

博士論文

鉄道線路の線形整正における経験的交差法の理論化とその現代的応用

江原 学

鉄道線路の線形整正における経験的交差法の理論化とその現代的応用

(目次)

第1章 鉄道軌道管理概論と研究背景・意義

(1) 軌道狂いの検査項目と検査方法	1
a) 軌道狂いの種類	1
b) 軌道狂いの判定	3
c) 正矢の弦長と検出特性	5
d) 列車速度に応じた弦の使い分け	6
(2) 軌道狂いの修繕方法	9
a)-1 同時設計法：目視測定（拝見法）による方法	10
a)-2 同時設計法：マルチプルタイタンパ相対基準施工法	11
b)-1 事前設計法：線形測量による方法	13
b)-2 事前設計法：交差法	15
b)-2- 計算の原理	15
b)-2- 累積法	16
b)-2- 平均法	18
b)-3 事前設計法：復元法	21
(3) 本研究の背景と意義	23
a) スピードアップによる管理基準の見直し	23
b) 経験的交差法の理論的再評価	23

第2章 交差法の理論的再定義

(1) 用語・変数の定義等	26
(2) 鉄道曲線における座標定義と漸化式	27
(3) ベクトル一次変換としての交差法定義	29
a) 正矢変換行列 \mathbf{T}	29
b) 交差法行列 \mathbf{T}^{-1}	30

(4) 固有値問題としての交差法本質の解析	31
a) 固有値・固有ベクトルの導出	32
b) 固有空間行列とスペクトル分解の導出	33

第3章 交差法理論解析の工学的意味と応用

(1) 固有値と正矢法検出倍率	35
(2) T^{-1} 及び T の作用 その工学的意味	36
(3) T^{-1} を用いた一次変換の工学的なメリット	38
a) 演算精度の向上	38
b) 軌道連続性の保障（弦の始端・終端において）	40
c) 軌道接続方向の確保と曲線線形の分離	42
d) T^{-1} を用いた演算 その他のメリット	46
d)-1 移動制限への柔軟な対応	46
d)-2 高低整備への応用	47
d)-3 自由な弦長変換	48
d)-3- 長波長弦正矢への変換（倍長弦公式の導出）	48
d)-3- 長弦矢への変換	49
d)-3- MTT に用いる Y 修正への変換	51
(4) 交差法の理論化と工学的メリット まとめ	53

第4章 測定誤差の挙動に対する考察

(1) 交差法演算による誤差の重畳	54
a) 条件数 から見た誤差挙動	55
b) 誤差波 ge 最大値の統計的推定	55
(2) 特異値分解を利用した誤差波 ge の制御	57
a) T^{-1} の定常波形成特性	57
b) SVD 近似法による誤差波 ge の相対誤差	58
c) 過去の技術文献に残る誤差回避法の合理性	60
d) 長波長側 5 定常波成分除去の軌道管理上の意味	61
e) A_{dm} 別 ge 絶対値の考察	63

(3) 誤差波 g_e 挙動考察結果の実務への応用	66
a) 交差法移動量の使用可否判定	66
b) 復元法への交差解析結果の応用	69
第5章 実軌道における交差法理論の検証	
(1) 交差法の使用可否判定法に関わる検証	72
a) 最大移動量での判定法 検証	72
b) PSD 比較による有効帯域判定法の検証	74
(2) 交差法の施工精度に関する検証	75
第6章 まとめと今後の課題	
(1) まとめ	77
(2) 今後の課題	79
謝 辞	80
付録1 曲線における設計正矢 d の導出	付 1
付録2 緩和曲線長の決定法	付 2
付録3 正矢法検出倍率の導出	付 3
付録4 倍長弦公式の導出	付 5
付録5 累積法の公式 幾何図解より導出	付 8
付録6 逆行列成分に関する証明	付 12
付録7 行列の固有値	付 17
付録8 固有ベクトルと固有空間	付 18
付録9 固有空間のスペクトル分解	付 22

付録 10	フーリエ変換と行列スペクトル分解周期性の考察	付 25
付録 11	片持ち梁モデルを用いた線形分離法	付 28
付録12	交差法演算における各種制約条件の最適化手法	付33
付録13	交差法演算（高低）における実際の計画・検討例	付38
付録 14	交差法行列 T^{-1} の固有値比に関する証明と工学的な意味	付 42
付録 15	技術文献に残る交差法演算における誤差重畳影響回避法の例	付 46
付録 16	JR 西日本 3 弦連立交差法 計算原理	付 47
	英文要旨	付 49
	参考文献一覧表	付 52

論文要旨

論文題目 鉄道線路の線形整正における経験的交差法の理論化とその現代的応用

氏 名 江原 学

鉄道軌道の多くは、列車の繰り返し荷重により生じる残留変位である「軌道狂い」が、許容範囲内となるように保守管理していくことを前提としたシステムである。

軌道狂いの検測、そのうち線路長手方向に生じる縦方向、または横方向の軌道線形に生じる狂い(縦方向:高低狂い 横方向:通り狂い)は、わが国では鉄道黎明期より経験的に軌道に沿って 10m の弦を設定し、その中点における弦とレールの直角方向の離れ(正矢)を測定するシンプルな計測方法「正矢法」が用いられている。

理論的には軌道線形の二階差分量の連続測定に相当するこの手法は、列車動揺との関連性からその測定法の持つ理論的な有効性が立証されており、また今日においても列車走行速度向上にあわせた様々な同手法の改良や応用が行われている。

一方で正矢法により得られた測定値を実際の軌道狂いの整備に必要な各地点での移動量(どこを・どれだけ・どの方向に動かせばよいか)計画に変換する方法である「交差法」については、1930年代のわが国への導入以降、様々な軌道線形整正の現場で用いられ、経験的な実績は多く存在する。しかしながら、理論的には測定誤差の重畳に関連した種々の問題が知られていたため、表立って推奨される計画法とはみなされてこなかった。その一因は交差法の理論的分析が十分になされていなかったことにある。

この交差法に内在する誤差重畳の問題を背景として、1980年代より鉄道技術研究所により「復元原波形法」(以下、復元法)が開発され、軌道検測技術の開発等とあわせ軌道整備に一定の成果を挙げているが、実務者にとっては計算そのものがブラックボックス化しやすいことや対象区間の前後に相当延長にわたる追加測定を必要とするなど、実際上の課題が少なくない。

本研究では、現在の高速鉄道における線形整正実務においても有益な効果を挙げている経験的交差法を理論的に解明し、現代的な応用を行うことを目的として線形代数における固有値問題として定式化をおこなった。その結果

交差法・正矢法には観測されたデータを、データ個数 n のみを変数とする簡易な計算により、弦長を $(n+1)$ とする n 個の両端固定弦振動モード(以下、定常波)に分解する正弦波分解機能が内在していること。

交差法による測定誤差の影響はデータ個数 n に伴い重畳するものの、第 1~第 5 定常波に全体の 95%以上が集中する弦振動の物理法則に従った特性を持ち、列車の速度や固有振動数などを考慮した工学的に有意な除去及び制御が可能であること。

などが明らかになり、同理論の実軌道における検証結果とあわせ、同法をベースとした軌道整正手法が現在においても十分に活用できる実用的かつ合理的な手法であることを報告するものである。

本論文の構成と、その内容の概略を示す。論文は以下の本文 全6章および付録(16章)より構成している。

第1章では 鉄道線路における軌道管理概論と研究の背景と意義についてのべる

列車の走行により軌道長手方向に生じる歪みである軌道狂いを簡便な測定により見つけ出す「正矢法」について、その特性と理論的な意義、および応用法について記述する。

また本論文の主題である正矢法での測定値から軌道の補修作業に必要となる「移動量」への換算を行う「交差法」について、その幾何学的計算原理、学術的な文献調査内容などを含め詳細な解説をおこなう。また過去より理論上交差法の最大の課題であるとされてきた「測定誤差の重畳」について、改めて式による定義をおこなう。

次に1980年代後半から90年代にかけて行われてきた既存鉄道施設を活用した列車の速度向上に伴い発生した管理基準の見直しの必要性とこれを背景とした技術的ギャップを具体例とともに明らかにし、本研究の意義を明確にのべる。

第2章では 交差法の理論的な再定義を行う

幾何学的な変形から論じられてきた交差法を、各正矢測定点での法線をy軸とする部分直交座標系における正矢(差)ベクトルと、移動量ベクトル相互間の座標変換を司る行列の問題、1次変換の問題としてとして理論的に再定義する。

あわせて交差法を表す行列の固有値問題として解析することにより交差法の作用の本質を明らかにする。

第3章では 理論的な再定義により得られるメリットをのべる

第2章で得られた各種の理論解析より導かれた値、および式の工学的な意味とメリット、その具体的な応用法について考察する。

特に三角関数を用いて正確に式として得られる固有値が、古くから知られてきた正矢法の検出倍率と一致すること、正矢法及び交差法を行列による1次変換として捉えれば、各行列の中には、あらゆる測定値を正弦波の和として分解する、特に $2p(n+1)$ を基本波長とする n 個の定常波(ここに p :測定間隔 n :測定数)に分解する特殊な機能が内在していることを明らかにする。

さらにこれらの結果を活かすことで、前後の軌道との連続が必ず確保される演算結果を導ける特性をはじめとした数々の工学上のメリットについて具体的に述べる。

第4章では 誤差重畳問題への対応策をのべる

第4章では過去より理論上最大の課題とされた測定誤差の重畳現象について、その実態をコンピューターを用いた数値実験より再現させ、第3章で得られた定常波分解機能と、特異値分解手法(SVD:singular Value Decomposition)の知見を利用し考察を加える。

その結果、誤差の重畳は発散として生じるのではなく、第1~第5定常波に全体の95%が集中する、特に第1定常波(基本振動)には72%が集中する弦振動の物理法則に従った特性があることを明らかにするとともに過去の曲線整正における技術指導の理論的な合理性を立証する。

またSVD近似法の知見から、正矢の検出精度と管理対象とする軌道狂いの波長の2つをパラメータとして発生する誤差の絶対値が統計的に推定できること、また同数値を用いS/N比の観点より交差法演算結果の使用可否判定法を新たに提案する。加えて同判定法が復元法についても適用可能であることを詳記する。

第5章では 実フィールドにおける理論の検証結果をのべる

第4章までの交差法の理論化によって明らかになった事項、特に測定誤差の影響を回避するための使用可否判定手法、および理論的に求められた精度までの施工が実際に可能であるか否かの検証を、過去25年にわたりJR西日本の実フィールド(=軌道保守現場)で実施してきた交差法による曲線整正の事例を用いて解析し、その整合性を明らかにする。

第6章では まとめと今後の課題をのべる

本論文全体のまとめとして、経験的に使用してきた交差法の技術的総括を行い、同手法の有効性が理論的に立証できること、その知見より現代的な応用が展開できる実用的かつ合理的な軌道実形状演算手法であることを述べる。

今後の課題として測定精度に依存した長波長側の整備限界精度が統計的に推定され、この克服には検測装置の精度向上も含めた技術開発が必要となること。

本論文で明らかにした、正矢法、交差法に内在する任意の入力データを定常波のみに分解する特殊な正弦波分解機能を用いた様々な応用、その可能性についても言及を行う。

また巻末に付録を添付する。付録は16章から構成され、本文中で十分に説明できなかった部分について記述し、本文より引用できる表記としている。

過去より線路保守技術フィールドで常用してきた公式等も、改めて導出プロセスを表記することとした。

また本文第2章の交差法の理論的再定義に関わる証明を付録6～9章において、本文第4章の測定誤差挙動に対する考察に関わる証明を付録14章に記述する。いずれも数学的な証明記述の手法を用いている。

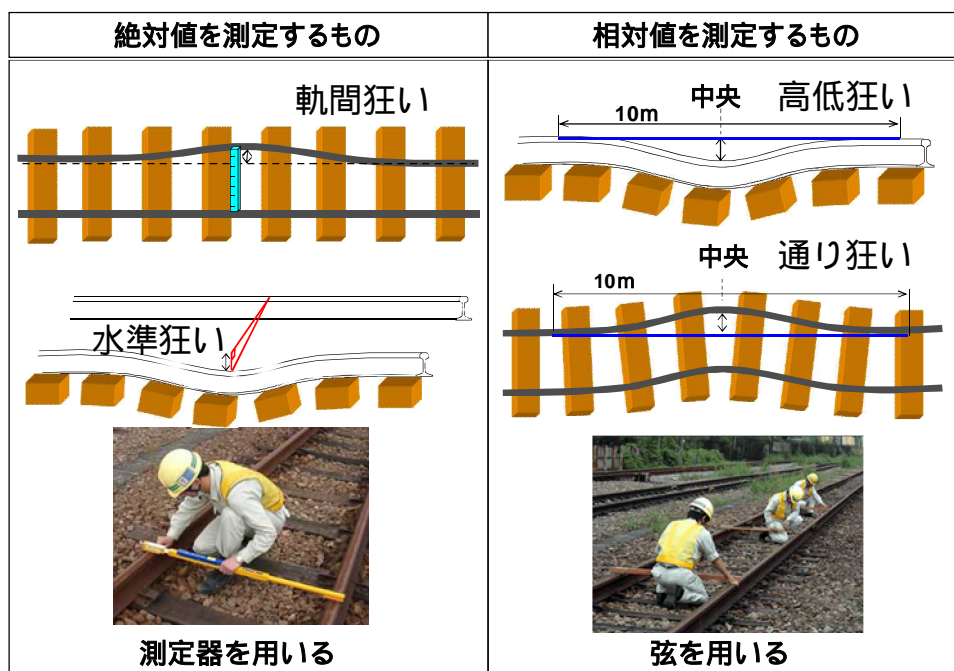
1. 鉄道軌道管理概論と研究背景・意義

鉄道における軌道の多くは、列車の繰り返し荷重によって生じる残留変位である「軌道狂い」の発生を許容範囲内で保守管理することを前提としたシステムであり、検査・判定・修繕を繰り返し、品質管理水準の維持・向上がはかられている。

(1) 軌道狂いの検査項目と検査方法

a) 軌道狂いの種類

軌道狂いの検査項目には図-1に示した、様々な種類があるが、狂いの絶対値を計器などにより直接測定するものと、弦を用い、その始端点・中点・終端点間の相対値を測定し、狂いとするものの2種類に分類される。



これらの組み合わせによる「平面性」「複合狂い」などの検査項目も存在する

図-1 軌道狂いの種類

本論文では以降、特に断らない限り「軌道狂い」とは弦を用いた相対値のものを表し、研究の対象とする。

このうち軌道の長手方向に発生する軌道形状の狂い

上下方向の狂いを 以下、「高低狂い」

左右方向の狂いを 以下、「通り狂い」 は 距離軸を軌道に沿って設定し

(以下、「測線距離」) 測線距離軸上に一定の長さ l (m)の弦を張り弦中点におけるレールと弦との離れ(最短距離)

上下方向の離れ 以下、「高低正矢」

左右方向の離れ 以下、「通り正矢」 を

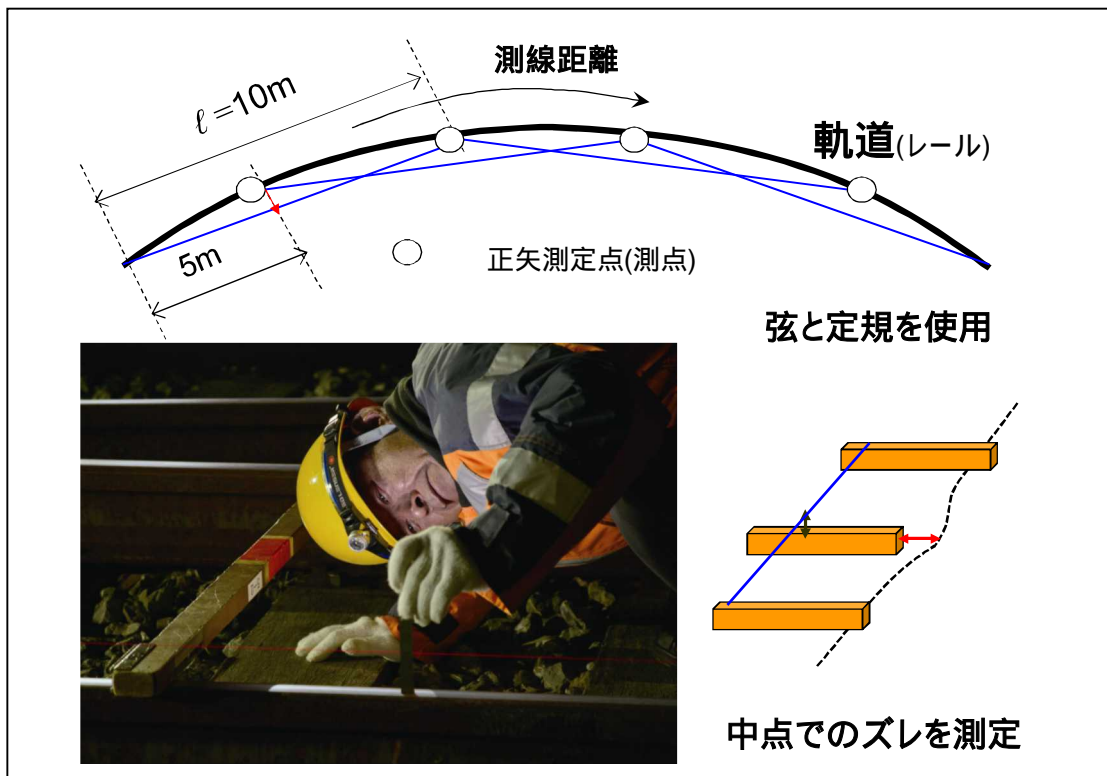


図-2 10m弦正矢法による軌道狂いの測定

測定単位として(mm) の分解能を用いて、弦長の1 / 2 だけ重複させながら、連続で測線距離方向に測定する方法を用いている。

この測定法は「正矢法」と呼ばれ、水系と(mm)単位での数値が読める検測定規を用いて3人の測定員によって行われる。(図-1,2)この方法は現在JR等で使用されている軌道検測用車両(図-3)においても、使用する弦が車体鋼体かレーザーであるか、あるいはサンプリング間隔が弦長の1 / 2よりも細かいか(写真の検測車両については0.33~0.25(m)間隔)といった違いはあるものの、軌道上の3点間の相対変位を測定する基本原理については同じものである。

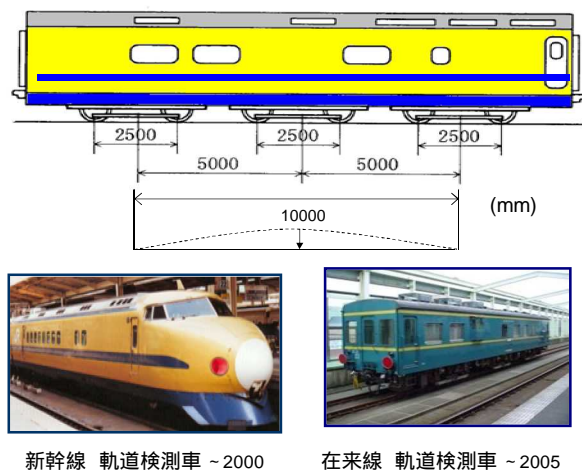
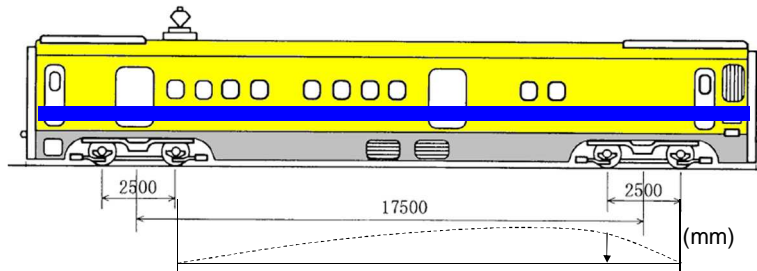


図-3-1 JR西日本の軌道検測車と測定原理(旧型)



新幹線 軌道検測車 (現行)



在来線 軌道検測車 (現行)

図-3-2 JR西日本の軌道検測車と測定原理(現行)

b) 軌道狂いの判定

測定された正矢値(以下、「測定正矢」記号 m を使用 (mm))は、設計線形から定まる所定の正矢値(以下、「設計正矢」記号 d を使用 (mm))との比較を行い、表-1に示した管理目標値を超えた箇所が抽出され、修繕計画が立案される。

表-1 JR西日本での軌道管理目標値(在来線)

	在来線 整備目標値 単位(mm)		
	1級線	2級線	3級線
軌間	増10(増6) 減5(減4)		
水準	11 7	12 8	13 9
高低	13 7	14 8	16 9
通り	13 7	14 8	16 9

数値:軌道検測車での数値(動的な載荷状態での測定値)

斜字:人力測定での数値(静的な非載荷状態での測定値)

印:10[m]弦正矢法による

設計正矢 d (mm) の値は、直線では弦長 l [m]に関わらず高低・通りともに基本的には0 (mm)である。

平面曲線や上下勾配の変更点前後に用いられる縦曲線においては、設計曲線半径

(以下, R [m]) と使用する弦長 l [m] から近似式(1) により計算される。
 (導出は付録 1 を参照)

$$d = \frac{l^2}{8R} \times 1000 \quad (\text{mm}) \quad (1)$$

特に鉄道で用いられる平面曲線には, 直線 ($R = \infty$) と円曲線 ($R = 160$ [m]: 一定値) までの間を徐々に曲線半径を変化させることで, 発生する遠心力の急変を防ぐ緩和曲線 (Transition Curve) とよばれる線形が設定されている。

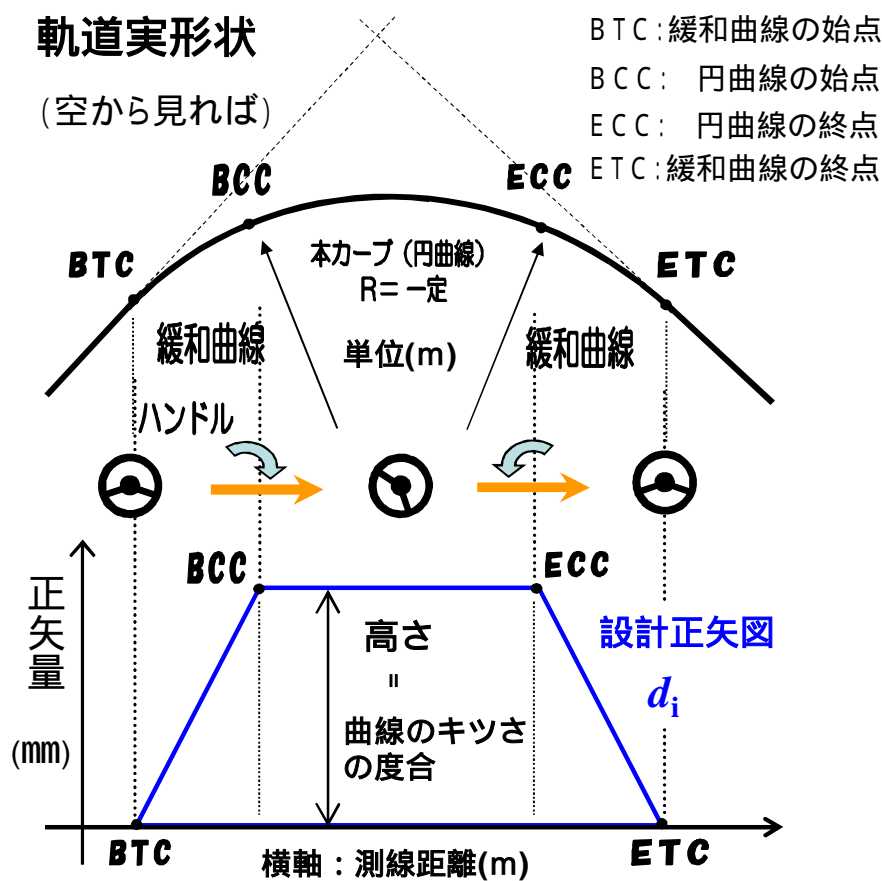


図-4 平面曲線の実形状と正矢図

この緩和曲線の長さ (Transition Curve Length 以下, TCL [m]) は当該曲線を通過する列車速度 V (km/h) と曲線での遠心力を軽減するために設定されている左右レールの傾斜量 (以下, 「カント」記号 C を使用 (mm)) に関連づけられて決定される。(詳細は付録 2 を参照)

平面曲線内の各点における通りの設計正矢値 d_i は, 緩和曲線部において徐々に変化し, 円曲線内で一定値となる図-4に示すような台形形状を描く (これを「台形正矢図」と呼ぶ場合がある)

この図は当該曲線内を自動車で走行する場合の各地点におけるハンドル角度を表した図と等価となり, 正矢図の変化や凹凸は鉄道における乗り心地に大きな影響を与える重要な要素となる。数学的に見れば, 設計線形の二階差分値, すなわち曲率の値に相当する。

c) 正矢の弦長と検出特性

正矢法に用いられる弦長は、わが国では鉄道の黎明期より経験的に10mの弦を用いており、大正11年より規程化され今日に至っている¹⁾。

正矢法は大変簡便な測定法であるが、平面曲線の実際の形状が台形状の正矢図になる関係からも明らかなように、出力される正矢値、正矢波形は実際の軌道の線形形状（以下、「実形状」）とは異なったものとなる。

図-5に示した10m弦正矢法により得られる正矢波形は実形状とは異なったものが出力され、特に印で示した箇所において実際は狂っていないにもかかわらず狂いがあると判断される「擬似狂い」と呼ばれる出力が生じる。

これらの事象は実形状に含まれている様々な波長が、10m弦正矢法を行うことにより図-6に示す10m弦固有の検出倍率で増幅、減衰され出力されることにより生じるものと解釈されている²⁾。

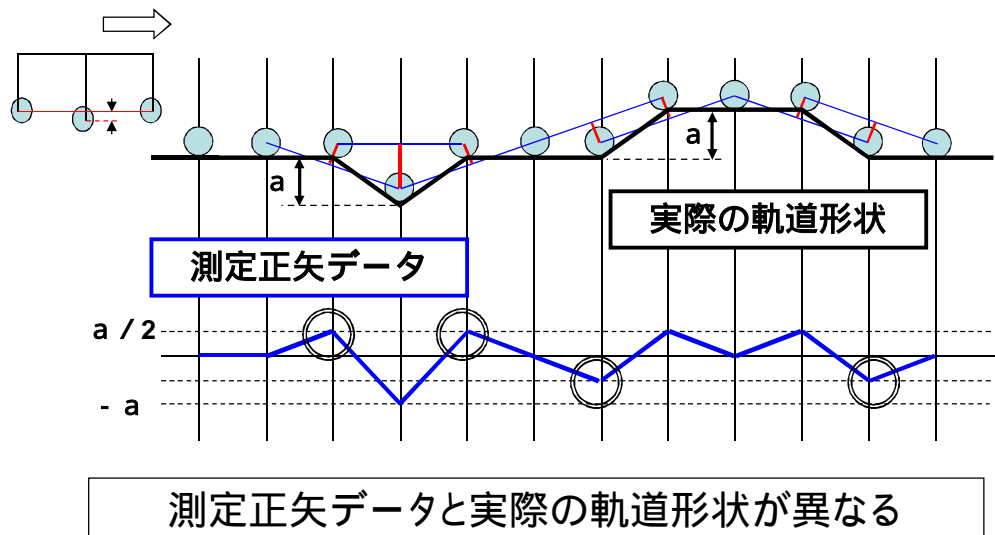


図-5 軌道実形状と正矢図 擬似狂いの例

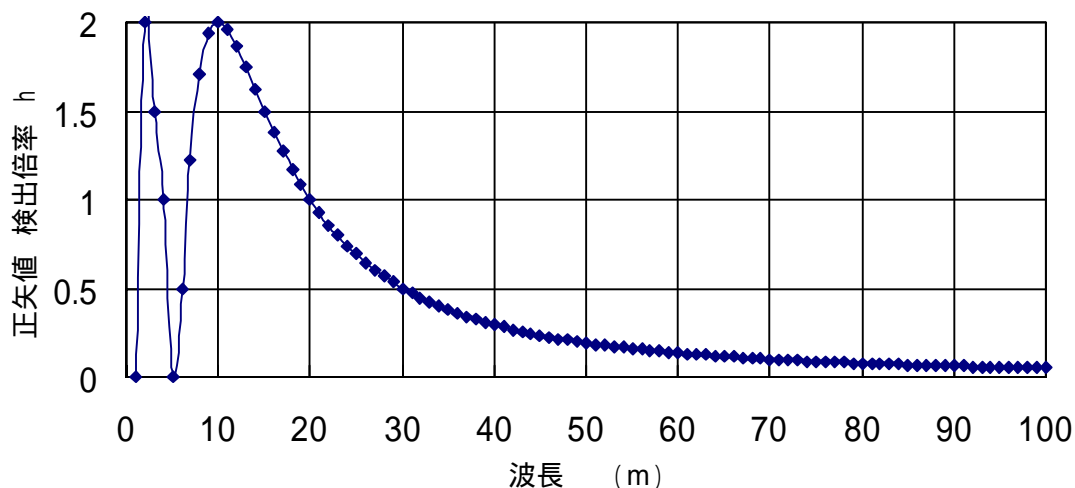


図-6 10m弦正矢法 検出倍率（特性）図

実形状として波長 Λ [m]の正弦波を考えた場合、この正弦波における ℓ m弦正矢の検出倍率 h_{Λ} は、加法定理を用いて以下のように導出される。(詳細は付録3参照)

$$h_{\Lambda} = 1 - \cos \frac{\ell \pi}{\Lambda} \quad (2)$$

正矢法の検出倍率は実形状の持つ波長 Λ [m]に対して 0~2の間で変動する。

$\Lambda=10$ [m] 波長成分の振幅は10m弦正矢の場合、実際よりも2倍に増幅され、波長が長くなるほど増幅倍率は低下し、 $\Lambda=30$ [m] で1/2、 $\Lambda=100$ [m] では1/20を下回り殆ど検出出来なくなる。

また検知そのものが不能となる帯域が弦長の $1/2^k$ 倍 ($k=1,2,3,\dots$) に存在する。

しかし、 $\Lambda=5$ [m]・ 2.5 [m]・ 1.25 [m]の帯域の軌道狂いはレールとまくら木で構成される、軌道構造の剛性を考えれば発生は極めて稀であり、軌道狂いとしての管理対象とはされていない。

(本領域の変形は、専らレール部材の表面に発生する材料状態の管理対象(=傷)とされている)

このように10m弦正矢法を用いて軌道実形状を測定することは、実形状に存在する $\Lambda=10$ [m] ~ 20 [m] の波長帯域を実際よりも増幅し、それ以上の波長帯域については実際よりも減衰させた、誇張を行ったものとなる。

一方でこの誇張には、鉄道車両の振動特性と人間の感覚特性を合わせて補正した場合、在来線における速度域では理論的な有効性があることが、佐藤吉彦博士の研究によって明らかにされている³⁾。

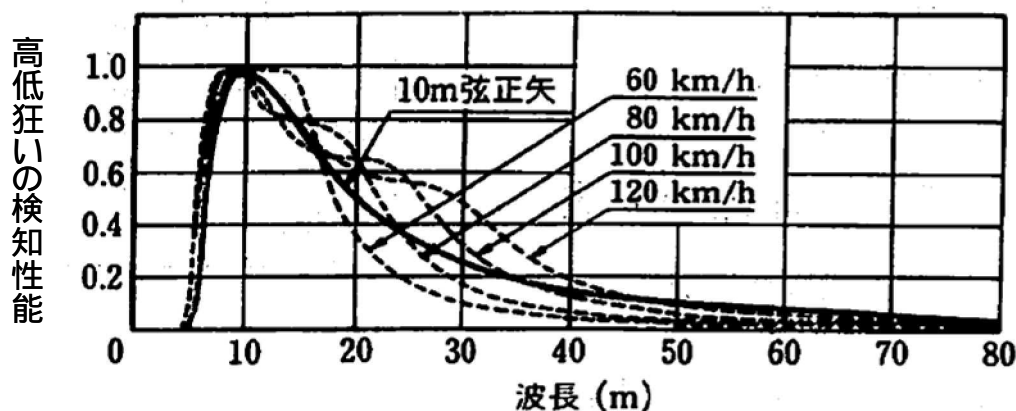


図-7 10m正矢法の理論的有効性(文献-3)より

図-7に示された10m弦正矢(高低)の検出特性と各速度での列車上下動揺の波長別応答倍率を見れば、両者はよく一致しており10m弦正矢法が当該速度で走行する列車の揺れの原因となる軌道狂いを効果的に抽出できることが理論的に示され、過去から経験的に用いられてきた10m弦正矢法の選択の妥当性が裏づけられている。

d) 列車速度に応じた弦の使い分け

更に弦長を $\ell=20$ m, 40 mと長くした正矢法を用いることで、高速領域(在来線 120 km/h ~ , 新幹線 250 km/h ~)においても列車振動を引き起こす波長の長い軌道狂い(以下、「長波長軌道狂い」)を効果的に特定し、修繕対象箇所として抽出できる⁴⁾⁵⁾。

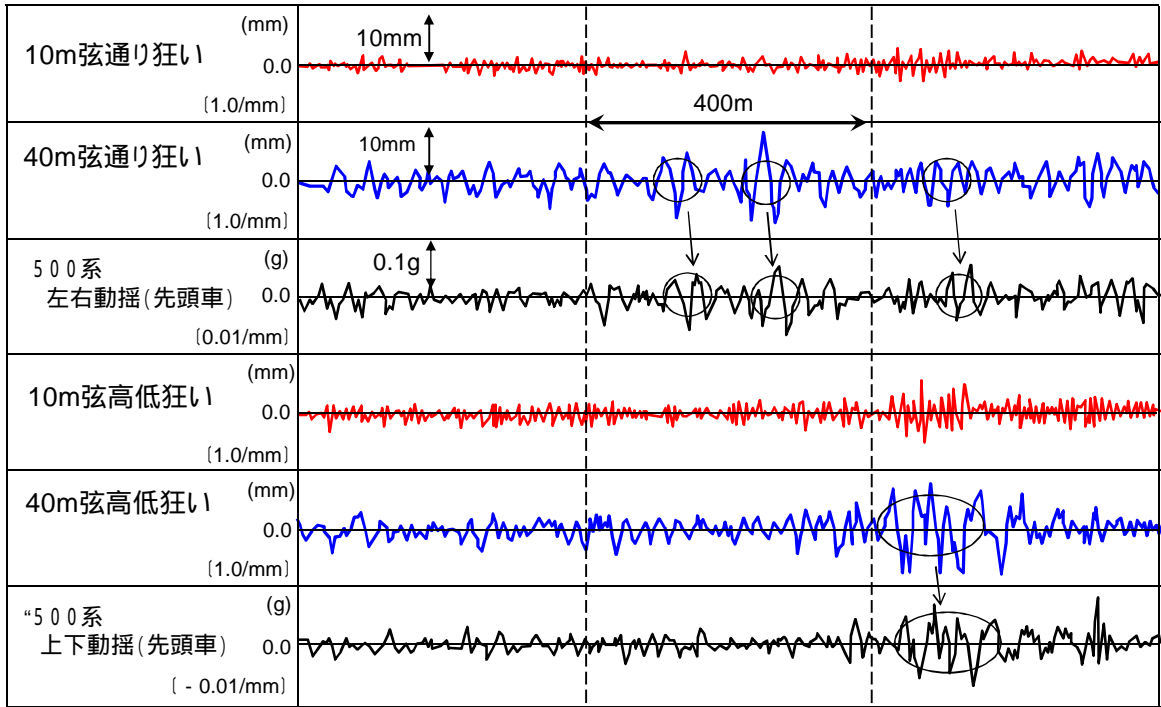


図-8 高速領域における長波長管理の有効性 (40m弦)

図-8に山陽新幹線における300km/h営業列車の車内で観測された車体動揺加速度(左右方向・上下方向 単位 g:重力加速度)と地上で観測された10m弦通り・高低軌道狂い波形,及び40m弦通り・高低軌道狂い波形を比較したものを示す。

揺れの原因となる軌道狂いの存在を,40m弦正矢法を用いた方が,より正確に把握できることが見てとれる。

この弦長が2倍あるいは4倍になった正矢値を物理的な測定弦長を伸ばすことなく10m弦の測定値から直接変換する公式「倍長弦公式」が知られており東海道新幹線開業時より検測車に組み込まれ,10m正矢測定 倍長弦正矢値変換 車上出力がリアルタイムで行われている。

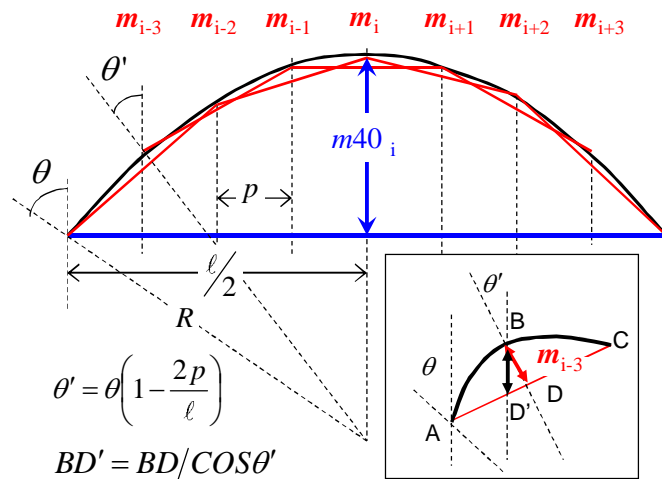


図-9 倍長弦公式 (10m弦 40m弦)

倍長弦公式は以下のとおり．（詳細は付録4参照）10m弦正矢法による $p=5[m]$ 間隔の測定値を m_i とすれば

20m弦正矢値 m_{20_i} は

$$m_{20_i} = m_{i-1} + 2m_i + m_{i+1}$$

40m弦正矢値 m_{40_i} は

$$m_{40_i} = m_{i-3} + 2m_{i-2} + 3m_{i-1} + 4m_i + 3m_{i+1} + 2m_{i+2} + m_{i+3}$$

として、点*i*における10m弦測定値を中心とした左右対称の整数倍和で簡易に求められる．倍長弦公式の前提として、次の近似が用いられている．

$$BD \quad BD' = BD/\cos \theta'$$

θ' は用いる弦長 ℓ [m]と曲線半径R [m] によって定まる．20m・40m弦における曲線半径別の θ' の値と、鉄道における曲線半径別の通過速度を図-10に示す．

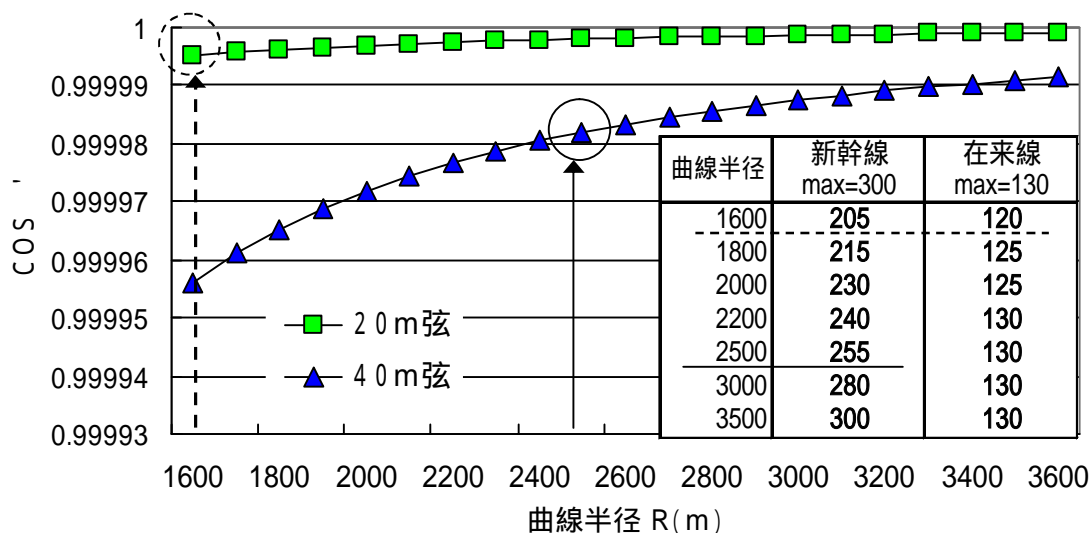


図-10 倍長弦公式 近似影響と曲線通過速度

在来線で120 (km/h) 以上となる曲線半径 $R = 1600[m]$ において弦長 $\ell = 20[m]$ とした場合の $\cos \theta'$ 、同様に新幹線で250 (km/h) 以上となる曲線半径 $R = 2500[m]$ において弦長 $\ell = 40[m]$ とした場合の $\cos \theta'$ の値は図-10の通りであり $BD=BD'$ と見做す影響は極めて些少である．

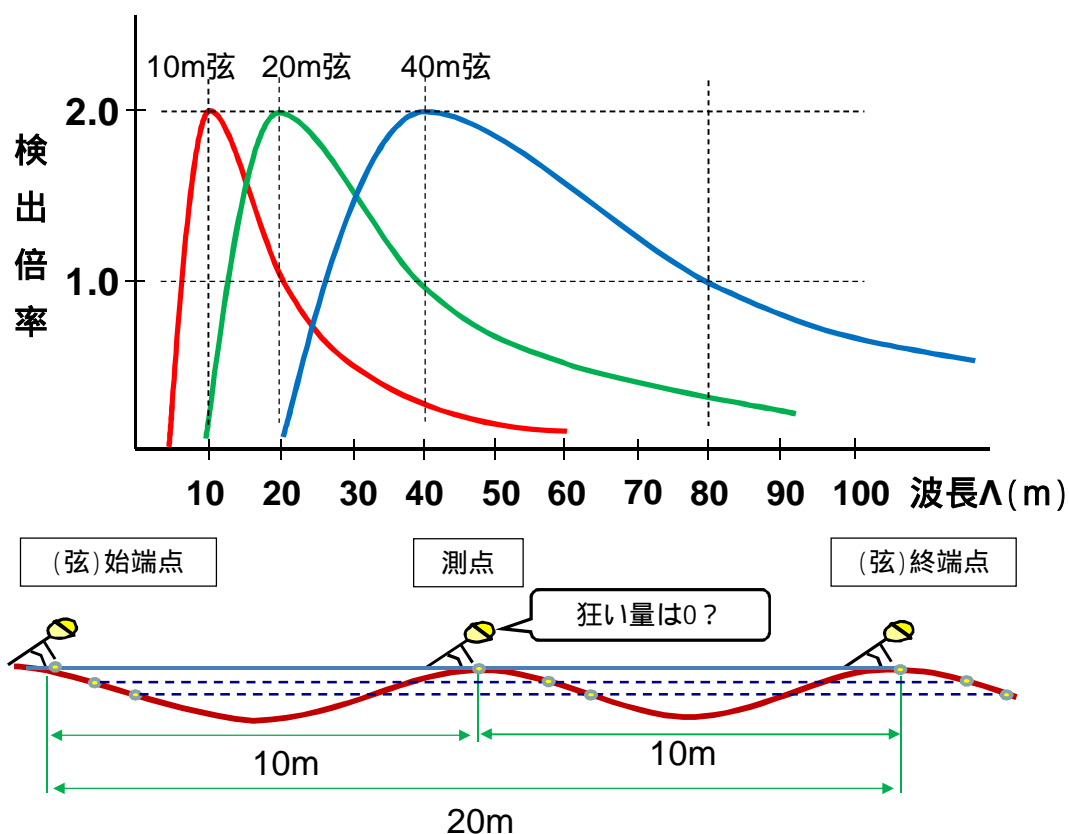


図-11 長波長弦管理と10m弦管理の併用

但し、20m弦及び40m弦正矢法の検出特性には、波長 $\lambda=10$ [m] 付近が前出の $1/2^k$ 倍の検知不能帯域となるため、実軌道への長波長管理の導入には、必ず10m弦正矢法との併用が行われている。(図-11)

以上のような検査手法を用いて、列車走行により軌道に生じる残留変位を列車速度や1年間に通過する荷重総量に応じて検査周期を定め、管理することで今日のわが国の高速鉄道の安定走行は支えられている。

(2) 軌道狂いの修繕方法

検査工程、判定工程で抽出された箇所は、続く修繕工程において実際に軌道を動かし補修が行われる。

以下、これを「保線作業」と記述する。

保線作業では、目標とする設計正矢値 d_i とするために「どこを・どれだけ・どの方向に動かすか」の情報(以下、「移動量」記号 g を使用 (mm))を知ることが必要となる。

この情報に基づき、まくら木の下にバラスト(砂利)を詰めこむ、あるいは油圧ジャッキやバールと呼ばれる専用工具を用いて横方向に軌道を動かすなどし、設計された線形に修正される。

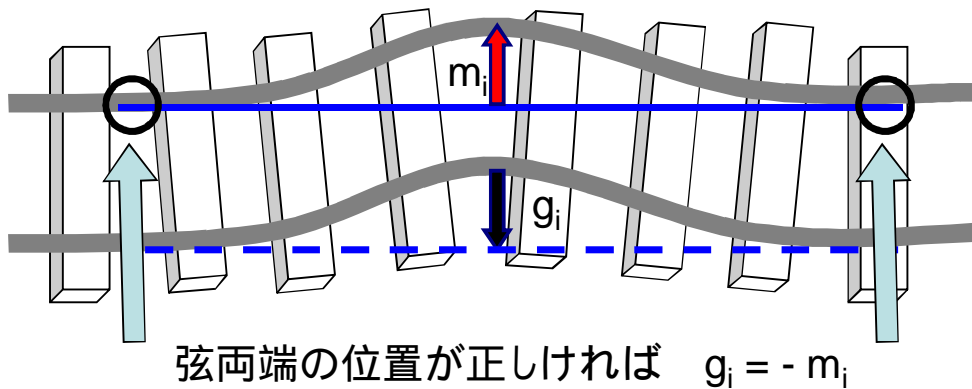


図-12 正矢法で得られる軌道狂いと移動量

一方で正矢法により得られる軌道狂いは図-12に示す．3点間の相対変位量であるため

$$\text{測定正矢 } m_i \text{ (mm)} = \text{移動量 } g_i \text{ (mm)}$$

と出来るのは弦の始端・終端が正しい位置にある場合に限られる．狂っている方向の逆に戻すので符号は (-) になる．(設計正矢 $d_i=0$ とした直線での例)

また移動量はプラットホーム近傍やトンネル等,空間的に制約がある場合,あるいは橋梁や踏切といった既存構造物に対して方向を合わせて連続させてやる必要がある場合などでは,これらの制約条件等を加味し決定されなければならない．

現在の保線作業における移動量の決定方法は

- a) 同時設計法：移動量の決定と保線作業を同時に行う方法
 - b) 事前設計法：移動量の決定を別工程で行う方法
- に2分される．
- a)-1 同時設計法：目視測定（以下，拝見法）による方法

移動量の決定を，保線技術者の「拝見」と呼ばれる 目測により現地で直接行なう方法．

(図-13)



拝見者 (保線作業責任者)

ボールによる通り修繕

図-13 拝見法による保線作業

10m弦で誇張される波長 $\lambda = 30$ [m] 程度の軌道狂いについては高精度での仕上がりを達成できる。

但し、曲線部における通り狂いに対しては精度が低下し、 $\lambda > 30$ [m] となる曲線部の長波長通り狂いでは、拝見法での移動量決定は殆ど不可能となる。

拝見者(保線作業責任者)となるまでには多くの実務経験が必要であり技能継承には相応の時間を要する。

a)-2 同時設計法：マルチプルタイタンパ相対基準施工法

保線作業用機械車両であるマルチプルタイタンパ(以下、「MTT」図-14)を要修繕箇所に持ち込み、MTTに搭載された弦長約15(m)の検測機構により測定される3点間の相対変位量(機種によっては4点間の相対変位量を測定するものも存在する)を、そのまま移動量とし連続的に保線作業を行う方法。

相対基準ライニング作業(通り狂いの修繕)

相対基準レベリング作業(高低狂いの修繕)

