していきたいと思っております。

同研究室の姫野武洋准教授には、数値計算の関連で非常にお世話になりました。輪講では計算結果のみならず解析方法の定式化やその考え方に関する根本的な部分へご指摘をいただき、取り組んでいる事項がうまく理解できるようになるとともに、いくつかの計算結果の改善につながりました。また研究室を訪れた際にも色々なご相談に乗ってくださり、感謝いたします。

金子成彦教授、鈴木宏二郎教授、寺本進准教授には、学位審査の際ご指導・ご指摘を頂き、本論文をまとめる上で大変参考になりました。深く感謝いたします。また、寺本准教授、岡本光司准教授、岡井敬一特任准教授には輪講の際にも貴重なご意見を頂き、感謝いたします。井上特任准教授には、研究結果の解釈や発表の仕方などについて幅広いアドバイスを頂きました。これらを通じて現在自分が主張したいことに対して抑えるべきことや、追加に必要な情報が明確化されていったように思います。

学術支援職員の鶴沢聖治氏には学部の実験で非常にお世話になりましたが、その後数値解析をするようになって度々実験室を見に来るよう、声を掛けて下さいました。秘書の山田陽子さんには出張手続きなどで大変お世話になりました。また佐久間康典助教には研究の相談はもちろん、ガス抜きと称してお酒にお付き合いいただいたり、行き詰まっている時には叱咤激励して下さいたりして感謝しております。

博士課程の先輩であった梅村悠さん、岡田隆一さんには研究に関することをはじめとし様々な面でお世話になりました。また後輩の Javed 君、岡本竜馬君も結果や方向性の議論等をしていただき、大変有意義でした。

以上学内の方々の他、多くの学外の方々にもお世話になりました。

(株)IHI の青塚瑞穂様、室岡武様には、社内勉強会に参加させていただいたり、IHI-東大社会連携講座において実際にファンフラッターが生じたケースに挑戦する機会をいただきました。研究会での議論ではメーカーとしての視点から空力弾性や製品における流れの現象に関して多くのご助言を頂きました。また、頂いた翼型を使用させていただくにあたり、数値解析を通じ様々なものづくりの工夫を感じ取ることができ、非常に感動いたしました。

日立製作所の妹尾茂樹様、柴田貴範様には蒸気タービンにおけるフラッターという話題をご提供いただき、議論させて頂きました。本研究分野が航空エンジンのみならずエネルギー機器全般にわたることを知り、また蒸気タービン特有の空力弾性問題に取り組ませて頂き、非常に良い経験となりました。

JAXA の齋藤健一様、玉山雅人様、有蘭仁様、吉本周生様には私をインターン生として受け入れて下さり、フラッター制御に関する実験に参加させて頂きました。狙った気流条件でフラッターを起こすことや実験系を題材とした理論解析との比較、さらにインターン後にも上田哲彦先生による揚力面理論の勉強会にも参加させていただけるなど、自分の研究だけではできない貴重な経験をさせて頂きました。賀澤順一様には、研究状況を気にかけて下さったり、学会で議論して下さいたりと、感謝しております。

最後に、博士課程への進学を許して下さい、学生生活を支えて下さった家族に感謝し、本論文を締めさせて頂きます。