論文審査の結果の要旨

氏名　仲村　智

四次元超対称ゲージ理論と二次元共形場理論の対応は，背後にあるより大きな六次元理論の存在を示唆するもので，その拡張や証明の試みを通じて理解を深めていく事は，近年の素粒子，弦理論の中心的課題の一つとなっている．このような機運の大きな契機の一つとなっているのが Alday, Gaiotto, Tachikawa により提唱された AGT 対応 (2010) であり，双対性が極めて非自明な等式として具現化される事を予言している．

本学位論文に関連した例を挙げる．四次元時空における $\mathcal{N}=2$ 超対称 $U(N)$ ゲージ理論の分配関数に対し局所化の手法を用いると，インスタントン解のモジュライ空間上の積分に帰着される．この空間は Atiyah, Hitchin, Drinfeld, Manin により 70 年代に決定されていたもので，一般には複雑であるが，Ω 変形を施し Higges 場の期待値を指定すると，最終的に積分は N 組みのヤング図の集合 $\mathcal{Y}^{(N)}$ にわたる級数に帰着される．その各項は，Ω 変形のパラメータ ϵ_1, ϵ_2，Higgs 場の期待値 $a_1, \ldots, a_N$ からなる有理式であり，ヤング図の組合せ論的データから明示的に構成される．以上が四次元ゲージ理論側の役者であり，Nekrasov 分配関数として知られる．一方これに対応する二次元共形場理論は，W_N 代数にボソンを付与した対称性 $W_{N+U(1)}$ を持つもので，80 年代から詳しく研究されている．一般に共形場理論の相関関数の正則部分ないし反正則部分は共形ブロックと呼ばれ，Virasoro 代数を部分代数に持つ共形代数とその表現から一定の要請と手続きにより決定される．AGT 対応は，Nekrasov 型の分配関数と共形ブロックが，しかるべきパラメータの対応の元に一致するという主張であり，本論文に関与する上記の例以外にも様々なバージョンが知られている．この様な数理的現象を説明する自然な方策は，両者の背後にある幾何的，あるいは代数的構造の対応へと昇格させ，その帰結として演繹することである．実際，Schiffmann と Vasserot はこのような背景から $\mathcal{Y}^{(N)}$ を基底とする空間 $L^{(N)}$ への共形代数 $W_{N+U(1)}$ の 作用を構成し，上記バージョンの AGT 対応の導出に成功した (2013)．その際に鍵となるのは W 代数そのものではなく，より扱い易い SH^c と呼ばれる結合代数の表現論に還元する事であった．

Schiffmann-Vasserot の結果は W 代数の共形次元や最高ウェイトといったパラメータが generic な場合に相当する．一方これらがある有理的な退化条件を満たす際には状態空間に零ノルムベクトルが生じ，理論はより精妙な構造を呈する．このような状況の中で物理的に最も重要なものはミニマル模型と呼ばれ，Ising 模型や 3 状態 Potts 模型等をはじめとする 2 次元平衡系の連続転移の普遍クラスを記述する可積分有効場理論を与える事が知られている．

本論文の主題は，AGT 対応の研究で養われた 4 次元側の知見を 2 次元共形場のミニマル模型に還元することにある．より具体的には Schiffmann-Vasserot 理論の有理的退化を精査し，SH^c 代数と $W_{N+U(1)}$ の既約表現，W_N ミニマル模型のレベル・ランク双対性，$W_\infty[\mu]$ 代数のトライアリティといった事項に対して新たな記述法を確立している．以下，各章ごとにその内容を概説する．

第 1 章では導入として，本論文の背景，動機，位置づけについて説明している．SH^c 代数の表現論というレンズを介して観望することにより W_N ミニマル模型に関する様々な新しい知見が獲得できる利点を強調し，主結果を二つの定理に集約して提示している．後半は各章ごとにその内容の要約を

与え，論文全体の概要を提示している．

第２章は本論の準備として Schiffmann-Vasserot 理論のレヴューにあてられている．まず背景として，インスタントンの数え上げについて解説し，$\mathrm{End}(L^{(N)})$ の部分代数として $\mathrm{SH}^{(N)}$ を定義し，より一般の SH^c との関係を記述している．後半では W 代数 $W_{N+U(1)}$ を導入し，$\mathrm{SH}^{(N)}$ は自由場実現により $W_{N+U(1)}$ に埋め込めるが，admissible 表現には一対一対応がつくことから，両代数は「ほぼ等価」と見なせるという結果が紹介されている．

第３章では本論文のオリジナルな内容が展開されている．$\mathrm{SH}^{(N)}$ に対してミニマル模型に対応する有理的退化条件を課すと，先のパラメータ $\epsilon_1, \epsilon_2, a_1, \ldots, a_N$ は自然数のデータ $(n_i, n_i')_{i=1}^N$ (ただし $(q,p) := \sum_i (n_i, n_i')$ は互いに素) に帰着される．$L^{(N)}$ には不変部分空間が生じるが，それによる商空間上には既約表現が整合的に定義できる事を精密な解析により証明している．その結果，$\mathcal{Y}^{(N)}$ のうち N-Burge 条件を満たす部分集合 $\mathcal{Y}_B^{(N)}$ を既約表現の基底として抽出している．これまで W 代数のミニマル表現は，主として Felder 複体によるコホモロジー的な，いわば間接的な構成法が考案されてきたのに対し，本論文では N-Burge というヤング図の組合せ論的条件を用いて，格段に明示的な記述に成功しており，その技術的達成度と共に高く評価される．本章後半では応用として，レベル・ランク双対性を扱い，$W_\infty[\mu]$ 代数のトライアリティへの新しい知見が述べられている．レベル・ランク双対性とは上述のパラメータを互いに素な自然数 M, N を用いて $(p,q) = (N, N+M)$ とした際の M と N の入換えに対する対称性のことで，統計物理の Restricted Solid-on-Solid 模型においても実現される興味深い性質である．本論文では上記の入れ換えが $\mathcal{Y}_B^{(N)}$ 上のシャッフル操作として簡潔な記述を持つ事，$\mathrm{SH}^{(N)} \in \mathrm{End}(L_B^{(N)})$ と $\mathrm{SH}^{(M)} \in \mathrm{End}(L_B^{(M)})$ は生成元の適当な再規格化の元で同型になる事等が証明されている．いずれも４次元理論の知見をミニマル模型における麗美な数理現象として浮き上がらせた成果として意義深い．

第４章では論文全体の要約と展望が述べられており，今後の課題を挙げて結びとしている．

本論文は SH^c 代数と W 代数，およびそれらと関連するミニマル共形場理論，特にレベル・ランク双対性やトライアリティーについて新規で重要な知見を提供するものであり，学位論文として十分な内容を持っている．

なお，本論文の一部は福田真之氏，松尾泰氏，R.-D. Zhu 氏との共同研究に基づくものであるが，論文提出者が主体となって解析，検討を行ったもので，その寄与は十分であると判断する．

以上の事から，博士（理学）の学位を授与できると認める．