あるいは スムージング作業と呼ばれる。



図-14 マルチプルタイタンパー

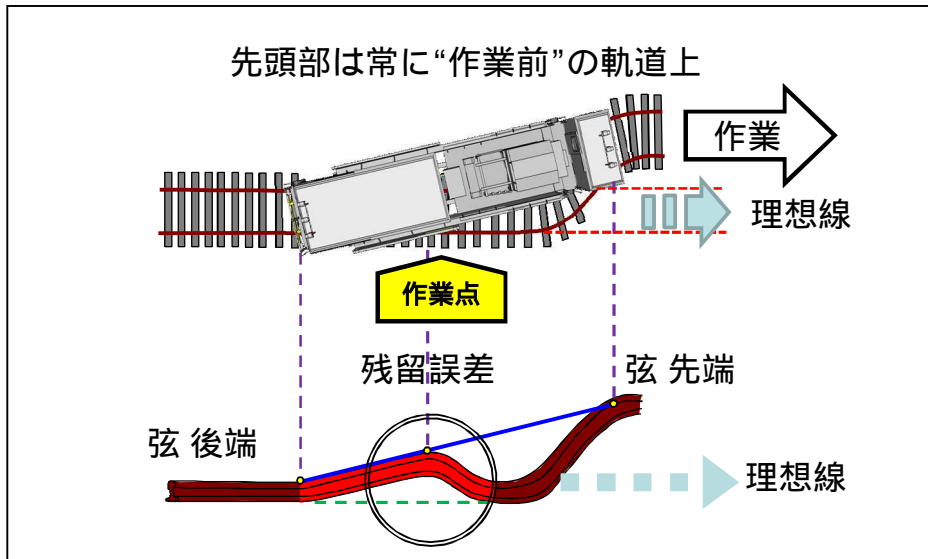


図-15 相対基準ライニング作業と残留誤差

この方法は，図-15で示した未作業区間にある弦先端の理想線（未知）からのズレは無視し，作業点を連続的に整えていく形態であるため，修繕後の仕上がり品質は，ズレの無視による影響を常に受けることになる（これを「MTT残留誤差」と呼ぶ）。

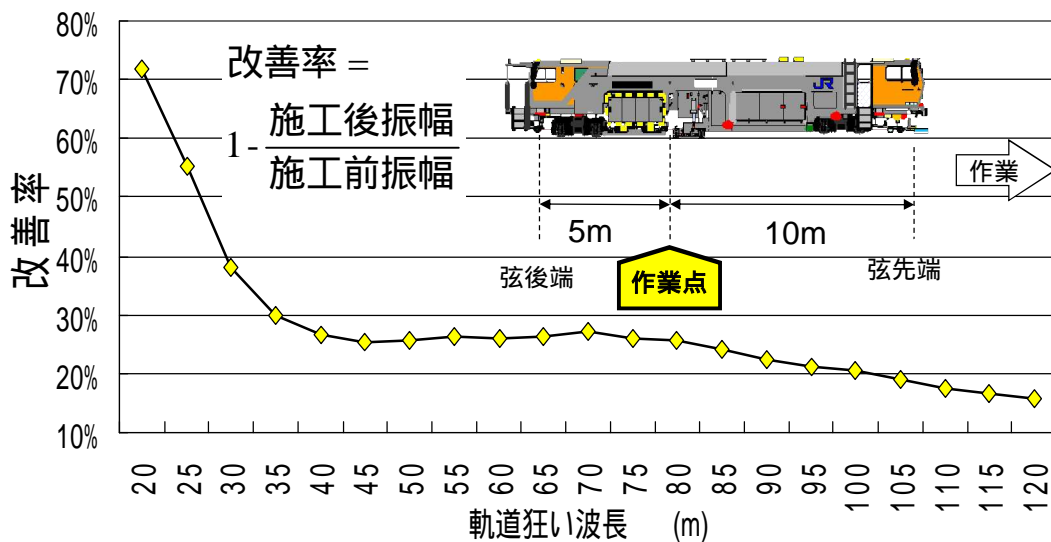


図-16 相対基準ライニング作業 波長別改善率

加えて正矢法と同様，軌道狂いの波長に応じたMTT弦の検出倍率の低下により，長波長領域では作業の改善効果が減少する(図-16)⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾ など理論，精度的には課題が残る作業形態である。

しかし10m弦で誇張されるλ 30 [m]の波長の軌道狂いについては，MTTの走行と同時に一定の改善が期待されるため，この帯域を狙った保線作業においては現在でも広く用いられている。

また平面曲線や縦曲線など，人工的な軌道の曲がり方については，MTT測定機構の弦長や平面曲線半径 $R[m]$ 及び緩和曲線長 $TCL[m]$ から定まる補正を与える必要がある．

この補正を以下，次のように表現する．

平面曲線への補正：「Y修正値」

縦曲線への補正：「Z修正値」

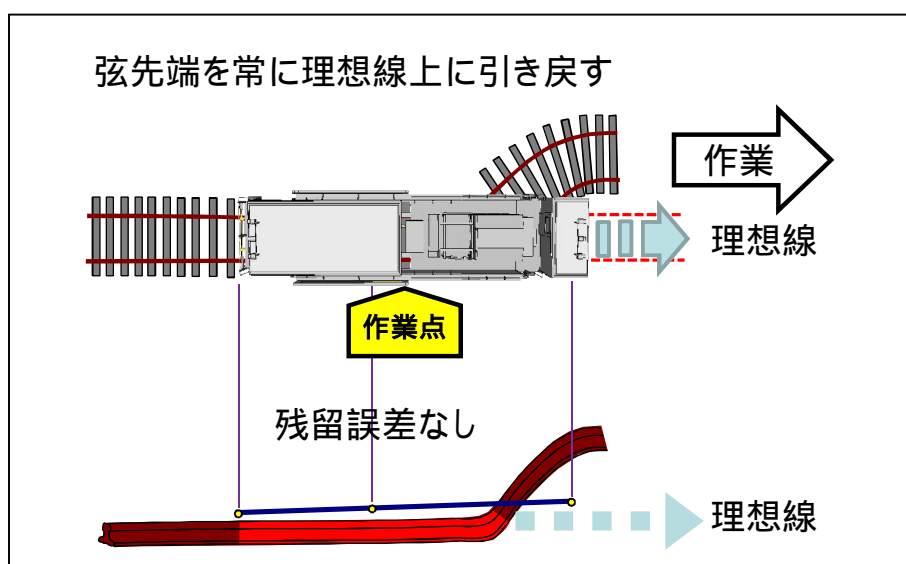


図-17 絶対基準ライニング作業

事前に各地点の移動量がわかっている場合は，その数値をMTT弦の先端部に連続的に与え，理想線上に誘導することで（図-17），MTT残留誤差の影響を発生させない施工も可能である．この作業方法を

絶対基準ライニング作業

絶対基準レベリング作業 と呼ぶ．

絶対基準作業には何らかの方法で，事前に各地点の移動量情報を取得することが必要となり，以降に記述する，あらかじめ各地点の移動量を求める事前設計法を併用することになる．

b)-1 事前設計法：線形測量による方法

理論的にはあらゆる線形において適用可能な移動量算出・決定法である．軌道の実形状を直接座標で把握することができ，設計軌道形状との比較により移動量を正確に決定することができる．

しかしながら視距が効き，精度が高まる昼間時間帯において線路内で測量業務を行うことは，進来列車の退避に伴う中断・再開時の再調整などから，作業性が著しく低下するため，配線変更や線形改良などを除いて，通常の保線作業においては殆ど用いられていない．

建設時に設置された基準杭（図-18）とよばれる線路外の絶対基準点（第3座標）を用いる方法もあるが，基準点の定期的な変状管理が必要となる．既設線で行う場合は，大規模な再測量が必要となる．

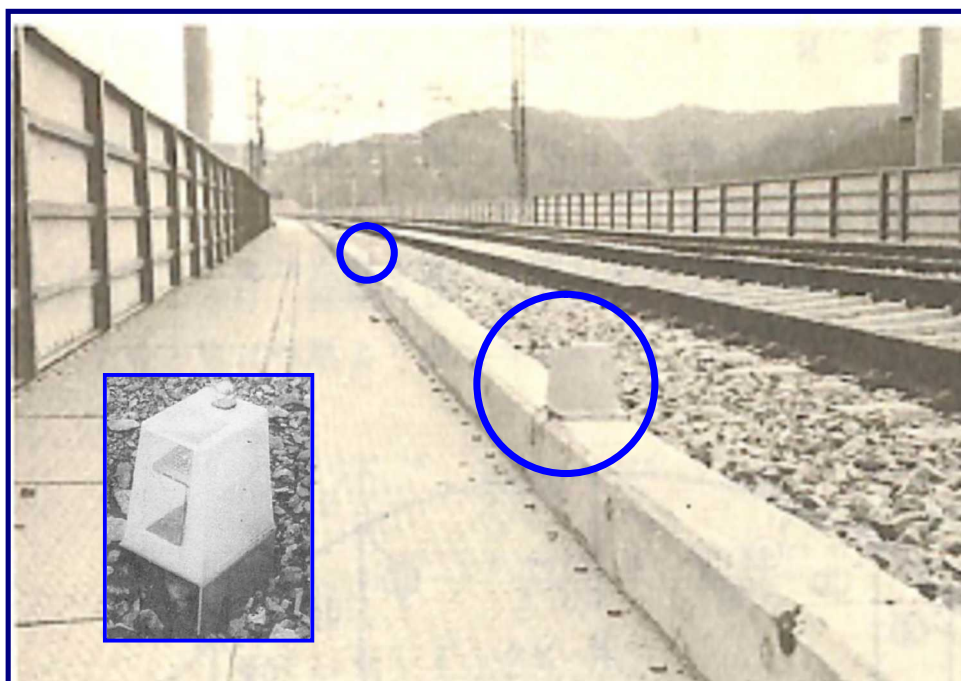


図-18 山陽新幹線の曲線基準杭（文献-18より）

一方でヨーロッパでは、この基準点を各電化柱に設置し、専用の測定車で保線作業前に光学距離測定を行っているケースもある⁹⁾。

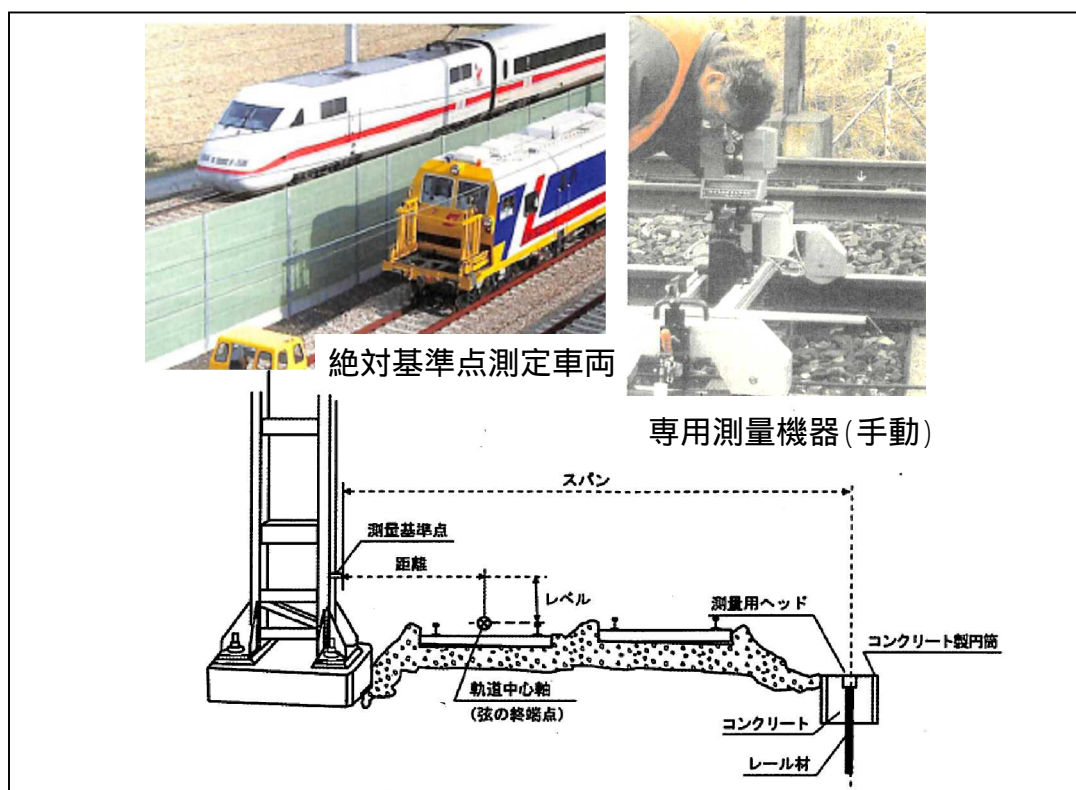


図-19 欧州鉄道における絶対基準線形管理（文献-9より）

b)-2 事前設計法：交差法

半弦長ずつ“交差”させた測定正矢データを用い，幾何学的図解法より各地点の移動量に変換する計算法．

20世紀初めにヨーロッパで発明され¹⁰⁾，わが国では1930年代より¹¹⁾¹²⁾挿見法を補う形で主に曲線での移動量決定（以下，「曲線修正」）に用いられている．具体的な計算方法を記した専門図書¹³⁾¹⁴⁾¹⁵⁾¹⁶⁾¹⁷⁾，専用の計算器も存在し¹⁸⁾，実軌道での多くの施工実績がある．本研究の主題であるので，以下に詳細な説明を記述する．

b)-2- 計算原理

交差法の幾何学的計算原理について図-20を用いて以下に述べる．

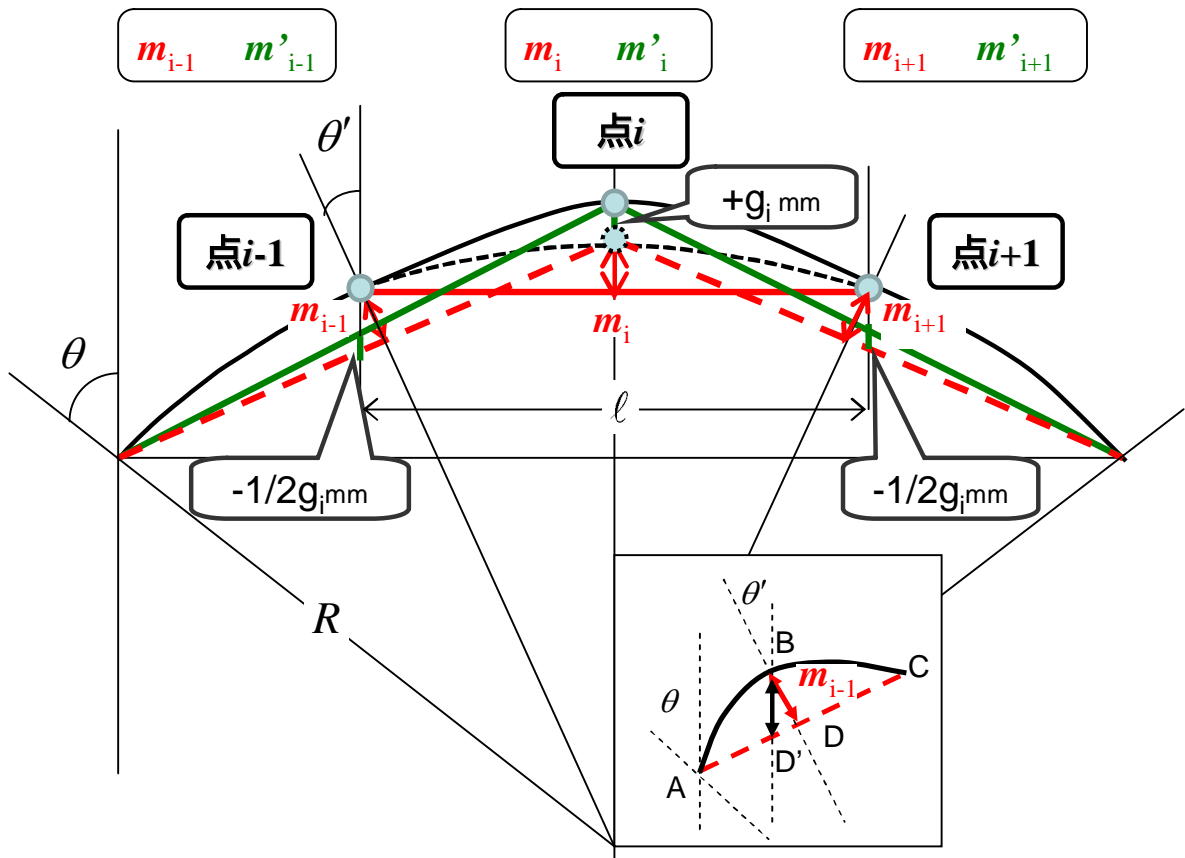


図-20 交差法の幾何学的計算原理

- ・点 $i-1, i, i+1$ での測定正矢を m_{i-1}, m_i, m_{i+1} とする
- ・点の移動に伴い変化する正矢 を ' 付きの記号で示す
- ・点 i を $+g_i$ 動かした場合，点 i の正矢 m_i は図-20より

$$m'_i = m_i + g_i \quad (3)$$

・点 $i-1$, $i+1$ での測定正矢 m_{i-1}, m_{i+1} は , 各弦の端部 , 点 i が $+g_i$ 動く影響により , 中点連結定理から以下のように正矢量が変化する

$$m'_{i-1} = m_{i-1} - \frac{1}{2} g_i \quad (4)$$

$$m'_{i+1} = m_{i+1} - \frac{1}{2} g_i \quad (5)$$

・このとき , 点 i の両隣接 点 $i-1$ 点 $i+1$ は動かない というものである .

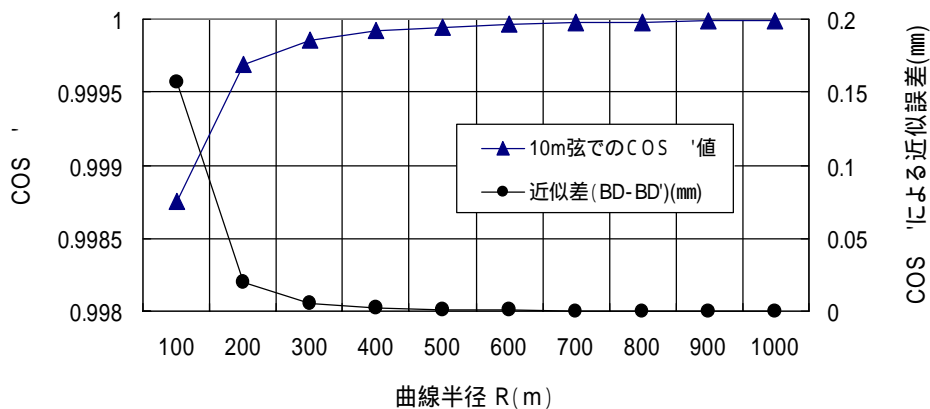


図-21 幾何交差法 角度近似の影響

この原理にも倍長弦公式と同様の角度近似が行われているが , 交差法に用いる弦長 $\ell = 10[m]$ と鉄道曲線に用いる平面曲線半径 $R = 160[m]$ で考えれば , 近似の影響は 図-21のとおりとなり無視できる数値である .

交差法には 設計正矢を厳密に与える累積法と設計正矢に幅を持たせる平均法の 2 種類の計算手法がある .

b)-2- 累積法

累積法は各地点の測定正矢を m_i 設計正矢を d_i とし地点 i における正矢差を

$$f_i = (d_i - m_i) \quad (6)$$

で定義すれば , 第 j 番目 ($j \geq 2$) の地点の移動量 g_j は1つ前の正矢測定地点までの正矢差を用いて以下の式

$$g_j = -2 \sum_{i=1}^{j-1} (j-i) f_i \quad (7)$$

$$= -2((j-1)f_1 + (j-2)f_2 + \dots + 2f_{j-2} + f_{j-1}) \quad (8)$$

により与えられることを利用した解法である。正矢差 f_i が測点 i の増加と共に掛け合わされ累積されていくので、この名がつけられている。幾何図解法による式の導出は付録5に詳細を記述している。

NO	測定正矢 m	設計正矢 d	移動量 g
1			
2			
3			
4			
5			
...			
n-2			
n-1			
n			0
n+1			0

既知のデータ
設計入力(難)

移動量列の最後の2項は必ず0となること

一意に決まる

図-22 累積法の計算表

累積法では d_i を決定することで答えは一意に定まる。実際の計算では、図-22に示した計算表に測定正矢 m_i (既知) を入力し、設計正矢 d_i を任意に与えることで、移動量 g_i が対象区間全域で直ちに算定できる。

但し、最後の正矢測定箇所である測点 n と、その時の弦の終端点となる点 $n+1$ においては、軌道の連続性の確保より両地点の移動量は0となる必要がある。

$$g_n = g_{n+1} = 0 \quad (9)$$

この成立には 設計正矢 d_i の設定において次の2式

$$\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n d_i \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n (n+1-i)m_i = \sum_{i=1}^n (n+1-i)d_i \quad (11)$$

を満たせばよいことが知られているが⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾

緩和曲線長などの線形条件や各点での移動制限などを満足させた上で、2式の条件を満たす d_i を設定するには 相当の熟練を必要とする難解な計算法である。

b)-2- 平均法

これに対し d_i の設定に幅を持たせ、先の幾何原理を用いて部分的かつ視覚的に解いていく方法が平均法である。

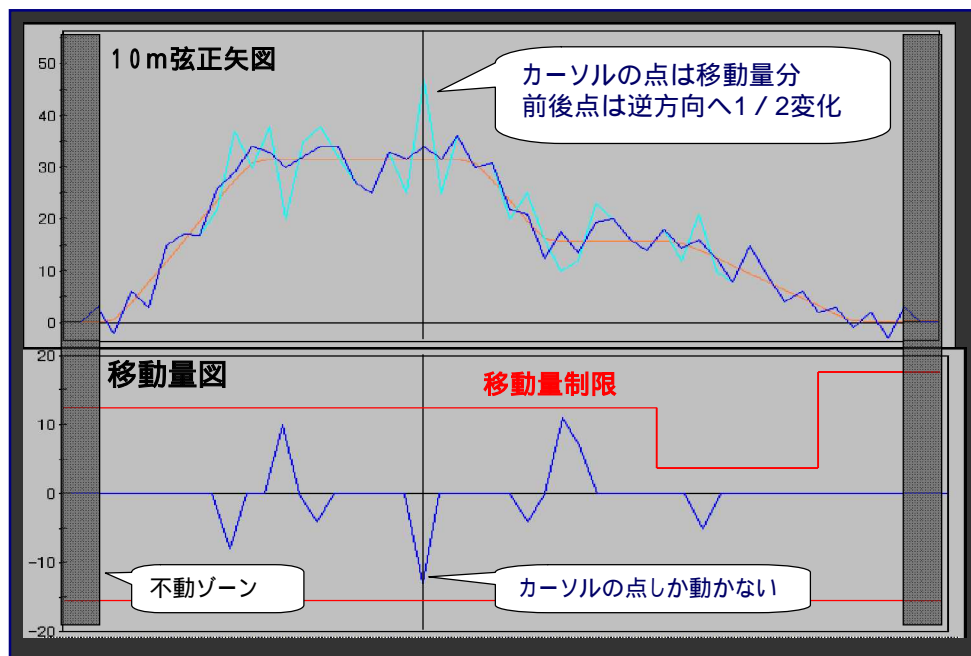


図-23 平均法の計算（視覚的図解法）

台形正矢図に現れる凹凸（曲率差=ハンドル操作変化）を滑らかにするように地点を移動させる（図-23）測定正矢の凹凸を平均的に揃えていくことからこの名がつけられている。計算原理は先の累積法と同じである。

- ・ある点 i の移動に伴い、点 i 並びに前後の点 $i-1$ 点 $i+1$ の正矢値は式(3)(4)(5)に従い変化する。
- ・このとき 点 $i-1$ 点 $i+1$ は動かない

この原理に基づく試行計算を繰り返し、

- ・緩和曲線長・形状（正矢から視覚的に確認できる）
- ・各点での移動制限への適合
（設定した制限枠：図-23の赤枠 を移動量目盛が超過しているか否かで判断できる）
- ・測点1 及び n の連続条件
（この2点は物理的に動かせない構造である）

などを確認しながら最終的な移動量を決定する。数値の羅列ではなくアナログ波形として曲線全体を視覚的に捉えられる点、式(10)(11)を満たす設計正矢を計算の過程で自然に出現させることが出来る点が平均法の利点である。この試行計算を容易に進めるために、専用の機械式計算器（以下、「曲線整正器」）が各国で開発・導入されている。（図-24）

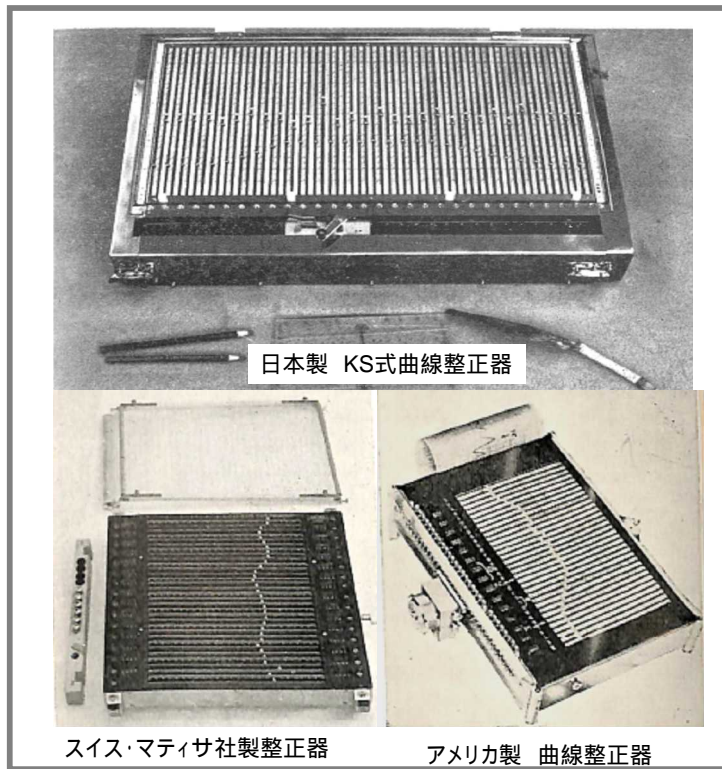


図-24 世界各国の曲線整正器（文献-16より）

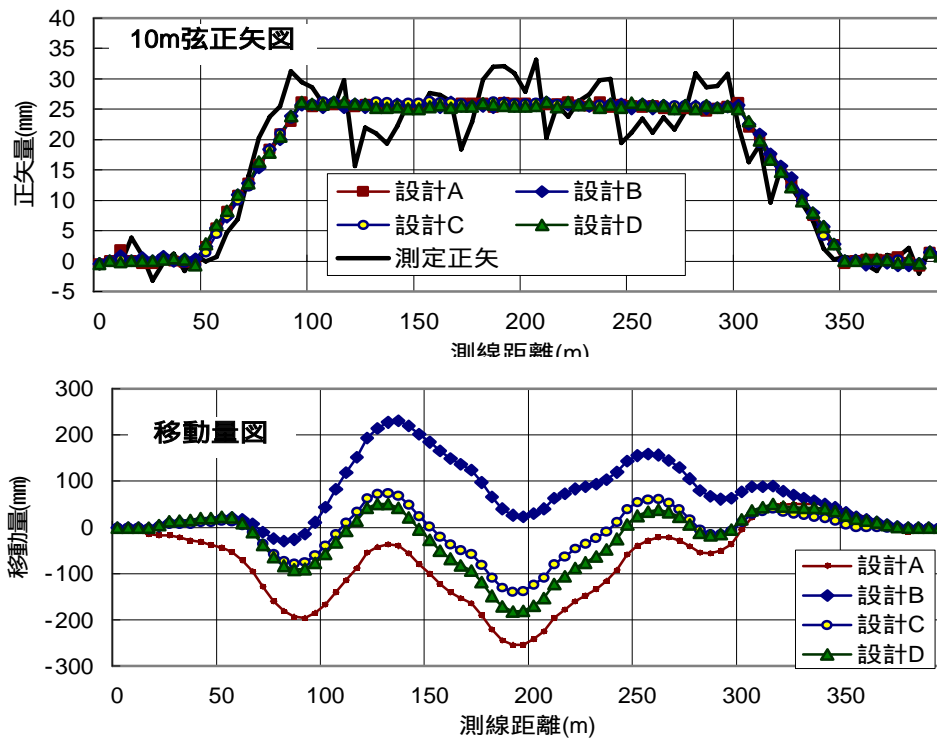


図-25 平均法で生じる移動量（計画）の個人差

平均法は設計者によって設計正矢値に一定の幅を持たせた演算であるため 移動量計算結果に個人差が発生するという課題がある。（図-25）

同一の測定正矢 m_i を用いた平均法演算をおこない、ほぼ同一の設計正矢 d_i に仕上げたにも関わらず、4者4様の計画移動量 g_i が提案されている。

一方で、平均法では累積法で必須となる2式(10)(11)の条件を全く意識する必要がないことから、保線現場で用いられている交差法といえ、専ら平均法である。

このように交差法の2手法にはそれぞれ長所・短所があるが、それ以上に交差法共通の課題は、計算される移動量に、正矢測定時に生じる不可避な測定誤差が、僅かではあっても演算の過程で幾重にも積み重なる重畳現象が生じ、理論上、その使用は不適切とされている点にある²⁾³⁾¹⁹⁾²⁰⁾。その論拠を以下にのべる。

交差法による第 n 測点の移動量 g_n は、設計正矢 d_i を累積法・平均法いずれの計算法で決定したにせよ 式(7)により

$$g_n = -2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) f_i = -2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) (d_i - m_i) \quad (7) \text{再掲}$$

で与えられる。ここで m_i に含まれる測定誤差を m_e とし平均=0 標準偏差= の白色ノイズであると仮定すれば、計算された移動量 g_n に含まれる誤差影響成分 g_{en} は

$$g_{en} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) m_e \quad (12)$$

$$g_{en} = 2((n-1)m_e + (n-2)m_e + \dots + 2m_e + m_e)$$

$$g_{en} = 2 \frac{n(n-1)}{2} m_e = n(n-1)m_e \quad (13)$$

分散の加法性定理を用いれば、

$$\text{Var}[g_{en}] = n^2 (n-1)^2 \sigma^2 \quad (14)$$

ここに $\text{Var}[a_i] : a_i$ の分散を示す

「影響は測定誤差 m_e の分散 (= σ^2) に対し、測点数 n の増加に伴い急激に増大し、軌道整備の実用に供するものに理論的にはなり得ない」²⁾³⁾¹⁹⁾²⁰⁾ というものである。

加えて、幾何原理の前提となる「ある点 i を移動させた場合、前後の点 $i-1$ 点 $i+1$ は動かない」についても、通常使用する10mの弦長と数十(mm)程度の移動量であれば、軌きょう剛性などから直感的な違和感こそないものの、理論的には何ら明確なものではない。

表-2 交差法 現状評価（長所・短所）

		計算の方法	長所		短所	
交差法	累積法	表を用いた逐次演算	移動量が一意に定まる	測定が簡便 経験的実績と信頼性あり	誤差の重畳が発生する	整備対象の波長選択不可 有効性の理論的根拠なし
	平均法	専用計算器を用いた試行による演算	誤差の重畳が比較的発生しにくい		移動量が一意に定まらない	

あくまで相対比較論 理論的根拠なし

文献¹⁷⁾¹⁸⁾による交差法の現状評価を表-2 にまとめる。

交差法は、過去より多くの施工実績がある計算手法であるものの、その成果に対する理論的な分析は殆どなされておらず 統計学的に導き出される測定誤差の重畳問題よりその使用は不適切とされ、実務成果と理論評価に大きな技術的矛盾を有したまま今日に至っている。

b)-3 事前設計法：復元法

1987年、鉄道総合技術研究所 吉村彰芳博士により発表された²⁰⁾ デジタル信号処理技術を応用し、交差法同様、軌道狂い検査で得られる正矢データを用いて軌道実形状を演算する手法である。

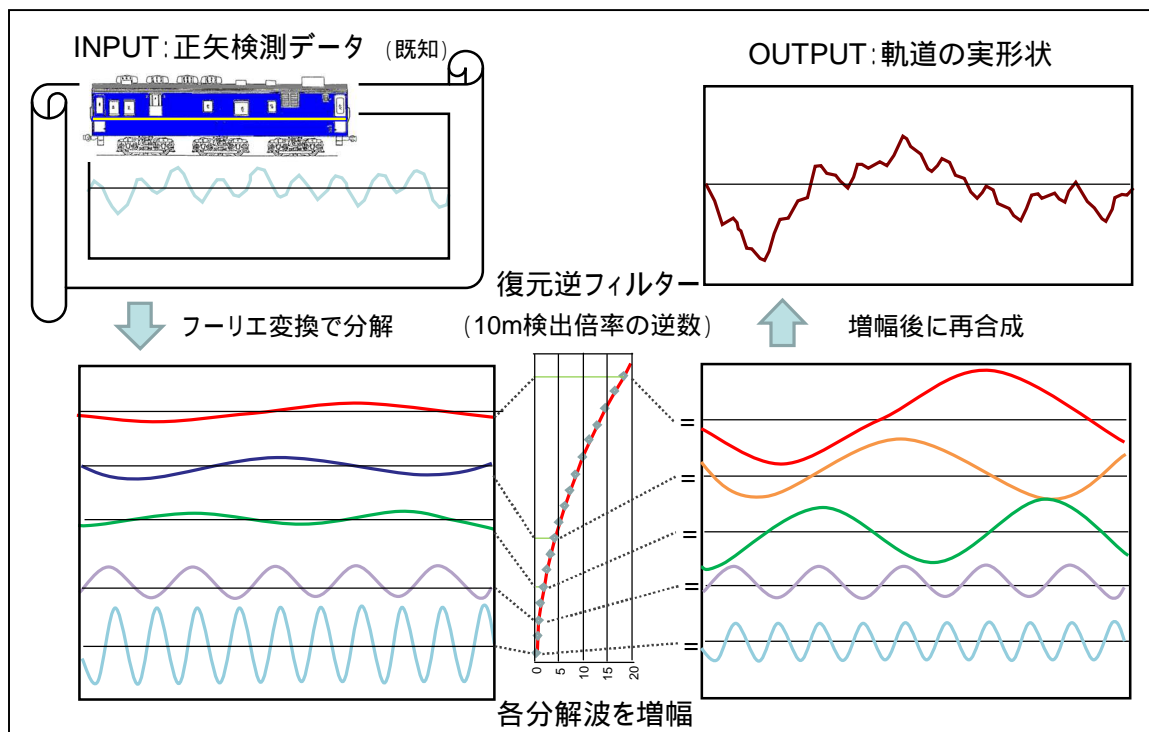


図-26 復元法の考え方

10m弦正矢データをフーリエ変換により波長分解を行い、各波長に対応した10m弦の検出倍率の逆数を掛け合わせた後に再合成し軌道の実形状を得るといふ、従来の幾何学変形発想とは全く異ったアプローチをとる。図-26に復元法のデータ処理の概略を示す。

- ・波長分解された軌道狂いのうち、管理・修繕の対象とする波長帯域のみに絞った軌道の実形状計算が個人差なく一意に行えること。
- ・この際に生じる位相差の影響を回避するために開発された、10m弦正矢法の検出特性と選択波長帯域の逆特性を合成したFIR (Finite Impulse Response) 型フィルター（図-27）により、演算対象区間前後の軌道の連続性が確保されること。

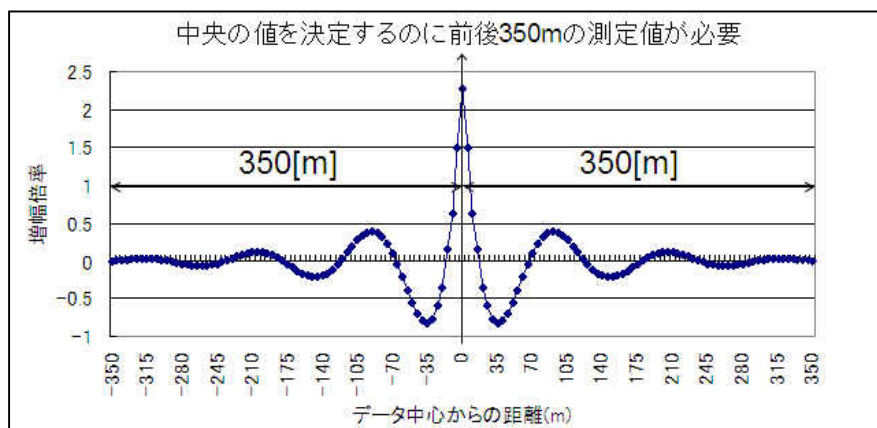


図-27 FIRフィルター（復元波長100[m]まで）の一例

- ・交差法での最大の課題である正矢測定誤差の重畳が殆ど生じないことなどを主な特徴とする。
復元法の使用には、FIRフィルターの特性から、0.25～1[m] 間隔でのデジタルデータ、および対象区間前後に復元する軌道狂いの最長波長に応じて350～500[m]程度の追加測定が必要となるため、軌道検測車データの使用が前提となる。

一方で現実に、軌道検測車のデータを保線作業の移動量として使用するには、1990年当時、特に在来線の検測車にまつわる各種課題を解決する必要があった。

軌道検測車の測定精度（特に通り狂い）の向上

機械式の測定機構では、レールへの装置の追従が十分でなく、測定値のうち曲線線形基本成分（正矢の台形成分に相当）が実際より小さく出力される課題²¹⁾を解決すること。

軌道検測車の位置精度の向上

検測車の指示する位置と現場での位置をいかにして同定させるかの課題。技術的には位置特定用のコイルを線路内に設置し、その誘導電流により車輪回転パルスから算出される積算距離を補正することで解決できるが、実際の移動量情報に求められる $\pm 1\text{m/km}$ 程度の精度とするためには、設備の増設が必要である。

（JR西日本においては～2005年まで、在来線での同補正は概ね10kmに1箇所程度であった。）

これら2つの技術課題に加えて、6回～2回/年の在来線軌道検測車の測定日から保線作業日までの軌道狂い変化（以下、「軌道狂い進み」）の影響を、どう除去するかという根本的な課題も存在する。

の課題に対しては、光学式通り測定機構や $1\text{km}/1$ 回の高頻度な距離補正システム及び車載ラインセンサーカメラによる床下画像記録装置を搭載した新型軌道検測車への取替え（図-3-2）ならびに筆者らによる画像からの位置同期システムの開発により解決された。

軌道狂い進みへの影響については、過去の狂い進みデータの波長別分析を行った結果から、他の保線作業の投入や地震等災害による特殊外力の作用が無ければ「30mを越える長波長軌道狂い領域、特に通り狂いについては検測周期間で殆ど変化しない」という観察知見を得た。

また同帯域以下の短い波長の軌道狂い変化は、MTT相対基準ライニングの整正能力を併用することで課題が解決できるという検証結果を得た。

これらにより、軌道検測車データを用いた復元法は専用システムを導入した鉄道事業者において、2000年頃より移動量算定手法として導入されている²²⁾²³⁾²⁴⁾。

(3) 本研究の背景と意義

a) スピードアップによる管理基準の見直し

1980年代後半より、在来線・新幹線の既存設備を活用した速度向上が各所で実施される中、前述のとおり20m弦・40m弦といった10m弦に代わる新たな長波長軌道狂い管理基準が、特に曲線通過速度の向上を背景に通り狂いに対して適用されはじめた⁴⁾⁵⁾。

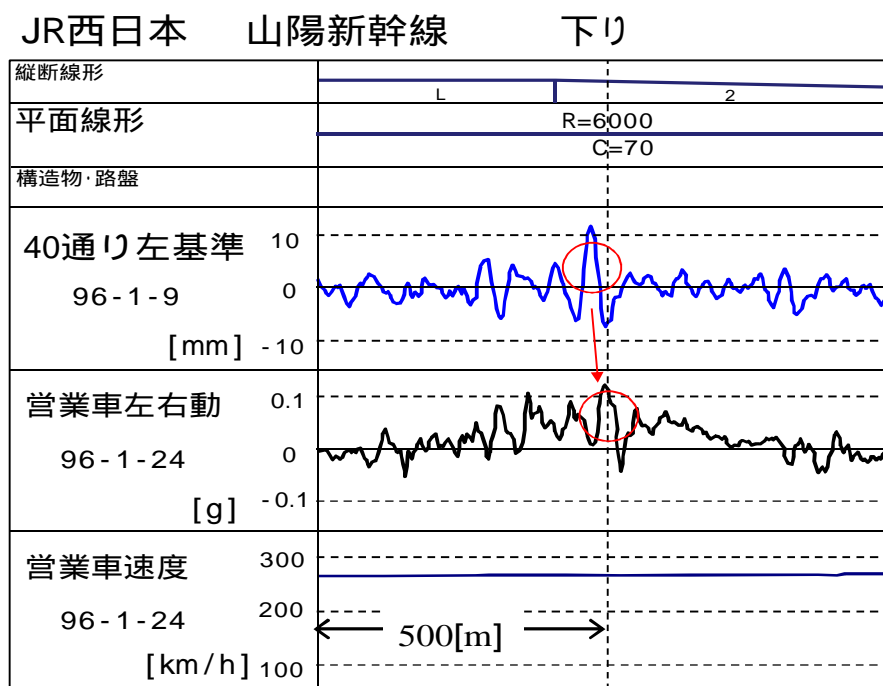


図-28 曲線区間における列車左右動揺と40m通り狂い

これら新基準の導入により曲線部における列車の横揺れの原因となる軌道狂いを効果的に抽出することは可能となった。(図-28)

b) 経験的交差法の理論的再評価

一方、この新基準での修繕を行うためには、従来の10m弦を管理基準とした中で確立されてきた保線技術者の拝見法やMTT相対基準法だけでは十分な修繕効果を得られにくく、長波長成分を含む移動量を、測定正矢から算出するニーズが高まった。

これに対し(復元法実用化以前の)当時,理論的には適用不適とされるものの,現場での経験・実績がある交差法曲線整正の改良が各方面でなされ,算出された移動量を保線作業に用いることで,長波長軌道狂いを効果的に抑制し実効をあげた.(図-29 30) ²⁵⁾²⁶⁾²⁷⁾²⁸⁾

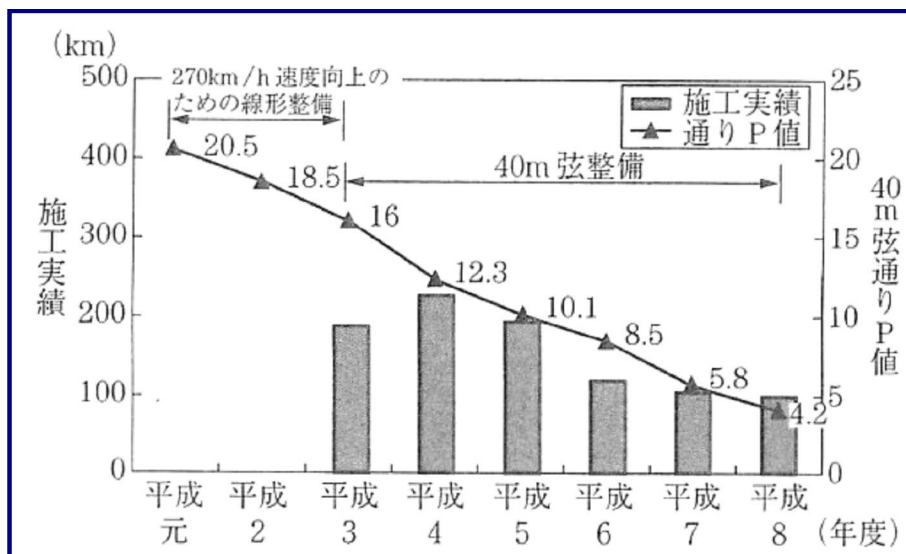


図-29 東海道新幹線における40m弦整備効果(文献-27より)

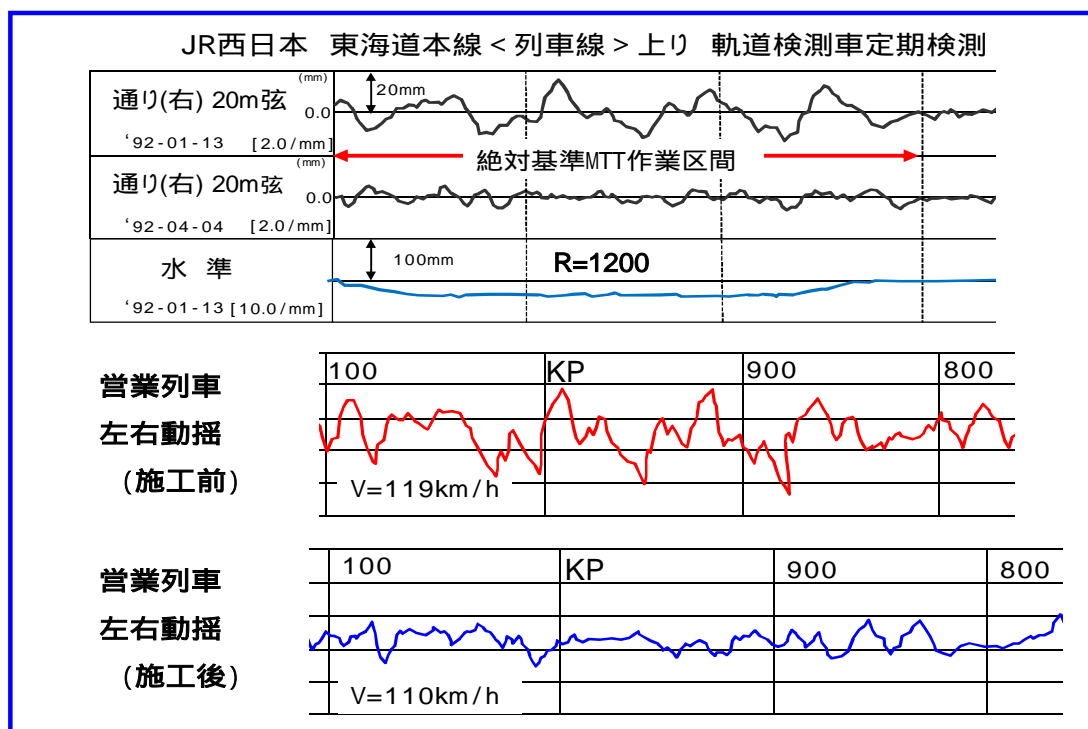


図-30 在来線(新快速)20m弦通り整備効果の実例

JR西日本における具体例としては,1990~1992にかけて筆者が開発・導入した線形整備システムが挙げられる。

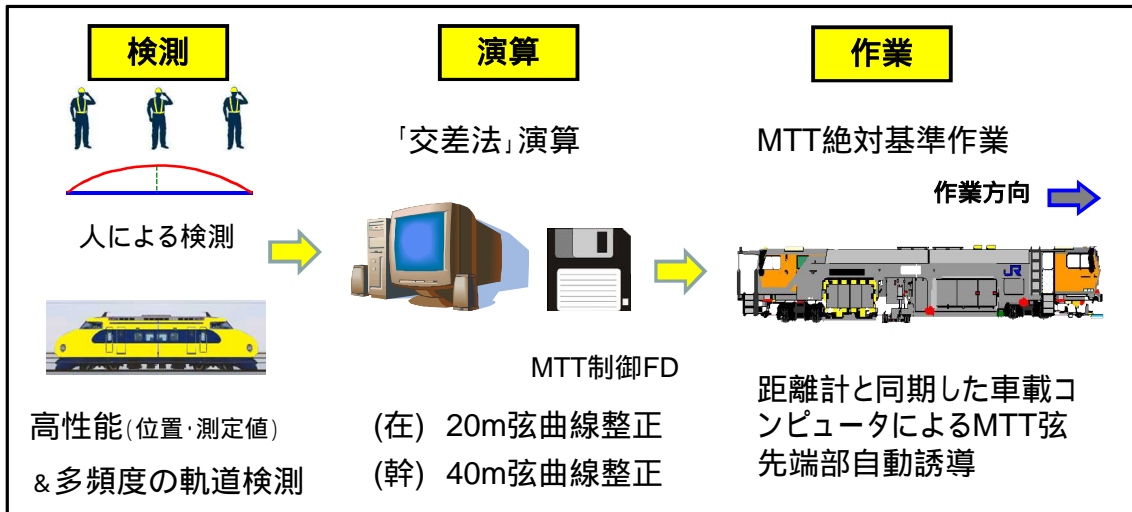


図-31 JR西日本 改良交差法システム

このシステムは10m弦交差法（平均法）を基礎として倍長弦公式で得られた20m弦・40m弦正矢を用いた交差法を同時に並行収束計算させることで移動量（通り・高低）を求め、MTTの弦先端部を誘導するデータ作成までを自動で行うものである。（図-31）

しかしながら現在においても、交差法の理論的な有効性の立証、特に理論上不可能と考えられてきた測定誤差の重畳影響回避が、なぜ行えるのか、どのように行われているのか、については依然未解明のままである。

本研究はこのような背景の下、経験的に使用してきた交差法の技術的総括として、同法の有効性を理論的に立証し、その知見より現代的な応用法を提案することを目的とする。

理論的解析手段として、交差法を行列による正矢ベクトルと移動量ベクトルの一次変換として捉え、行列の固有値問題として解析した、その結果

交差法・正矢法には観測されたデータを、データ個数 n のみを変数とする簡易な計算により、弦長を $(n+1)$ とする n 個の両端固定弦の振動モード（以下、定常波）に分解する機能が内在していること。

交差法による測定誤差影響はデータ個数 n に伴い重畳するものの、第1～5定常波に全体の95%以上が集中する特性を持ち、列車の速度や固有振動数、並びに正矢の検測精度を考慮した工学的に有意な除去及び制御が可能であること。

などが明らかになった。

加えて、過去のJR西日本管内で実際に行った交差法による曲線修正の施工結果を、本研究の理論的側面からの再検証をおこなった結果とあわせ、交差法をベースとした軌道修正手法が現在においても十分に活用できる実用的かつ合理的な手法であることを報告するものである。

2. 交差法の理論的再定義

本章では、幾何図解法で説明されてきた交差法を、別の理論的アプローチ、行列を用いた正矢と移動量、2つのベクトル間の座標変換、一次変換の問題として再定義する。あわせて交差法を表わす行列の固有値問題を解析することにより同演算法の本質を明らかにする。

(1) 用語・変数の定義等

理論的な再定義に先立ち、前章までの既出のものも含め用語の定義を行う。

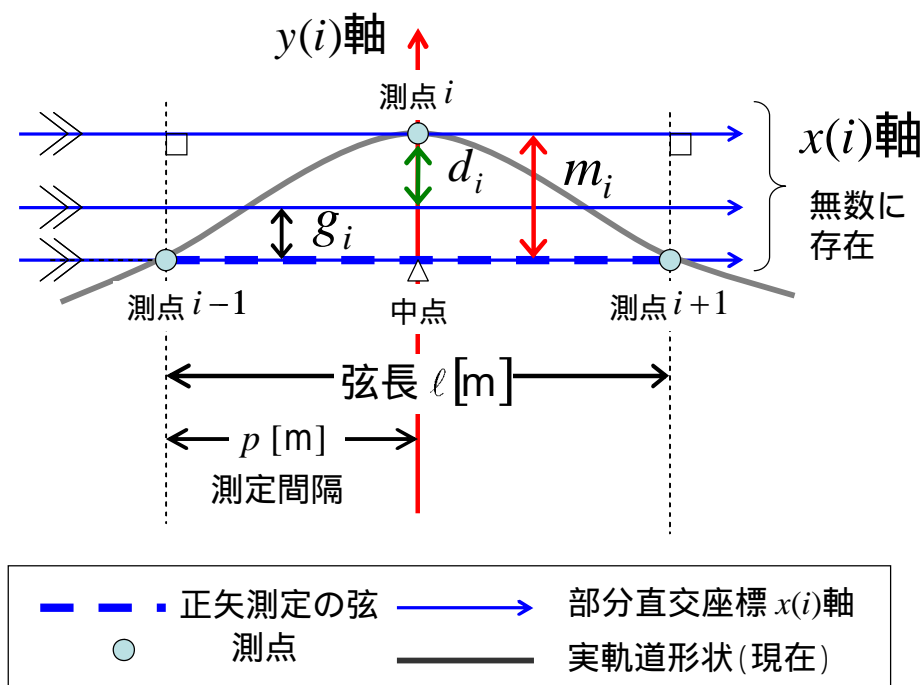


図-32 用語・変数の定義

記号の記述ルール

a, A : 細文字	スカラーを示す
a : 太小文字	ベクトルを示す
A : 太大文字	行列を示す

正矢測定に関わる用語・変数

- 軌道 : 線路構造物のうちレールの部分を示す
- 点 : 軌道上の一場所を示す用語として使用する
- 弦 : 軌道上の異なる二点（レール頭頂面同志、もしくはレール頭頂面から14mm下がった位置同志）を始端・終端とする弦を示す。二点間の最短距離を意味する
- 矢 : 弦の任意の場所における垂線と軌道上の交点までの距離を示す。任意の場所を弦の midpoint とする場合を特に正矢とよぶ

- 測点 : 正矢測定をおこなう軌道上の点を示す用語として使用する
- n : 正矢測定点の総数を示す．測点数ともいう．行列，ベクトルの次元数に相当する．
- i, j, k : 原則として測点番号を示す記号で使用する．
特に断りなければ $(1 \leq i, j, k \leq n)$
- ℓ : 弦長 [m] 特断りなければ $\ell = 10$ [m]
- p : 測定間隔 [m] 正矢法では $p = 1/2 \times \ell$ [m]
- 測定正矢 m_i : 測点 i で観測された正矢値を表わす．
 n 次元ベクトルとして \mathbf{m}
- 設計正矢 d_i : 測点 i における設計線形等より定まる正矢値を表わす．
 n 次元ベクトルとして \mathbf{d}
- 移動量 g_i : 測点 i において， m_i を d_i に修正するのに必要となる修正値を表わす．
 n 次元ベクトルとして \mathbf{g}
- 実形状 y_i : 弦に垂直かつ測点 i を通る $y(i)$ 軸と，弦に平行な任意の $x(i)$ 軸（必ずしも測点 i を通る必要はない）を一つ定義する．
この直角座標内における点 i の $y(i)$ 軸座標値を表わす．
 n 次元ベクトルとして \mathbf{y}
- A : 波長 [m] を示す．
- λ : 行列の固有値を示す．

その他の記号，数列，ベクトル，行列は都度定義する．

(2) 鉄道曲線における座標定義と漸化式

一つの直角座標系で表すのが煩雑となる鉄道で用いる様々の曲線形状を関数として扱う場合，曲線に沿って距離軸を設定し，点 i における一次ないしは二次の微係数（または差分）を同点での $x(i)$ 軸，同垂線を $y(i)$ 軸とする部分直角座標で表わす方法が用いられる⁽¹¹⁾²⁹⁾．

前述のとおり，正矢法は実形状の二階差分であることより，測点 i を通る正矢測定弦と平行な座標軸を $x(i)$ 軸として用いることができる．

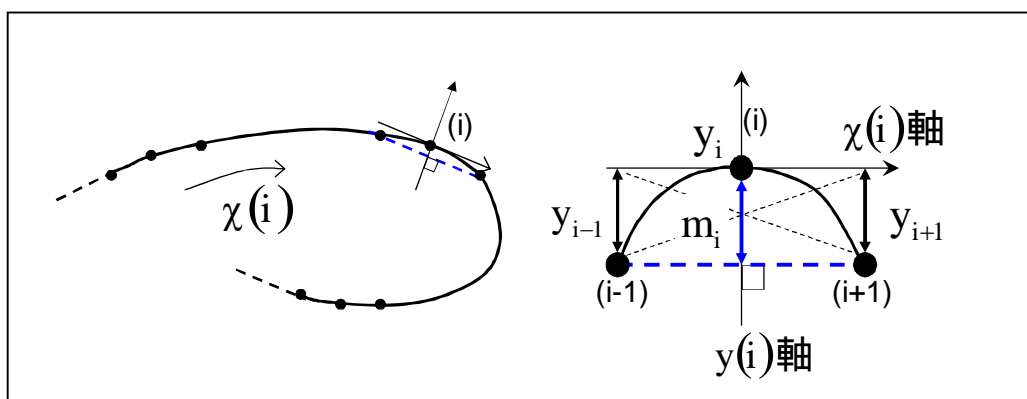


図-33 曲線内での部分直角座標（一般部）

図-33 において，第 i 番目の部分直交座標内での実形状各測点の $y^{(i)}$ 軸座標を y_{i-1}, y_i, y_{i+1} とすれば

$$m_i = y_i - \frac{y_{i-1} + y_{i+1}}{2} \quad \text{より}$$

$$m_i = -\frac{1}{2}y_{i-1} + y_i - \frac{1}{2}y_{i+1} \quad (15)$$

m_i と未知の実形状 y_i の関係を表す 式(15) の漸化式が成立する．

また曲線整正を行う対象区間の両端部，測点1および測点 n における部分直交座標(図-34)では，両外方の軌道線形と接続方向を変えずにスムーズな連続を確保する必要がある．この場合，両測点における一次差分を，部分直交座標の $x^{(1)}$ 軸， $x^{(n)}$ 軸としてとして考えることが出来るため，次の2式が成立する．

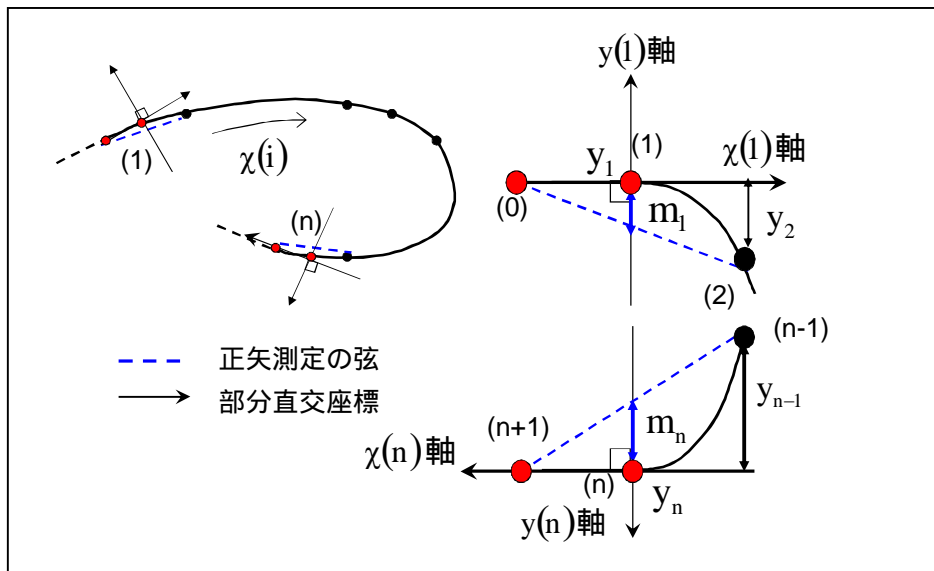


図-34 曲線内での部分直交座標 (両端部)

$$m_1 = y_1 - \frac{0 + y_2}{2} \quad m_n = y_n - \frac{y_{n-1} + 0}{2} \quad \text{より}$$

$$m_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 \quad (16)$$

$$m_n = -\frac{1}{2}y_{n-1} + y_n \quad (17)$$

式(15)(16)(17)を用いることにより,全ての測点における正矢測定値(既知)と実形状(未知)の関係を定義することができる.

(3) ベクトル一次変換としての交差法定義

a) 正矢変換行列 \mathbf{T}

前節で得られた関係式を用いて,行列 \mathbf{T} を次のように定義する.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

以降,行列 \mathbf{T} を「正矢変換行列」とよぶ.

正矢変換行列 \mathbf{T} を用いれば,既知である測定正矢ベクトル \mathbf{m} と未知の実形状をあらわすベクトル \mathbf{y} との関係は,一次変換として式 (19) のように書ける.

$$\mathbf{m} = \mathbf{T} \mathbf{y} \quad (19)$$

次に設計正矢ベクトル \mathbf{d} が与えられた時の未知の実形状をあらわすベクトル \mathbf{y}_d との関係を考える.

この場合も相互の関係は式(19)と同様に以下の式(20)で与えられる.

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{y}_d \quad (20)$$

ここでここで新たなベクトル \mathbf{g} を

$$\mathbf{g} = \mathbf{y}_d - \mathbf{y} \quad (21)$$

と定義すれば, \mathbf{g} は2つの未知の実形状間の $y(i)$ 軸方向(測点 i における法線方向)の差となり,これが求めるべき移動量ベクトルである.

このように移動量を,各測点における法線方向の座標差として考えることにより,幾何交差法での“隣接点が動く,動かない”といった感覚的議論から脱し,弦長 ℓ [m] に関わらず正矢法全体に一般化をおこなうことができる.

式 (19) (20) および 式 (21) より, 式(22)が導かれる.

$$\mathbf{T}(\mathbf{y}_d - \mathbf{y}) = \mathbf{Tg} = \mathbf{d} - \mathbf{m} \quad (22)$$

b) 交差法行列 \mathbf{T}^{-1}

行列 \mathbf{T} は 正方行列であり, 行列式 $\det(\mathbf{T}) \neq 0$ であるので逆行列 \mathbf{T}^{-1} が存在する.
逆行列 \mathbf{T}^{-1} の成分は以下に示す特徴を有する. (図-35)

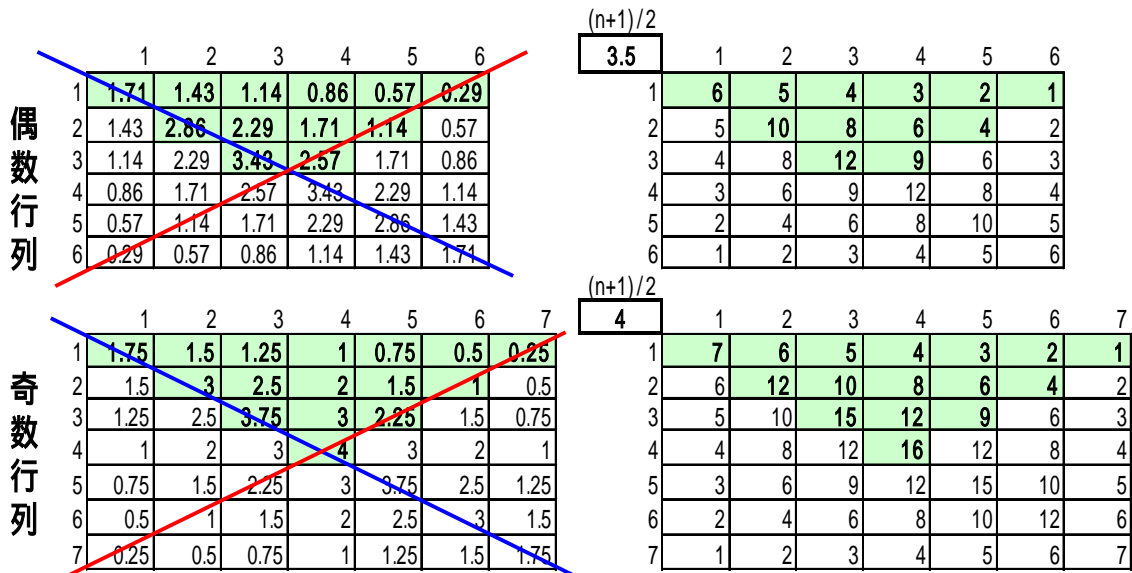


図-35 交差法行列 \mathbf{T}^{-1} 成分の特徴・規則性

- ・ 2軸の対称軸をもつ非負の実対称行列となる
- ・ 成分を $(n+1)/2$ 倍すれば全成分は自然数となる
- ・ 次元数 n のみで全成分が簡易に計算できる

即ち, 逆行列算出手法 (掃き出し法・Gauss-jordan法等) によらず, 逆行列の成分を確定することができる.

逆行列 \mathbf{T}^{-1} の成分を式で示せば以下のようなになる.

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{2}{n+1} \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & \cdots & 4 & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & \cdots & 6 & 3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 2 & 4 & \cdots & \cdots & 2(n-1) & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \quad (23)$$

また各成分をスカラ式で表示すれば以下のようなになる.

$$1 \leq i \leq j \leq n$$

$$1 \leq j < i \leq n$$

$$T^{-1}(i, j) = \frac{2}{n+1} i(n-j+1)$$

$$T^{-1}(i, j) = \frac{2}{n+1} j(n-i+1)$$

以降， T^{-1} を「交差法行列」とよぶ．

式(23)で示した逆行列成分の規則性の証明を付録6に記す．また文献³⁰⁾³¹⁾³²⁾などにも記載が詳しい．

交差法は既知の測定正矢ベクトル \mathbf{m} 及び 設計正矢ベクトル \mathbf{d} と未知の移動量ベクトル \mathbf{g} との間の一次変換 式(24)として再定義される．

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{m}) \quad (24)$$

また，式 (18),(23) より正矢変換行列 \mathbf{T} ，及び交差法行列 \mathbf{T}^{-1} とともに二軸実対称行列であり，対称行列の持つ様々な数学的利点が活用できる．

(4) 固有値問題としての交差法本質の解析

行列 \mathbf{A} の一次変換 (= 座標変換作用) に対し，方向を変えずに長さのみが変化するような特別な関係

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

を満たすベクトル \mathbf{x} 並びにそのスカラー倍率 λ を，行列 \mathbf{A} の固有ベクトル・固有値といい，行列 \mathbf{A} の次元数 n 個だけ存在することが知られている．これらを求めることは，行列 \mathbf{A} の作用の本質を理解する上で有効な手段となる．

$$\begin{array}{l} \text{移動量} \\ \text{ベクトル} \end{array} \left[\mathbf{g} \right] = \left[\mathbf{T}^{-1} \right] \left\{ \left[\mathbf{d} \right] - \left[\mathbf{m} \right] \right\} \begin{array}{l} \text{正矢(差)} \\ \text{ベクトル} \end{array}$$

【作用】

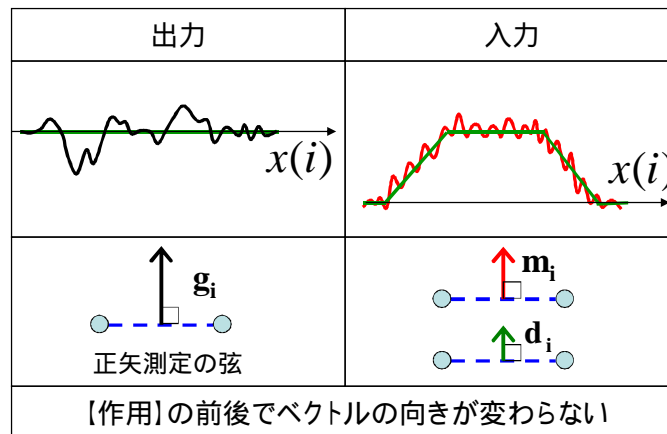


図-36 交差法演算における固有状態の関係

交差法行列 T^{-1} による一次変換 式(24)の結果を実務と照らし合わせて考えれば、測定される正矢も、計算により求められる移動量も、常に測定をおこなう弦 (= 部分直交座標 $x^{(i)}$ 軸) に対して直交方向である。(図-36)

これは行列 T^{-1} の作用により向きを変えていない固有状態にあるといえる。(180度方向が変わるものはマイナススカラー倍されたと解釈する)

本節では交差法の作用を行列 T^{-1} の固有値問題として捉え、固有ベクトル・固有値を求め、これを考察することで交差法の本質を解析する。

なお T および T^{-1} は実対称行列であるため、固有値・固有ベクトルは全て実数で求めることが出来る。

a) 固有値・固有ベクトルの導出

行列 T と逆行列 T^{-1} において

$$\begin{aligned} T \text{ の } i \text{ 番目の固有値: } \lambda_{Ti} \quad & \text{同固有ベクトル: } \mathbf{x}_{Ti} \\ T^{-1} \text{ の } i \text{ 番目の固有値: } \lambda_i \quad & \text{同固有ベクトル: } \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

とすれば、以下の便利な関係があるので

$$\lambda_i = \frac{1}{\lambda_{Ti}} \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{Ti} \quad (25)$$

T^{-1} の固有値・固有ベクトルの導出は、成分に0が多い疎行列である T の固有方程式を解く方が効率的であり、固有方程式は以下のように導出される。

$$\begin{aligned} T \mathbf{x} &= \lambda_{Ti} \mathbf{x} \\ T \mathbf{x} - \lambda_{Ti} \mathbf{x} &= (T - \lambda_{Ti} \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (26)$$

ここに \mathbf{E} : 単位行列を示す。

式(26)においてベクトル \mathbf{x} が $\mathbf{0}$ ベクトル以外の解を持つためには $(T - \lambda_{Ti} \mathbf{E})$ に逆行列が存在してはならず、固有方程式は以下の式となる。

$$\det(T - \lambda_{Ti} \mathbf{E}) = 0 \quad (27)$$

これを解くことにより表-3に示す固有値・固有ベクトルが導出される。これらの導出過程、および証明については付録7.8.9章に詳細を記述する。

いずれも次元数 n のみを変数とした三角関数で、その成分を式として、正確に求めることが出来る³⁰⁾³¹⁾。

表-3 交差法行列 \mathbf{T}^{-1} ・正矢変換行列 \mathbf{T} の固有値・固有ベクトル

1 i, j, k n

	交差法行列 \mathbf{T}^{-1}	正矢変換行列 \mathbf{T}
固有値	$\lambda_i = \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n+1}\right)^{-1}$ (28)	$\lambda_{Ti} = \frac{1}{\lambda_i} = \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n+1}\right)$ (29)
正規固有ベクトルの成分	$u_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{i\pi}{n+1} j$ (30)	弦長= $n+1$ 両端固定弦の第 <i>i</i> 番目の振動モード式と一致
固有空間行列成分	$\mathbf{S}_i = \mathbf{u}_i {}^t \mathbf{u}_i$ より $S_{i(j,k)} = \frac{2}{n+1} \left(\sin \frac{i\pi}{n+1} j\right) \left(\sin \frac{i\pi}{n+1} k\right)$ (31)	
行列スペクトル分解	$\mathbf{T}^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{S}_i$ $= \lambda_1 \mathbf{S}_1 + \dots + \lambda_i \mathbf{S}_i + \dots + \lambda_n \mathbf{S}_n$ (32)	$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^n \lambda_{Ti} \mathbf{S}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{S}_i$ $= \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{S}_1 + \dots + \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{S}_i + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \mathbf{S}_n$ (33)

特に正規化された第 i 番目の固有ベクトル \mathbf{u}_i の成分 式(30)は、弦長を $n+1$ とした両端固定弦の第 i 固有振動モード（以下、「第*i* 定常波」）をあらわす式と一致する³³⁾³⁴⁾。（図-37）これは以降の解析において大変有用な効果をもたらす。

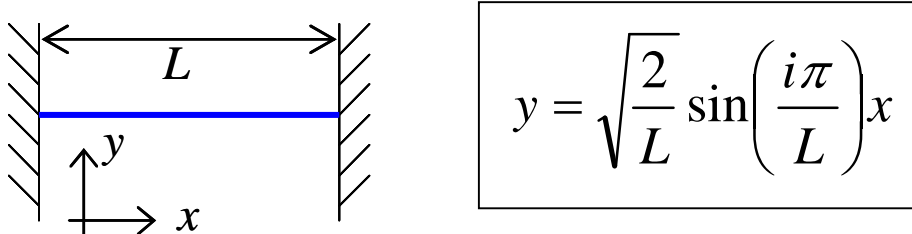


図-37 両端固定弦の第*i*固有振動モード式

b) 固有空間行列とスペクトル分解の導出

正規固有ベクトル \mathbf{u}_i と同転置ベクトル ${}^t \mathbf{u}_i$ を用いれば

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{u}_i {}^t \mathbf{u}_i \text{ より}$$

式(31)の固有空間行列 \mathbf{S}_i が導出される。

\mathbf{S}_i は射影子行列と呼ばれる特殊な行列であり³⁵⁾、この行列による一次変換は、任意ベクトルの \mathbf{u}_i 成分（この場合は第 i 定常波成分）を抽出するという特性を持つ。

\mathbf{S}_i の式(31)で与えられる成分 $S_{i(j,k)}$ を可視化したものを図-38に示す。縦横で第*i* 定常波の糸を織り込んだような独特な形状を描く。

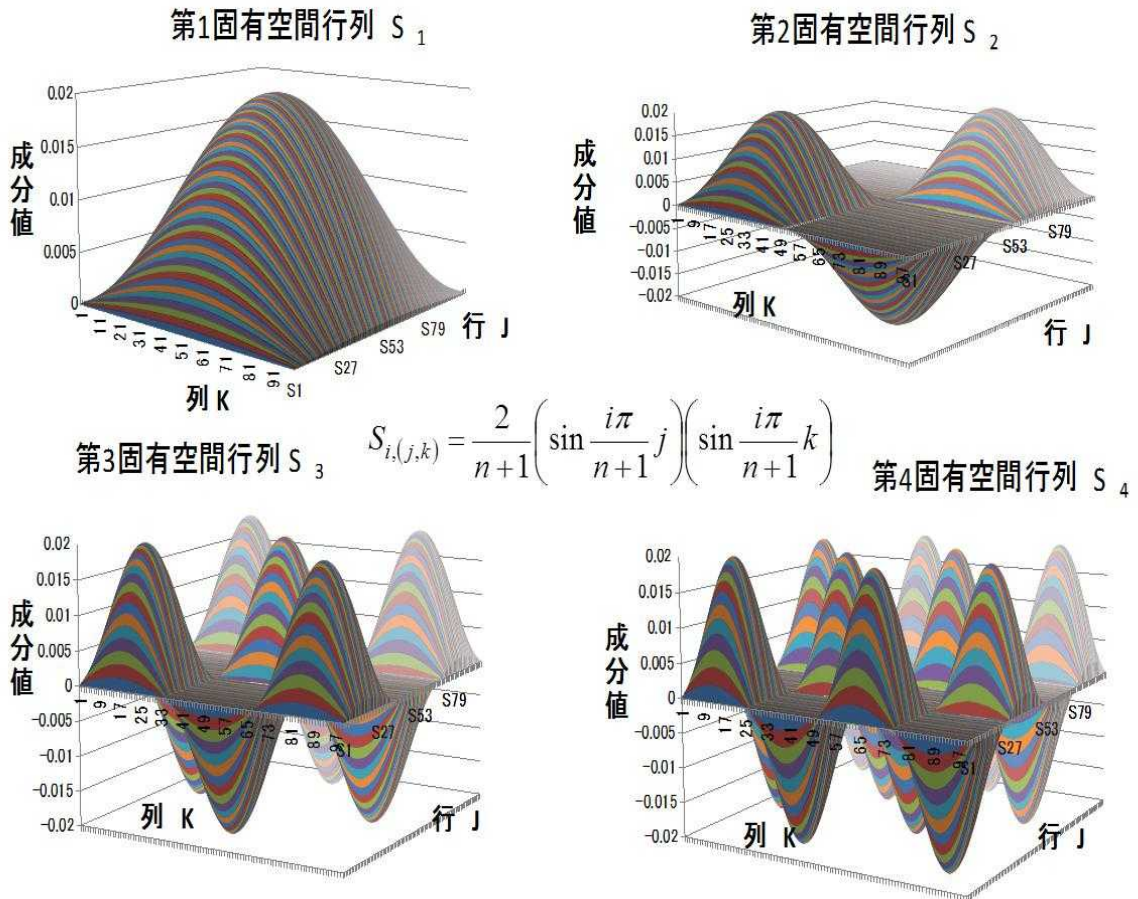


図-38 固有空間行列 S_i の成分

以上の固有値 λ_i , λ_{Ti} と固有空間行列 S_i を用いることで T^{-1} および T は固有値と固有空間行列 S_i の線形式(32)(33)としてあらわすことができる。(同線形式を以下、「行列スペクトル分解」と表記する)

$$\mathbf{T}^{-1} = \lambda_1 \mathbf{S}_1 + \cdots + \lambda_i \mathbf{S}_i + \cdots + \lambda_n \mathbf{S}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{S}_i \quad (32)\text{再掲}$$

$$\mathbf{T} = \lambda_{T1} \mathbf{S}_1 + \cdots + \lambda_{Ti} \mathbf{S}_i + \cdots + \lambda_{Tn} \mathbf{S}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_{Ti} \mathbf{S}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{S}_i$$

$$= \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{S}_1 + \cdots + \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{S}_i + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} \mathbf{S}_n \quad (33)\text{再掲}$$

3 交差法理論解析の工学的意味と応用

本章では,前章でおこなった各種の理論解析より導かれた値,及び式の工学的な意味とメリット,その応用について考察する.

(1) 固有値と正矢法検出倍率

測点数 n , 間隔 p [m]で観測された軌道狂いを表-3の式(32)(33)により行列スペクトル分解した第1項, 行列 S_1 により抽出される最長の波長を A_1 [m]とすれば, A_1 [m] は弦長 $(n+1)p$ [m] の

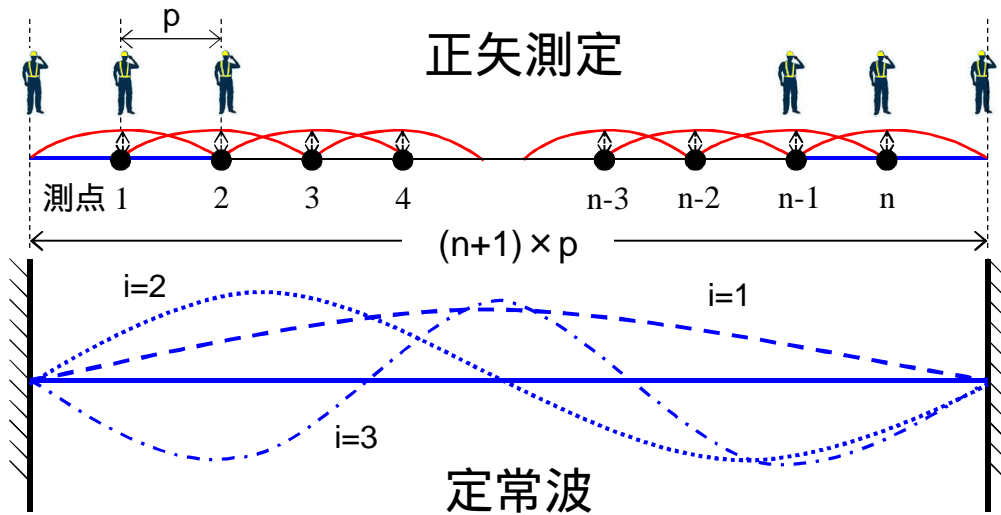


図-39 正矢測定と定常波固有ベクトル

第1定常波であることから, 図-39に示す正矢測定の状態に相当し, その波長は式(34)で導かれる.

$$A_1 = 2p(n+1) \quad [\text{m}] \quad (34)$$

以下同様に, 行列 S_i で分解される i 番目に長い定常波波長 A_i [m] ($1 \leq i \leq n$) は

$$A_i = 2p(n+1)/i \quad [\text{m}] \quad (35)$$

の式で求めることができる.

一方で, 波長 A_i [m] の正弦波おける ℓ m弦正矢の検出倍率 $h_{\Lambda i}$ は 前出の式 (2)で与えられる.

$$h_{\Lambda i} = 1 - \cos \frac{\ell \pi}{\Lambda_i} \quad (2)\text{再掲}$$

この式に $\ell = 2p$ と式 (35)の関係を代入し整理すれば

$$h_{\Lambda i} = 1 - \cos \left(\frac{2p\pi}{2p(n+1)/i} \right) = 1 - \cos \left(\frac{i\pi}{n+1} \right) \quad (36)$$

ここで表-3 式(28)(29) によれば

$$\lambda_{Ti} = 1 - \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) = \frac{1}{\lambda_i}$$

$$\therefore \lambda_{Ti} = \frac{1}{\lambda_i} = h_{\Lambda i} \quad (37) \quad \text{ここに} \left(h_{\Lambda i} = 1 - \cos\frac{\ell\pi}{\Lambda_i} \right)$$

- \mathbf{T}^{-1} の第 i 番目の固有値 λ_i は
波長 Λ_i [m]における弦長 $\ell (=2p)$ [m] 正矢検出倍率 $h_{\Lambda i}$ の逆数 (以下, 「復元倍率」)
 - \mathbf{T} の第 i 番目の固有値 λ_{Ti} は
波長 Λ_i [m]における弦長 $\ell (=2p)$ [m] 正矢検出倍率 $h_{\Lambda i}$
- にそれぞれ完全に一致する .

(2) \mathbf{T}^{-1} 及び \mathbf{T} の作用 その工学的意味

前節で明らかにした固有値の意味を踏まえ, 改めて 表-3 式(32)のスペクトル分解を考えれば

$$\mathbf{T}^{-1} = \lambda_1 \mathbf{S}_1 + \cdots + \lambda_i \mathbf{S}_i + \cdots + \lambda_n \mathbf{S}_n \quad (32)\text{再掲}$$

$$= \frac{1}{h_{\Lambda 1}} \mathbf{S}_1 + \cdots + \frac{1}{h_{\Lambda i}} \mathbf{S}_i + \cdots + \frac{1}{h_{\Lambda n}} \mathbf{S}_n \quad (38)$$

交差法行列 \mathbf{T}^{-1} の作用とは, \mathbf{S}_i による任意ベクトルに含まれる Λ_i [m]の定常波成分の抽出と, 同波長における ℓ m弦正矢の復元倍率による増幅の和とする変換と解釈できる .

これは, 1987年に発表された復元法の考え方²⁰⁾と一致するものである .

一方 ℓ m弦正矢変換行列 \mathbf{T} の作用も, 表-3 式(33) より

$$\mathbf{T} = \lambda_{T1} \mathbf{S}_1 + \cdots + \lambda_{Ti} \mathbf{S}_i + \cdots + \lambda_{Tn} \mathbf{S}_n \quad (33)\text{再掲}$$

$$= h_{\Lambda 1} \mathbf{S}_1 + \cdots + h_{\Lambda i} \mathbf{S}_i + \cdots + h_{\Lambda n} \mathbf{S}_n \quad (39)$$

\mathbf{S}_i による任意ベクトルに含まれる Λ_i [m]の定常波成分の抽出と ℓ m弦正矢の検出倍率での増幅の和と解釈できる . 過去より図-6 および式(2)で述べられてきた単一正弦波中での正矢の検出倍率 $h_{\Lambda i}$ とは \mathbf{T} の持つ分解と増幅の二つの作用うちの固有値による増幅作用を表現したものであるといえる .

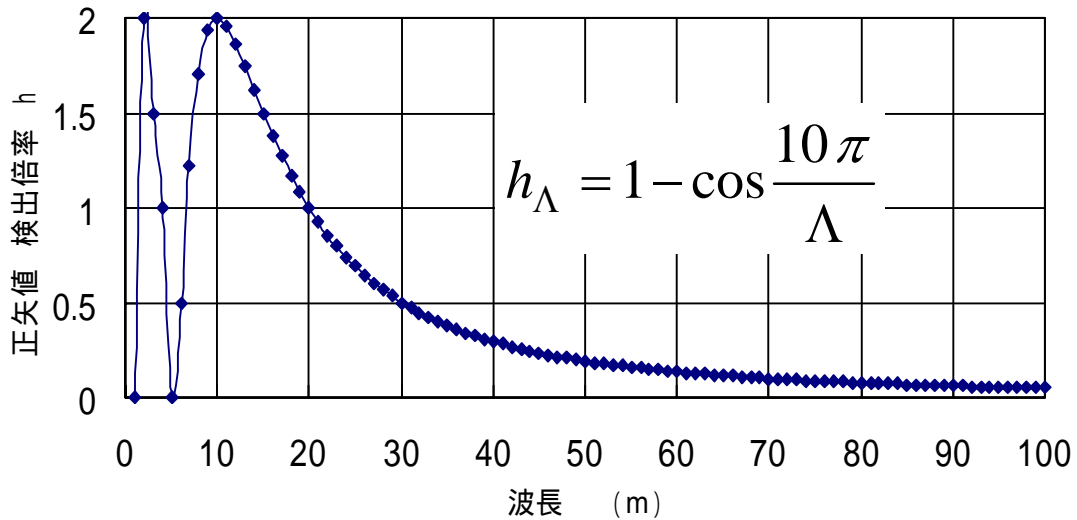


図-6(再掲) 10m弦正矢法 検出倍率(特性)図

ここで \mathbf{T}^{-1} 及び \mathbf{T} が共通して持つ \mathbf{S}_i による定常波分解作用とは以下のように説明することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} &= \mathbf{E} = \left(\frac{1}{h_{\Lambda 1}} \mathbf{S}_1 + \cdots + \frac{1}{h_{\Lambda n}} \mathbf{S}_n \right) (h_{\Lambda 1} \mathbf{S}_1 + \cdots + h_{\Lambda n} \mathbf{S}_n) \\ &= (\mathbf{S}_1^2 + \cdots + \mathbf{S}_n^2) = (\mathbf{S}_1 + \cdots + \mathbf{S}_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i \end{aligned} \quad (40)$$

$$\therefore \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j = \mathbf{u}_i^t \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j^t \mathbf{u}_j \quad \therefore i = j \Rightarrow \mathbf{S}_i \quad i \neq j \Rightarrow 0$$





$$\therefore \mathbf{a} = \mathbf{Ea} = \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i \mathbf{a} = (\mathbf{S}_1 \mathbf{a} + \cdots + \mathbf{S}_i \mathbf{a} + \cdots + \mathbf{S}_n \mathbf{a}) \quad (41)$$

\mathbf{S}_i の作用により任意の n 次元ベクトル \mathbf{a} は n 個の定常波に直交分解することができる。

これは離散フーリエ変換 (Disital-Fourier-Transfer 以下, 「DFT」) の持つ正弦波分解機能に相当する。

式(41)で示した行列スペクトル分解とDFT,両者の比較を表-4に示す。行列スペクトル分解は,全てが定常波に分解される (=実数のみで計算される) 直流成分が無いなどの様々な特徴を有する特殊なフーリエ変換である。

表-4 離散フーリエ変換 (DFT) と行列スペクトル分解の違い

n個の離散値 (間隔: p)	正弦波の分解	最長の波長	最短の波長	直流成分	位相差
離散フーリエ変換 (DFT)	n-1個のSin波	$\Lambda_1 = (n-1)p$ (m) 	$\Lambda_{n-1} = 2p$ (m) 	フーリエ級数展開の第1項	$= \tan^{-1}(B/A)$ 実部 A 虚部 B
行列スペクトル分解	n個のSin波 (定常波振動モード)	$\Lambda_1 = 2p(n+1)$ (m) 	$\Lambda_n = 2p(n+1)/n$ (m) 	0	0

鉄道の線路保守で古くから用いられてきた正矢法, および交差法には, あらゆる測定値を
 $2 \times (\text{測定延長 } p(n-1) \text{ [m]} + \text{自らの弦長 } 2p \text{ [m]})$
 $= 2p(n+1)$

を基本波長とする n 個の定常波に分解する特殊なフーリエ変換機能が内在していることが明らかになった. 復元法と交差法の本質的な違いは, この波長分解機能の違いにあるといえる.

(3) T^{-1} を用いた一次変換の工学的なメリット

T^{-1}, S_i を用いた一次変換の軌道工学的メリットおよび意味を考察する. なお, 逆行列の成分確定に至るまでにどれだけ計算機のメモリーを消費するかの指標である計算量は, 次元数 n が決まれば1回の計算で成分が確定することから, $O(n^3)$ から $O(n^2)$ 以上に大幅に向上する³⁶⁾.

a) 演算精度の向上

一般に, 逆行列の計算には多くの除算が必要となるため, 多元連立一次方程式を逆変換である式 (24) から直接解くことは丸め誤差の影響より推奨されない³⁷⁾.

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{m}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{S}_i (\mathbf{d} - \mathbf{m}) \quad (24) \text{ 再掲}$$

一方で T^{-1} の成分は以下の式(23)で

$1 \leq i \leq j \leq n$ の場合

$$T^{-1}(i, j) = \frac{2}{n+1} i(n-j+1)$$

$1 \leq j < i \leq n$ の場合

$$T^{-1}(i, j) = \frac{2}{n+1} j(n-i+1) \quad (23) \text{再掲}$$

ならびに T^{-1} をスペクトル分解した定常波抽出作用を持つ S_i の成分は式(31)で

$$S_{i,(j,k)} = \frac{2}{n+1} \left(\sin \frac{i\pi}{n+1} j \right) \left(\sin \frac{i\pi}{n+1} k \right) \quad (31)\text{再掲}$$

ここに $1 \leq i, j, k \leq n$

ともに n のみを変数とした少数の除算で計算できるため、計算機のメモリー消費量の節約だけでなく演算時の丸め誤差影響を最小限に抑えることによる精度向上が期待できる。

この効果を軌道で観測される正矢値を模した2種類の入力値 ($n=31$)を用いて検証する。

(図-40-1, 図-40-2)

いずれも既知の入力値を与え、 S_i を用いた行列スペクトル分解後に再度合成した値(グラフの凡例では「分解&再合成値」と表記する)との差を用いて演算精度の向上効果を数値化する。なおグラフは識別性を上げるため、入出力値の符号を反転表示としている。

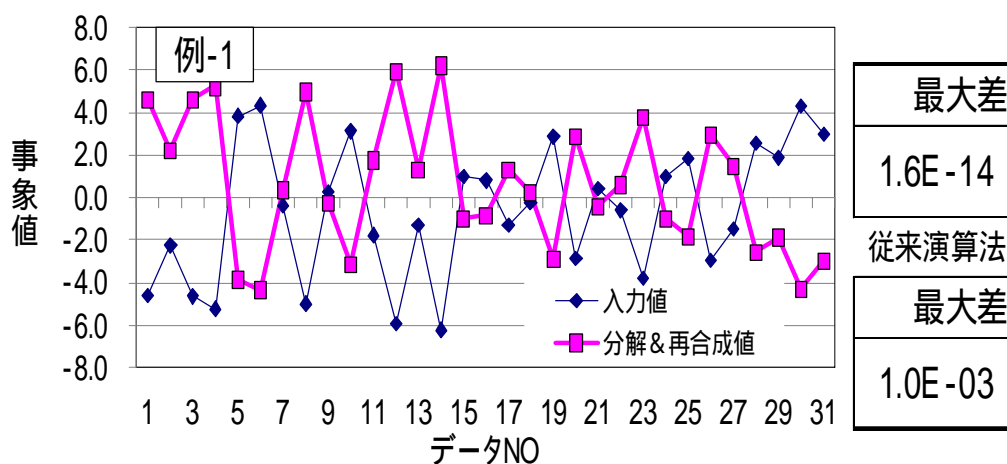


図-40-1 演算精度の向上効果(軌道狂い成分相当)

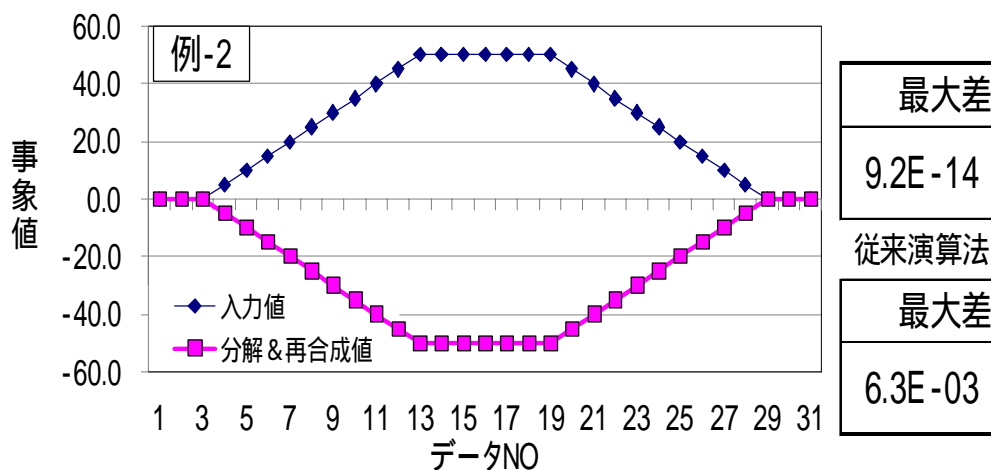


図-40-2 演算精度の向上効果(曲線基本成分相当)

例-1 : 平均 = 0 標準偏差 = 3.0 の軌道狂い成分相当
例-2 : R=250 [m]・TCL=50 [m] の曲線基本成分相当
 条件 : 式 (31) により求めた S_i を用いる場合
 通常の逆行列, 固有ベクトル算出法で求めた S_i を用いる場合
 (Gauss-Jordan 法 及び QR法を使用)

双方の演算とも実用上問題ない精度ではあるものの, その差は $10E^{-10}$ 以上に達し, 少ない除算で成分が確定することによる明らかな演算精度向上効果が認められる.

b) 軌道連続性の保証 (対象区間始端・終端において)

前出までの考察結果を整理すれば, 交差法とは, 交差法行列 T^{-1} の中に含まれる n 個の固有空間行列 S_i による入力正矢値 (または正矢差) の定常波分解作用と, 測定弦長より定まる各定常波波長に対応する復元倍率 ($= T^{-1}$ の固有値 λ_i) での増幅と再合成作用を併せ持った移動量計算法であると解釈できる. (図-41)

ゆえに出力される移動量も n 個の定常波の重ね合わせであり, 交差法演算においては測点数 n , 入力正矢 (差) 値に関わらず次の2点,

点0	: 測点 1 における弦の始端において	移動量=0
点 $n+1$: 測点 n における弦の終端において	移動量=0

となることを意味している

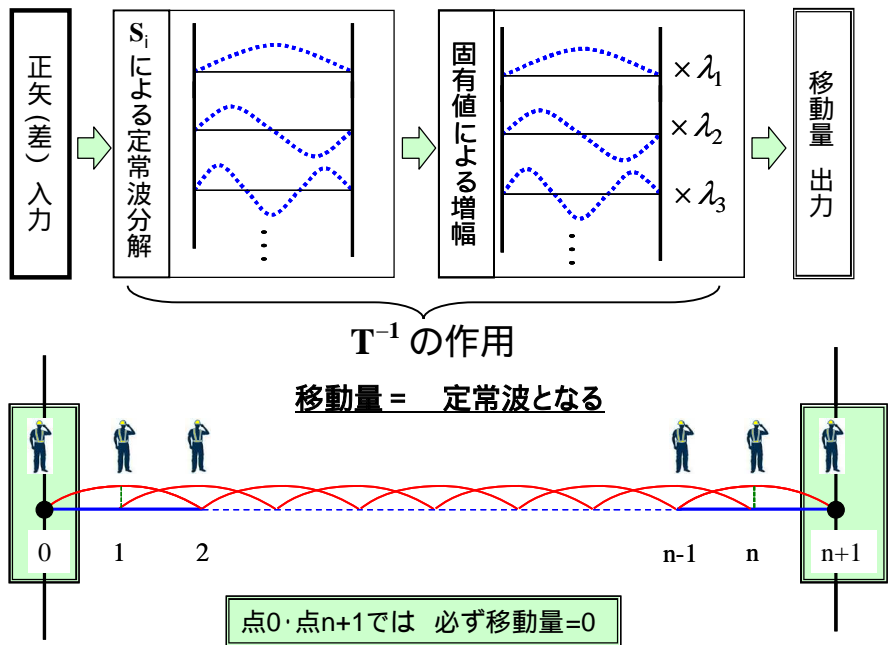


図-41 交差法行列 T^{-1} の作用とその意味

これはどのような区間でサンプリングをおこなっても交差法で計算された移動量は「前後の軌道との連続が必ず保障される」ことを意味し, 保線の実務において移動量を考える上では大変有用な特性である.

具体的な有用性の比較をDFTの一種，FFT(Fast-Fourier-Transfer)との，同一データを用いた波長分解の違いより考察する．

データは $n=32$ の $R=500(m)$ 曲線における10m弦通り狂いを模したものをを用いる．

両者の演算精度比較を既知の入力値と，分解+再合成後の数値との差を用いて検証し，図-42-1に示す．演算の精度において，両者に明確な差は認められない．

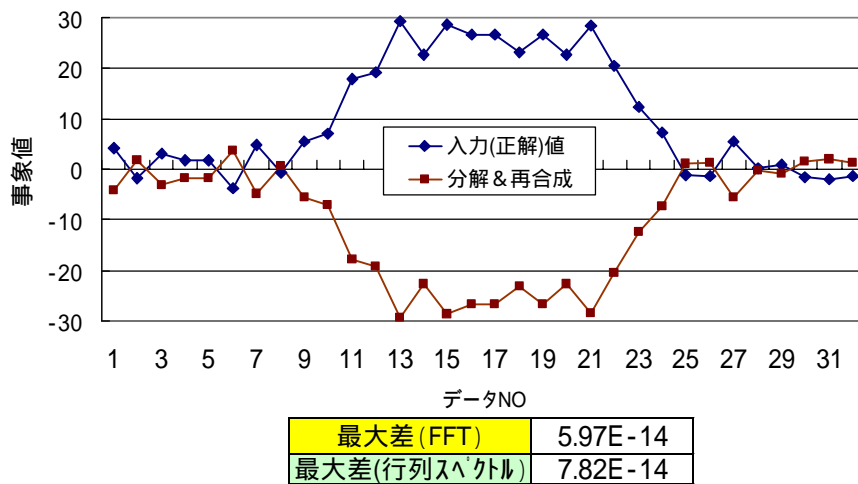


図-42-1 DFT (FFT) との演算精度比較

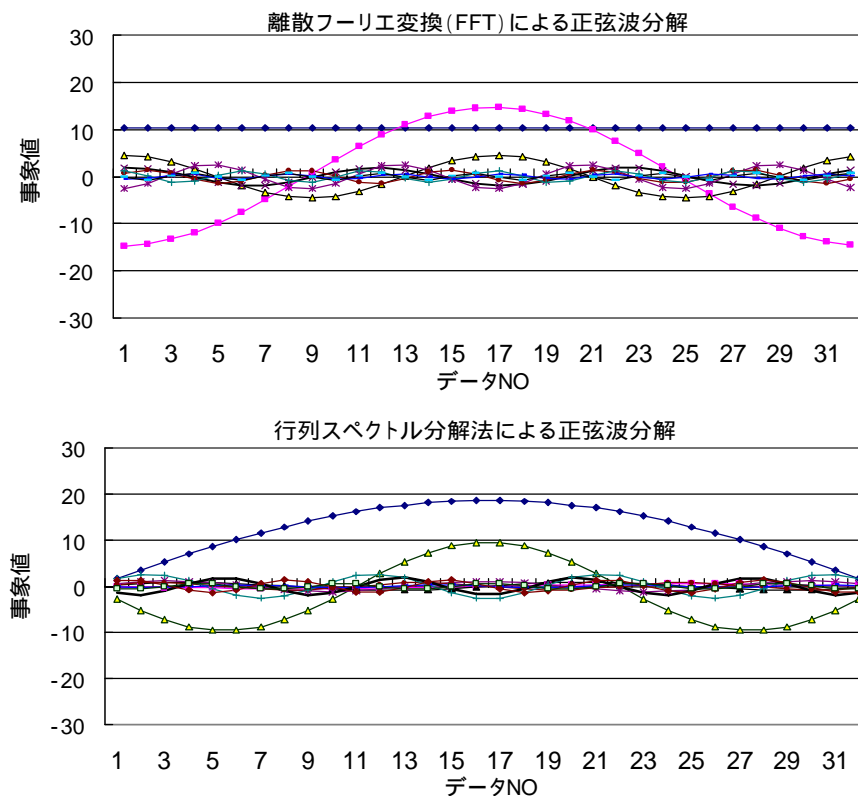


図-42-2 DFT (FFT) との分解基底および位相差発生の違い

次に、両者の分解に用いた正弦波の違いを検証したものを図-42-2に示す。双方の正弦波分解基底は全く異なる。加えてFFTでは分解した各正弦波間に位相差が発生するため

測点1における弦の始端 点0において 移動量=0
 測点nにおける弦の終端 点n+1において 移動量=0

が必ずしも保障されるとは限らない。

実場面では、この違いがサンプリング延長の差となって顕在化する。すなわちFFTを使用した場合、評価対象となる区間の外方に、軌道の連続を確保するための相応延長の追加サンプリングと、図-27に示したような平滑化のためのフィルター演算処理が必要となる。

行列スペクトル分解では、全てが定常波であるため、位相差を解消するための追加サンプリングは不要であり、効率性を向上させることが出来る。尚、両者の周期性の違い、及び関連性についての考察を、付録10に記述している。

この「評価対象区間内だけで演算処理が完結する」交差法の特徴から、以下に示す様々なメリットを享受することが可能となる。

c) 軌道接続方向の確保と曲線線形の分離

2章(2)節 図-34で定義した対象区間両端部での一次差分を用いた部分直交座標の前提、

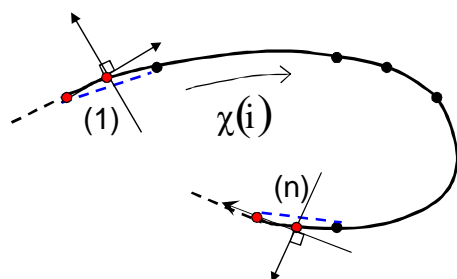


図-34(再掲)

すなわち測点1及び測点nでの移動量が生じないこと

$$g_1 = g_n = 0$$

を成立させることで、前後の軌道との連続だけでなく、方向を変えずに連続を保つ移動量決定が可能になる。

その為の必要条件は以下の2式

$$\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n d_i \quad (10) \text{再掲}$$

$$\sum_{i=1}^n (n+1-i)m_i = \sum_{i=1}^n (n+1-i)d_i \quad (11) \text{再掲}$$

を同時成立させる d_i を設定することであることは古くから伝承されてきたが、この理論的な解説については必ずしも十分とは言えない状況であった。

交差法行列 T^{-1} の1行目と n 行目の係数に着目すれば，同行列の対称性，および行列成分が自然数にできることより，先の2つの必要条件を簡潔明瞭に理論的に証明することができる．
 (図-43) 証明の詳細は付録6 Definition 5~に記述する．

$$\begin{array}{c}
 \text{移動量} \\
 \left(\begin{array}{c} 0 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ 0 \end{array} \right)
 \end{array}
 = \frac{n+1}{2}
 \begin{array}{c}
 \text{交差法行列} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 n & (n-1) \cdots 2 & & 1 \\
 \vdots & & & \\
 \vdots & & \ddots & \vdots \\
 \vdots & & & \\
 1 & 2 & (n-1) & n
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{正矢差} \\
 \left\{ \begin{array}{c} (d_1 - m_1) \\ (d_2 - m_2) \\ \vdots \\ (d_{n-1} - m_{n-1}) \\ (d_n - m_n) \end{array} \right\}
 \end{array}$$

図-43 交差法行列の対称性を用いた必要条件の証明

次に同条件を満たす d_i の具体的設計法であるが，検討範囲が整備区間に限定されるメリットを活かし，必要最小限の計算で設計をおこなうことが可能である．

この利点を活かした設計法として，片持ち梁の力学的釣り合いモデルを用いて式(10)(11)を同時成立させる線形分離法がある．

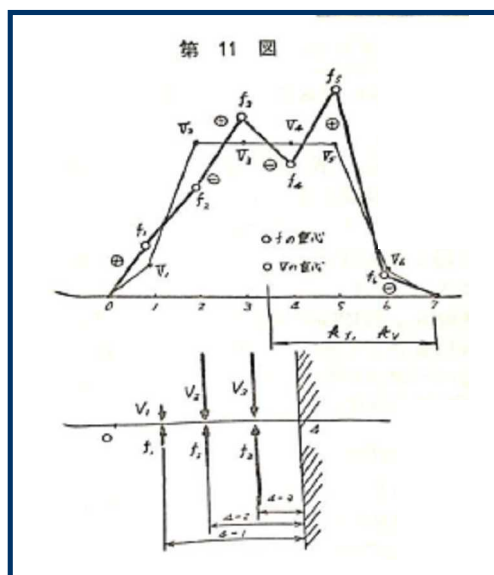


図-44 片持ち梁モデル(図解表現) (文献 - 16より)

これは文献¹⁶⁾において1950年代に既に略図によりアイデアが述べられているものであるが (図-44) 実際の計算にはコンピュータの使用が不可欠であり，高性能汎用PCが使用可能になった1990年にJR西日本で実用化された計算法である³⁸⁾．計算の詳細等は付録11に記載する．

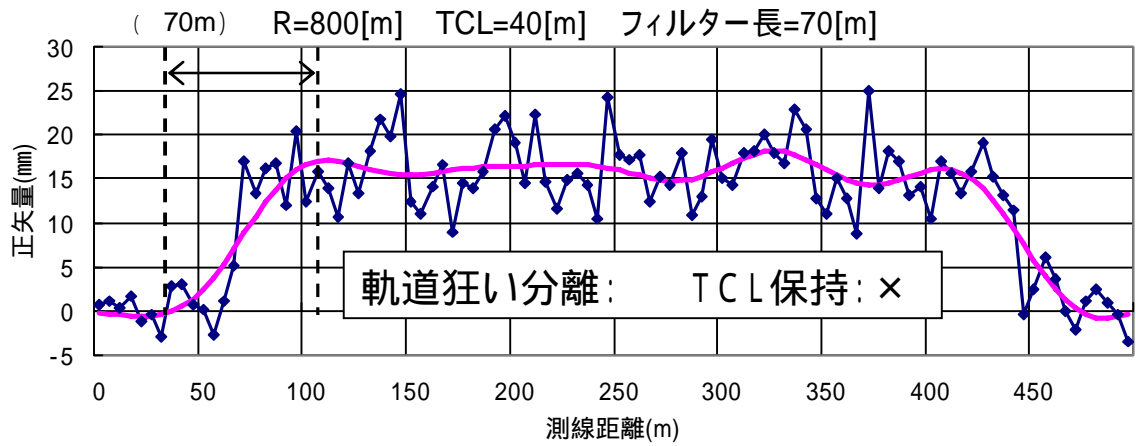


図-45-1 曲線における線形分離 (TCL < フィルタ長)

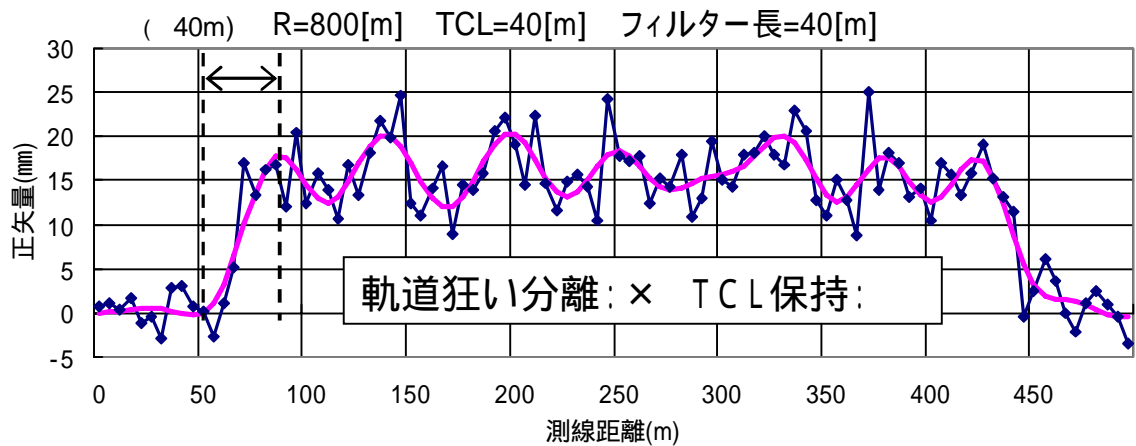


図-45-2 曲線における線形分離 (TCL = フィルタ長)

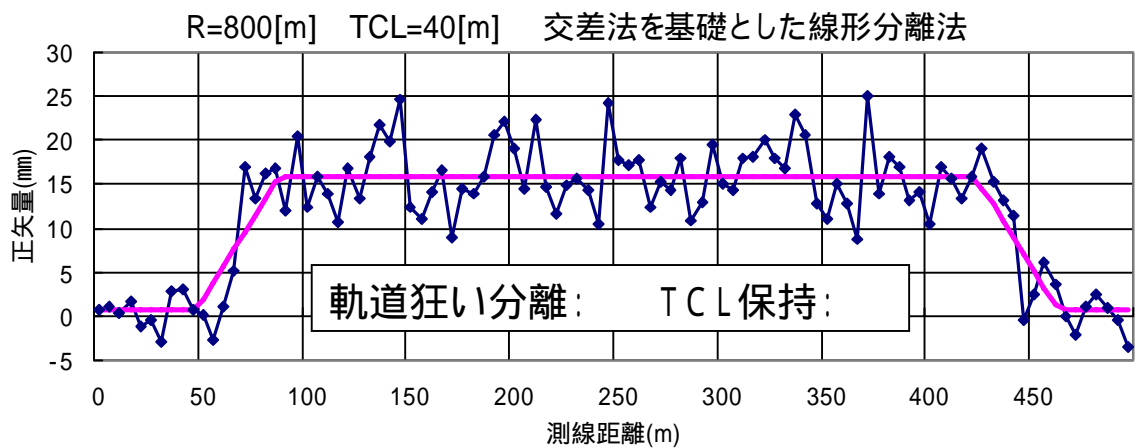


図-45-3 曲線における線形分離 (古典交差法伝承式による)

この設計法のメリットは曲線部，特に緩和曲線部において設計正矢の変化とカントの変化を一致させることができる点にある。

一般的なバンドパスフィルター等を用いた線形分離法は，帯域が緩和曲線長よりも長い場合，図-45-1に示すように，緩和曲線の設計正矢を延伸するような形状へと変化させてしまう。

逆に緩和曲線長に配慮し帯域を短くした場合，図-45-2に示すように既存の軌道狂いに基準線がつられ曲線部の軌道狂いの分離が不完全となる。フィルターを用いた鉄道曲線における線形分離ではしばしばこのようなトレードオフの関係に陥りやすい。

これに対し，古典交差法の伝承式を基礎とした線形分離法を用いることで，緩和曲線長ならびに存在する軌道狂いの影響を受けず，かつ前後の軌道と方向を変えないスムーズな接続を確保した上での曲線基本線形の分離をおこなうことができる。（図-45-3）

この効果は特に緩和曲線部における保守投入後の左右方向の乗り心地の差として現れる。カントは，特に緩和曲線部においては付録2に示した技術的根拠により厳密に管理されているため，設計正矢を安易にフィルター等で求めた場合，カントと正矢，相互の変化にズレを生じ，同区間を1波とする水準狂いを発生させていることと等価となる。

水準狂いの発生は，特に軌間の狭小な在来線においては車両左右振動への影響が顕著となる。（図-46）

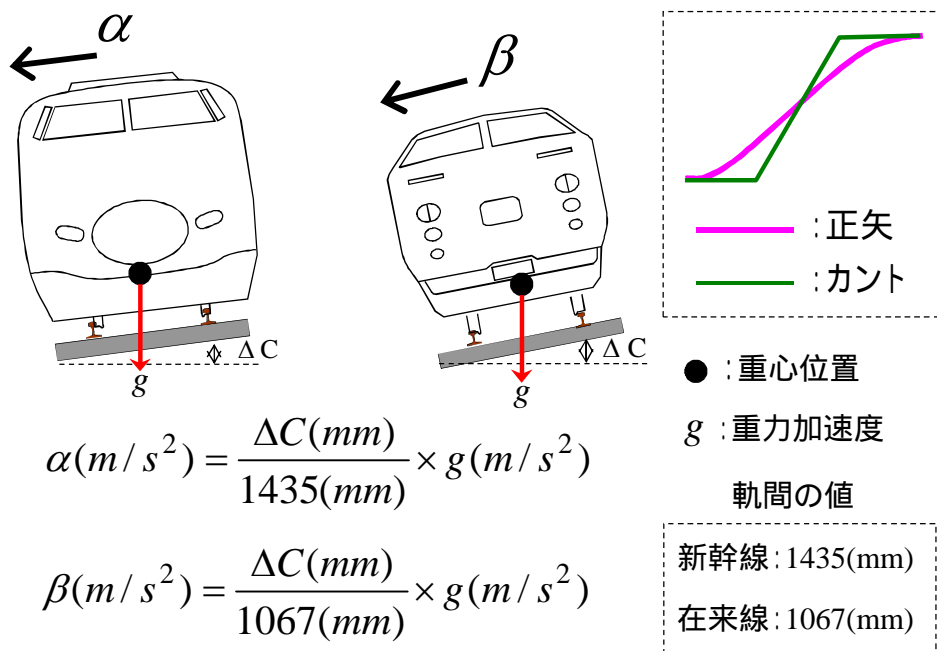


図-46 軌間の違いによる同一水準狂いの影響の差

正矢とカントの変化を一致させることは 超過遠心力をはじめ様々な力が乗客に作用する曲線での乗り心地管理上，重要な技術的要件である。

d) T^{-1} を用いた演算 その他のメリット

d)-1 移動制限への柔軟な対応

保線作業においては、設計正矢 d から理想的に計算された移動量計画 g をそのまま使用できるケースは殆どなく、現場の各種の移動制約条件などから、移動の絶対値、移動方向など何らかの制限が加えられる。(図-47)

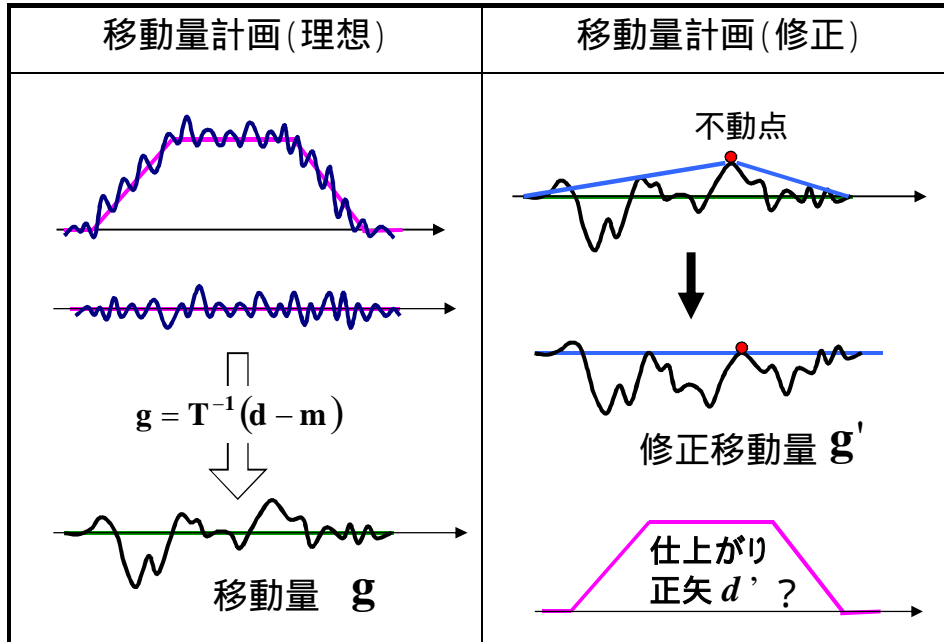


図-47 移動量計画の修正

この制限を加えた修正移動量 g' で施工した場合、どのような正矢の仕上がりになるのか(以下、「仕上がり正矢」記号 d' を使用)を知り、その状況によっては制約条件を緩和するための措置(例:架線の位置を調整する・踏切を撤去、復旧する 等)を講じる必要がある。このような場合にも T^{-1} 及び T を用いた演算は大変便利である。

移動量計画(理想) g に与えられた制約条件を最適化した修正移動量 g' が得られた時、仕上がり正矢 d' (未知)は ただちに

$$\text{(所与)} \quad g' = T^{-1}(d' - m) \quad \text{より}$$

$$Tg' = TT^{-1}(d' - m) \quad Tg' = d' - m$$

$$d' = m + Tg' \quad (42)$$

として計算され、 d' の 大きさ・形状により、架線の位置を調整するなどの、保線作業の品質向上を目的とした各種追加対策の要否を検討することができる。

尚、移動量計画(理想) g から修正移動量 g' に変換する際に用いる、測点1, n が移動量=0 となる T^{-1} の特性を利用した最適化演算の考え方を付録 1 2 に示す。

d)-2 高低整備への応用

前記の計算，および考え方は高低狂いの整備に応用することで一層メリットを発揮できる．高低狂いを対象とした保線作業をおこなう場合，特殊な場合を除いては，レールを所望の高さまで持ち上げ，（以下，「こう上作業」と表記）まくら木の下に生じた空隙にバラスト（砂利）を詰めて（以下，「つき固め」と表記）列車の走行面を平滑に整えていく．

図-13で示した拝見者の写真は，こう上を行う場所と量を目視で指示している様子である．MTTのレベリング作業も同様であり，レールとまくら木を持ち上げ，つき固めることで初めて軌道狂いが整正される．

ゆえに，事前に作業区間全体の軌道実形状に対する情報を持たないMTT相対基準レベリング作業では，確実にこう上量をMTTに感知させるために，区間全域にわたりMTT弦の先端部を10m弦高低軌道狂いの標準偏差の2倍～3倍程度 現行より高い位置にセットした状態で連続的に作業がおこなわれる．

その結果，MTT弦長で感知できる 30[m] 程度までの軌道狂いの修正だけでなく，作業区間全体が上方向へシフトされるという課題が生じる．

MTT弦先端(D点)を15(mm) 連続でこう上する場合の影響

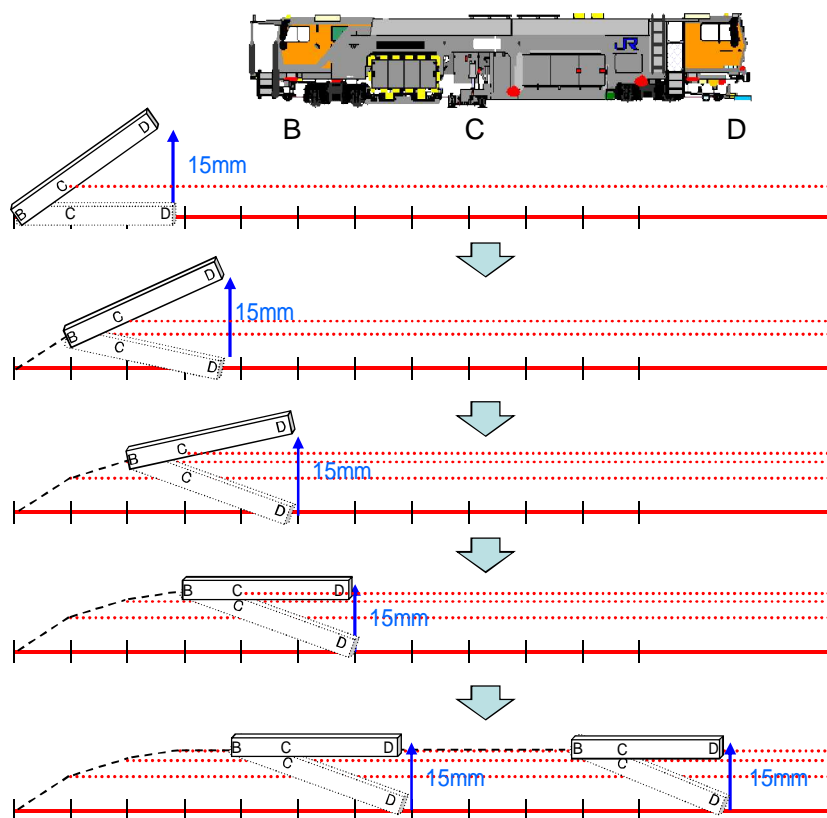


図-48 MTT相対基準レベリングによる影響

そこで交差法行列 T^{-1} を用いて作業区間内の高低方向実形状を効率的に把握し、これに移動制限(-)=0 (mm)と各地点の許容こう上量(mm)を与えた最適化演算を併用することにより、MTT相対基準レベリング作業で発生する不必要なこう上量を抑制することが出来る。具体的には式(42)を用いた逆算により

$$\mathbf{d}' = \mathbf{m} + \mathbf{T}\mathbf{g}' \quad (42)\text{再掲}$$

- ・ 区間内の高い箇所を現状以上に“こう上”させない \mathbf{g}'
- ・ 平均ラインより低い所のみを“こう上”させる \mathbf{g}'

などを採用した場合、どのような高低仕上がり正矢 \mathbf{d}' になるかを把握し、こう上計画案の良否を検討できる。具体的な検討事例を付録 1 3 に記載する。

d)-3 自由な弦長変換

任意の10m弦正矢値が与えられた時、これを他の弦長の正矢、もしくは矢への換算が必要となる場面は多い。このような場合においても、 T^{-1} を用いた演算は有用である。

d)-3- 長波長弦正矢への変換（倍長弦公式の導出）

1つ目は20mあるいは40m弦など長波長弦正矢への変換であり幾何学的に公式が存在することは前出のとおり。

これを交差法行列 T^{-1} を用いて別の角度より導出する。変換元の10m弦の任意の n 次元ベクトルを \mathbf{m}_{10} とし、実形状 \mathbf{y} は移動量の逆符号であることに注意すれば

$$\mathbf{y} = -\mathbf{g} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}_{10} \quad (43)$$

20m弦変換行列 T_{20} は、実形状 \mathbf{y} が5 [m] の成分間隔で与えられることから以下のように定義される。

$$\mathbf{T}_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

20m弦正矢法で実形状 \mathbf{y} を測定した時の測定正矢を \mathbf{m}_{20} とし、式(43)と併せて考えれば

$$\mathbf{m}_{20} = \mathbf{T}_{20}\mathbf{y} = \mathbf{T}_{20}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}_{10} \quad (45)$$

ここで

$$\mathbf{C}_{20} = \mathbf{T}_{20} \mathbf{T}^{-1} \quad \text{と定義し, これを計算すれば}$$

$$\mathbf{C}_{20} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \quad (46)$$

第2行目～第 n -1行目に、幾何学的に導いた倍長弦公式で用いる係数と一致する成分が出現し、 \mathbf{T}^{-1} を用いた計算からも倍長弦公式を導出することができる。

d)-3- 長弦矢への変換

交差法行列 \mathbf{T}^{-1} の次元数 n が奇数の場合、中央行には $(n+1)/2$ 倍長弦の正矢を表す倍長弦公式の成分が現れる。

図-36(再掲)に示した $n=7$ の \mathbf{T}^{-1} では4行目に4倍長弦公式に用いられる係数が、同様に $n=5$ における \mathbf{T}^{-1} では3行目に3倍長弦公式に用いられる係数が出現する。

	1	2	3	4	5
1	1.667	1.333	1	0.667	0.333
2	1.333	2.667	2	1.333	0.667
3	1	2	3	2	1
4	0.667	1.333	2	2.667	1.333
5	0.333	0.667	1	1.333	1.667

	1	2	3	4	5	6	7
1	1.75	1.5	1.25	1	0.75	0.5	0.25
2	1.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5
3	1.25	2.5	3.75	3	2.25	1.5	0.75
4	1	2	3	4	3	2	1
5	0.75	1.5	2.25	3	3.75	2.5	1.25
6	0.5	1	1.5	2	2.5	3	1.5
7	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75

図-36 交差法行列 \mathbf{T}^{-1} (再掲)

中央に、その弦長での正矢量が出現すること、及び交差法行列 T^{-1} により演算される移動量が点0、点 $n+1$ を両端とする定常波の重ねあわせとして得られる特性に着目して考えれば、交差法をあらわす式(24)において設計正矢 $d=0$ として計算される移動量 g とは

$$g = T^{-1}(d - m) = T^{-1}(0 - m) = -T^{-1}m \quad (24)\text{変形}$$

点0から点 $n+1$ に張った長弦から各測点までの矢(偏心矢)の値に相当し、この長弦を基準とした各測点の移動量を得ることができる。

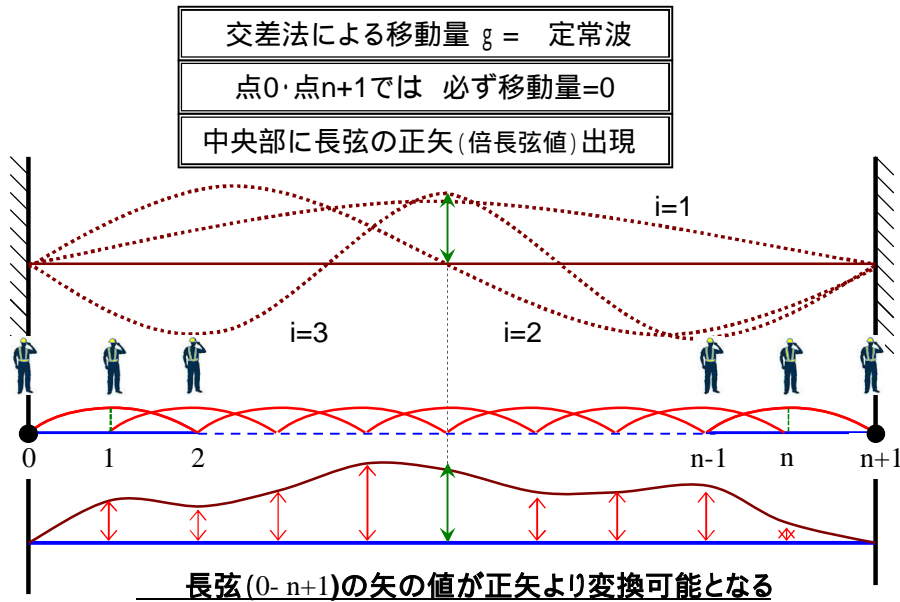


図-39・41(再掲)より

これは分岐器直線側の方位測定作業や、同曲線リードレールの各曲げ点における軌道狂いを測定正矢 m_i から換算できることを意味し、大変有用である。また文献26)で用いられている移動量計算原理も、この交差法演算の特性を用いたものと考察される。

但し、 $d=0$ と測定正矢 m とは無関係にこれを決定することになるので先出の2式の同時成立

$$\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n d_i \quad (10)\text{再掲}$$

$$\sum_{i=1}^n (n+1-i)m_i = \sum_{i=1}^n (n+1-i)d_i \quad (11)\text{再掲}$$

その帰結としての

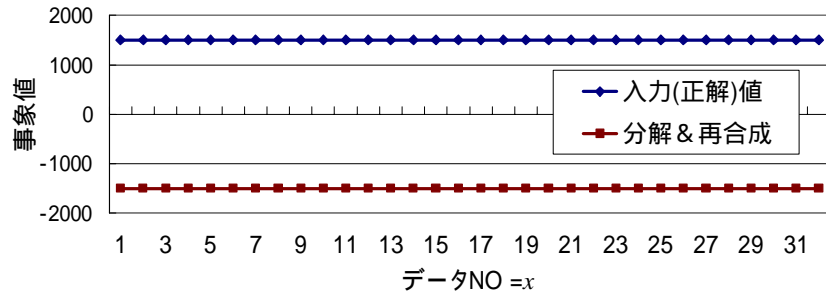
$$g_1 = g_n = 0$$

は必ずしも成立しなくなる。演算結果を移動量として使用する際には、前後軌道との接続方向については注意が必要である。

d) -3- MTTに用いるY修正への変換

直流入力値に対しても定常波分解を行える交差法行列 T^{-1} の特性(図-49)を利用することで、曲線全域の曲がり具合を含んだ実形状 y が測定正矢 m_{10} を用いて、次式で得られることになる。

$$y = T^{-1}m_{10} \quad (43)再掲$$



最大差	7.96E-12
離散フーリエ変換	分解不能

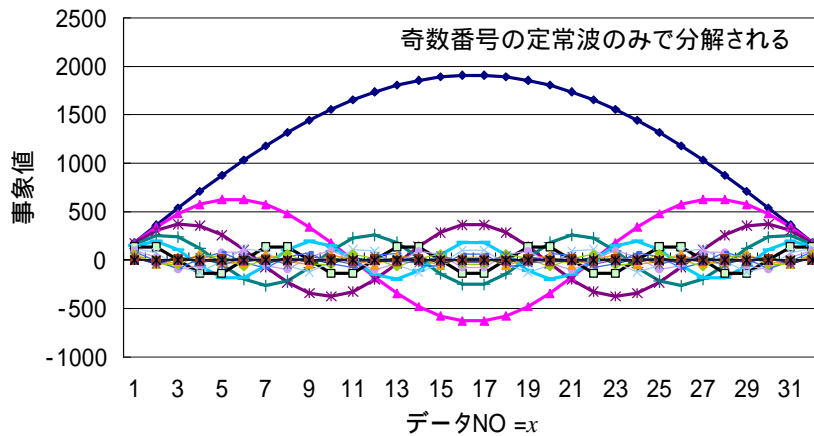
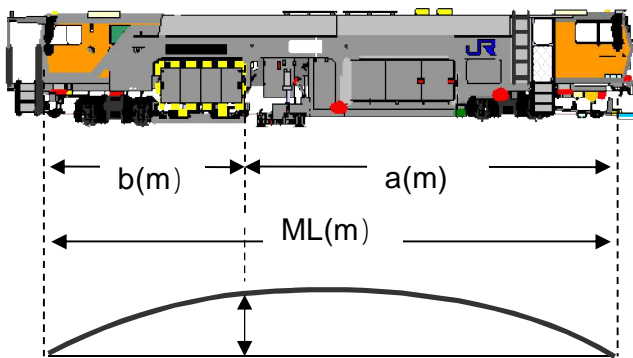


図-49 直流成分の定常波分解

これにMTTの弦配置から作成されるMTT矢変換行列 T_{mtt} (図-50)を用いれば、



$P(m)$: データサンプリング間隔

MTT矢変換行列 T_{mtt}

$$a=8.75(m)$$

$$b=3.75(m)$$

$$P=1.25(m)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3.75}{12.5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3.75}{12.5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3.75}{12.5} \\ \frac{-8.75}{12.5} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-8.75}{12.5} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-8.75}{12.5} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-8.75}{12.5} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-8.75}{12.5} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-8.75}{12.5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-8.75}{12.5} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

図-50 MTT矢変換行列の一例 \mathbf{T}_{mtt}

任意の10m弦正矢で与えられる線形へのMTTのY修正ベクトル \mathbf{h}_y が式(47)により計算できる。

$$\mathbf{h}_y = \mathbf{T}_{mtt} \mathbf{y}_{adj} \quad (47)$$

$$\text{ここに} \quad \mathbf{y}_{adj} = \mathbf{F}_{spl} \mathbf{y} = \mathbf{F}_{spl} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{m}_{10} \quad (48)$$

\mathbf{F}_{spl} : 三次スプライン関数行列

尚、式(43)より得られる5 [m] 間隔の実形状 \mathbf{y} は レールやまくら木といった軌道構造の剛性を考慮し、三次スプライン関数行列³⁹⁾ \mathbf{F}_{spl} を用いて5 [m] 間を補間した実形状 \mathbf{y}_{adj} に変換を行い \mathbf{T}_{mtt} の成分間隔と一致させて用いている。

この変換は移動制限や不動点などで、計画正矢が一定範囲内での変動を許容するような場合のMTTライニング作業の精度向上に大変有効である⁴⁰⁾。図-51に10m弦正矢から変換したY修正値の例を示す。

不動箇所の10m弦設計正矢に応じた、MTT 弦でのY修正値が得られることから、従来のマニュアル操作（勘）に頼っていた不動点近傍でのライニング作業の自動化・標準化が可能となり、仕上がり品質の向上が期待できる。

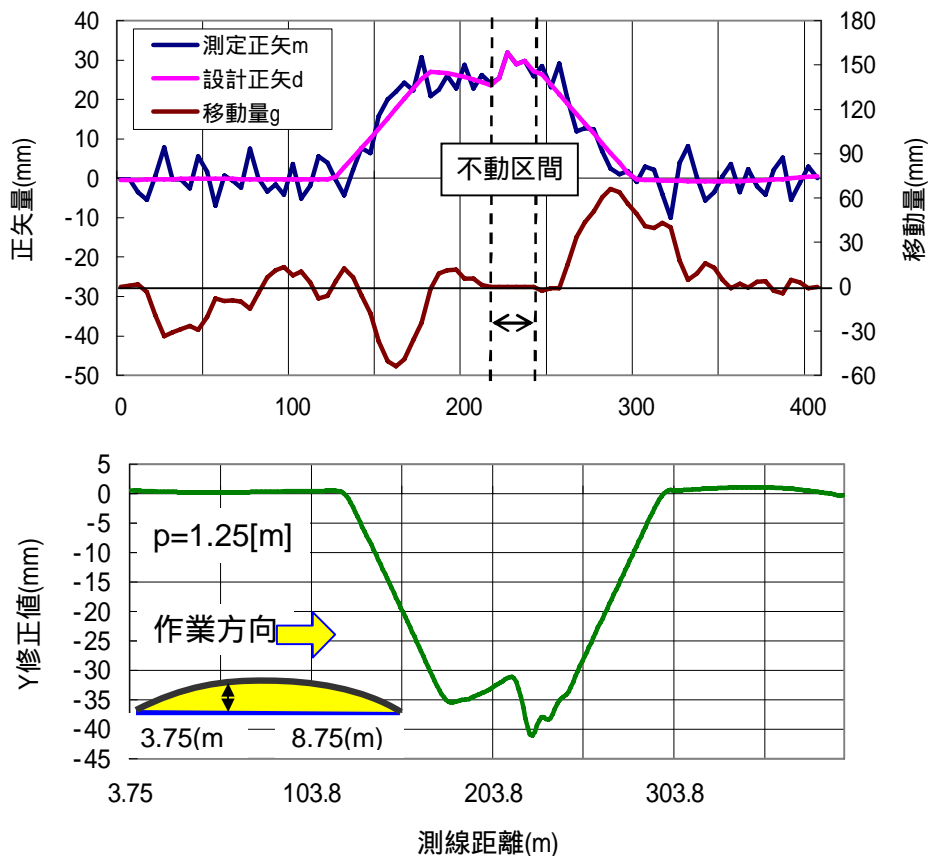


図-51 10m弦設計正矢図からMTT-Y修正値への変換

(4) 交差法の理論化と工学的メリット まとめ

以上のように交差法は、同法をベクトルの一次変換、式 (24)で再定義することにより

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{m}) \quad \text{式(24)再掲}$$

- ・対象区間以外のデータが不要（最小サンプリング）
- ・軌道の連続性が保障される

の2つの利点を持つ簡易かつ高精度の定常波分解機能が内在していることが理論的に明らかになった。

これを活用することで

- ・最少サンプリングでの 曲線基本線形の分離
- ・ " 修繕対象波長の選択
- ・任意の弦長，弦配置での測定値への変換

など様々な応用を、個人差なく行うことができる、多くの工学的メリットを持つ移動量演算手法であるといえる。

4. 測定誤差の挙動に対する考察

前章までの考察は、交差法の演算としての基本機能の検証であり、測定正矢ベクトル \mathbf{m} に誤差が含まれない場合の議論である。

実際の \mathbf{m} には、必ず測定誤差が含まれる。この測定誤差の影響が、交差法の理論上最大の課題であることは前出のとおりである。

本章では、この誤差が白色ノイズであると仮定して、前章までの解析結果を用いて誤差の挙動を明らかにするとともに、その対処法についての考察を行う。

過去からの実務結果と理論評価の技術的矛盾を解決する。

1) 交差法演算による誤差の重畳

測定ベクトル \mathbf{m} の中に含まれる真値のベクトルを \mathbf{m}_r 、測定誤差成分のベクトルを \mathbf{m}_e とし

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_r + \mathbf{m}_e \quad \text{と定義すれば}$$

交差法行列 \mathbf{T}^{-1} による誤差の挙動は式(24)の変形から以下のように表わせる。

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_r + \mathbf{m}_e \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = \mathbf{g}_r + \mathbf{g}_e &= \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{m}) = \mathbf{T}^{-1}\{\mathbf{d} - (\mathbf{m}_r + \mathbf{m}_e)\} \\ &= \mathbf{T}^{-1}\{(\mathbf{d} - \mathbf{m}_r) - \mathbf{m}_e\} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\text{ここで} \begin{cases} \mathbf{g}_r = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{m}_r) & \text{移動量 } \mathbf{g} \text{ の真値成分} \\ \mathbf{g}_e = -\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{m}_e) & \text{移動量 } \mathbf{g} \text{ の誤差成分} \end{cases}$$

但し、測定正矢の真値 \mathbf{m}_r は知り得ることが出来ないため、誤差の挙動解析は

\mathbf{m}_e : 平均=0(mm) 標準偏差 (mm)のガウス分布に従う
白色ノイズベクトル

と仮定した上で、次式(50)を用いておこなっていく。

$$\mathbf{g}_e = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}_e \quad (50)$$

以下、 \mathbf{g}_e を「誤差波」と表記する。

a) 条件数 からみた誤差挙動

交差法行列 T^{-1} は対称行列であるので、測定誤差の影響は、最大固有値 λ_1 と最小固有値 λ_n の比である、条件数 によって評価することができる⁴¹⁾。

$$\text{条件数 } \kappa = \lambda_1 / \lambda_n \quad (51)$$

T^{-1} の固有値 λ_i は波長 $A_i = 2p(n+1)/i$ 定常波の復元倍率を意味することより (次元数 n 測定間隔 p [m]) 条件数を計算する固有値は以下に相当する。

λ_1 : 第1定常波 $A_1 = 2p(n+1)/1$ の復元倍率 λ_n : 第 n 定常波 $A_n = 2p(n+1)/n$ の復元倍率
--

次元数 n の増大とともに波長 A_n は $2p$ [m] (復元倍率 $=\lambda_n=1/2$) に収束することから、条件数 は急増すると想定される。これを実際に計算すれば図-52 に示す指数関数的な増加となる。

このような条件数の急増を示す行列は、悪条件とよばれる測定誤差の影響が非常に大きく生ずる行列であり、 T^{-1} はその典型であるといえる⁴²⁾。

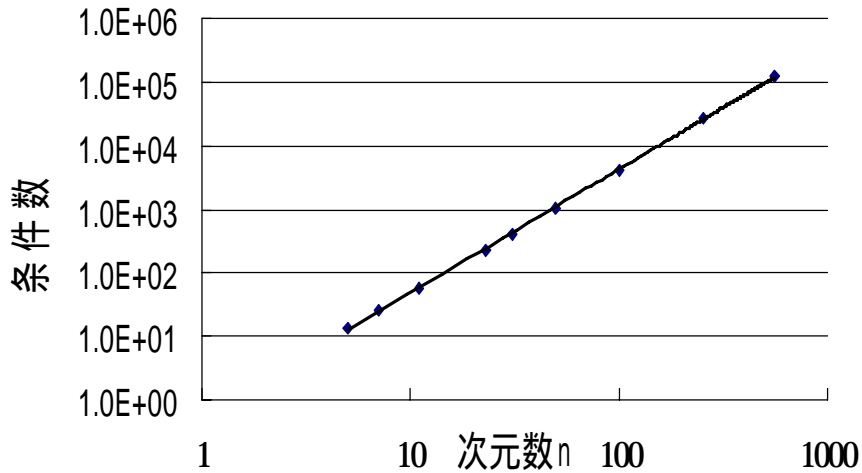


図-52 T^{-1} の次元数と条件数 の変化

b) 誤差波 g_e 最大値の統計的推定

次に g_e の統計的な最大値推定を行う。これは式 (50)

$$\mathbf{g}_e = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}_e \quad (50)\text{再掲}$$

を用いた \mathbf{m}_e から g_e への一次変換 繰り返し数値実験を次の条件で行ったものである。

< 数値実験の条件 >

- ・ 入力ベクトル m_e :
 平均= 0 (mm) =0.3 (mm) の白色ノイズベクトル
 (現行軌道検測車の検測精度より準用⁴³⁾)
- ・ 次元数 n : 10 ~ 255 まで
 (45[m] ~ 1270 [m] : 通常の曲線整備延長より)
- ・ 試行回数 15000 (回 / 各次元)
- ・ 目的とする実験データ
 g_e (最大値ノルム) を 15000 回 出現させ , 次元別に平均と標準偏差を求め .

実験より得られた g_e 最大値ノルムの平均と標準偏差より推定される誤差波 g_e 最大値と , その出現確率 (以下 , 「危険率%」 と記す) を図-53に示す .

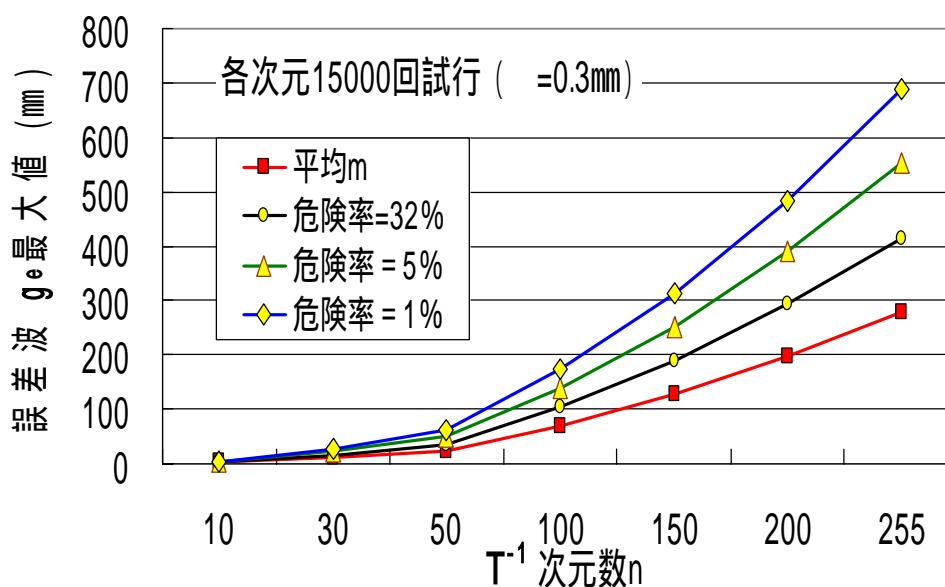


図-53 誤差波 g_e 最大値の統計的予測

m_e が 検測誤差 = 0.3(mm) 程度と仮定しても , $n = 255$ では交差法行列 T^{-1} による変換後には , 約 700 (mm) の最大値を持つ誤差波 g_e が1%の危険率で発生する .

これは本来ならば 0 (mm) となって欲しいものである .

数値実験で再現された本事象が , 過去より言われてきた交差法演算による測定誤差の重畳問題である .

(2) 特異値分解を利用した誤差波 g_e の制御

本研究では、この誤差重畳を行列の特異値分解手法（以下、「SVD」:Singular Value Decomposition）を利用し交差法行列 T^{-1} の特性を解析することで、誤差波の影響に一定の規則性があることを理論的に述べ、合理的な制御が行えることを明らかにする。

なお交差法行列 T^{-1} は実対称行列であるので、特異値並びに特異ベクトルは固有値、固有ベクトルと一致し、そのまま計算に用いることができる⁴⁴⁾。

a) T^{-1} の定常波形成特性

前章までの考察結果によれば交差法行列 T^{-1} は任意の入力ベクトルを定常波に分解する機能を有する。ゆえに白色ノイズベクトル m_e に対して計算される誤差波 g_e も同様に

$$g_e = -T^{-1}m_e = -\sum_{i=1}^n \lambda_i S_i m_e \quad (52)$$

であり、 n 個の定常波の重ね合わせとして出力されることになる。（図-54）

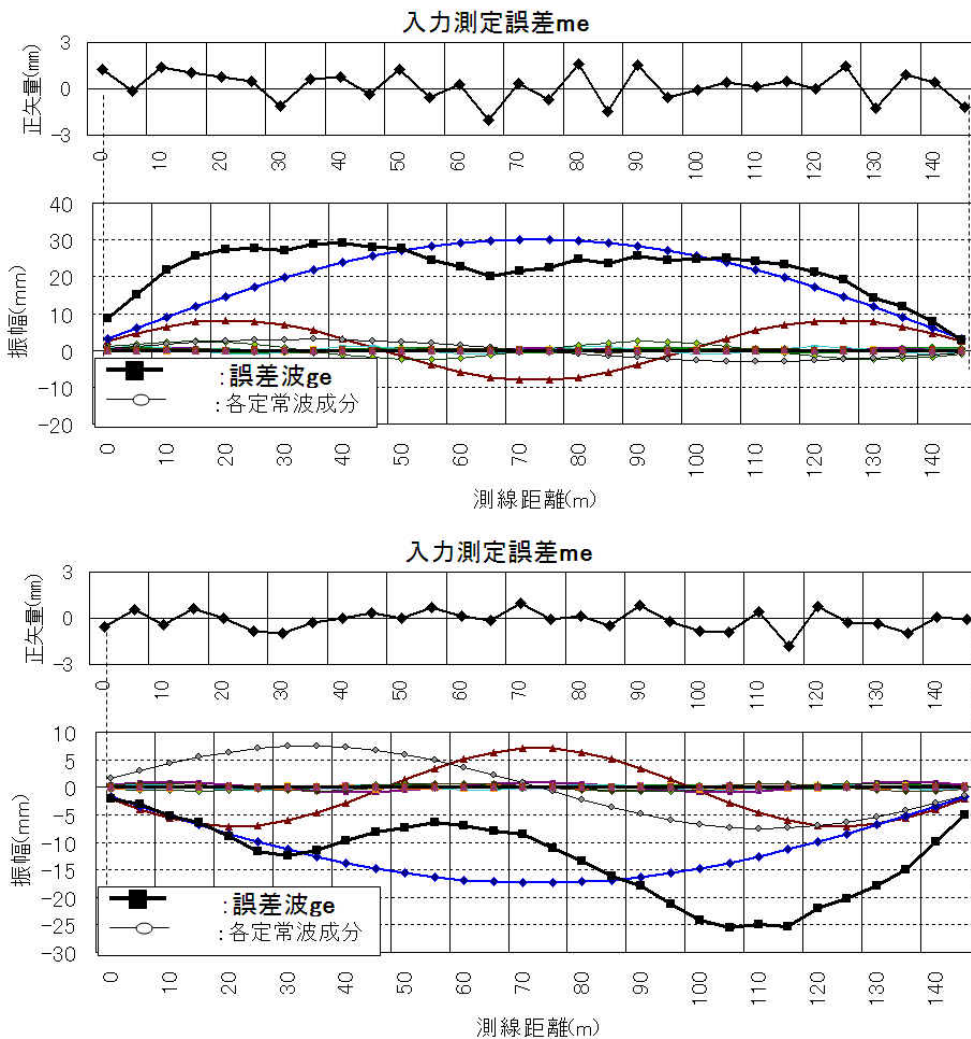


図-54 定常波形成特性（対 白色ノイズベクトル）

b) SVD近似法による誤差波 \mathbf{g}_e の相対誤差

また前項の各定常波の振幅は固有値 λ_i の大きさに依存した波長毎の偏りを持って出現する。その偏り度合いは交差法行列 \mathbf{T}^{-1} の固有値を用いた SVD近似法⁴⁵⁾ により以下のように数値化することができる。

すなわち全ての定常波成分を含む

$$\mathbf{T}^{-1} = \lambda_1 \mathbf{S}_1 + \lambda_2 \mathbf{S}_2 + \dots \\ + \lambda_r \mathbf{S}_r + \lambda_{r+1} \mathbf{S}_{r+1} + \dots + \lambda_n \mathbf{S}_n$$

を用いて計算した誤差波ベクトル

$$-\mathbf{g}_e = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{m}_e = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{S}_i \mathbf{m}_e \quad \text{の最大値ノルム } \mathbf{g}_e \quad \text{と}$$

第1 定常波から第 r 定常波までを除去した場合の

(これを、ランク r までの除去という)

$$\mathbf{T}_r^{-1} = \lambda_{r+1} \mathbf{S}_{r+1} + \dots + \lambda_n \mathbf{S}_n$$

を用いて計算した誤差波ベクトル

$$-\mathbf{g}_{er} = \mathbf{T}_r^{-1} \mathbf{m}_e = \sum_{i=r+1}^n \lambda_i \mathbf{S}_i \mathbf{m}_e$$

の最大値ノルム \mathbf{g}_{er} との比は固有値を用いて

$$\|\mathbf{g}_{er}\| / \|\mathbf{g}_e\| = \sqrt{\sum_{i=r+1}^n \lambda_i^2 / \sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \quad (53)$$

として計算される。これは相対誤差と呼ばれる指標であり、導出の詳細は文献⁴⁴⁾⁴⁵⁾⁴⁶⁾などに記載が詳しい。

ノルムはベクトルの大きさを示す指標であるので、相対誤差とは

(第1～第 r 定常波成分を除去した) **誤差波の最大値**

(全定常波成分で計算した) **誤差波の最大値**

を表わし、ランク除去を行った場合、元の誤差波の影響がどれだけ残っているかを示す指標として用いることができる。以下、相対誤差を「残留率」として表記する。

式 (53) を用いて $n=555$ から $n=11$ までの6種類の次元について第1定常波～第5定常波までを除外した各残留率を計算し，図-55 に示す。

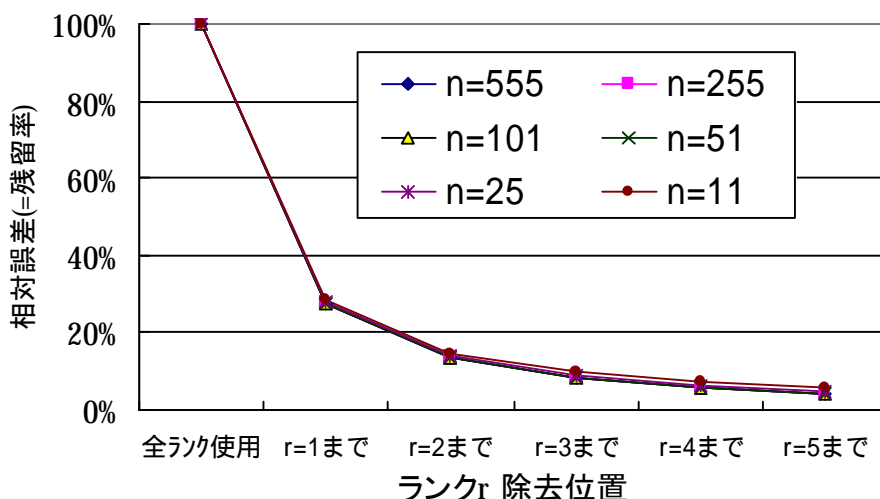


図-55 ランク除去による誤差影響の残留率(%)

結果，残留率は次元数 (= 測点数) n とは無関係に除去する定常波ランク数で，ほぼ同一値となる。(n で同一値に収束することが数学的に証明される)

また，各定常波と第1定常波の振幅比率 ($i / 1$) もほぼ同一値となり，具体的には表-5 第5列に示した値となる。誤差波は各定常波番号の自乗逆数 $(1/F)^2$ (ここに F : 周波数) で合成されたブラウンノイズの振幅特性を持って現われる。以上の証明を付録 1 4 に記載する。

このように観測点数，量に関わらず，複数の定常波が第1定常波と一定の比率をもって現われる事象は他の分野においてもしばしば観測される。

表-5 ランク除去による残留率(%)と第1定常波に対する各定常波の振幅比率(%)

除去する定常波	除去するランク数	(誤差影響) 残留率(%)	(誤差影響) 除去率(%)	各定常波振幅比率(%) $i / 1$
第1定常波まで	r=1ランクまで	27.8%	72.2%	100.0% $(1/1)^2$
第2定常波まで	r=2ランクまで	13.8%	86.2%	25.0% $(1/2)^2$
第3定常波まで	r=3ランクまで	8.6%	91.4%	11.1% $(1/3)^2$
第4定常波まで	r=4ランクまで	6.1%	93.9%	6.3% $(1/4)^2$
第5定常波まで	r=5ランクまで	4.6%	95.4%	4.0% $(1/5)^2$

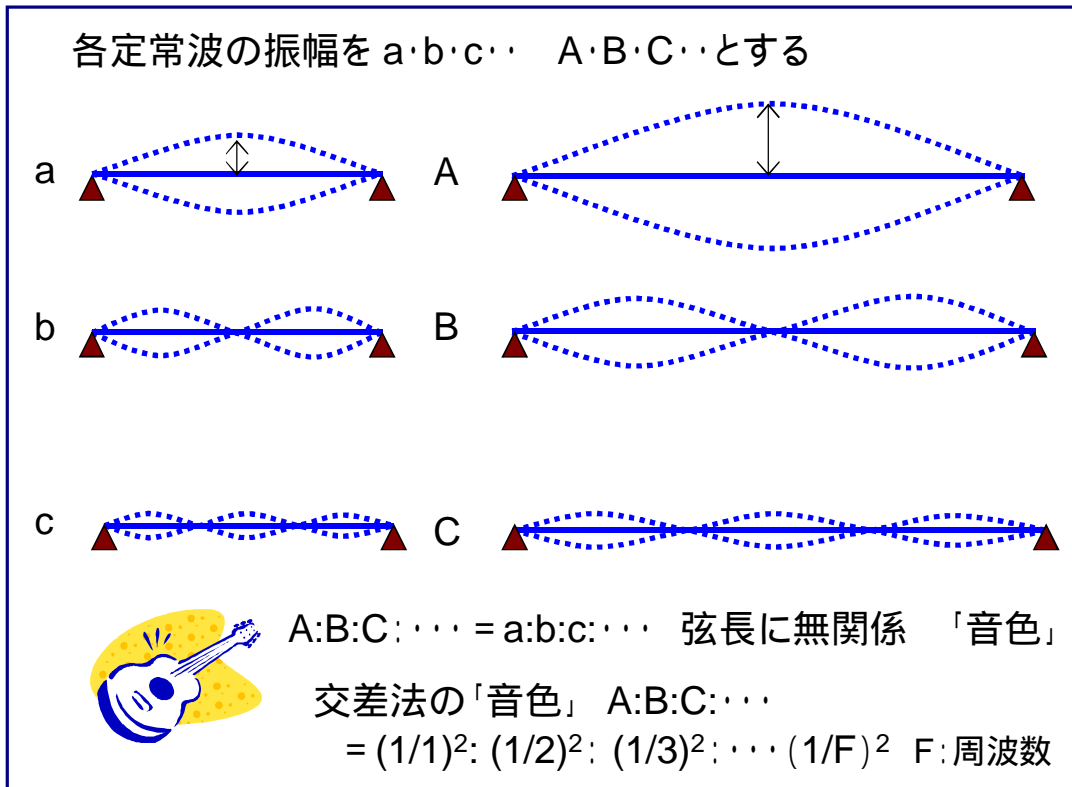


図-56 弦楽器における倍音の関係

音楽分野，弦楽器における「倍音」の関係は特に有名である．図-56のように演奏する弦の長さ（ギターであればフレッド間の距離）が異なっても，同じ楽器であれば，第1定常波に対する各定常波の振幅比率は同一であり，同比率は楽器ごとに決まる固有の値（「音色」と表現されているもの）であるとされている⁴⁷⁾．

電気工学における「高調波問題」量子力学における「エネルギー準位」なども同種の現象を含んでいることが知られている³³⁾⁴⁸⁾．

交差法行列 T^{-1} は僅かな誤差を重畳させる，悪条件の典型的な行列ではあるものの，重畳は発散として生じるのではなく，常に長波長側5つの定常波(ランク5まで)に発生影響の約95%，特に第1定常波（基本振動）には72%が集中する，弦振動の物理法則に従った強い偏りを持って発生する性質があることが明らかになった．

c) 過去の技術文献に残る誤差回避法の合理性

1950年代後半に交差法の計算方法を記した多くの専門図書が発刊されていたことは前述のとおりである．その複数の図書に残されている以下のような誤差回避に関する方法論の記述内容「移動量がプラス側，マイナス側いずれかに偏る場合は，修正計算を行うこと」¹³⁾¹⁴⁾¹⁵⁾¹⁷⁾「曲線修正における理想的な移動量はプラス・マイナスが均等であること」¹⁶⁾¹⁷⁾¹⁸⁾などは，その合理性が本研究の理論解析により裏付けることができる．（付録15）

これらに共通する「一方向に偏った移動量に注意せよ」とは，誤差影響全体の72%が集中する第1定常波による挙動のことを示唆しているものと考察できる．

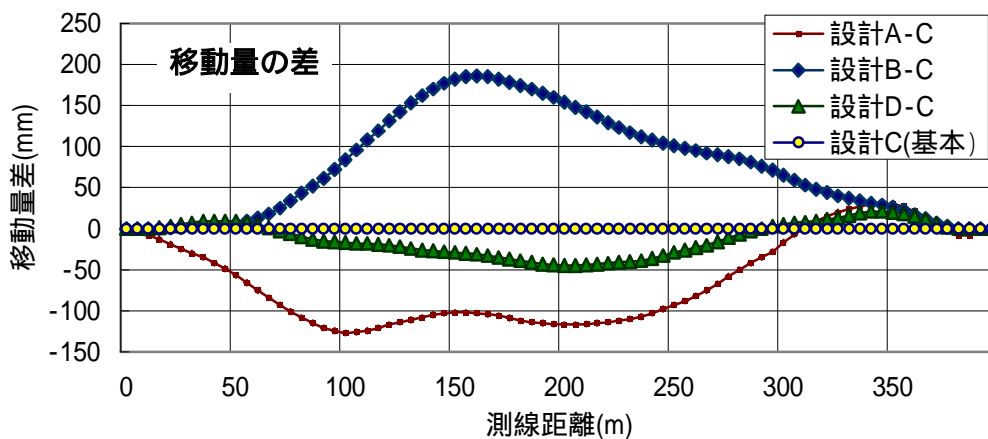
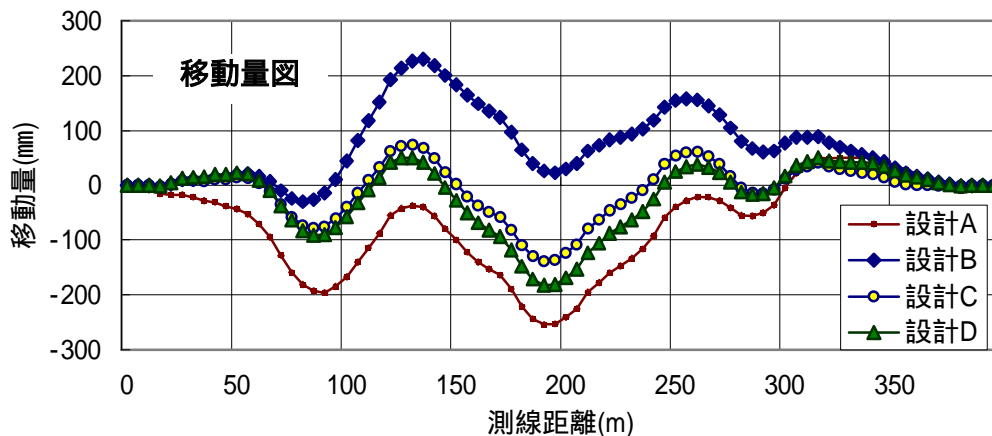


図-57 交差法(平均法)で発生する個人差の理論的検討

第2定常波以降の成分は曲線整正対象区間内では±の成分を持つため、区間全体がどちらかに偏ることはない。

平均法の説明で用いた移動量の個人差グラフを、最も移動量が少ない計画案Cを基準にして各計画案との差を図-57にグラフ化すれば、生じている個人差とは誤差の集中する第1定常波成分発生時の差であるといえる。

過去の保線技術者は、交差法の誤差発生特性を直感的に見抜いており、技術指導に用いていたと洞察される。

d) 長波長側5定常波成分除去の軌道管理上の意味

前項の誤差影響低減のために行う長波長側5定常波の除去の軌道管理上の意味について考察する。

各定常波の波長は式(35)により与えられるため

$$A_i = 2p(n+1)/i \quad [\text{m}] \quad (35)\text{再掲}$$

長波長側5定常波成分を取り除くとは、上式(35)において*i* = 5とする成分までを除去すること

表-6 除去ランクと次元別 演算可能波長

除去ランク r	残留 %	$n=255$	$n=100$	$n=50$	$n=30$
$r=1$ まで除去	27.8%	1280(m)以下	505(m)以下	255(m)以下	155(m)以下
$r=2$ まで除去	13.8%	853(m)以下	337(m)以下	170(m)以下	103(m)以下
$r=3$ まで除去	8.6%	640(m)以下	253(m)以下	128(m)以下	78(m)以下
$r=4$ まで除去	6.1%	512(m)以下	202(m)以下	102(m)以下	62(m)以下
$r=5$ まで除去	4.6%	427(m)以下	168(m)以下	85(m)以下	52(m)以下

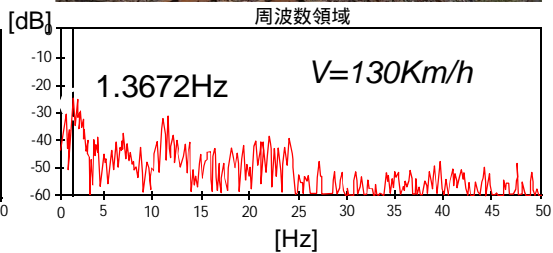
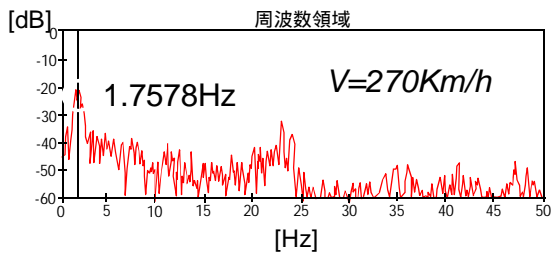
にあたる。但し、波長は次元数 n によって変化するので、これを計算した結果を表-6 に示す。
 一例として $n=100$ $p=5$ [m] 除去ランク= 5 とした場合

$$A_6 = 2 \times 5 \times 101 / 6 = 168.3 \text{ [m]}$$

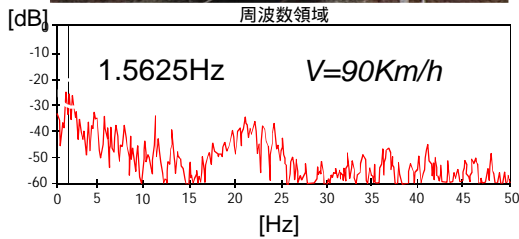
(ランク5までの除去なので最長波長は $i=6$ のもの)

を超える波長成分については、真値・誤差ともに除去することを意味する。

ところで、現在の鉄道車両の固有振動数は一般的に 1 ~ 2 [Hz] 付近にあることが理論的なモデル解析⁴⁹⁾、および各種観測値(図-58)などから知られている。例えば走行速度が300 (km/h) の場合、列車に共振を生じさせる軌道狂いの波長 A [m]は図-58中に記述された式により



車種や走行速度に関わらず
1 (Hz) ~ 2 (Hz) 付近に存在



300(km/h) 走行の場合

$$\lambda = 300/3.6/2 \sim 300/3.6$$

$$41.7 \sim 83.3 \text{ [m]}$$

図-58 JR西日本走行車両の左右動スペクトル観測値

と計算され、軌道管理の対象とする波長の上限（以下、これを「 λ_{dm} 」と表記する）を

$$\lambda_{dm} = 100 \text{ [m]} \quad \text{とすれば十分にカバーできる波長範囲となる。}$$

このように、長波長側5 定常波成分を除去する行為には測定誤差の影響低減だけでなく、列車の振動への影響が少ない波長成分をカットするという点において、軌道管理上の意味を持つ。

また、これらの波長成分を除去しても、それぞれが定常波であることより、計算される移動量の前後軌道との連続性は、引き続き保障されるという工学上のメリットを享受することができる。

e) λ_{dm} 別 g_e 絶対値の考察

前項までの議論では、発生する誤差影響のうち何%が除去できるかという相対的な検討をおこなってきた。

実際の場合では「計算された最大移動量 x (mm)のうち、何(mm)程度、誤差波の影響が残るのか」という絶対値を知ることが必要であり、以降、この絶対誤差についての考察を行う。

前項までの相対誤差の考察によれば、測定延長を延ばす（=測点数 n を大きくする）ことで、 λ_{dm} に該当する除去ランク r は大きくなり、誤差影響の残留率（%）を低減することができる。各パラメータの関係は式 (35)の変形から次の不等式で与えられる。

$$\lambda_{dm} \leq 2p(n+1)/r \quad \therefore r \leq 2p(n+1)/\lambda_{dm} \quad (54)$$

一例として $A_{dm}=100$ [m] を管理目標波長とし，測定延長を $n=255$ ($p=5$ [m] 延長 =1270 [m]) と伸ばした場合，除去するランク r は

$$r \leq 2 \times 5 \times 256 / 100 \quad r \leq 25.6$$

$r = 25$ まで と計算され

式 (53) より残留率 (%) は

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=26}^{255} \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^{255} \lambda_i^2}} \quad 4.41 \times 10^{-3} \quad 0.44\%$$

となり，十分に小さくできる．

一方で， T^{-1} によって計算される g_e の最大値は (1)節 b)項での15000回の数値実験のとおり，次元数 n の増加に伴い，図-59のように急増する． ($\sigma=0.3$ mm 危険率=1%)

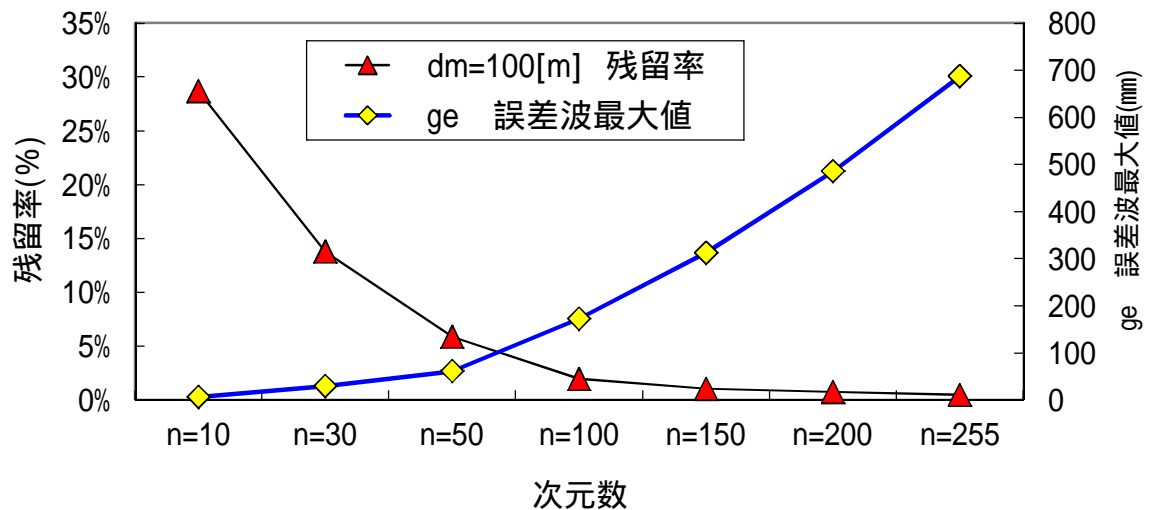


図-59 g_e 最大値(mm) の増加と残留率(%) の減少 ($A_{dm}=100$ [m])

このため，測点延長 (= 次元数 n) を延ばし， A_{dm} に該当する r を大きくとり残留率 (= 相対誤差) を減少させても 式 (53) より計算される

$$\|g_{er}\| = \sqrt{\frac{\sum_{i=r+1}^n \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}} \times \|g_e\| \quad \text{式(53)変形}$$

ここに $r = 2p(n+1)/A_{dm}$

g_{er} は，ほぼ一定値となる．以下この g_{er} を，「 A_{dm} における誤差波 g_e 絶対値」と表現する．

表-7 Λ_{dm} における誤差波 g_e 絶対値 (次元別 $\sigma=0.3\text{mm}$ 危険率1%)

n=255 (L=1270m)		n=100 (L=495m)		n=50 (L=245m)		n=30 (L=145m)	
d_m [m] と g_e 絶対値(mm) (= g_{er})				最上段は推定 g_e 最大値(mm) (= g_e)			
2560.0	686.67	1010.0	172.04	510.0	60.89	310.0	28.77
121.9	4.17	144.3	5.78	170.0	8.29	155.0	7.97
116.4	3.89	126.3	4.69	127.5	5.12	103.3	3.95
111.3	3.64	112.2	3.90	102.0	3.56	77.5	2.46
106.7	3.41	101.0	3.32	85.0	2.67	62.0	1.73
102.4	3.21	91.8	2.87	72.9	2.11	51.7	1.31
98.5	3.03	84.2	2.52	63.8	1.72	44.3	1.05

検測精度 $\sigma=0.3(\text{mm})$ 危険率1%とした, Λ_{dm} における誤差波 g_e 絶対値の計算結果を表-7に示す. $\Lambda_{dm}=100$ [m]とした場合, 検測精度が同一ならば, 測点数 n に関わらず 3 (mm) 程度の誤差波 g_e 絶対値の出現を1%の危険率で見込まなければならないことが読み取れる.

なお, 表中の最上段記載値は測点数 n 毎の g_e 最大値を示す.

表-8 Λ_{dm} 別における g_e 絶対値 (検測精度別 危険率1%)

dm (m)	誤差波 g_e 絶対値(mm) S/N分離の境界値 (危険率1%)		
	検測精度 $\sigma=0.1(\text{mm})$	検測精度 $\sigma=0.3(\text{mm})$	検測精度 $\sigma=0.8(\text{mm})$
500	14.71	51.47	84.56
450	12.28	42.59	72.6
400	10.07	34.57	61.14
350	8.06	27.39	50.26
300	6.26	21.02	40
250	4.65	15.44	30.5
200	3.25	10.65	21.86
150	2.07	6.68	14.28
125	1.56	5	10.93
100	1.12	3.54	7.92
75	0.73	2.29	5.28
50	0.41	1.28	3.04
40	0.3	0.93	2.26
35	0.25	0.78	1.89
30	0.21	0.63	1.55

次に検測精度 σ を変化させ, g_e 最大値を先と同様に15000回の数値実験から求め, Λ_{dm} から定まる残留率と掛け合わせる式(53)により表-8を得る.

交差法の演算による誤差影響は、用いたデータの検測精度と管理対象とする波長の上限 A_{dm} によって統計的に推定することが可能となる。

またこの数値は、交差法による移動量計算を行った場合の出力結果におけるS/N分離境界を示す値として用いる事も出来る。

(3) 誤差波 g_e 挙動 考察結果の実務への応用

前節までの考察より、交差法使用時に発生する誤差波 g_e の挙動は以下のとおりである

- ・測定誤差の影響は測点数 n に関わらず、常に長波長側の5つの定常波に全体の95%が、特に第1定常波に72%が集中発生する
- ・出現する誤差波 g_e の絶対値(mm)は、軌道管理上 要求される長波長側管理波長 A_{dm} [m] と測定系の検測精度 (mm)により統計的に推定することができる。
- ・誤差波 g_e も定常波の重ね合わせとして出現するため、不要な波長の除去を行っても、出力される移動量の前後軌道との連続性は保障される。

a) 交差法移動量の使用可否判定

この結果を用いれば、交差法で計算された移動量が誤差の影響なく使用できるか否かは、出力された移動量の大きさ（現状軌道狂いの悪さ度合い）と表-8に示したS/N分離の境界となる誤差波 g_e 絶対値を用いて判定することができる。具体的な検討事例を図-60-1、図-60-2を用いて示す。

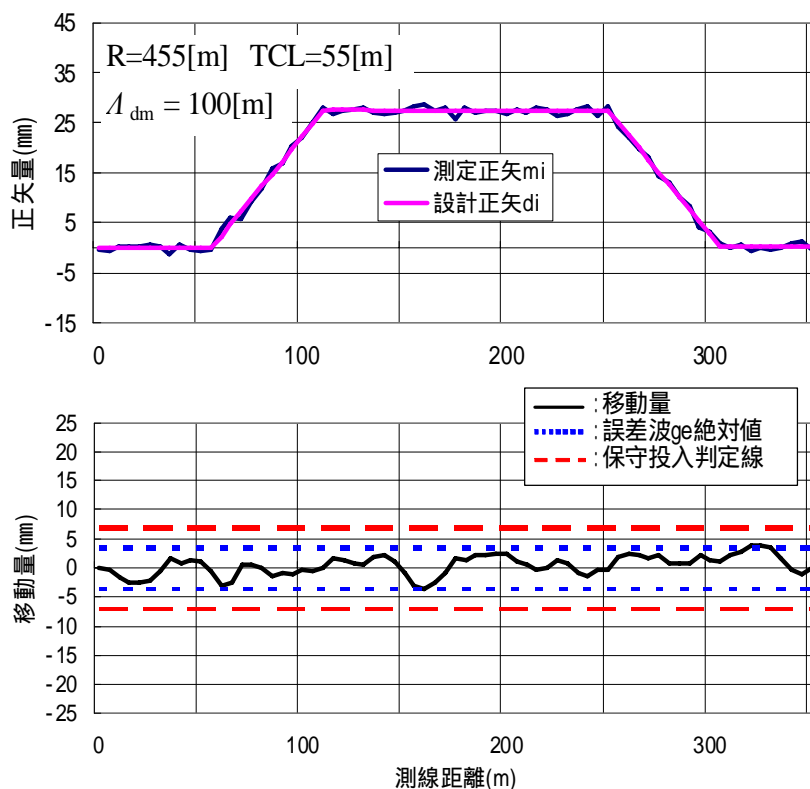


図-60-1 交差法演算値の使用判定（要検討の例）

図-60-1の場合，出力された移動量は $A_{dm} = 100[m]$ における g_e 絶対値以下となり，誤差と事象との区分は困難であり施工計画としては“要検討”となる．

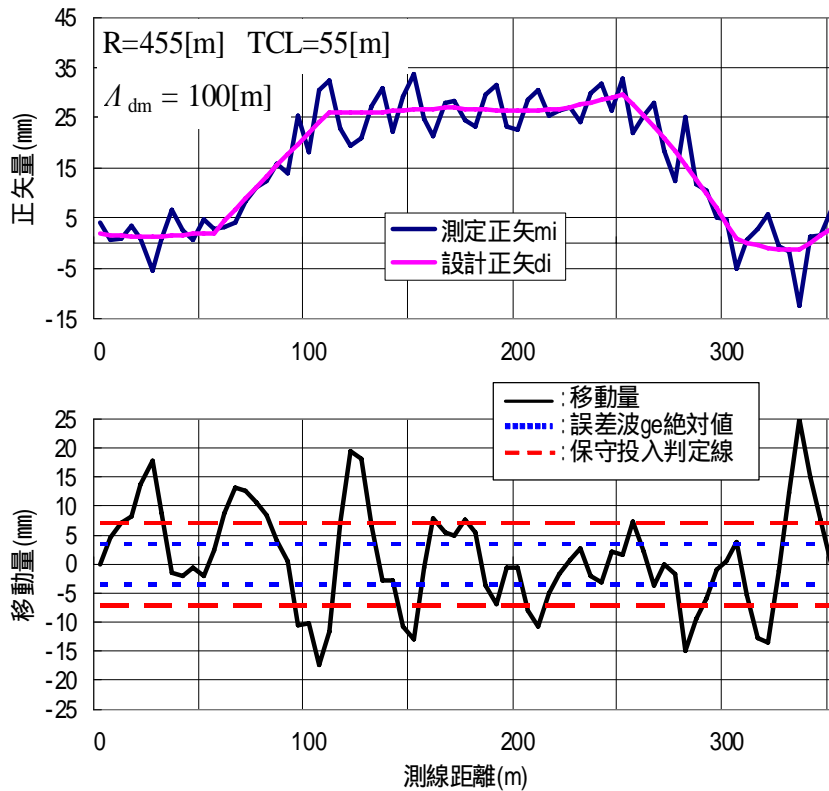


図-60-2 交差法演算値の使用判定（使用可の例）

図-60-2の場合，出力された移動量は $A_{dm} = 100[m]$ における g_e 絶対値を大きく上回っており，誤差の影響を受けたとしても，理論的には g_e 絶対値振幅ラインまでは改善が期待できるため“使用可”と判断できる．

但し，実際の保守投入を行うか否かの判断は，誤差の影響を受けるか否かよりも，現状の軌道状態から一定以上の改善が期待できるか否かで判断する．

そのために表-8の数値に“改善の期待値”を乗じて求めた値をグラフ中に示したものが「保守投入の判定線」（以下，「判定線」）である．

なお本研究ではこの値として2倍を採用する．これは保守投入によって理論的には誤差の影響を考慮しても現状の半分までの改善が期待できることを意味している．

また，事前に現行軌道のパワースペクトル（Power Spectram Density 以下，PSD(R) と表記する．）が既知の場合は，表-8の数値と安全率から算定される判定線のパワースペクトル（以下，これをPSD(e)と表記する）を計算し，これと直接比較をおこなうことで

$$\text{PSD(R)} \quad \text{PSD(e)}$$

の関係を満たす，交差法演算結果が使用可能となる波長領域を判定することができる．

表-9 池守式による軌道状態（通り）（文献-50,51より）

	パワースペクトル近似式	延長(m)	A	a	n
区間	$G(f)=A \times 10^{(a)}$	500	1.16	-1	-1.8
区間	$\times f^{(n)}$	500	9.02	-2	-2

f: 空間周波数 (1/m)

区間 : ロングレール 路盤:良 0.3mm/100日 > 軌道狂い進み

区間 : 継目構造 路盤:可 0.3mm/100日 軌道狂い進み

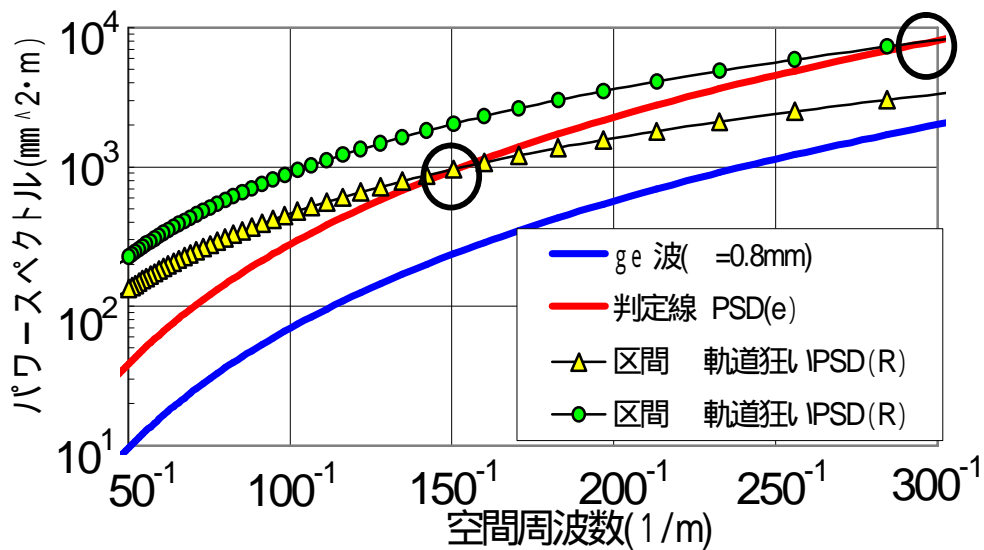


図-61 PSD比較による 交差法使用の有効帯域判定法

この具体的な判定事例を、1985年に鉄道総合技術研究所で行われた軌道狂いのPSD特性調査データ⁵⁰⁾を用いて示す。

・現行軌道狂いIPSD(R)の算出

表-9 に示された近似式⁵¹⁾の数値により算出

・判定線用 PSD(e)の算出

表-8 における g_e 絶対値の振幅に安全率2を乗じてPSD(e)を算出する。

尚、当時の軌道検測車チャートからの目視読み取りデータを使用しているため表-8 $\lambda=0.8(\text{mm})$ の列を適用する。

・判定 図-61を用いて交差法の有効帯域を判定する

区間 の軌道状態 : λ 150[m] までは有効

区間 の軌道状態 : λ 300[m] までは有効

いずれも図-62中のPSD(R)とPSD(e)との交点、印位置による。

このように、統計的に推定される g_e 絶対値の大きさと、現行の軌道狂いから交差法により計算される移動量の絶対値を比較し、S/N分離の観点より計算結果の使用の可否を検討することで、交差法を持つ測定誤差重畳の影響は回避することができる。

b) 復元法への交差法解析結果の応用

復元法では、その大きなメリットとして、交差法での最大の課題である測定誤差の重畳、誤差波 g_e の発生が殆どないことが挙げられている。

しかし、その理論的根拠や誤差影響の算定法については具体的には示されておらず、復元法の長波長側の使用可能な上限帯域判定根拠については、現在も明確にされていない。

一方交差法では、前項までの解析により、検測精度と対象としたい波長上限 A_{dm} より定まる誤差波の絶対値と、計算により出力される移動量の絶対値を比較することで使用可能な上限帯域を求めることが可能である。

この判定法が、復元法でも適用できるか否かについて、両演算法に同一の白色ノイズを与え、出力される移動量 (= g_e 絶対値に相当) を比較・考察することで明らかにする。

同一測定誤差 m_e ($\sigma=0.3(\text{mm})$ $n=225$ の白色ノイズ) を与えた場合の交差法と復元法、双方の演算法により出現する誤差波 g_e の挙動差の典型的な例を図-62に示す。

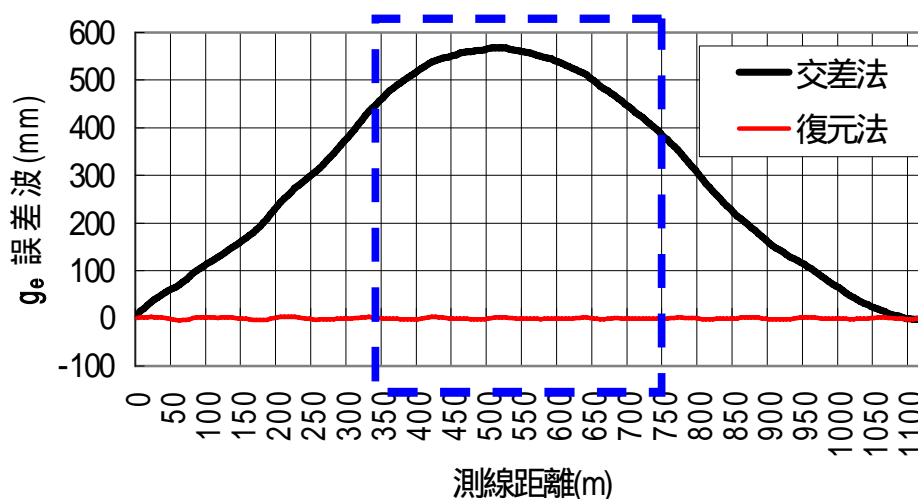


図-62 復元法と交差法 (全ランク使用時) g_e 比較

太線：全ランク ($n=225$) を使用した交差法演算 ($A_{dm}=2260[\text{m}]$ に相当) により出現した誤差波 g_e
 細線：復元逆フィルター (FIR型フィルター) 演算 により出現した誤差波 g_e

なお、復元帯域は $A_{dm} = 100[\text{m}]$ とし15~100[m] までを倍率1で復元できる設計とした。

両演算法で出現する誤差波 g_e は全く異なる．交差法では前項までの考察どおり，区間全体 ($5 \times (225+1) = 1130$ [m]) を半波とする第 1 定常波振動モードが卓越した最大値 500 (mm) を超える誤差波 g_e の発生が確認される．

一方で，同じ測定誤差 m_e を用いて行われた復元法の演算では，出現する誤差波 g_e は同一スケールでの識別が不可能な程度の僅かなレベルである．

論文²⁰⁾で「測定誤差の重畳が殆ど生じない」と評価された事象が明確に再現される．次に，交差法の演算波長帯域を $\Lambda_{dm} = 100$ [m] とするランク除去を行い，復元法の帯域とあわせた場合に出現する誤差波 g_e を図-63に示す．

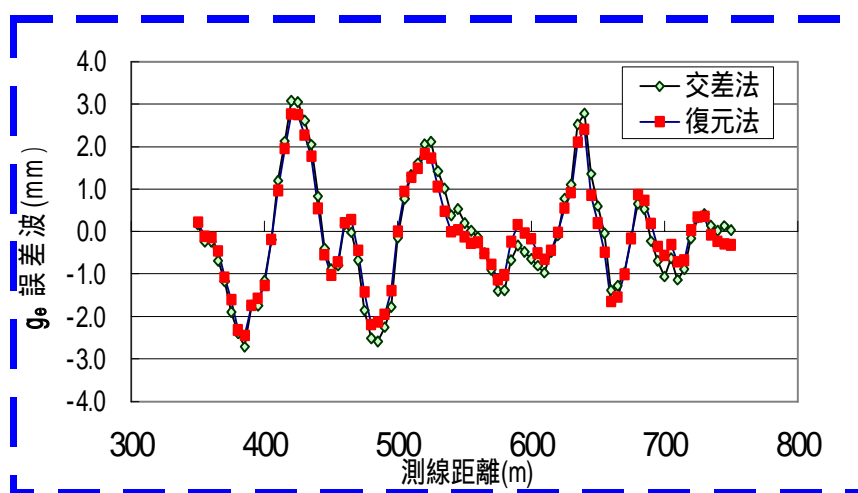


図-63 復元法と交差法 ($\Lambda_{dm} <$ 成分ランク除去) g_e 比較

太線： $\Lambda_{dm} = 100$ [m] 第22ランクまで (第1～22定常波成分) を除去した交差法により演算した誤差波 g_e $r = 2p(n+1) / \Lambda_{dm} = 10 \times 226 / 100$ 式(54)より
 細線：図-62と同一条件

両演算法の共通区間 (破線内：350m～770m間) で比較を行えば，両者の誤差波 g_e の値及び挙動は殆ど同一のものとなる．

長波長側の演算対象波長を同一にしてやれば，両演算法の測定誤差の重畳に対する回避能力には差がないといえることができる．

また，ここまでの考察により，交差法と復元法の本質的な違いは，入力データの波長分解機能

交差法：定常波 (位相差・直流分 無) に分解
 復元法：正弦波 (位相差・直流分 有) に分解

にあり，分解後の各正弦波増幅値は導出のプロセスは全く異なるものの完全に一致することから，復元法における長波長側使用帯域の可否も，交差法の理論解析より得られた以下の判定方法をそのまま活用することができる．

<ul style="list-style-type: none"> ・最大移動量(mm) での判定法 A_{dm} [m] を指定し演算された復元波形最大値(mm) 表-8 A_{dm} [m] での誤差波 g_e 絶対値(mm) ・PSDによる有効帯域判定法 対象区間のPSD(R) 判定線用g_eの PSD(e) 上記条件を満たす波長領域までは使用可能 ともに用いる検測精度 (mm) により不等式右辺の値は変化する。
--

以上の考察結果より、古典的な交差法が潜在的に保持していた定常波分解機能を応用した新しい交差法（以下、「ベクトル交差法」）を使用することで、復元法と比べ表-10に示すとおり、より効率的な測定正矢から移動量への変換計算をおこなうことが可能となった。

表-10 復元法とベクトル交差法の比較

		復元法	ベクトル交差法
測定		測定延長:作業対象区間 +700 ~ 1000 [m] 測定間隔: 0.25 ~ 1.0 [m] 軌道検測車データの 使用が前提	測定延長:作業対象区間のみ 測定間隔:弦長[m] × 1/2 様々な検測データが使用可
	演算	複雑(複素数系)かつ ブラックボックス化しやすい ? 使用可能な上限波長は ? 使用可能な上限波長に 必要となる追加測定延長は ? フィルタ作成時の最適遮断帯域は	簡単(実数のみ)かつ 計算原理が明瞭 逆行列:単純な多元1次方程式の解法
成果 と コスト	Q	同等の演算精度(測定誤差の重畳回避性能を含む) 同等の機能 (波長選択が可能・解が一意に定まる)	
	C	高精度(位置情報含む)高頻度の 軌道検測体制の構築 専用データ処理システムの導入	特段の検測体制必要なし 汎用PCで対応可 (標準表計算ソフトウェア)

交差法解析の結果より解決

5. 実軌道における交差法理論の検証

前章までの交差法の理論化によって明らかになった事項、特に測定誤差の影響を回避するための2つの判定法および理論的なS/N分離の境界値

- a) 最大移動量 (mm)での判定法
- b) PSDによる有効帯域判定法
- c) 交差法の理論的な施工精度

についてJR西日本の実軌道で交差法を用いて行った曲線整正作業の事例によって、これを検証する。尚用いた交差法は1-(3)-b)で述べた倍長弦公式で求めた20m・40m弦正矢による収束演算を10m弦交差法に併用したJR西日本独自のものである。計算の詳細を付録16に記述する。

(1) 交差法の使用可否判定に関わる検証

a) 最大移動量(mm)での判定法 検証

事例 線区：在来線130km/h 運転線区

線形：R=1400 [m] 直線 緩和曲線 本曲線

精度：10 m 弦正矢法 手検測 $\sigma = 0.8(\text{mm})$

設計： $A_{dm} = 100$ [m] 計画延長=750 [m]

施工：MTT 1975年製 絶対基準ライニング作業

時期：1990年 3/4 期 (秋) 施工

概要 曲線内に長い波長の通り狂いが存在し、振幅は $A=100$ [m]で50(mm)に達する。

前章の考察より、手検測の精度= 0.8(mm)であれば、 $A_{dm} = 100$ [m] 安全率= 2での使用可否判定値は表-8に示した数値より16(mm)以上、施工精度は 8 (mm) 程度と期待される。

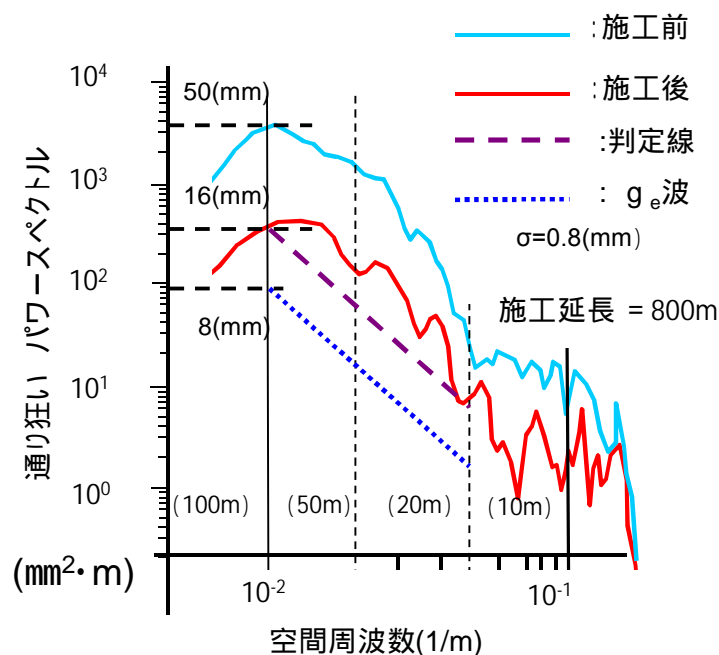


図-64 最大値比較(手検測 @在来線)による検証

結果 理論どおりの改善効果が確認できる。図-64に施工前後の通り狂いのパワースペクトル密度を示す $A_{dm}=100$ [m]での振幅は 50 (mm) から16 (mm) へ1/3 未満に抑制されている。一方で $A_{dm}=100$ [m]での施工精度は、理論上の精度8 (mm) に届いていない。

これは移動量設計の条件とした ± 50 (mm)の移動制限によるものと推定される。

比較のため、同一MTTによる同一線形を持つ別の曲線に相対基準ライニング作業を投入した事例を図-65に示す。

両者の長波長通り狂いへの改善効果には明確な差があり、同効果はMTTが持つ修正能力ではなく、移動量補正の有無によるものである。

また観測データは過去文献⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾のMTT 相対基準ライニング整正限界理論式で示されていた結果ともよく一致している。

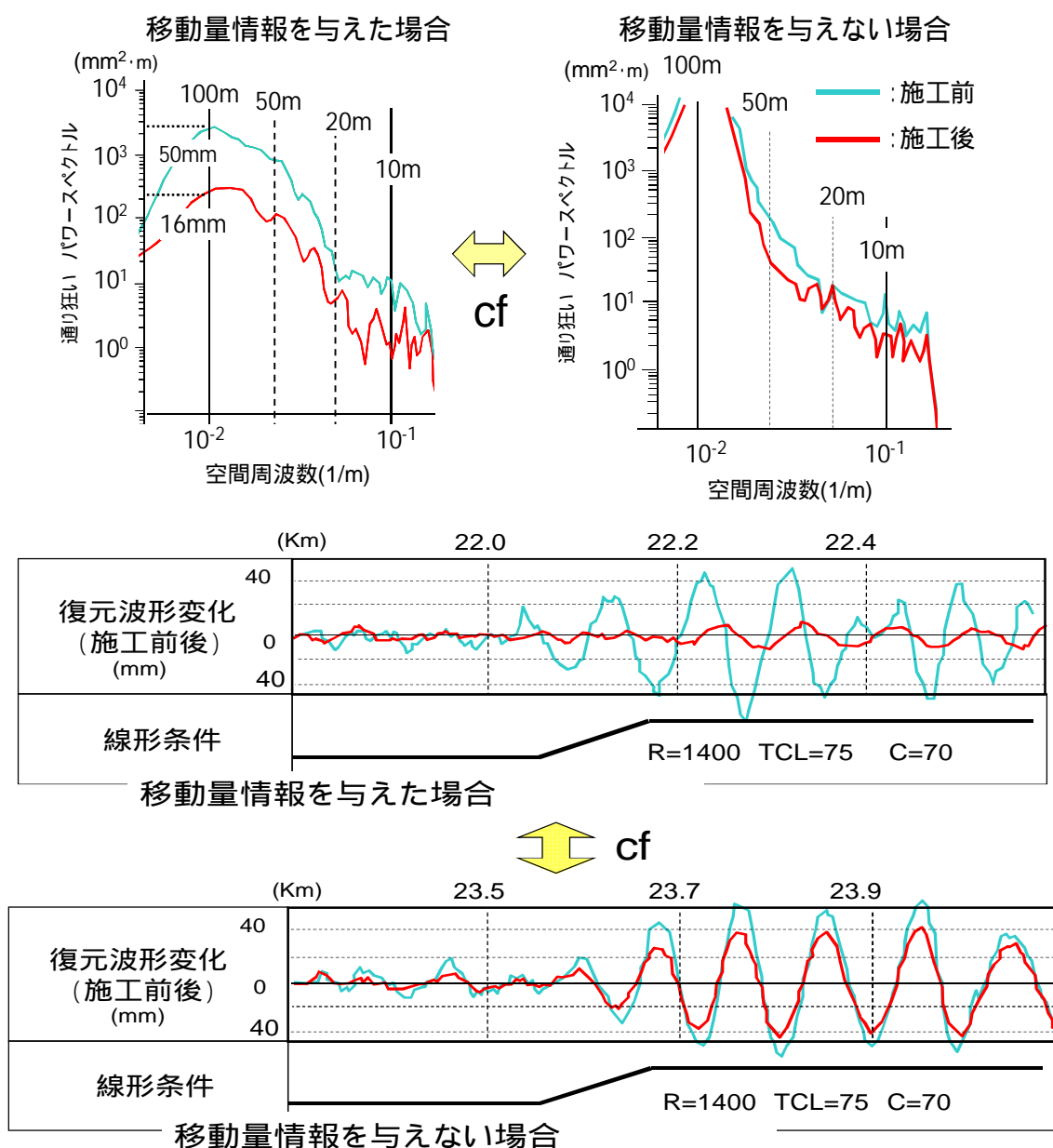


図-65 MTT絶対基準・相対基準効果の差異 (同一機種・線形)

b) PSDによる有効帯域判定法の検証

事例 線区：在来線曲線改良工事

線形：事例A：R=300[m] 事例B：R=600[m] の曲線全域

精度：10m弦正矢法 簡易検測装置 $\sigma=0.5(\text{mm})$

設計： $A_{dm} = 250$ [m] 計画延長=505[m] 500[m]

施工：MTT 2003年製 絶対基準ライニング作業

時期：2008年 4/4期（冬）施工

概要 曲線改良により， ± 150 (mm) までの大量の移動計画が許容されたため，長波長側に上限帯域を可能な限り延伸する曲線整正を計画した。（図-66 図-67）

事例A・Bとも，現状のPSD分布は判定線（安全率=2）を大きく上回るが，許容移動量の範囲と長波長側への誤差影響の集中特性を考慮し， $A_{dm} = 250$ [m] とした。

結果 理論どおり $A = 250$ [m]の領域において軌道状態の改善効果が認められる。

このように存在する軌道狂いのPSDが g_e 絶対値のPSDを上回る範囲であれば，その帯域までは測定誤差の重畳影響は生じない。（図-66 図-67）

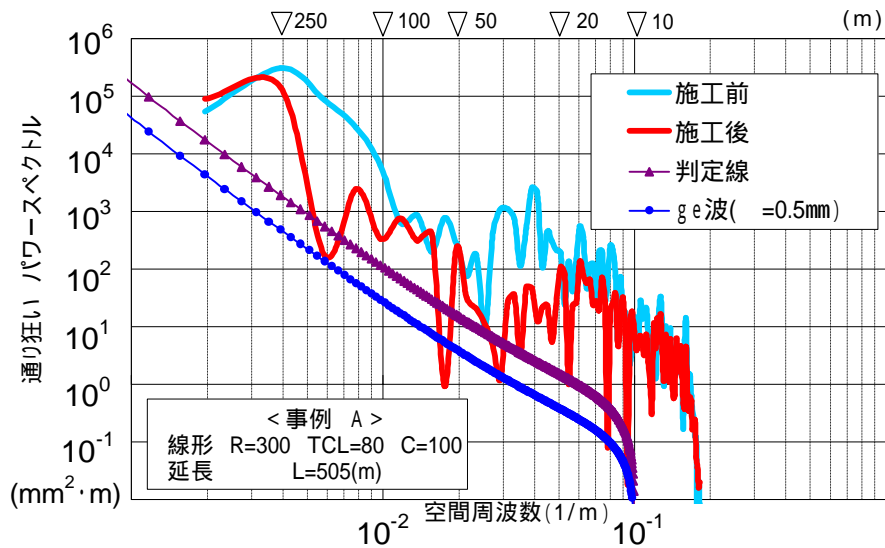


図-66 PSD比較による有効帯域判定の検証（事例A）

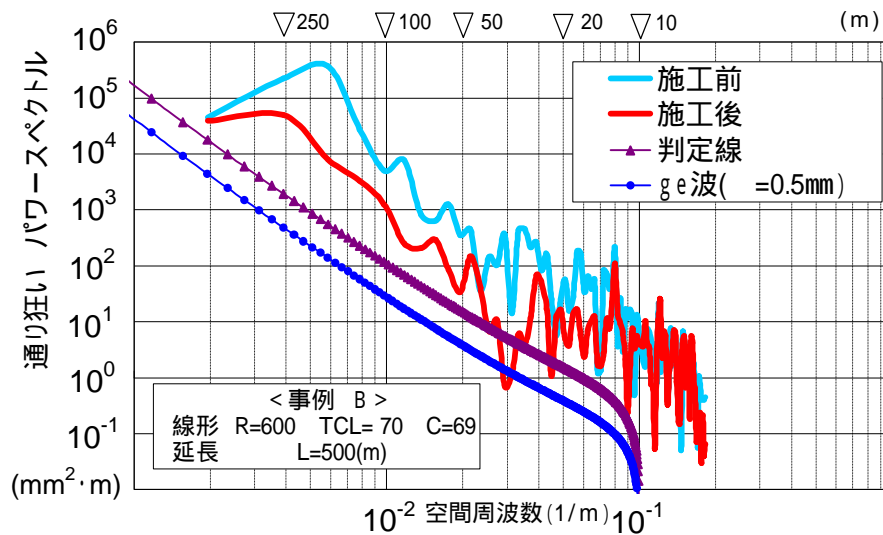


図-67 PSD比較による有効帯域判定の検証（事例B）

1990年に導入した20m弦演算を併用した改良交差法は、様々な線形条件の曲線整正、高速化曲線改良工事や1995年の震災復旧工事など、JR西日本管内で幅広く活用され実効を上げているが、本研究によりその理論的根拠と改善事象と整正理論との整合性が確認された。

(2) 交差法の施工精度に関する検証

事例 線区：新幹線300km/h 運転線区

精度：10 m 弦正矢法 高精度検測車 $\sigma=0.3(\text{mm})$

線形：R= 8000 [m] 本曲線

設計： $A_{dm}=100$ [m] 計画延長=350[m]

施工：MTT 1995 製 絶対基準ライニング作業

時期：2004年 2/4期（夏）施工

概要 曲線内に存在する波長 50 ~ 100 [m]の軌道狂いに対して整正を行う。データは位置並びに測定値が正確な高性能検測車のものを用い、推定される施工精度は $A_{dm}=100$ [m]で約 3 (mm) である。

尚、新幹線においては凡そ1回 / 10日の高精度検測車（ドクターイエロー：図-2参照）による全線検測体制、及び同データによる厳格な工事竣工品質管理体制が構築されており¹⁾²⁷⁾⁵²⁾、MTT 施工誤差を最小限とした理論検証が期待できる。

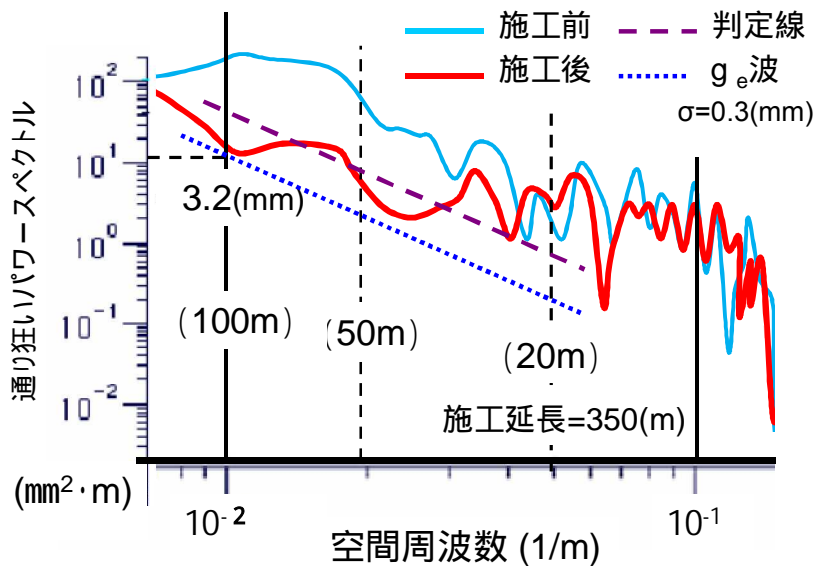


図-68 交差法施工精度に関する検証 (@新幹線)

結果 理論どおりの施工精度が確認できる。(図-68)

$\lambda=100$ [m]では推定した g_e 絶対値3 (mm) にほぼ達する施工精度が、実軌道において技術的にも達成可能であることが確認された。

同様の高精度検測車のデータを用いた改良交差法による修繕効果を山陽新幹線の新大阪～岡山間、上下線計 約360km間における過去20年間の軌道管理指標 (40m弦通りP値) を用いて図-69に示す。

【山陽新幹線 新大阪～岡山間 上下計 360KM】

< 40m弦 P値: ± 3 (mm)/40m弦 を超過するサンプリング% >

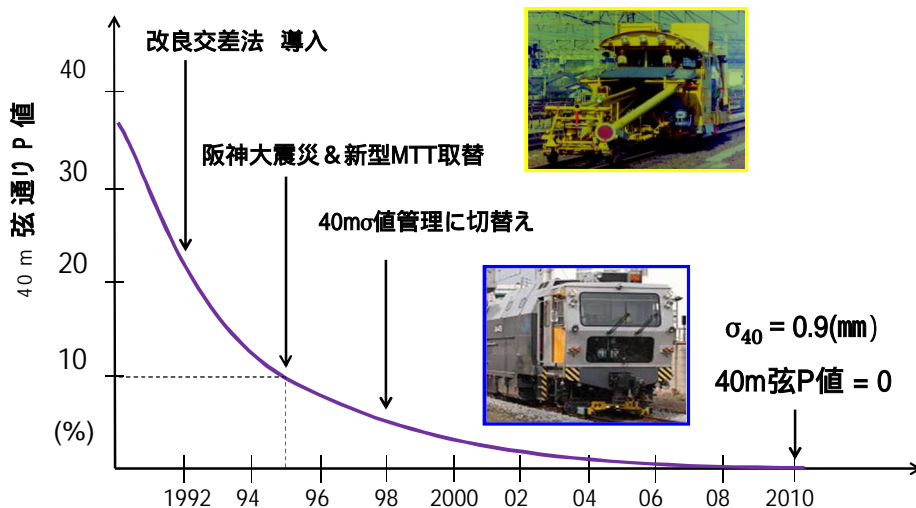


図-69 交差法による整正理論の実効果

尚, P 値とは鉄道の軌道管理で独自に用いている軌道狂いの統計指標の一種で, ± 3 [mm]を超過するもののサンプリング割合を示す. 単位: (%)

経験的に, P値 10では

$$\text{保守投入効果} = \text{P値改善} / \text{保守投入量}$$

が感度よく説明が出来るが, 10を切ると同感度が低下するため, 指標を標準偏差 単位: (mm) に変えて管理が行われている.

新幹線用改良交差法 (3弦連立交差法) を導入した1992年以降, 全てのMTT作業を同交差法による補正を行う絶対基準作業に変更した結果, 1995年の新型MTTへの取替効果と相俟って2010年度末で同区間の軌道管理指標は

$$\begin{array}{ll} 40\text{m弦通り狂いP値} & 0 (\%) \\ \text{''} & \text{標準偏差 } 40 = 0.9(\text{mm}) \end{array}$$

と大幅に改善し, 前章の考察で示した $A_{dm} = 100$ [m] における改善効果の理論的な限界に近づきつつある.

6. まとめと今後の課題等

(1) まとめ

本研究では, 古典的な移動量演算手法である交差法の実務成果と理論評価の矛盾を技術的・理論的に総括することを目的として, 同法を正矢差ベクトルと移動量ベクトル2つのベクトル間の一次変換における固有値問題と捉え再評価をおこなった. その結果, 交差法には以下の機能, および特性があることが明らかになった.

交差法を表わす実対称行列 \mathbf{T}^{-1} 及び正矢法を表わす実対称行列 \mathbf{T} には, 簡易かつ高精度な定常波分解機能と正矢の復元倍率, および検出倍率と一致する固有値による増幅機能が内在していること.

測定誤差により出現する誤差波は, 測定数 n の増加と伴に大きさが急増するものの, n 個の定常波の重ね合わせとして行列 \mathbf{T}^{-1} の固有値と関連付けられた偏りを持って出現すること.

出現する誤差波 (定常波) は測定延長に関わらず常に長波長側の5定常波に誤差影響全体の95%が, 特に第1定常波には72%が集中する弦振動の物理法則に従った挙動を示すこと
出現する誤差波の大きさ (絶対値) は, 正矢測定時の検出精度と管理対象とする軌道狂い波長の2つをパラメータとして統計的に推定できること.

修繕対象とする区間の軌道状態と で推定される誤差波絶対値との比較により, 交差法使用の可否が理論的に判断できること.

加えて, 過去の交差法施工事例を再検証することにより, 本研究で導かれた理論が実軌道における施工でも実際に達成されていることを確認した.

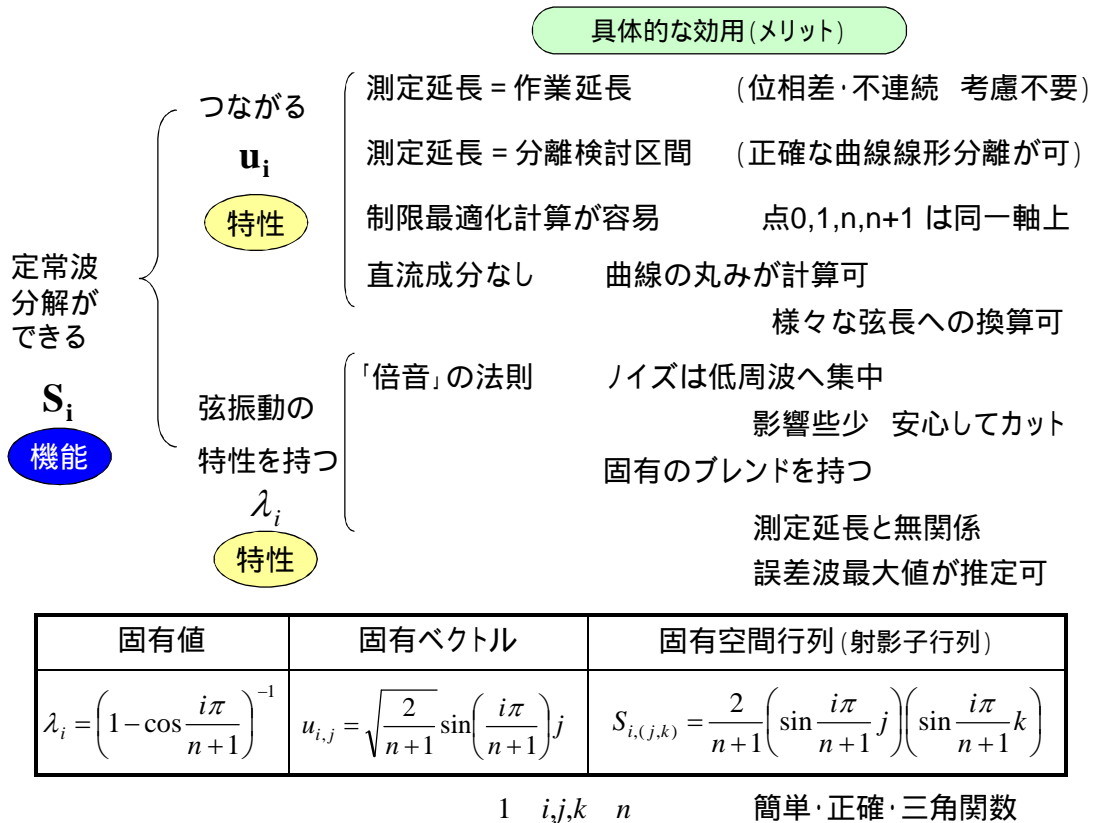


図-70 交差法理論解析結果とその具体的な効用

これらの交差法の理論解析により得られた機能・特性 (図-70) を活用することにより、以下に示す実用性およびメリットを持つ正矢から移動量への変換演算を、

- ・ 修繕対象区間のみの正矢測定データを使用する
- ・ 軌道狂いと線形分離がシンプルに行える
- ・ 軌道狂いの波長選別が行える
- ・ 移動量計算結果に個人差を生じない
- ・ 不動点や移動制限などへ柔軟に対応できる
- ・ MTT補正用のY修正値などへの変換が行える

最少の計算工数で高精度かつ前後の軌道との連続性が必ず保障される中で行うことができる。

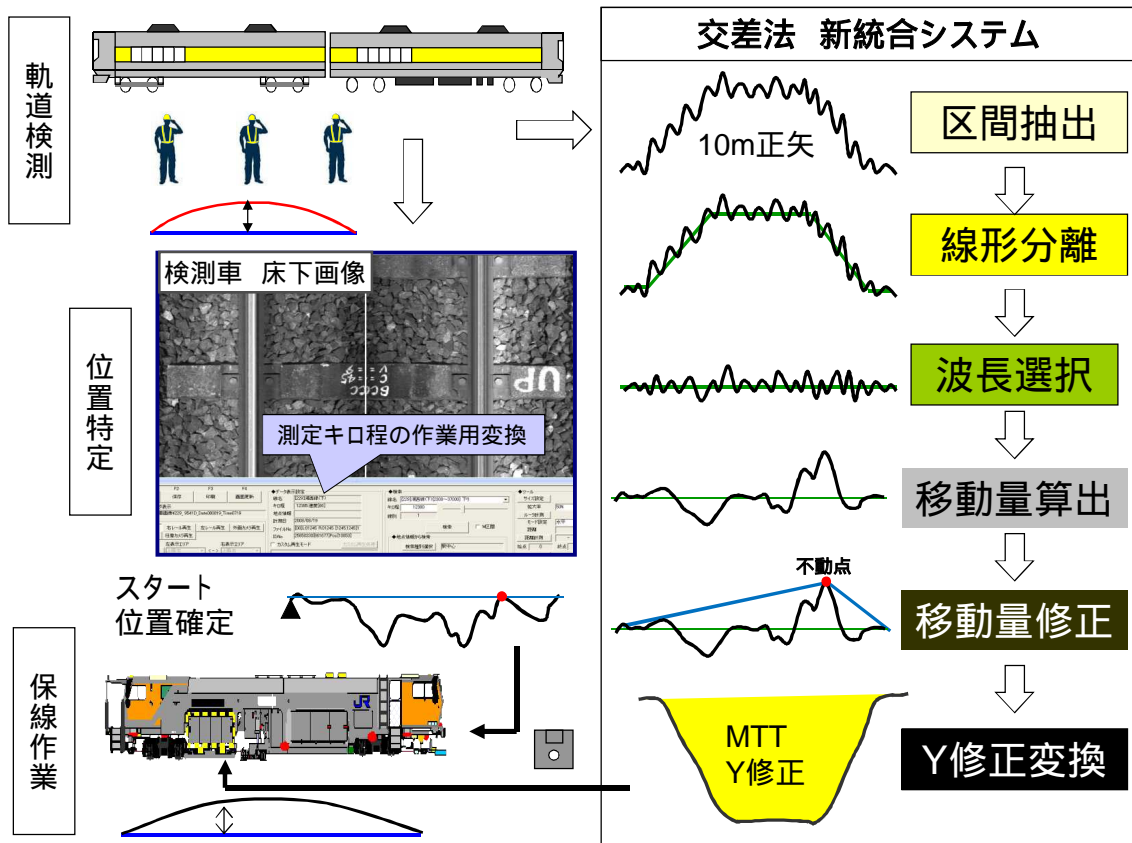


図-71 新交差法理論を核とした軌道管理・整備統合システム

本研究で得られた新しい交差法の理論的な潜在能力の知見を応用した、軌道検測から整備までを一元化できる統合システムの流れを図-71に記述する。

本研究により、古くから鉄道保守現場で広く使用され、多くの実績はあるものの、その有効性の立証がなされていなかった交差法が明確に理論化され、現在および将来においても十分に活用・応用できる実用的かつ合理的な軌道実形状演算手法であることが明らかになった。

(2) 今後の課題

更なる長波長領域修繕のための技術開発

交差法における誤差の重畳は制御できるものの、現在の検測精度から長波長領域の修繕には一定の限界があることが明らかとなった。これを更に高める為には、検測精度の向上を主とした、様々な技術開発が必要と考える。

行列スペクトル分解法の他の工学ニーズへの応用（整流並びに圧縮機能）

本研究の中で取扱った、任意ベクトルを定常波ベクトルの合成に分解する、行列 S_i を用いたスペクトル分解法は、通常の離散フーリエ変換とは異なった様々な特性を有する。これを応用することで

- ・任意の入力信号の位相差を解消する整流装置（定常波分解，合成がおこなえる特性を応用）

・低周波側が重要となるデータ（画像・音声等）の高密度圧縮装置，または高周波側へのデータ変調によるS/N比向上装置（低周波側5波に全情報の95%を集中できる特性を応用）など様々な可能性が考えられる．
この分解法の更なる理論的な解明と他の工学分野等への応用などは，今後の興味深い課題である．

謝 辞

本論文の作成にあたり，東京大学大学院社会基盤工学科 家田教授におかれましては，構成から内容の詳細にいたるまで，ご多忙中にもかかわらず適切なご助言及びご指導を賜りました．同科 島村特任教授におかれましては，長年の鉄道保守のご経験から本論文の読者視点での改善すべきヒントを多く賜りました．同科 布施准教授におかれましては，最新の測量技術との結合可能性に関するご示唆を賜り，平行して開発を進めてきた計算システムの内容に反映させて頂くことができました．東京大学地震研究所 堀教授におかれましては，浅学の筆者に対して理論的な面からの懇切丁寧なご指導，ご助言を賜りました．東京大学大学院新領域創成科学研究科 堀田教授におかれましては，新たな企てを組織に問いかける際のマネジメント上の観点に関する大変貴重なご教示を賜りました．主査，副査の先生方から賜りました多くの暖かいご指導に対し，ここに改めて感謝の意を表する次第です．

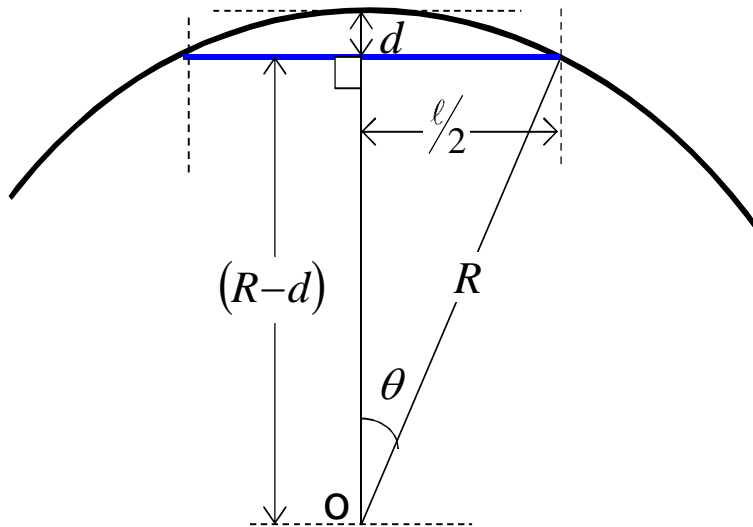
また鉄道総合技術研究所 前軌道技術研究部 部長 博士(工学) 古川敦氏 西日本旅客鉄道株式会社 技術開発部 部長 田仲文朗氏，施設部 部長 半田真一氏，大和軌道製造(株) 技術顧問 博士(工学) 徳岡研三氏，(株)レールテック 代表取締役社長 丸山 俊氏をはじめ，多くの方々のご指導・ご支援をいただきました．特に数学的な証明については，西日本旅客鉄道株式会社 技術開発部 博士(理学) 矢田部俊介氏に，データ解析やプログラム作成については，(株)レールテック 浅枝 慧氏，同社 藤田能啓氏に，多くのご協力をいただきました．

そして最後に，本論文作成に着手した平成24年2月より，終始ご指導・ご助言を賜りました，前神戸高専 橋本渉一教授に感謝の意をあらわし，謝辞といたします．

付 録

付録 1	曲線における設計正矢 d の導出	付 1
付録 2	緩和曲線長の決定法	付 2
付録 3	正矢法検出倍率の導出	付 3
付録 4	倍長弦公式の導出	付 5
付録 5	累積法の公式 幾何図解より導出	付 8
付録 6	逆行列成分に関する証明	付 12
付録 7	行列の固有値	付 17
付録 8	固有ベクトルと固有空間	付 18
付録 9	固有空間のスペクトル分解	付 22
付録 10	フーリエ変換と行列スペクトル分解周期性の考察	付 25
付録 11	片持ち梁モデルを用いた線形分離法	付 28
付録 12	交差法演算における各種制約条件の最適化手法	付 33
付録 13	交差法演算（高低）における実際の計画・検討例	付 38
付録 14	交差法行列 T^{-1} の固有値比に関する証明と工学的な意味	付 42
付録 15	技術文献に残る交差法演算における誤差重畳影響回避法の例	付 46
付録 16	JR 西日本 3 弦連立交差法 計算原理	付 47
	英文要旨	付 49
	参考文献一覧表	付 52

付録1 曲線における設計正矢 d の導出



三平方の定理より

$$R^2 = (\ell/2)^2 + (R-d)^2$$

$$d^2 - 2Rd + \ell^2/4 = 0$$

ここで $d^2 \ll$ 他の項 $\therefore d^2 = 0$ とすれば

$$d \approx \frac{\ell^2}{8R} \text{ 単位[m] が導出される}$$

なお、厳密解は2次方程式の解の公式より

$$d = R - \sqrt{\left(R - \frac{\ell}{2}\right)\left(R + \frac{\ell}{2}\right)} \text{ 単位[m] で与えられ}$$

近似式との差は以下の表の通りであり、10m弦正矢法においては実用上、殆ど問題にならない

10 [m]弦正矢法

半径R[m]	厳密解[m]	近似解[m]	差[mm]
160	0.07814	0.07813	0.019
200	0.06251	0.06250	0.010
300	0.04167	0.04167	0.003

付録2 緩和曲線長の決定法

鉄道の平面曲線における緩和曲線長は

- ・ 曲線半径 : R (m)
- ・ 走行する列車速度 : V (km/h)
- ・ 曲線部に設定されたカント量 : C (mm)
- ・ この3つより計算される : C_d (mm)

尚, 在来線(軌間=1067(mm))における C_d (mm) カント不足量は

$$C_d = 8.4 \times V^2 / R - C \text{ で与えられる}$$

をパラメータとして

3点支持による走行安定性

列車回転角度(= C)の時間変化

遠心力であるカント不足量(= C_d)の時間変化

の技術的な3側面を考慮した以下の3式で計算される長さのうち、最も長いものが採用される。

$$L_1 = \alpha \times C \quad 0.4 \leq \alpha \leq 1.0$$

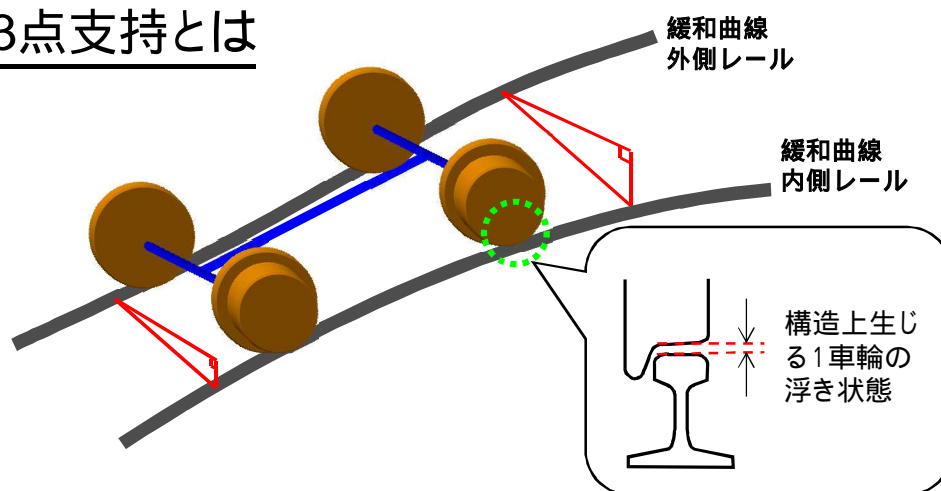
$$L_2 = \beta \times CV \quad 0.007 \leq \beta \leq 0.01$$

$$L_3 = \gamma \times C_d V \quad 0.007 \leq \gamma \leq 0.01$$

α, β, γ : 線区の等級(列車の速度&年間の通過重量)によって決定する係数

このうち の3点支持とは、曲線内で設定されたカント C (mm)と直線での $C = 0$ (mm) の差を緩和曲線内で変化させるために生ずる構造的なねじれ状態を示す

3点支持とは



付録3 正矢法検出倍率の導出

正矢法が、線形が波長 Λ の単一正弦波で与えられる軌道実形状の中で、どのように出力されるかを考察する。

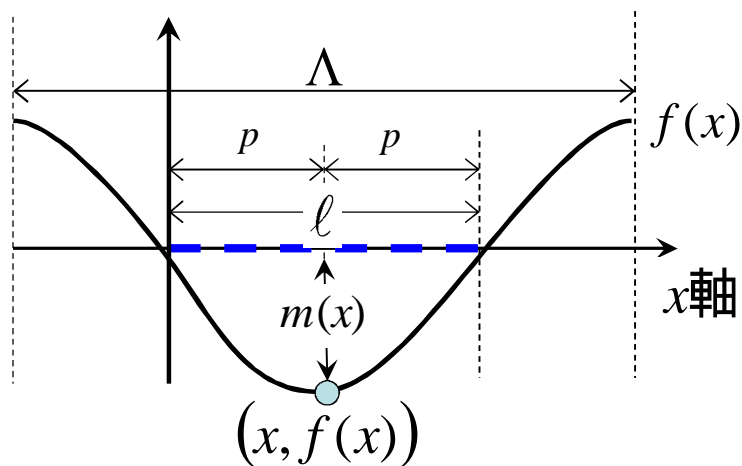
軌道実形状

$$f(x) = \sin \frac{2\pi}{\Lambda} x \quad \omega = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad \text{とすれば}$$

$$= \sin \omega x$$

$$f(x-p) = \sin \omega(x-p)$$

$$f(x+p) = \sin \omega(x+p)$$



正矢

$$\begin{aligned} m(x) &= f(x) - \frac{1}{2} \{f(x-p) + f(x+p)\} \\ &= f(x) - \frac{\sin \omega(x-p) + \sin \omega(x+p)}{2} \end{aligned}$$

ここで公式

$$\sin \theta \cos \varphi = \frac{\sin(\theta - \varphi) + \sin(\theta + \varphi)}{2} \quad \text{より}$$

$\theta = \omega x$ $\varphi = \omega p$ とし $f(x) = \sin \omega x$ に注意すれば

$$\begin{aligned} m(x) &= \sin \omega x - \sin \omega x \cos \omega p \\ &= \sin \omega x (1 - \cos \omega p) \end{aligned}$$

正矢 $m(x) = f(x) \times (1 - \cos \omega p)$

軌道実形状 × 検出倍率

$$\omega = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad \text{および} \quad p = \frac{\ell}{2} \quad \text{より}$$

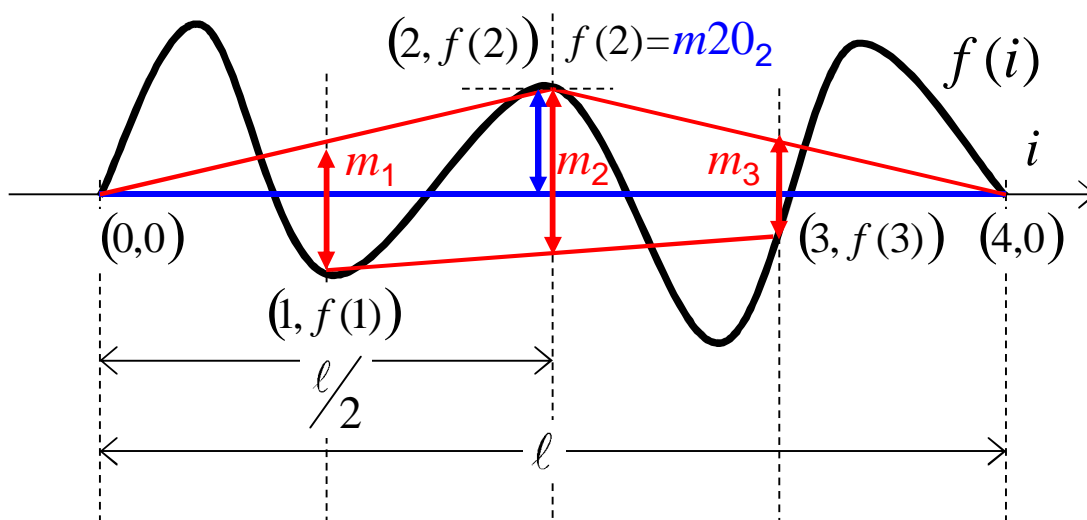
検出倍率 $(1 - \cos \omega p) = \left(1 - \cos \frac{\ell \pi}{\Lambda}\right)$

検出倍率を h_{Λ} と記述すれば

$$h_{\Lambda} = \left(1 - \cos \frac{\ell \pi}{\Lambda}\right) \quad \text{となる}$$

付録4 倍長弦公式の導出

直線軌道における倍長弦公式



倍長弦公式の導出

正矢 $m_i = f(i) - \frac{f(i-1) + f(i+1)}{2}$ の一般式

及び $f(2) = m_2 \cdot 2 \cdot 0_2$ より

$$m_1 = f(1) - \frac{f(2)}{2} = f(1) - \frac{m_2 \cdot 2 \cdot 0_2}{2}$$

$$f(1) = m_1 + \frac{m_2 \cdot 2 \cdot 0_2}{2}$$

$$m_3 = f(3) - \frac{f(2)}{2} = f(3) - \frac{m_2 \cdot 2 \cdot 0_2}{2}$$

$$f(3) = m_3 + \frac{m_2 \cdot 2 \cdot 0_2}{2}$$

$$m_2 = f(2) - \frac{f(1) + f(3)}{2}$$

$$= m20_2 - \frac{m_1 + \frac{m20_2}{2} + m_3 + \frac{m20_2}{2}}{2}$$

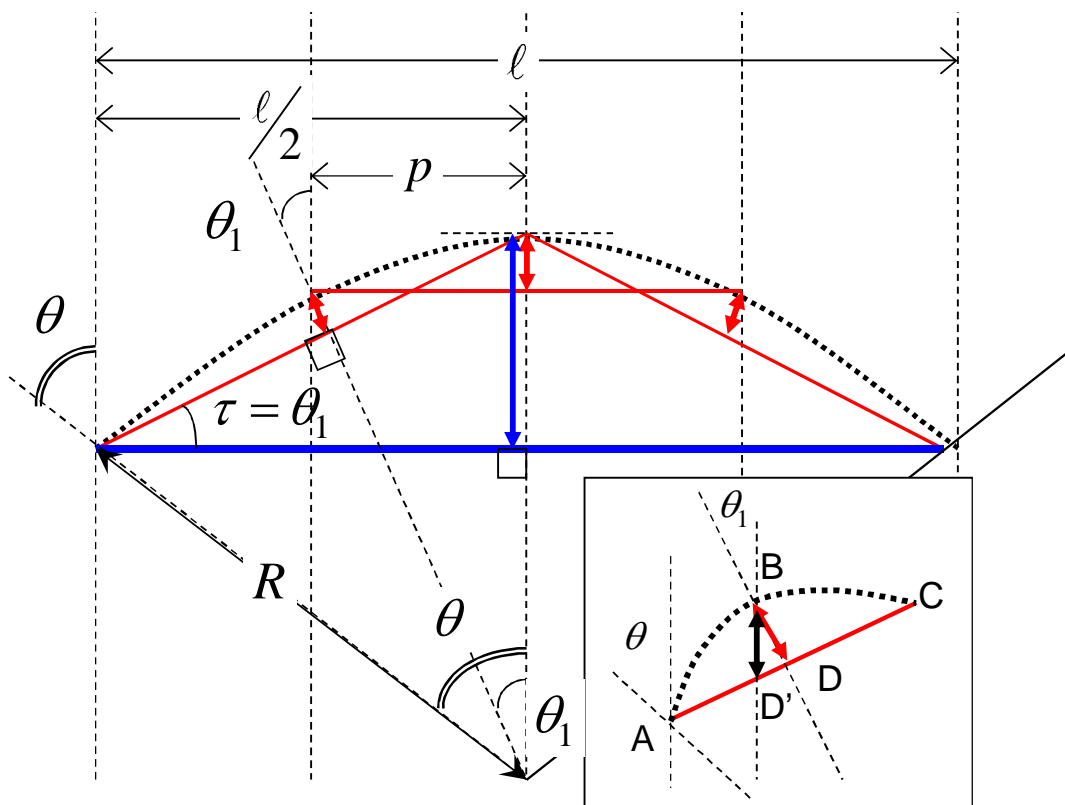
$$2 \times m_2 = 2 \times m20_2 - (m_1 + m_3 + m20_2)$$

$$m20_2 = m_1 + 2 \times m_2 + m_3$$

線形 $f(i)$ に関わらず

$$m20_i = m_{i-1} + 2 \times m_i + m_{i+1}$$

曲線における倍長弦公式成立条件



曲線においては、半径Rと倍長弦の弦長 $2 \times \ell$ との関係より τ の大きさを考慮する必要がある。

τ の影響とは上記の拡大図において

$$BD' = \frac{BD}{\cos \theta_1} \quad \text{とすべきところを}$$

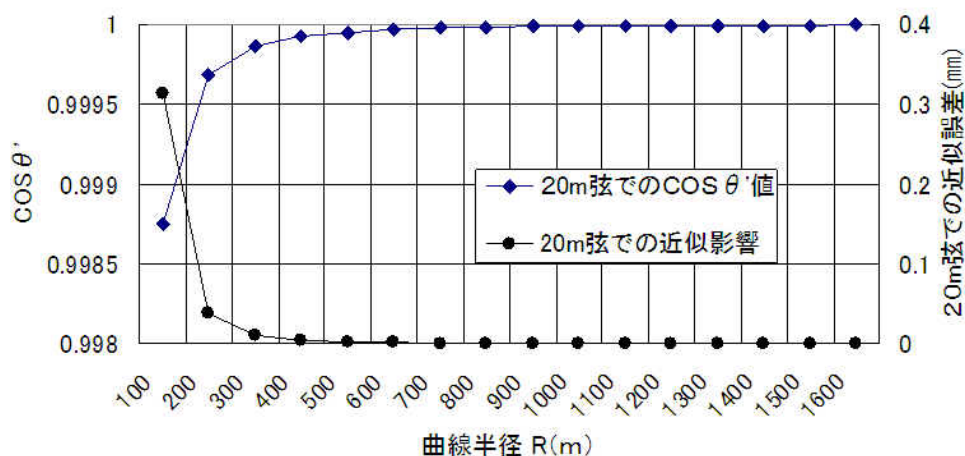
$$BD = BD' \quad \text{と近似することの是非となる。}$$

$$\text{まず } \sin \theta = \frac{\ell}{2R} \quad \therefore \theta = \sin^{-1} \frac{\ell}{2R}$$

ここで、 θ と θ_1 の関係は

$$\theta_1 = \theta - \frac{2p}{\ell} \times \theta = \theta \left(1 - \frac{2p}{\ell} \right)$$

これを $\ell = 20$ [m] としてこれを計算すれば



この近似による影響は、普通鉄道（本線）で用いることのできる平面曲線半径R 160[m]の範囲では些少である

それ以外は現軌道を $f(i)$ とおけばの直線軌道と同一の式展開により倍長弦公式が導出できる。

付録5 累積法の公式 幾何図解より導出

交差法（累積法）の一般式の導出

$$g_{n+1} = -2 \sum_{i=1}^n (n+1-i) f_i \quad \text{を導出する}$$

記号等の定義

m_i : 測定正矢	$f_i = d_i - m_i$: 点 <i>i</i> での正矢差
d_i : 設計正矢	$\left\{ \begin{array}{l} g_{fi} : 1 \text{ 測点前の正矢量 } m_i \text{ を } d_i \text{ とするための } g_i \text{ 成分} \\ g_{mi} : 1 \text{ 測点前の移動量を打ち消すための } g_i \text{ 成分} \\ g_{ri} : 2 \text{ 測点前の移動量を打ち消すための } g_i \text{ 成分} \end{array} \right.$
g_i : 点 <i>i</i> での移動量	

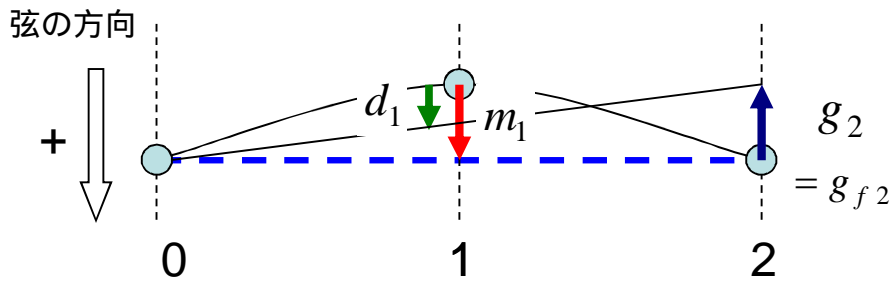
[考え方]

各正矢測定を行う測点*i* を中心とした部分直交座標の中で m_i を d_i とするには “弦の先端がどこに位置するのか” を逐次計算で求めていく。

なお、累積法により移動量が計算されるのは点2以降となり、点0、及び点1においては

$$g_0 = g_1 = 0 \quad \text{を初期条件として以降の計算を進める}$$

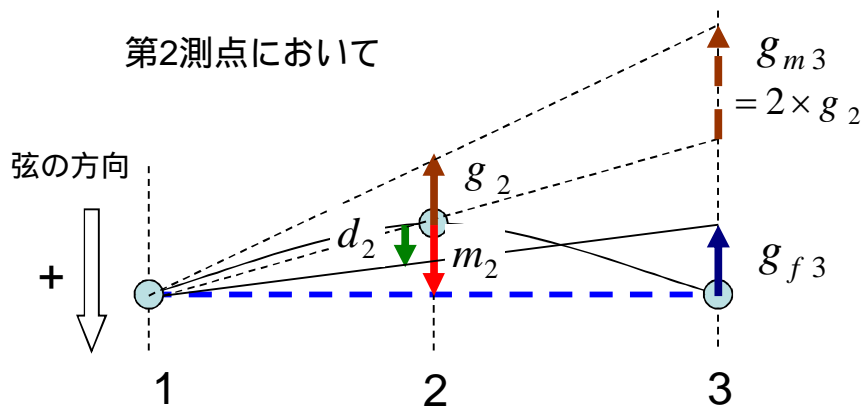
第1測点において



ここで測定正矢，設計正矢，移動量ともに弦に向かう方向を(+)とする

$$g_2 = g_{f2} = -2(d_1 - m_1) = -2 \times f_1 : m_1 \text{ を } d_1 \text{ とするための } g_2 \text{ 成分}$$

弦の先端は 1 測点前の正矢差の-2倍だけ移動する



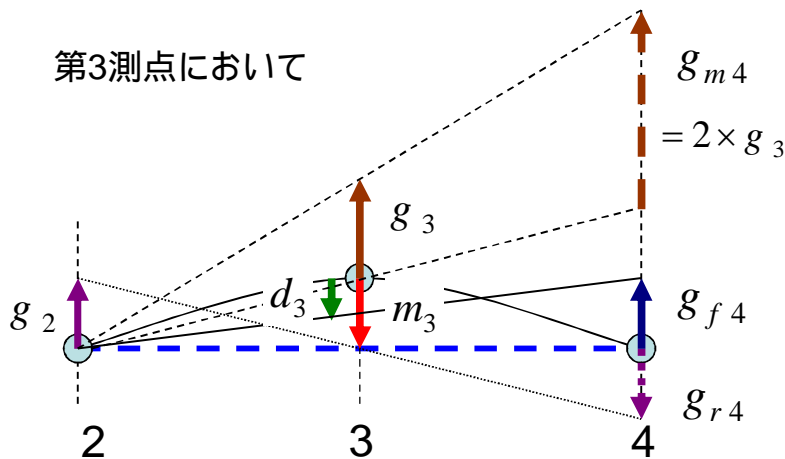
$$g_{f3} = -2(d_2 - m_2) = -2 \times f_2 : \text{第1測点の場合と同様}$$

$$g_{m3} = 2 \times g_2 = -4 \times f_1 : \text{第2測点の移動を打ち消すために必要}$$

となる点3における弦先端部の移動 1測点前の移動量を2倍

以上の影響を合計すれば

$$g_3 = g_{f3} + g_{m3} = -2(f_2 + 2f_1)$$



$$g_{f4} = -2(d_3 - m_3) - 2 \times f_3 : \text{1測点前の正矢差の-2倍}$$

$$g_{m4} = 2 \times g_3 = 2 \times -2(f_2 + 2f_1) = -4(f_2 + 2f_1)$$

: 1測点前の移動量の2倍

$$g_{r4} = -1 \times g_2 = 2f_1$$

: 第1測点の移動量を打ち消すために必要

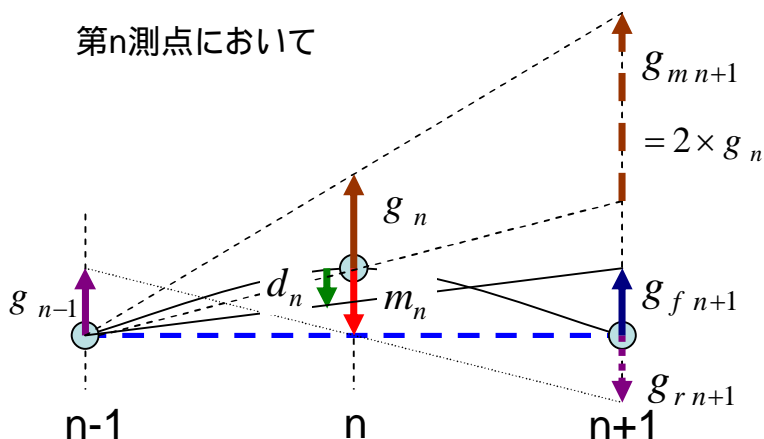
となる点4における弦先端部の移動 2測点前の移動量の-1倍

以上の影響を合計すれば

$$g_4 = g_{f4} + g_{m4} + g_{r4} = -2(f_3 + 2f_2 + 3f_1)$$

同様の計算を繰り返すことで累積法の式が導出される

第n測点において



$$g_{fn+1} = -2(d_n - m_n) = -2 \times f_n$$

$$g_{mn+1} = 2 \times g_n$$

$$= -4(f_{n-1} + 2f_{n-2} + \dots + (n-2)f_2 + (n-1)f_1)$$

$$g_{rn+1} = -1 \times g_{n-1}$$

$$= 2(f_{n-2} + 2f_{n-3} + \dots + (n-3)f_2 + (n-2)f_1)$$

$$g_{n+1} = g_{fn+1} + g_{mn+1} + g_{rn+1}$$

$$= -2(f_n + 2f_{n-1} + \dots + (n-1)f_2 + nf_1)$$

$$= -2 \sum_{i=1}^n (n+1-i)f_i$$

$$g_{n+1} = -2 \times f_n + 2 \times g_n - g_{n-1}$$

1つ前の
正矢差 × 2 1つ前の
移動量 × 2 2つ前の
移動量
× 1

軌道連続の2条件式の導出

$$\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n d_i \quad \cap \quad \sum_{i=1}^n (n+1-i)m_i = \sum_{i=1}^n (n+1-i)d_i$$

正矢差 f_i を使って同条件を書き直せば

$$\sum_{i=1}^n f_i = 0 \quad \dots$$

$$\sum_{i=1}^n (n+1-i)f_i = 0 \quad \dots$$

ここで満たしたい条件は

$$g_{n+1} = g_n = 0 \quad \text{であるので先に求めた}$$

累積法の一般式より

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= -2(f_n + 2f_{n-1} + \dots + (n-1)f_2 + nf_1) \\ &= -2 \sum_{i=1}^n (n+1-i)f_i \end{aligned}$$

この式は 条件式と同じであるため が成立すれば $g_{n+1} = 0$ である .

また $g_n = 0$ も満たすためには , $g_{n+1} - g_n = 0$ であればよい

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= \\ &= -2(f_n + 2f_{n-1} + 3f_{n-2} + \dots + (n-2)f_3 + (n-1)f_2 + nf_1) \\ &+ 2(f_{n-1} + 2f_{n-1} + \dots + (n-3)f_3 + (n-2)f_2 + (n-1)f_1) \\ &= -(f_n + f_{n-1} + f_{n-2} + \dots + f_3 + f_2 + f_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n f_i = 0 \quad \text{が示された}$$

付録6 逆行列成分に関する証明

2-(3)-b) 行列 T^{-1} 成分の規則性に関する証明

Definition 1

$$\mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

\mathbf{T}_n を $n \times n$ の上記の階差行列とする．また $|\mathbf{T}_n|$ で \mathbf{T}_n の行列式を表すこととする．

Lemma 2 $|\mathbf{T}_n|$ に対して以下が成立する．

$$|\mathbf{T}_n| = \frac{(n+1)}{2^n}$$

proof \mathbf{T}_{n+1} の行列式の値と， \mathbf{T}_{n+1} の左端の列に注目すれば，掃き出し法により以下のように計算できる：

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}_{n+1}| &= \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + (-1) \left(-\frac{1}{2}\right) \times \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$|\mathbf{T}_{n+1}| = |\mathbf{T}_n| - \frac{1}{4} |\mathbf{T}_{n-1}|$$

また明らかに $|\mathbf{T}_2| = \frac{3}{4}$

$$|\mathbf{T}_3| = \frac{1}{2}$$

漸化式の一般項を求めると

$$|\mathbf{T}_n| = \frac{(n+1)}{2^n}$$

(証明終)

Theorem 3 \mathbf{T}_n の逆行列を $\mathbf{T}_n^{-1} = (a_{ij})$ と書くことにする. このとき以下が成立する.

(1) $1 \leq i \leq j \leq n$ のとき

$$a_{ij} = \frac{2}{n+1} i(n-j+1)$$

(2) $1 \leq j < i \leq n$ のとき

$$a_{ij} = \frac{2}{n+1} j(n-i+1)$$

proof ここで(1)の場合だけを求める ((2)は全く同様に証明できる).

さて, \mathbf{T}_n の逆行列を求めるために, 余因子を計算する必要がある. $1 \leq i < j \leq n$ と仮定する. このとき, \mathbf{T}_n の i, j 余因子 a_{ij} を考えると, これは以下の行列の行列式と同じ形となる^{付1)}. この行列は i 行目と j 行目を除去した $(n-1) \times (n-1)$ 行列であり,

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{T}_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{X}_{j-i} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_{n-j} \end{array} \right)$$

上の実線部分は, 除去された i 行目であり, 右の実線は j 列目である. i 行目より左側, また j 行目より左側は形は元のままである. 従って $\mathbf{T}_{i,j}$ は $(n-i) \times (n-i)$ の階差行列であり,

同様に \mathbf{T}_{n-j} は $(n-j) \times (n-j)$ の階差行列である。その真ん中部分にあたる \mathbf{X}_{j-i} は、上につめているが、左には詰めていない。つまり、 $(j-i) \times (j-i)$ の三角行列であり、

$$\mathbf{X}_{j-i} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc} -1/2 & 1 & -1/2 & \cdots & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1/2 \end{array} \right)}_{j-i \text{ 列}} \left. \vphantom{\begin{array}{ccccc} -1/2 & 1 & -1/2 & \cdots & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1/2 \end{array}} \right\} j-i \text{ 行}$$

\mathbf{X}_{j-i} は \mathbf{T}_{j-i} が一行だけ上にずれた形をしている。(i 行目を除去したのであるからあたりまえ)。なお、三角行列の行列式は、対角成分の掛け算となる。

逆行列 $\mathbf{T}_n^{-1} = (a_{ij})$ とすると

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{(-1)^{i+j}}{|\mathbf{T}_n|} \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{|\mathbf{T}_{i-1}| \times |\mathbf{X}_{j-i}| \times |\mathbf{T}_{n-j}|}{|\mathbf{T}_n|} \\ &= \frac{2}{n+1} i(n-j+1) \end{aligned} \quad (\text{証明終})$$

Corollary 4 \mathbf{T}_n^{-1} は二軸対称行列となる。すなわち以下が成立する

- $a_{ij} = a_{ji}$
- $a_{i,n-j+1} = a_{j,n-i+1}$

\mathbf{T}_n^{-1} は二つの対称軸を持つ点対称行列となり、全体の成分を $\frac{(n+1)}{2}$ 倍することで、次の規則性を持つ

$$(1) \quad 1 \leq i \leq j \leq n \text{ のとき } a_{ij} = i(n-j+1)$$

$$(2) \quad 1 \leq j < i \leq n \text{ のとき } a_{ij} = j(n-i+1)$$

(系証明終)

3-(3)-c) 軌道接続方向の確保 条件式 式(10)(11)の証明

$$\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n d_i \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=1}^n (n+1-i)m_i = \sum_{i=1}^n (n+1-i)d_i \quad \text{であれば}$$

$$g_1 = g_n = 0 \quad \text{となることの証明}$$

Definition 5

\mathbf{d}_n を設計正矢列ベクトル, 同成分を $d_n(j)$ とする

\mathbf{m}_n を測定正矢列ベクトル, 同成分を $m_n(j)$ とする

Definition 6

移動量列ベクトル \mathbf{g}_n は以下のように与えられる

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{T}_n^{-1}(\mathbf{d}_n - \mathbf{m}_n)$$

正矢差列ベクトル \mathbf{f}_n , 同成分 $f_n(j)$ は以下のように与えられる

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{d}_n - \mathbf{m}_n$$

$$f_n(j) = d_n(j) - m_n(j)$$

このとき明らかに $\mathbf{g}_n = \mathbf{T}_n^{-1} \mathbf{f}_n$ が成立する.

Theorem 7

$$\sum_{j=1}^n (n+1-j) f_n(j) = 0 \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^n f_n(j) = 0 \quad \text{であれば}$$

$$g_n(1) = g_n(n) = 0 \quad \text{を満たす}$$

proof 定義, および前系の証明より

$$\begin{pmatrix} g_n(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_n(n) \end{pmatrix} = \frac{n+1}{2} \begin{bmatrix} n(n-1)\cdots 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(n) \end{pmatrix}$$

が成立するので, 以下は自明である.

$$g_n(1) = \frac{n+1}{2} \{ n f_n(1) + (n-1) f_n(2) + \cdots + 1 f_n(n) \} \quad \dots$$

$$g_n(n) = \frac{n+1}{2} \{ 1 f_n(1) + 2 f_n(2) + \cdots + n f_n(n) \} \quad \dots$$

さて, 式は条件

$$\sum_{j=1}^n (n+1-j) f_n(j) = 0$$

と同値であり, $g_n(1) = 0$ は明らかである.

次に, $+$ を考える

$$\begin{aligned} g_n(1) + g_n(n) &= 0 + g_n(n) \\ &= \frac{(n+1)^2}{2} (f_n(1) + f_n(2) + \cdots + f_n(n)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{2} \sum_{j=1}^n f_n(j) \end{aligned}$$

であり, $g_n(1) = 0$ かつ $\sum_{j=1}^n f_n(j) = 0$ の下では $g_n(n) = 0$ も成立する.

(証明終)

付録7 行列の固有値

2-(4)-a 表-3 式(28)(29) 固有値導出までの証明

Theorem 8 任意の自然数 n に対し, 以下の集合 Λ_n は, \mathbf{T}_n の固有値の集合となる.

$$\Lambda_n = \left\{ 1 - \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) : 0 < i \leq n \right\}$$

集合 $\Lambda_n = \left\{ 1 - \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) \right\}$ の i 番目を以下の

ように表記する. ($0 < i \leq n$)

$$\lambda_{ni} = 1 - \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)$$

このとき, $1 = \cos(0)$ であり

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \text{ より}$$

任意の $0 < j \leq n$ に対し以下が成立する.

$$\begin{aligned} \lambda_{nj} &= 1 - \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \\ &= 2 \sin^2\left(\frac{j\pi}{2(n+1)}\right) \end{aligned}$$

本来証明しなければならないことは, 行列式 $|\mathbf{T}_n|$ は固有値の積としても書けるはずなので, 以下の等式である:

$$|\mathbf{T}_n| = \prod_{j=1}^n 2 \sin^2\left(\frac{j\pi}{2(n+1)}\right)$$

ところで, 以下の結果が知られている^{付2)}.

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right) = \frac{2n}{2^n}$$

このとき, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ が成立するため

$$\prod_{i=1}^n \sin\left(\frac{i}{2(n+1)}\pi\right) = \prod_{i=n+1}^{2n+1} \sin\left(\frac{i}{2(n+1)}\pi\right)$$

$$\therefore \prod_{i=1}^n \sin\left(\frac{i}{2(n+1)}\pi\right) = \sqrt{\frac{2 \times 2(n+1)}{2^{2(n+1)}}}$$

Lemma 2 より以下が成立する .

$$\prod_{j=1}^n 2 \sin^2\left(\frac{j\pi}{2(n+1)}\right) = 2^n \times \frac{2 \times 2(n+1)}{2^{2(n+1)}}$$

$$= \frac{n+1}{2^n}$$

以上により定理は示された . (証明終)

付録 8 固有ベクトルと固有空間

2-(4)-a 表-3 式(30)正規固有ベクトル導出の証明

Theorem 9 \mathbf{T}_n の固有値 λ_{ni} に対応する固有ベクトル $\vec{\mathbf{v}}_{ni}$ は以下のようにあらわされる :

$$\vec{\mathbf{v}}_{ni} = k \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{ni\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix}$$

proof \mathbf{T}_n の任意の固有値 λ_{ni} を取る .このとき ,固有方程式は以下のようにあらわされる .
(ただし \mathbf{E}_n は $n \times n$ の単位行列) :

$$(\mathbf{T}_n - \lambda_{ni}\mathbf{E}_n)\vec{\mathbf{v}}_{ni} = \vec{\mathbf{0}}$$

ここで

$$\mathbf{T}_n - \lambda_{ni} \mathbf{E}_n = 0$$

を Theorem 8 の結果とあわせ計算すると，固有方程式は，次の連立方程式と同値となる．

($\vec{v}_{ni} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とおく．)

$$\begin{aligned} x_1 \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) - \frac{1}{2}x_2 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) - \frac{1}{2}x_3 &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_{n-1} \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) - \frac{1}{2}x_n &= 0 \end{aligned}$$

ここで $x_1 = k \sin\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)$ を満たすある実数 k をとる．このとき以下が成立する．

Lemma 10 任意の $1 \leq m \leq n$ に対し

$$x_m = k \sin\left(\frac{mi\pi}{n+1}\right) \text{ が成立する．}$$

proof

・ $m=2$ のとき

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 \left(k \sin\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) \right) \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) \\ &= 2k \frac{\sin\left(\frac{i\pi}{n+1} + \frac{i\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{i\pi}{n+1} - \frac{i\pi}{n+1}\right)}{2} \\ &= k \sin\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right) \end{aligned}$$

• $m=j+1$ のとき

(j に対して補題が成立していると仮定)

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= 2k \sin\left(\frac{ji\pi}{n+1}\right) \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) \\ &= k \sin\left(\frac{i(j+1)\pi}{n+1}\right) + k \sin\left(\frac{i(j-1)\pi}{n+1}\right) - k \sin\left(\frac{i(j-1)\pi}{n+1}\right) \\ &= k \sin\left(\frac{i(j+1)\pi}{n+1}\right) \end{aligned}$$

補題は示された .

(補題証明終)

補題により , 定理が示されるのは自明である .

(証明終)

Definition 11 \mathbf{T}_n の固有ベクトルを並べ , 以下の行列を定義する .

$$\mathbf{H}_n = (h_{ij} : 1 \leq i, j \leq n) = \left(\sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right) : 1 \leq i, j \leq n \right)$$

\mathbf{H}_n は , \vec{v}_{ni} を左から並べたものとも見なせるため , $\mathbf{H}_n = (\vec{v}_{n1}, \vec{v}_{n2}, \dots, \vec{v}_{nn})$ とも表記する . このとき , 以下は自明である .

- 任意の i, j に関し $h_{ij} = h_{i(n-j)}$ が成立する (行列は上下対称である)
- \mathbf{H}_n は対称行列である (したがってエルミート行列の特殊ケースである)

Theorem 12 $\sqrt{\frac{2}{n+1}} \vec{v}_{ni} : 0 \leq i \leq n$ は正規直交基底である

proof まず , 直交基底であることは , \mathbf{H}_n が対称行列であることから明らか .

次に , \vec{v}_{ni} の絶対値を計算すると

$$\vec{v}_{ni} \cdot \vec{v}_{ni} = k^2 \left(\sin^2\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) + \sin^2\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right) + \dots + \sin^2\left(\frac{ni\pi}{n+1}\right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k^2}{2} \left(\left(1 - \cos \left(\frac{2i\pi}{n+1} \right) \right) + \cdots + \left(1 - \cos \left(\frac{2ni\pi}{n+1} \right) \right) \right) \\
&= \frac{k^2}{2} \left(n - \sum_{i=1}^n \cos \left(\frac{2i\pi}{n+1} \right) \right)
\end{aligned}$$

ここで以下の公式が知られている．^{付3)}

$$\sum_{i=0}^n \cos(a + bi) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right) \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

公式を適用すると

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right) &= \sum_{i=0}^n \cos\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right) - 1 \\
&= \frac{\sin\left(\frac{2\pi(n+1)}{2(n+1)}\right) \cos\left(0 + \frac{2n\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{2(n+1)}\right)} - 1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

従って，この結果を前式に代入すれば

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{ni}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{ni}} = \frac{k^2(n+1)}{2}$$

以上より， $k = \sqrt{\frac{2}{n+1}}$ のとき，単位ベクトルとなり，正規直交基底となる．（証明終）

付録9 固有空間のスペクトル分解

2-(4)-a 表-3 式(32)(33) 行列スペクトル分解式導出・
および正弦波分解となることの証明

さて, \mathbf{H}_n は \mathbf{T}_n を対角化する. すなわち

$$\mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{T}_n \mathbf{H}_n = \begin{pmatrix} \lambda_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{n2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

言い換えれば, 以下が成立する.

Definition 13 ($\sqrt{\frac{2}{n+1}} \bar{\mathbf{v}}_{ni} : 1 \leq i \leq n$) を \mathbf{P}_n と略記する.

また, \mathbf{P}_n の各列ベクトルを $\bar{\mathbf{u}}_i$ と記述する. つまり

$$\mathbf{P}_n = (\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \dots, \bar{\mathbf{u}}_n)$$

$(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \dots, \bar{\mathbf{u}}_n)$ はもちろん正規直交基底をなす. このことから以下の補題は自明である.

Lemma 14 \mathbf{P}_n の逆行列はその転置行列 ${}^t \mathbf{P}_n$ である. (証明略)

Lemma 15

$${}^t \mathbf{P}_i \mathbf{T}_n \mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} \lambda_{ni} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{n2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

つまり, $\mathbf{P}_i ({}^t \mathbf{P}_i \mathbf{T}_n \mathbf{P}_i) {}^t \mathbf{P}_i = \mathbf{T}_n$ のため

$$\mathbf{T}_n = (\bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_n) \begin{pmatrix} \lambda_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{n2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} ({}^t \bar{\mathbf{u}}_1, \dots, {}^t \bar{\mathbf{u}}_n)$$

が成立するため，以下が成立する．

$$\mathbf{T}_n = \lambda_{n1} \vec{\mathbf{u}}_1 \vec{\mathbf{u}}_1^t + \cdots + \lambda_{nn} \vec{\mathbf{u}}_n \vec{\mathbf{u}}_n^t$$

(証明略)

Definition 16 以下の行列を定義する．

$$\mathbf{S}_{ni} = \vec{\mathbf{u}}_i \vec{\mathbf{u}}_i^t$$

このとき，以下は自明である．

Lemma 17

- (1) $\mathbf{S}_{ni}^2 = \mathbf{S}_{ni}$
- (2) $\mathbf{S}_{ni}^* = \mathbf{S}_{ni}$
- (3) $i \neq j$ ならば $\mathbf{S}_{ni} \mathbf{S}_{nj} = 0$

proof

(1) は正規系の性質より明らか

$$(\vec{\mathbf{u}}_j \vec{\mathbf{u}}_j^t = \vec{\mathbf{u}}_j \vec{\mathbf{u}}_j^t \vec{\mathbf{u}}_j \vec{\mathbf{u}}_j^t)$$

(2) は実行列であることから自明．

(3) は直交系であることから自明． (補題証明終)

この補題は，つまり以下を示している：

Theorem 18

$(\mathbf{S}_{ni} : 1 \leq i \leq n)$ は行列 \mathbf{T}_n のスペクトル分解を与える．すなわち， \mathbf{T}_n の固有値による固有空間 W の直和分解

$$W(\lambda_{n1}) \oplus W(\lambda_{n2}) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_{nn})$$

を考えると， $(\mathbf{S}_{ni} : 1 \leq i \leq n)$ はその射影分解族となる．すなわち

• $\mathbf{S}_{nj} : W_\Lambda \rightarrow W(\lambda_{nj})$ の埋め込みであり，

• \mathbf{T}_n は以下を満たす．

$$\mathbf{T}_n = \sum_{j=1}^n \lambda_{nj} \mathbf{S}_{nj}$$

proof 射影分解族となることは、前補題より明らかである。

つまり \mathbf{T}_n は、任意の n 次元ベクトルを、

$$\left\{ \sin\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) : 1 \leq j \leq n \right\} \quad \text{という方向の基底へと分解する}$$

固有空間上の n 次元列ベクトルへと基底変換を行う。

それぞれの軸を見ることは、任意の n 次元列ベクトルの

$$\sin\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \text{ 成分を見ることと同じである。} \quad (\text{証明終})$$

また、逆行列に関し、以下が成立する。

Corollary 19 \mathbf{T}_n の逆行列 \mathbf{T}_n^{-1} は以下を満たす：

$$\mathbf{T}_n^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_{nj}} \mathbf{S}_{nj}$$

proof $\mathbf{S}_{ni} = \vec{\mathbf{u}}_i^t \vec{\mathbf{u}}_i$ であり、 $\vec{\mathbf{u}}_i$ が固有ベクトルであることより明らかである。(系証明終)

従って、以下が成立する。

Definition 20 p をベクトルの間隔の長さとする。

Theorem 21 $\vec{\mathbf{X}}$ を任意の n 次元ベクトルとする。このとき、 \mathbf{S}_{ni} は $\vec{\mathbf{X}}$ の波長 $\frac{2p(n+1)}{i}$ の

\sin 波成分を抽出する。すなわち、以下の等式が成立する：

$$\vec{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_{ni} \vec{\mathbf{X}}$$

ここで各項 $\mathbf{S}_{ni} \vec{\mathbf{X}}$ は、波長 $\frac{2p(n+1)}{i}$ の \sin 波形状のベクトルであるので、

上式は、任意の n 次元ベクトル $\vec{\mathbf{X}}$ 自らの n 個の周波数分解成分列ベクトルに相当するということができる。

proof 前補題および系から，以下が成立する．

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n &= \mathbf{T}_n \mathbf{T}_n^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_{ni} \mathbf{S}_{ni} = \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_{ni} \end{aligned}$$

(証明終)

証明内の注釈

付1) 実際には，一部，0行列の部分が残ることもあるが，これは基本変形により除去し，0行列と見なすことができる．

付2) 詳細については以下を参照のこと：

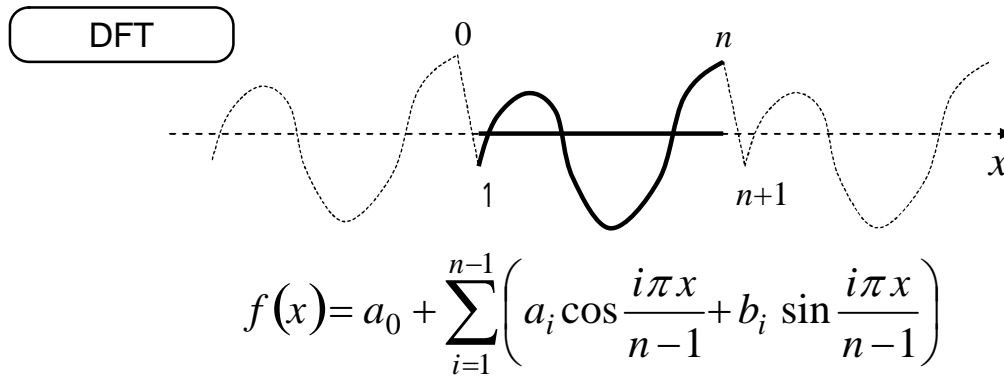
・ <http://mathworld.wolfram.com/Sine.html>

付3) 詳細については以下を参照のこと：

・ <http://evergreen.loyola.edu/mpknapp/papers/knapp-sv.pdf>

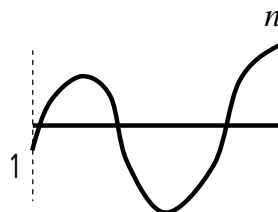
付録10 フーリエ変換と行列スペクトル分解周期性および相互関係の考察

フーリエ変換は対象区間を周期関数として扱うため，定義した区間($x=1 \sim x=n$)以外にも同関数が拡張して考えられている．



これに対し，行列スペクトル分解は線形写像という 図形変換行為を基礎の理論としているので，定義した区間のみで各種の解析は完結しているという違いがある．

行列スペクトル分解



本研究で扱った，正変換行列 \mathbf{T} (=二階差分行列)の固有値・固有ベクトル，及び同固有空間行列成分は 三角関数を用いて表わすことができる特徴をもつ．

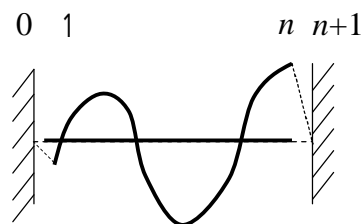
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

固有値：
$$\lambda_{Ti} = \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n+1}\right)$$

正規固有ベクトル：
$$u_{i,j} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{i\pi}{n+1} j$$

固有空間行列：
$$S_{i(j,k)} = \frac{2}{n+1} \left(\sin \frac{i\pi}{n+1} j\right) \left(\sin \frac{i\pi}{n+1} k\right)$$

この特徴を利用し，次の関数を定義し



$$f(x) = \sum_{i=1}^n C_i \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left(\sin \frac{i\pi}{n+1} x\right)$$

「仮に定義外の区間に同関数を拡張した場合に，どのような挙動となるか」
 についての考察をおこなう．

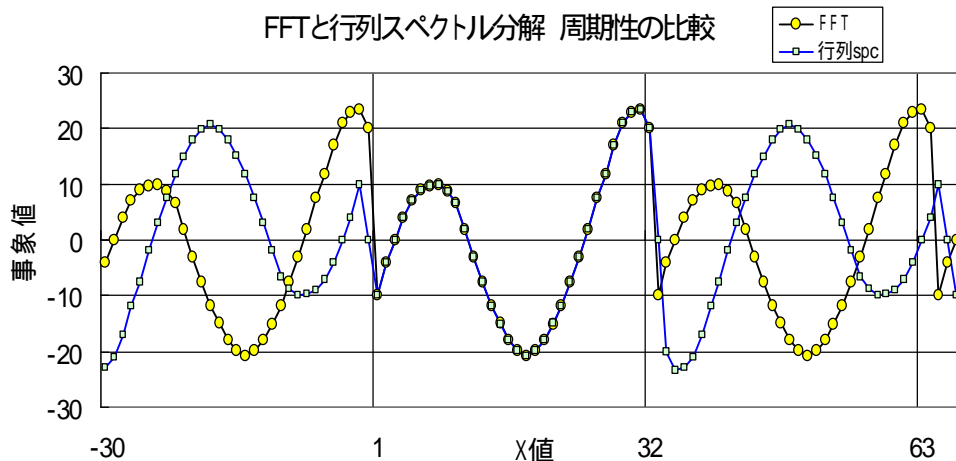
区間両隣接点 ($x=0$ $x=n+1$) への拡張

両隣接点においては，各固有ベクトルが定常波関数である事より，必ず=0 の値を取る．この特性が保線の実務に適用する上で大変有用であることは本文でも記述したとおりである．

他領域 ($x < 0$ $x > n+1$) への拡張

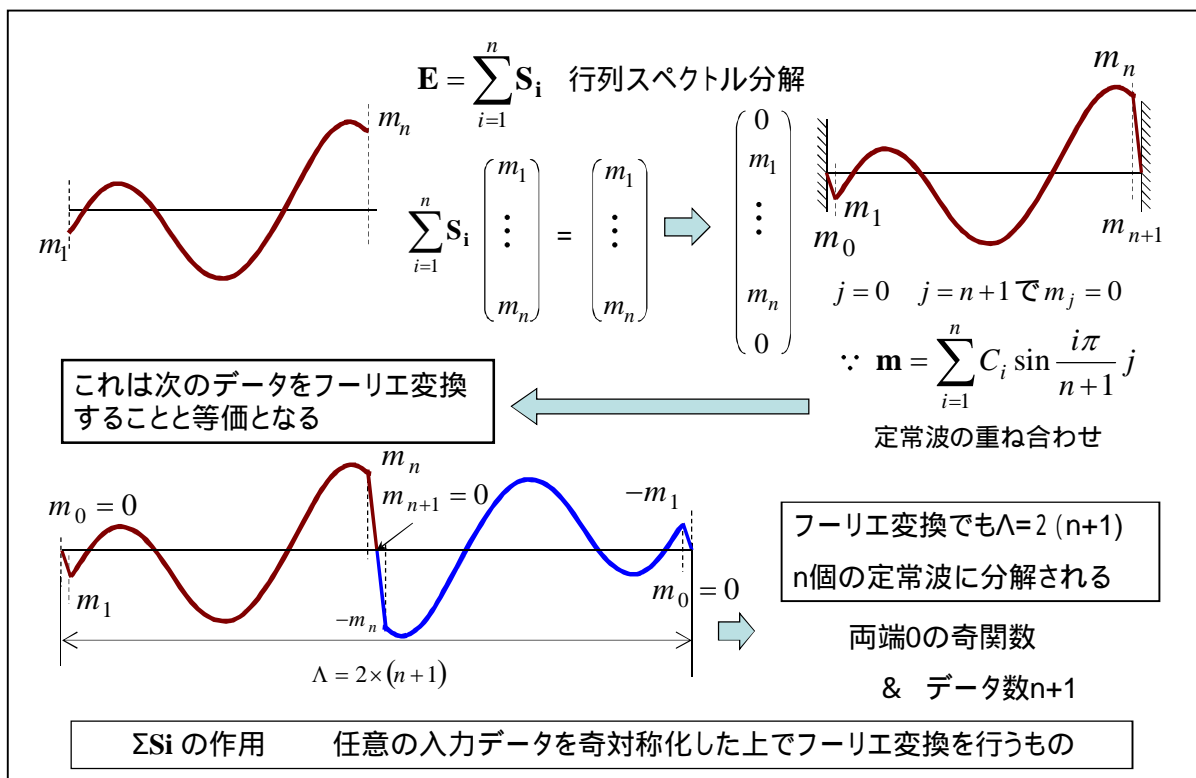
固有ベクトルが \sin 関数であるため，周期関数は奇対称性を持つ．定義区間 ($x=1 \sim 32$) の関数を拡張した場合のDFT (FFT) との挙動の違いは次図のとおり．

行列スペクトル分解は，点対称の周期性を持つ．



本研究で扱った正変換行列 \mathbf{T} (=二階差分行列)のスペクトル分解作用とは、
 $1 \sim n$ のサンプリングデータを両外方に0を加え、点(奇)対称化した $2 \times (n+1)$ の周期関数とした上でフーリエ変換をおこなうことと等価であると考察される。

尚、 $1 \sim n$ のサンプリングデータは一切の特別な処理を経ることなく、上記の処理が行われることになる。



この任意入力サンプリングデータの「奇対称化+フーリエ変換機能」にどのような利用価値があるかについては今後の興味深い研究テーマである。

付録 1 1 片持ち梁モデルを用いた線形分離法

測定正矢 m_i から鉄道曲線の基本成分である設計正矢 d_i を、特に緩和曲線の長さを保ちつつ、その他の部分においては、緩和曲線長以上の波長成分についても除去できる事をその特徴とする線形分離法である。

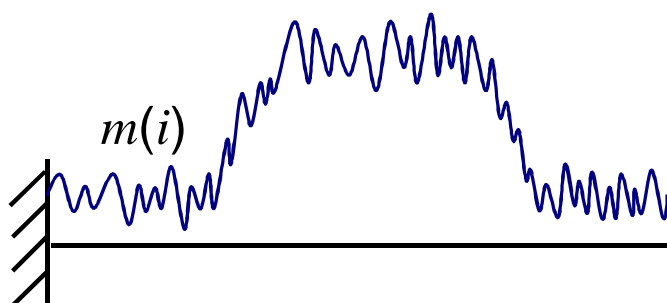
計算は構造力学で用いる片持ち梁モデルの釣合いに着目し、測定正矢 m_i と設計正矢 d_i を同梁上の分布荷重と見なし、両者の支点反力・支点モーメントが等価となるように、設計正矢 d_i の値と位置を調整する方法を用いている。具体的な計算プロセスを以下に示す。

曲線の設計条件を与える

TCL(入)・CL(曲線長)

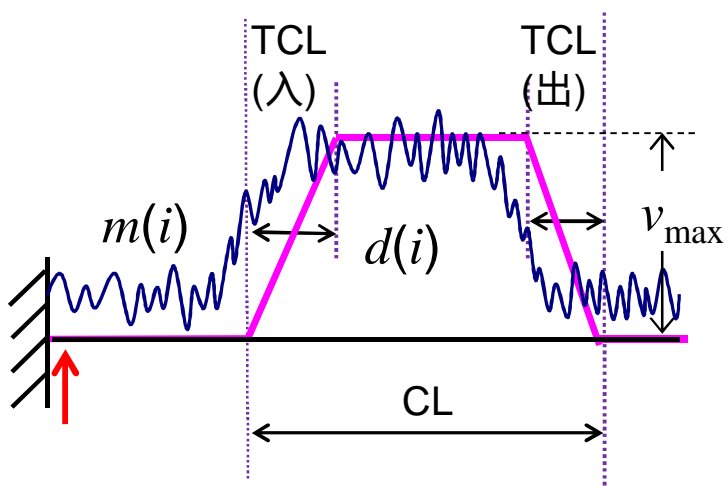
複心・反向曲線では上記に加えて各半径 R_i (相互の正矢差 v 確定のため)

測定正矢 m_i を梁上に配置する



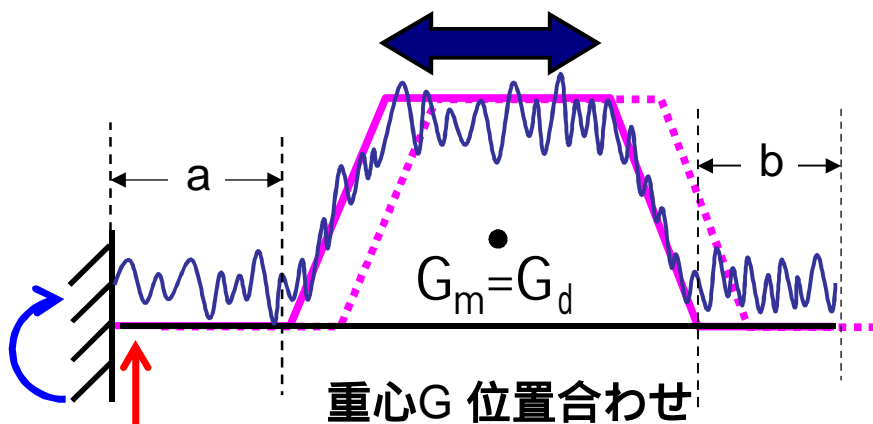
支点反力の釣合条件から d_i を設定する

$\sum m_i = \sum d_i$ の条件から d_i を設定する。このとき曲線部の正矢量 v_{max} を変数とする。



分布荷重 m_i と分布荷重 d_i の重心位置を一致させる

片持ち梁上で d_i を距離軸方向に動かす



G_m : 分布荷重 m_i の重心位置

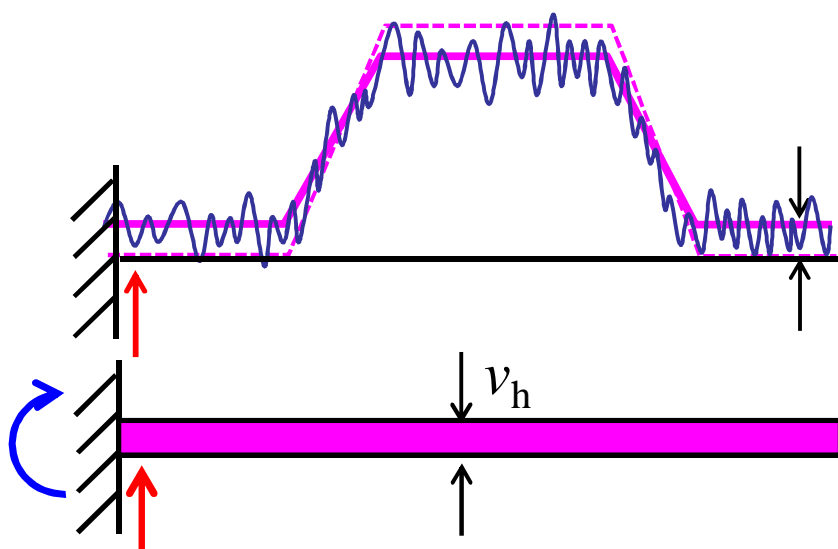
G_d : 分布荷重 d_i の重心位置

直線部の基準線 v_h を算定する

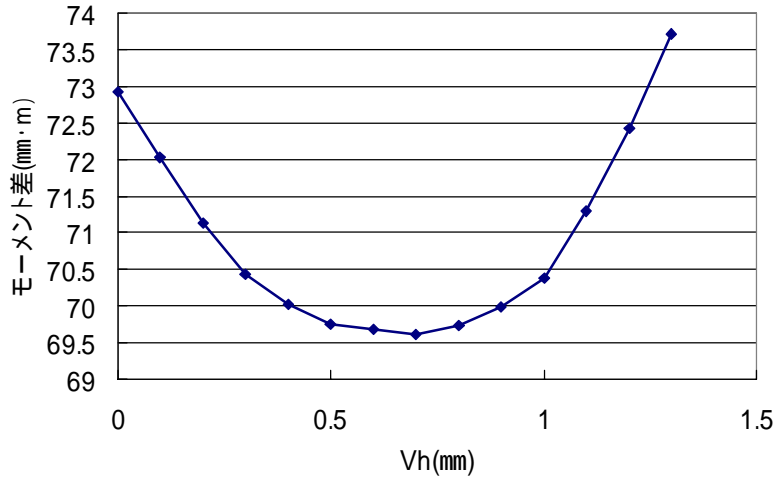
直線部 (付図の区間 $a \cdot b$) における m_i の平均が0でない場合は

$\sum m_i = \sum d_i$ の関係を保持しながらTCLを変えずに d_i を再設定する .

(設定された直線部の d_i を v_h とする)

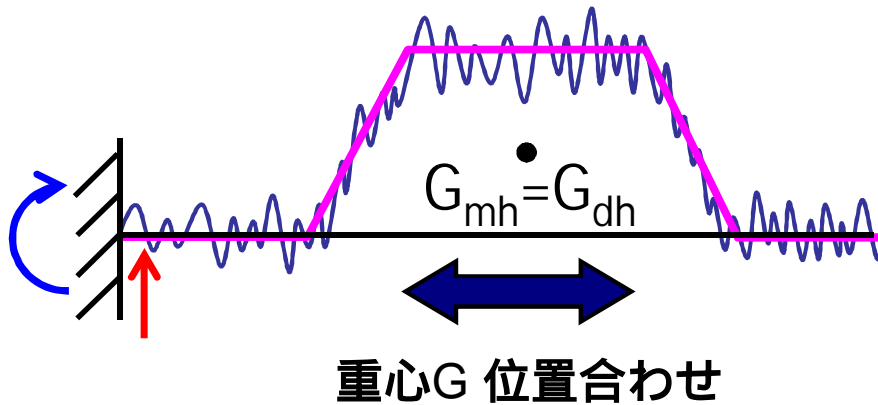


なお終了条件は、 d_i と m_i のモーメント差を指標とする。具体的には v_h を微小STEPずつ増加（減少）させながらモーメント差が極小となる値を、挟み撃ち法で求める。



再重心あわせと最終設計正矢 d_i (final) の決定

m_i 並びに d_i から v_h を差し引き、再度、梁上で重心の位置が一致するように $(d_i - v_h)$ を梁上で距離軸方向に動かし、最終の設計正矢 d_i (final) が決定される。



G_{mh} : 分布荷重 $(m_i - v_h)$ の重心位置

G_{dh} : 分布荷重 $(d_i - v_h)$ の重心位置

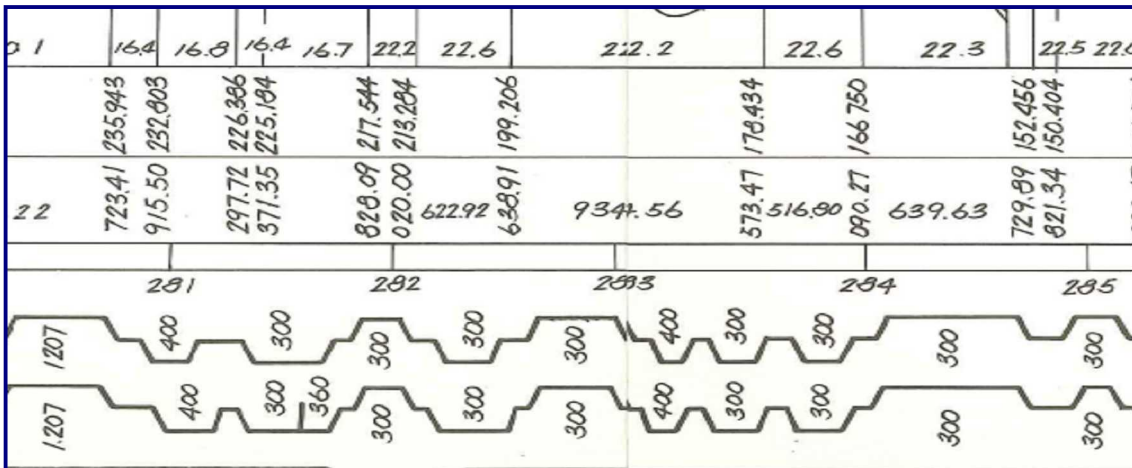
この計算法により $\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n d_i$ かつ $\sum_{i=1}^n (n+1-i)m_i = \sum_{i=1}^n (n+1-i)d_i$

を満たす、設計正矢 d_i を得ることができる。この設計正矢 d_i を用いて交差法計算を行えば

$g_1 = g_n = 0$ となることが保証され、前後の軌道と方向を変えずに連続となる曲線整正を行うことができる。

この計算では、曲線半径R[m] (= 曲線部の正矢 v_{max}) を変数として扱っている。

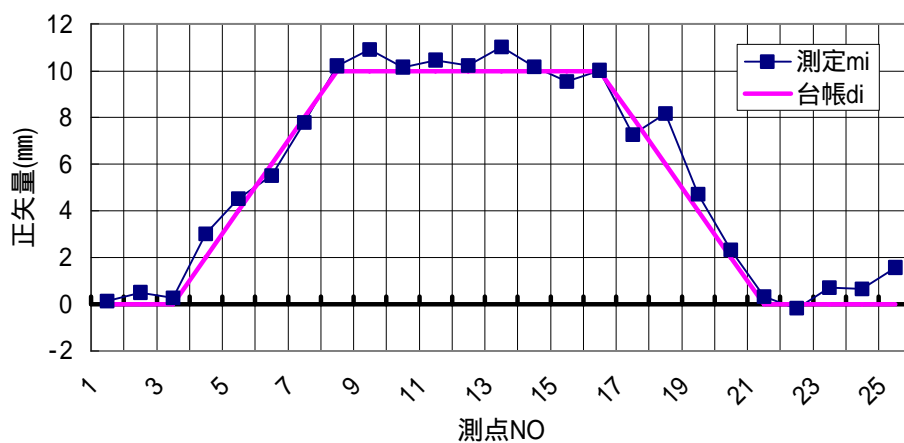
これは次の図で示すように現在の曲線管理台帳での半径R [m] は、特に在来線においては敷設時の路線測量に用いた線路中心線（上下線の中心）で管理されていることによる。



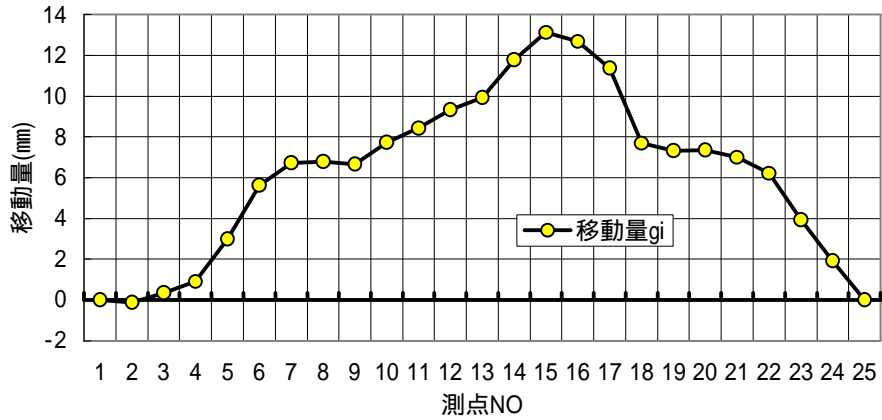
このため台帳半径R[m]から逆算する設計正矢 d_i をそのまま採用した場合、現存の正矢測定値からズレを生じ、移動量が一方に偏るなど実際の曲線整正に使用するには不適切な場合が多く発生する。

以下に台帳線形（曲線部 $V=10$ $R=1250$ ）をそのまま適用させた為に生じた不適切な移動量の一例を示す。

現実の測定正矢に対し、マイナス側にずれた設計正矢が設定された事による、移動量の偏奇が確認できる。

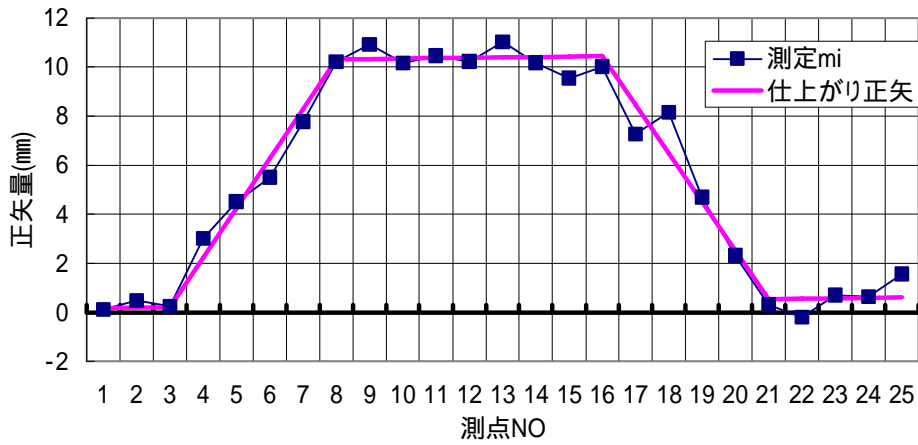


台帳半径Rで設定した設計正矢



台帳半径Rで設定した場合の偏奇を持った移動量

なお、計算された移動量で施工された場合の仕上がり正矢は下図に示す形状となり、当初に指定した半径 R ($V=10$ $R=1250$) を持つ曲線とはならず曲線全体が直線に対し歪んだ状態となる。



仕上がり正矢 (台帳半径Rによる設計移動量による)

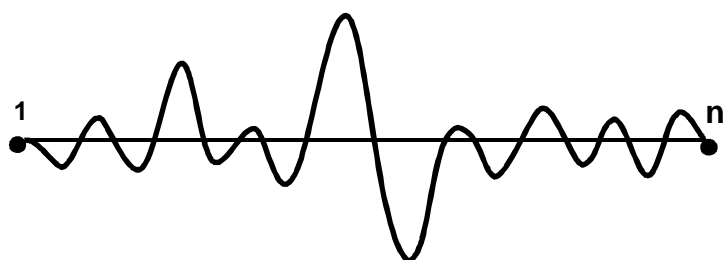
付録 1 2 交差法演算における各種制約条件の最適化手法

JR西日本の交差法線形整備システムの中で用いている 現場毎で異なる各種の移動制約条件を移動量計画（理想） g から修正移動量 g' に変換する最適化手法の考え方を示す。

交差法の持つ測点 l と測点 n が 移動量=0となり同一軸上となる特性と、実際のMTT作業において移動制限条件で行われている回避操作を参考に、以下のフローにより計算をおこなっている。

計算原理・処理ロジック

STEP- 0 制約条件のない状態で移動量 g_i を求める



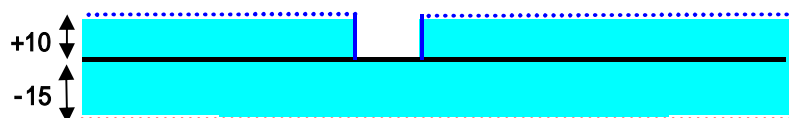
STEP- 1 各地点の移動制限を与える。

例として

全体で	+側	10(mm)	-側	15(mm)
個別に	+側	0(mm)	-側	15(mm)

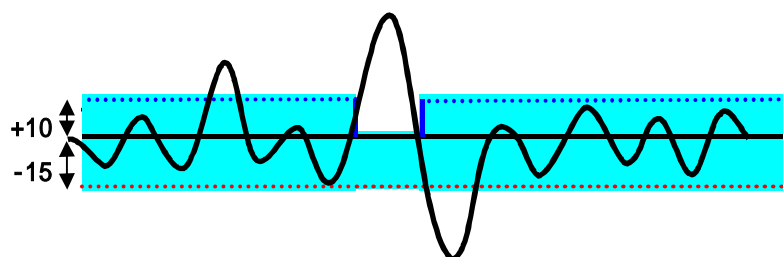
 を設定

移動制限に対するチェックフレームを作る

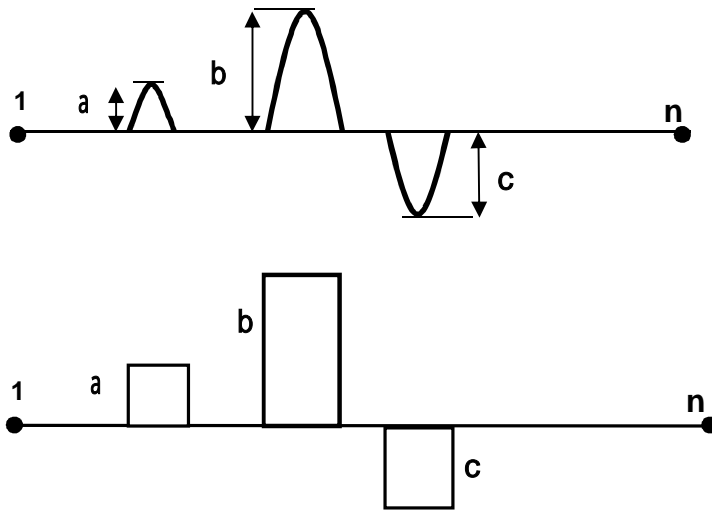


STEP- 2 チェックフレームに移動量 g_i を重ねて

はみ出した部分（残像）を切り出す



STEP- 3 残像を囲い込む，矩形波をつくる

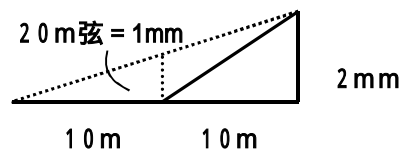


STEP- 4 整備対象線区の走行速度によって設定した角度の下限値を用いて，測点1 - 測点n 軸に対して取り付けをおこなう．
軸に対する取り付け角度の下限値は表のとおり．

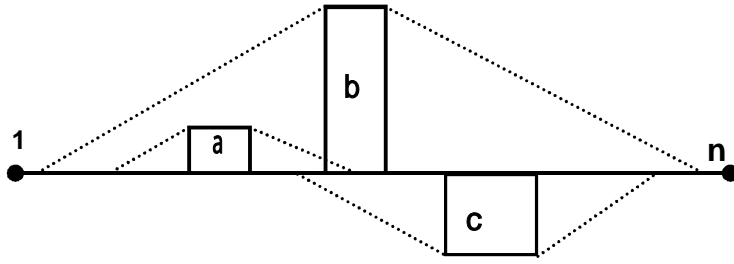
在来線 一般区間	V 100	10m弦において ±1 (mm) の角度
在来線 高速区間	V > 100	20m弦において ±1 (mm) の角度
新幹線	V 200	40m弦において ±1 (mm) の角度

区間超過する場合は最遠点を取り付け点とする

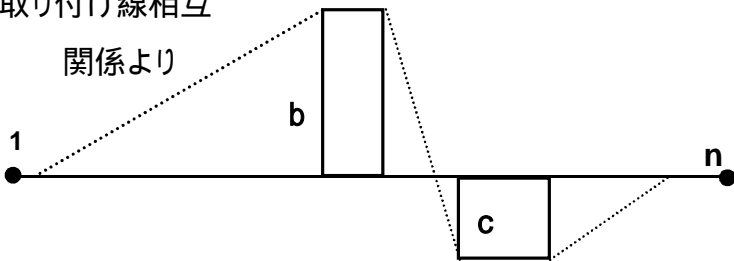
【例】



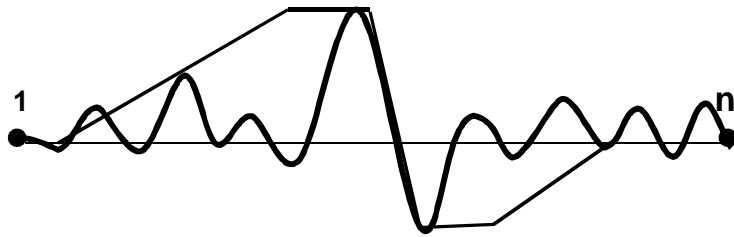
±1(mm)/20m 弦の場合、5000倍の取り付け倍率に相当する．



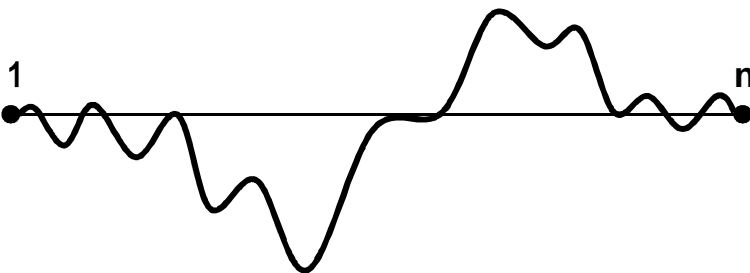
取り付け線相互
関係より



STEP- 5 導出された取り付け線を，移動量 g_i に新基準線として修正移動量 g_i' を求める．



修正移動量 g_i'



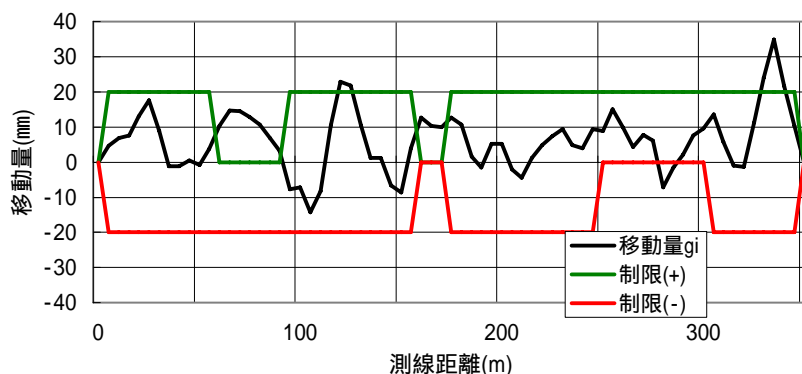
修正移動量 g_i' に STEP- 1 で設定したチェックフレームを適用し

- ・ 残像が出現しない 演算終了・修正移動量確定
- ・ 残像が出現する STEP- 3 以下の演算を繰返す

一連の処理フローを「ルートサーチロジック」と名づけ，JR西日本の交差法演算システムで使用している．

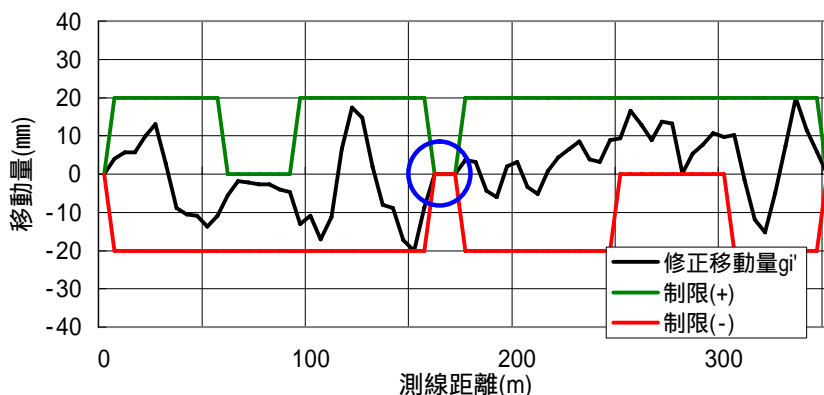
実際の適用事例（通り）

[ルートサーチ実施前]



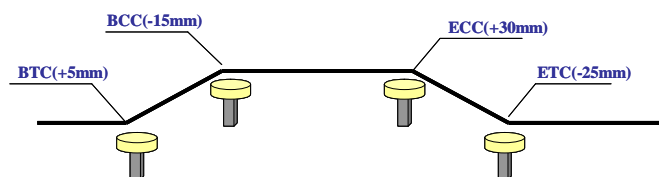
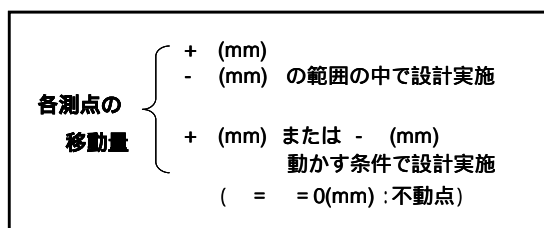
交差法により計算された直後の移動量．各測点で与えられた移動制限（+）（-）のラインをこの段階では まだ超過している．

[ルートサーチ実施後]



各測点での移動制限（+）（-）を満足させるようにルートサーチロジックを用いた修正を実施したもの．全測点の移動量が制限条件を満たしていることが確認できる．

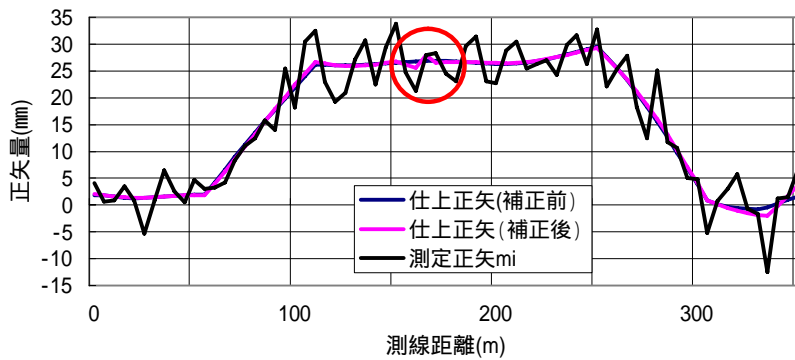
区間中央部付近は不動区間（ 枠の区間：実場面では橋梁や接続軌道などの既設構造物が該当する）の箇所であり移動量=0 に修正が行われている．



天頂衛星を用いた絶対座標管理(将来)へも対応

また本ロジックでは左図枠内に示した、いずれの条件での最適化も可能であり、将来的なGPS測量等とリンクさせた絶対基準座標管理にも対応する拡張性を持たせている．

[ルートサーチ前後の仕上がり正矢比較]



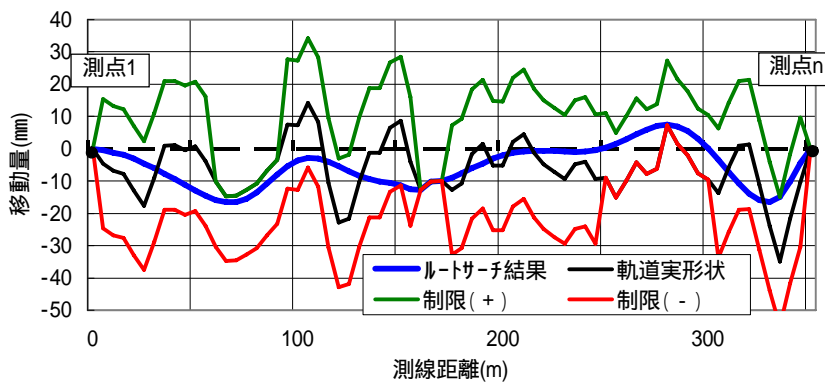
設定した制限の緩和の要否は、仕上がり正矢図を基に個別に検討を実施する。

この例では「制限を行った仕上がり正矢は、行わない場合より 印をで示した不動区間付近では差があるものの、現状の軌道狂いは十分に改善が期待でき、別途時間と費用を掛けての不動点条件の緩和のを行う必要性は低い」と判断が可能である。併せて、いずれの箇所も元の測定正矢を改悪させる計算は行なわれていないことが確認できる。

尚、全測点の制限=±0 として計算すれば、測定正矢と仕上がり正矢は完全に一致する。

(= 現状の軌道形状が最適解である)

現状の軌道実形状を中心としたグラフを描くことで、ルートサーチロジックの考え方が、より明確となる。



「ルートサーチロジック」とは

- ・ 交差法により得られる、前後軌道との接続方向が変わらず移動量=0となる測点1と測点n を結ぶ軸上において
- ・ 現軌道実形状の周りに設定された“ 移動制限という道幅 “ をはみ出すことなく辿りつけるルートを
- ・ スタートからゴールまでのハンドル角の変化 (正矢の凹凸) を最小化指標として用いて繰り返し計算により求める

手法であると解釈できる。

付録 1 3 交差法演算（高低）における実際の計算・検討例

高低狂い整備においては軌道を低下させることが基本的には困難なため、交差法で得られた移動量に

移動量 制限 (+) : 測点毎に任意設定
 移動量 制限 (-) = 0 : 全測点共通

の条件を付した最適化演算が行われる。

設定した条件下で「どこまで滑らかな軌道線形が設定できるか」を現状の正矢と比較しながら検討し、計画の良否を判断する。この一連の流れを具体的な事例を用いて説明する。

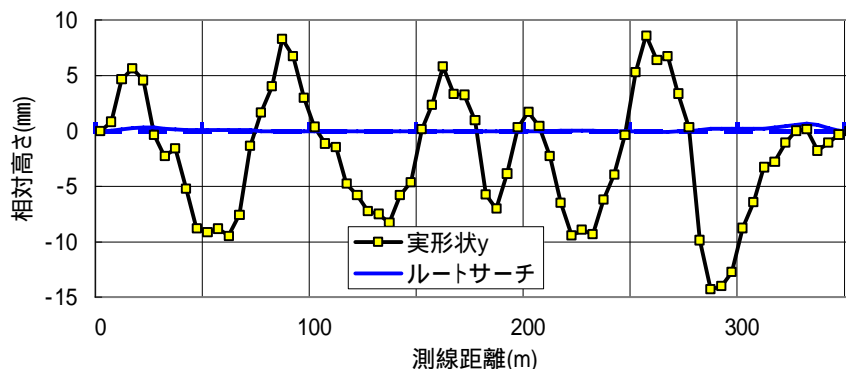
理想的な整備計画の策定

交差法 (Λ_{dm} を指定した長波長側の波長選択機能による) 演算により現軌道の実形状が把握される。この時点では通り狂い整備と同様に \pm の移動量が指示される。

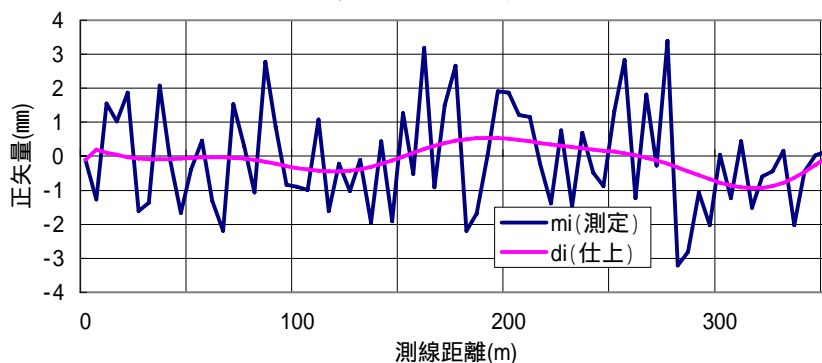
グラフの「実形状y」とは測点1 ~ 測点n 間を結ぶ軸を基準とした、各測点の相対的な高さを示している。

なお、仕上がり正矢に残る波長の長いうねりは、設計時に $\Lambda_{dm}=100$ [m] とし、それ以上の成分を整備対象から除外した結果生じているものであり、意図したものである。

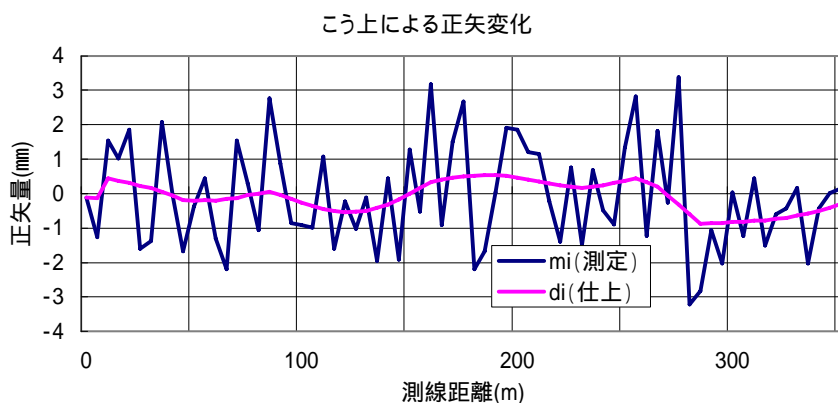
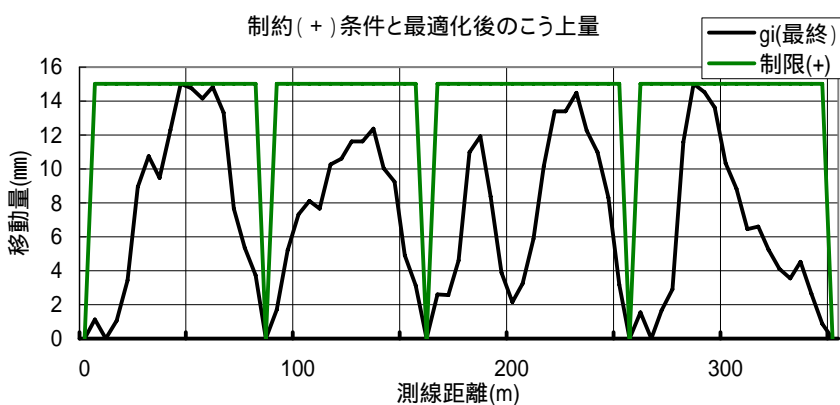
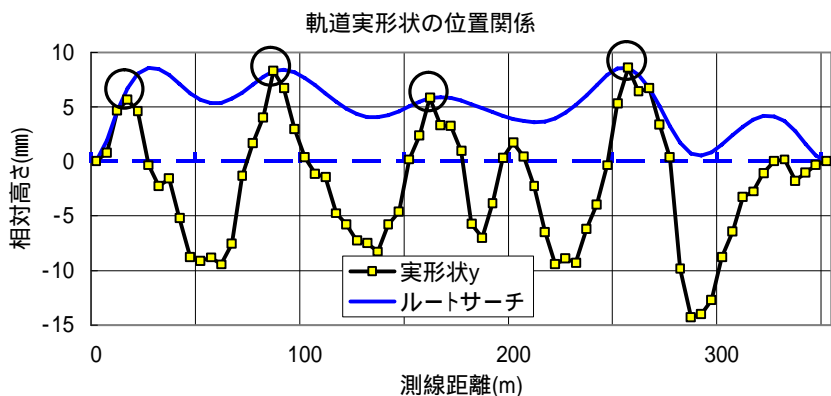
軌道実形状の位置関係



こう上による正矢変化



相対的に高い箇所（コントロールポイント：以下 CP）をこう上させない修正計画



作業区間内の相対高さより CP（印：4点）を設定．

同箇所に	制限(+) = 0
それ以外の測点は	制限(+) 15(mm)

での条件を付し の計画を最適化したもの．

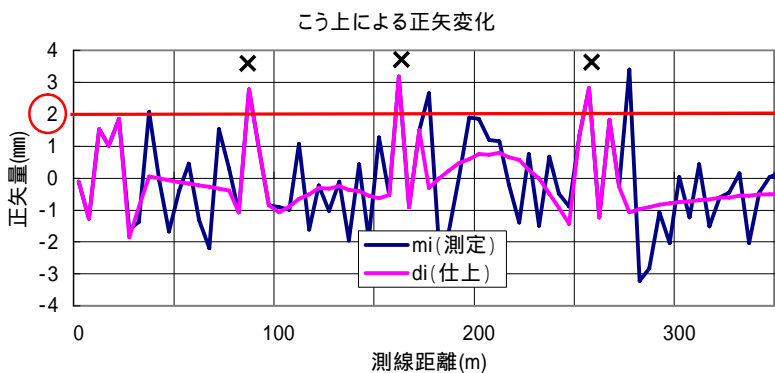
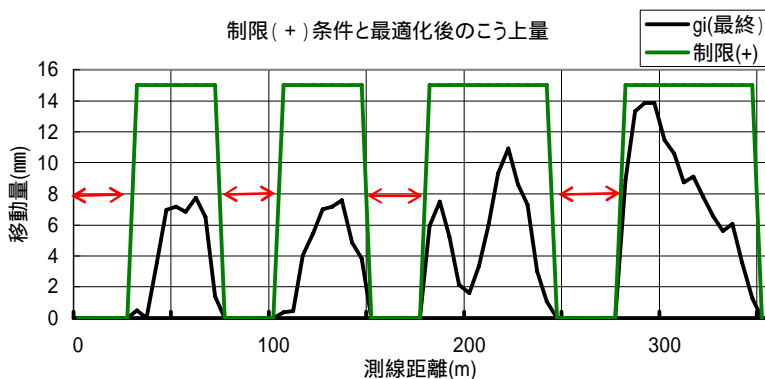
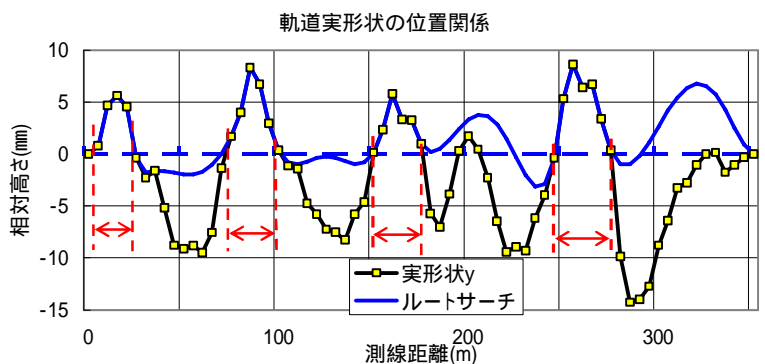
提示ルートまでのこう上による仕上がり正矢は、最下段図のとおり査定され、設定した CP のこう上を行わなくとも、軌道状態の改善は十分期待できると考察される．

平均ラインより低いエリアのみをこう上させる修正計画

で求めた実形状 y の相対高さ=0(mm) よりも低い位置にあるエリアのみ, こう上させる計画を採用した場合, どのような仕上がり正矢となるかを検討する.

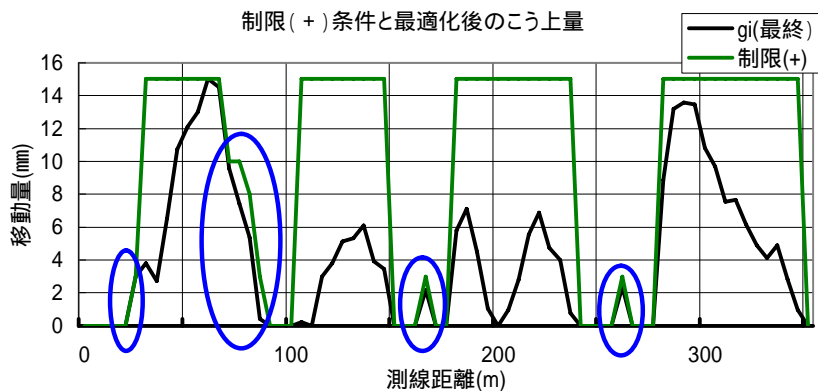
と同様に, こう上エリアとなる測点には

制限 (+) 15(mm) での条件を与え の計画を最適化する.



この計画は, 全区間の軌道状態の改善は見込まれるものの, 点での軌道狂いの改善には課題が残る. 現状の最大値に近い ± 2 (mm)を超える狂い (×印箇所) が残留する計画となることが予測される.

そこで, 仕上がり正矢を ± 2 (mm) 以下となることを目標とし, 設定した制限条件の部分的な修正 (= 条件緩和) を実施する.

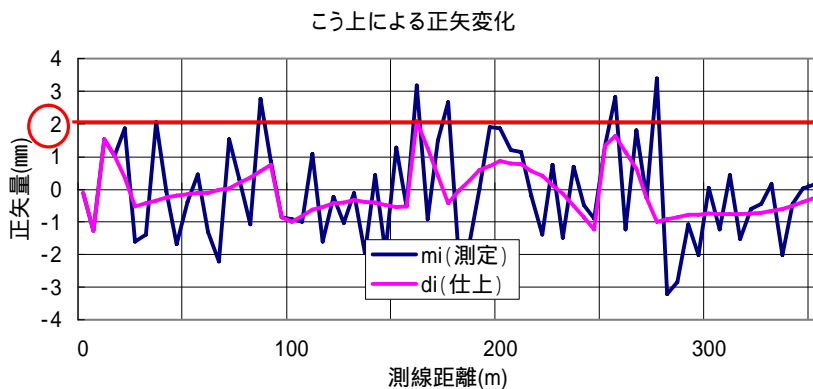
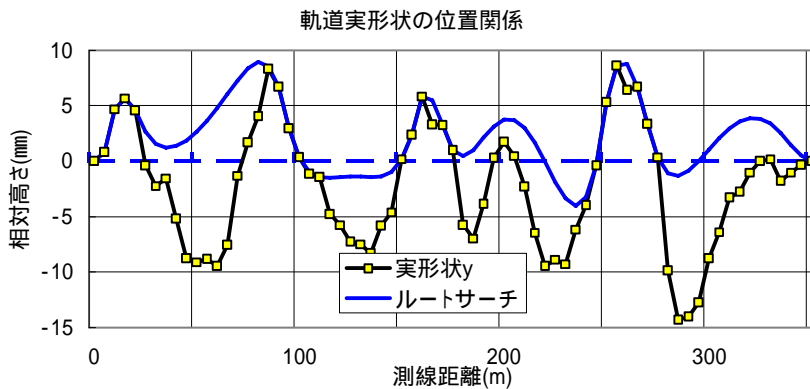


修正された制限条件は、直ちにルートサーチロジック演算条件として反映され、条件を満たす新しいルートとその場合の仕上がり正矢 d' は式(42)により演算表示される。

$$d' = m + Tg \quad (42) \text{再掲}$$

操作者は画面に表示される仕上がり正矢の変化をリアルタイムで確認しながら制限条件の部分修正を行うことができる。

本例では最終的に 印を付した測点の移動制限の変更が実施されることとなった。



結果、当初 制限 (+) = 0 で計画された平均ラインより高いエリアに、部分的に制限 (+) 2(mm) ~ 10(mm) を許容することで、現状の実形状 y の尖った部分を滑らかに囲い込む新しいルートの設定が自動計算により行われていることが確認できる。

また仕上がり正矢も目標の $\pm 2(\text{mm})$ 以下に最大値を抑えることが達成されている。
 高低整備への交差法の適用は、速度向上による長波長軌道狂いへの整備能力の向上という観点のみならず

- ・最小のサンプリングで整備対象区間の実形状を知り得る。
- ・様々なこう上条件を任意に与えた検討が実施できる。
- ・与えた条件はルートサーチロジックで随時最適化され、交差法により仕上がり正矢として変換される。
- ・仕上がり正矢を基に、計画の良否が判定できる。

などの計画精度の向上と調査・計画に要する時間短縮のメリットを生み出すことができる。

この事により、絶対基準MTT施工の事前準備にかかる諸々の工数が削減され、同工法の投入が容易となり、本文中で触れたMTTの投入とともに、正矢検測による軌道状態は改善されるものの整備区間が全体的にこう上してしまう課題に対処することが可能となると考える。

付録 1 4 交差法行列 T^{-1} の固有値比に関する証明と工学的な意味

4-(2) 表-5 に表示された各数値導出の数学的根拠

Definition 22 交差法行列 T^{-1} の固有値が

$$\lambda_i = \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n+1}\right)^{-1} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{として与えられる時,}$$

n を十分に大きく取れば任意の i 番目の固有値 λ_i と第 1 固有値 λ_1 との比は

$$\lambda_i / \lambda_1 = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \quad \text{となる}$$

Lemma 23

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n+1}}{1 - \cos \frac{i\pi}{n+1}} = \frac{1}{i^2} \quad \text{が成立する}$$

proof

半角の公式 $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ より

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

従って

$$\frac{1 - \cos \frac{\pi}{n+1}}{1 - \cos \frac{i\pi}{n+1}} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}}{\sin^2 \frac{i\pi}{2(n+1)}} = \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2(n+1)}}{\sin \frac{i\pi}{2(n+1)}} \right)^2$$

さて $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であるので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \left(\frac{i\pi}{2(n+1)} \right)}{\left(\frac{i\pi}{2(n+1)} \right)} \right) = 1$$

従って
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n+1}}{1 - \cos \frac{i\pi}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2(n+1)}}{\sin \frac{i\pi}{2(n+1)}} \right)^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2(n+1)}}{\frac{i\pi}{2(n+1)}} \right)^2 = \frac{1}{i^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2(n+1)}}{\frac{\pi}{2(n+1)}} \right)^2 = \frac{1}{i^2}$$

補題は示された。 (補題証明終)

補題により定理が示されるのは自明である。(証明終)

Definition 24

$\lambda_i / \lambda_1 = (1/i)^2$ が成立するとき n を十分に大きく取れば任意の r 番目の

固有値 λ_r までの自乗和において

$$g_r = \frac{\sum_{i=r}^n \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \quad \text{の値が } n \text{ に関わらず一定値となる}$$

proof

$$g_r = \frac{\sum_{i=r}^n \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} = \frac{\sum_{i=r}^n \lambda_1^2 \frac{1}{i^4}}{\sum_{i=1}^n \lambda_1^2 \frac{1}{i^4}} = \frac{\sum_{i=r}^n \frac{1}{i^4} - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{i^4}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^4}}$$

さて n のとき リーマンのゼータ関数より

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} = \zeta(4) = 1.0823\dots$$

であることが知られており、また 4 次一般化された 調和級数を用いれば

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{i^4} = H_{r-1}^{(4)}$$

一方、オイラー・マクローリンの公式により

$$\begin{aligned} \zeta(4) - H_{r-1}^{(4)} &\approx \frac{1}{3(r-1)^3} - \frac{1}{2(r-1)^4} + \frac{1}{3(r-1)^5} \\ &\quad - \frac{1}{6(r-1)^7} + \frac{2}{9(r-1)^9} + \dots \end{aligned}$$

が成立する。つまり

$$g_r = \frac{\zeta(4) - H_{r-1}^{(4)}}{\zeta(4)} = \frac{1.0823\cdots - H_{r-1}^{(4)}}{1.0823\cdots}$$

r を与えれば, g_r は一定値に収束する (証明終)

交差法行列 T^{-1} の固有値比の工学的な意味

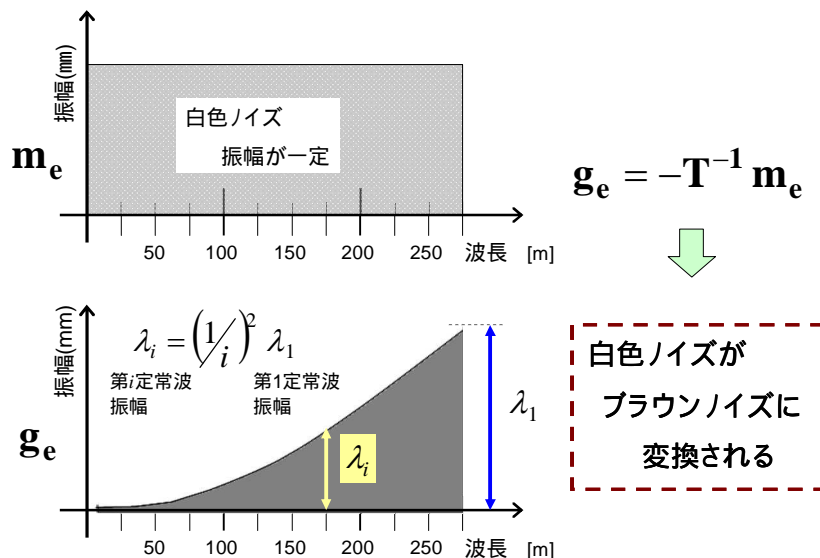
上記証明の結果は交差法行列 T^{-1} を用いた変換演算に以下の2つの工学的な意味を与える.

白色ノイズの有色ノイズ化⁵³⁾

T^{-1} を用いた変換により白色ノイズ(周波数毎にパワーが一定)を

ブラウンノイズ($(1/f)^2$ のパワー分布 ここに f :周波数)に変換することができる.

この場合, サンプリング数・延長に関わらず低周波側の5波を除去してやれば, 誤差影響の95%は取り除くことが可能であり, 有効波長帯域全体に誤差影響が残留してしまう白色ノイズの除去に較べS/N比を向上させることができる.



理想的な振動状態への誘導

現在, 各方面で研究されている⁵⁴⁾⁵⁵⁾ヒトが快適とされる振動状態の一つに, このブラウンノイズ(ブラウンノイズ)が挙げられている. 交差法を用いた線形整形において, 期せずして生じる測定誤差の重畳影響により, 仕上がり後の波長分布は(たとえ対象波長帯域を0(mm)に仕上げようとしても)ブラウンノイズ分布に収束することになる.

このことは交差法で導出される整形計画には, 軌道内に残留する狂いの波長分布を“ヒトの快適性に即した振動分布”へと自然に誘導する特性があることを意味すると考えられる.

古より保線職場で語られている「整備状態の良い線路では乗客は自然と眠りに誘われる」が人間工学的知見より理論的に証明出来る可能性があり, 今後の研究が期待される.

付録 1 5 技術文献に残る交差法演算における誤差重畳影響回避法の例

1950年代から60年代にかけて、多くの交差法演算の方法論を記した技術図書が発刊され、保線現場ではそれらの手引きを基本に、拝見法での整備が難しい曲線整正作業が行われてきた。

それらに異口同音に記載されている指導事項、「一方向に偏る移動量には注意せよ」とは交差法行列による一次変換により測定誤差が最も集中する第1固有関数の作用を言い現わしていたことは本文で述べたとおりである。ここではその具体的記述例を紹介する。

第21章 曲線整正の実際的要領

が、次のような場合を考えて第2回目の修正を行なう。

- (1) 移動が全部 \ominus ということは、現場曲線の曲率に対し計画正矢が小さいのではないか、在来の緩和曲線長に対し計画のものが長いのではないか。
- (2) 特に厳しい移動制限があるとき、作業をできるだけ控目にとどめる必要があるとき。

神谷 進著 「鉄道曲線」P222より 交友社 1961

表には第3回目の計算まで済んだものを第28表のように記載したが、この部分修正は測点(16)の半移動量29mmを $-15\sim-20$ 程度となるような要領のもとで説明する。この理由は全体の移動量が「+」でこの儘やれば途中の軌条遊間の増大が考えられ、且つ測点(22)、(23)、(24)附近が140mm以上も外方に出る形にあるからである。

相馬 勇著 「糸張式曲線整正の手引き」P75より 鉄道日本社 1956

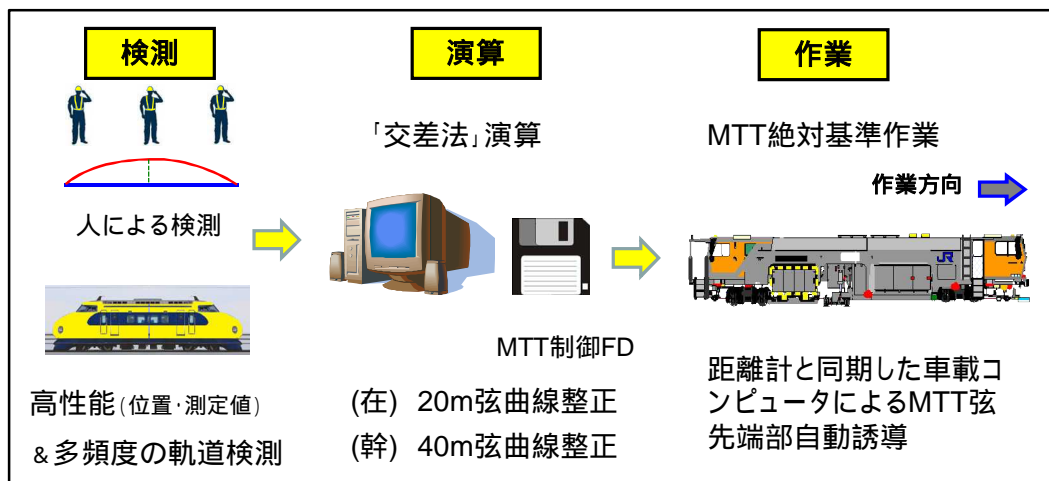
以上からもわかるとおり、どんな移動量の答が正しいかは、判断に難しいことですが、ただ零線を基線にして、プラス、マイナスに平均してちらばり、その最高値も、プラス、マイナスのおおのこの量の合計も、同じくらいな移動量の答は、合理的な曲線整正の方法であるといえます。

金子慶尚著 「正矢と曲線の整正」P83より カネコ 1971

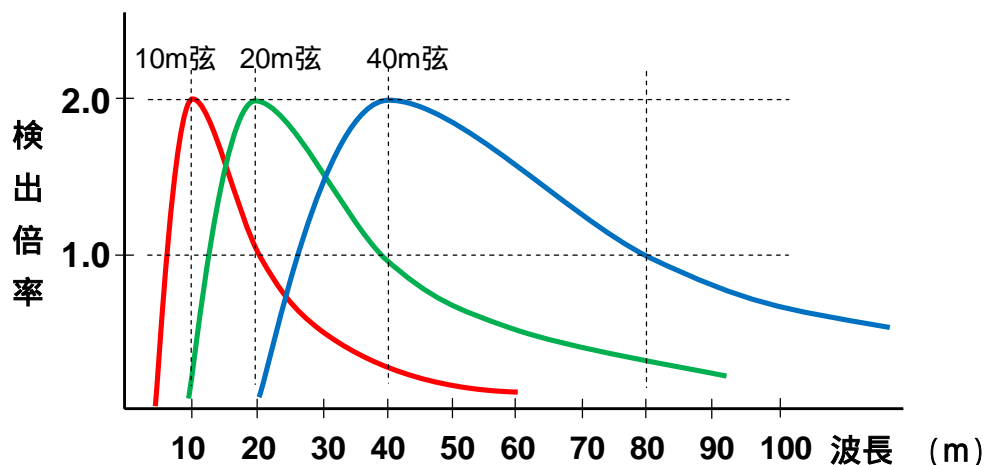
これらの手引書には理論的な解説こそ無いものの、交差法の誤差重畳特性を見事に言い現わしており、この指導を基に曲線整正演算を実施すれば、誤差重畳影響の72%は回避できると考えらる。理論的に指摘されてきた誤差重畳への懸念は、技術者の直感により回避されており、その技術指導の有効性が理論解析により立証された。

付録 1 6 JR 西日本 改良交差法（3 弦連立交差法）の計算原理

改良交差法（3 弦連立交差法）とは列車の速度向上に伴い顕在化してきた「長波長軌道狂い」を効率的・効果的に修繕することを目的として開発した 10m 弦の測定正矢から移動量への変換演算法であり，下図のようなシステム構成を持つ。



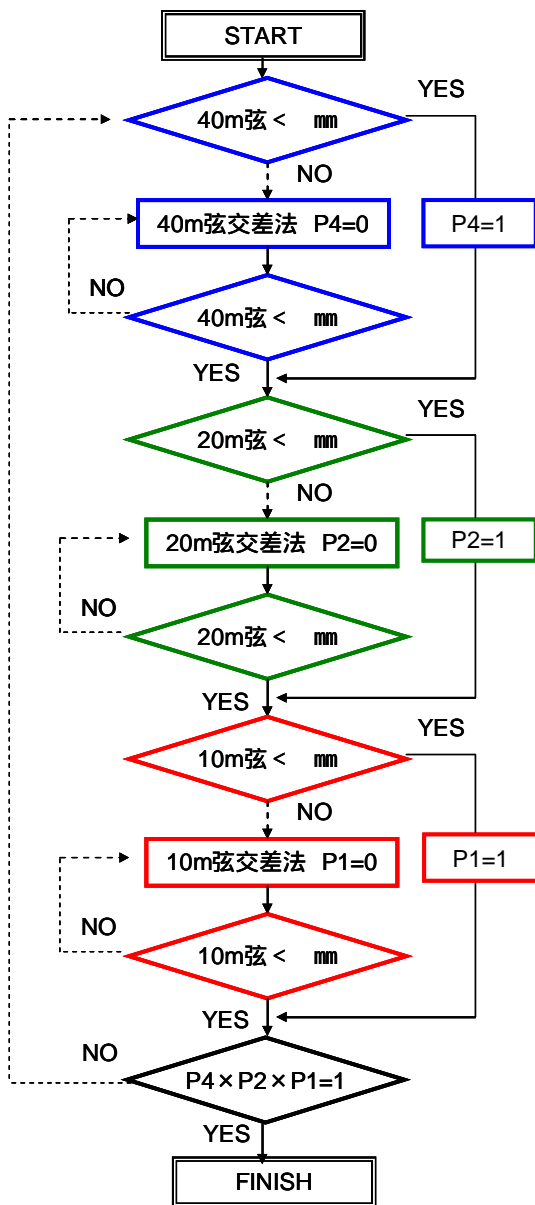
計算原理は「平均法」を基礎とした設計正矢値と許容誤差値を与えたコンピュータ自動収束演算である。車両動揺への改善効果，ならびに収束演算時間を短縮するために 10m 弦正矢測定値を倍長弦公式により在来線では 20m 弦正矢値に，新幹線では 20m 弦及び 40m 弦正矢値に換算した値を用いて並行収束演算を行うことをその特徴としている。



本文中で触れたとおり，高速走行時（在来線： 120km/h 新幹線： 250km/h）における列車動揺の原因となる軌道狂いは 20m 弦・40m 弦正矢法を用いることで効果的に見つけ出し，その軌道狂いを抑制することで乗り心地は改善される。

一方で 20m 弦あるいは 40m 弦正矢測定値のみを用いて交差法演算を行った場合，弦長 $\times 1/2^k$ [m] ($k=1,2,3,\dots$) の波長成分については無感知となり演算により改善させることができない。

（“発散” するのではなく，当該帯域の狂いが“取り残された” 状態となる）



点(i)を-S(mm)移動の影響伝播
 $g(i) = g(i) - S$

データ間隔: 5m

$$\begin{aligned} m_{40}(i) &= m_{40}(i) - S \\ m_{40}(i+4) &= m_{40}(i+4) + S/2 \\ m_{40}(i-4) &= m_{40}(i-4) + S/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{20}(i) &= m_{20}(i) - S \\ m_{20}(i+2) &= m_{20}(i+2) + S/2 \\ m_{20}(i-2) &= m_{20}(i-2) + S/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{10}(i) &= m_{10}(i) - S \\ m_{10}(i+1) &= m_{10}(i+1) + S/2 \\ m_{10}(i-1) &= m_{10}(i-1) + S/2 \end{aligned}$$

当該点の40m・20m・10m弦測定値が
同時に変化する

そこで、図に示した交差法演算フローチャートにより、3種類の弦長による正矢値を同時に満足させる収束演算を行い、相互の無感知領域（10m弦の長波長領域も一種の無感知領域とみなせる）を補完させている。

またいずれの交差法においても、計算過程で出現した移動量は、直ちに各弦正矢値への影響伝播が計算され次ターンの計算に反映されている。

各弦の収束目標値（ α 、 β 、 γ ）は任意に設定できるが、新幹線 40m 弦整備においては 1992 年の導入期より $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ を満たすことを必須条件として

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.8(mm)$$

を用いている。これは当時の 40m 弦仕上がり目標値が $\pm 4[mm/40m \text{ 弦}]$ であったこと、および机上の計算と現場施工に 5 倍の安全率を見込み設定したものであり、明確な理論根拠には乏しい。

必須条件の $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ については、鉄道保守の歴史の中で、重点的に管理対象としてきた波長帯域の整備を長波長領域の整備よりも優先させるという思想に基づいたものである。

THEORISATION AND MODERN PRACTICAL APPLICATION OF EMPIRICAL 'CIRCLE-ORDINATE METHOD' TO PRODUCE THE OPTIMAL RAILWAY TRACK GEOMETRY

Gaku EHARA

Railway track is basically defined as a system which requires periodical maintenance to adjust track irregularity produced by cumulative axle load within tolerance of safety. Track irregularity is mainly classified into vertical and horizontal irregularities. In Japan, major measurement method of them has been 10-m mid chord versine method since the dawn era of the railway. This simple method is to measure the ordinate gap between the midpoint on 10 m chord and the corresponding point on the rail and is equivalent to successive measurement of the second-order difference of track alignment. The theoretical effectiveness of this method is proved connected to the correlation between track geometry and car body vibration. In addition, various improvements and development of this method has proceeded according to rolling stock's speed increasing.

In terms of adjustment of track geometry, it is required to calculate the amount of track displacement to realise an ideal track geometry based on the actual track irregularity derived from the mid-chord versine method. There are two major methods to calculate optimal displacement to realise the optimal track geometry; the circle-ordinate method and the restored track irregularity method. The former one is a measure to transfer track irregularity into track displacement from the geometrical perspective. This way has been introduced into Japan since 1930's and has prevailed in practical use of track geometry adjustment. There are actually sufficient results to prove the utility of this method. However, this method has a theoretical problem about cumulative errors related to measurement accuracy. Therefore, this method has not been strongly recommended to apply for the calculation of the track displacement in practical use. This is because sufficient theoretical analysis of the circle-ordinate method has not been conducted for a long time. In the background of the problem about accumulation of measurement errors in the circle-ordinate method, alternative method, restored track irregularity method, has been developed by using a filter calculation since 1980's by the Research Institute of Railway Technology (RTRI). This method has delivered improvement of practical track geometry adjustment with the evolution of track geometry measuring technology. In contrast, there are a few problems to introduce into practical use, e.g.: difficulty to understand the theory of calculation and inconvenience to additional track geometry measurement even outside of the scope section for the actual alignment correction.

This research clarifies the theory of empirical the circle-ordinate method which works well in practical use of track alignment adjustment and formulises this method as an eigenvalue problem in linear algebra for the purpose of modern application of this method. Two key

implications of the research are identified:

- The mid-chord versine method and the circle-ordinate method has the function to decompose raw data measured by them into sine waves with wave length in string vibration modes with fixed both ends (standing waves) by the simple calculation dealing with variables.

- More than a 95 % of the measurement errors of the circle-ordinate method accumulate in the range between the first decomposed wave and the fifth one and it is possible to eliminate and manipulate the influence of the errors significantly considering train speed and natural frequency of rolling stock from the engineering point of view.

Throughout this analysis, the way of track irregularity correction based on the circle-ordinate method has been enough useful and reasonable in practical use even now.

Chapter 1 explores the overview of railway track geometry, the background and the aim of this research. The mid-chord versine method could collect track irregularity data very easily. In order to correct track irregularity data measured by mid-chord versine method, it is necessary to create track displacement to produce optimal track geometry from track irregularity data in the circle-ordinate method. Meanwhile, this transaction way has a weakness of accumulation of measurement errors due to characteristic of mid-chord versine method. This is demonstrated from the geometric theoretical and academic historical perspectives. Despite of a weakness of accumulation of errors in this method, there have been actually many successful results to adjust track geometry in practical use since 1980's. The aim of this research is to understand why this method has been able to deliver good works in practical use in spite of this weakness.

Chapter 2 analyses the circle-ordinate method as a linear transformation apart from geometrical issue. Hence, this idea takes mid-chord versine a vector of axis on the partial orthogonal coordinate system and sets conversion system from track irregularity to track displacement a matrix of coordinate transformation between them. Furthermore, analysis of eigenvalue problem of a matrix proves the nature of the circle-ordinate method.

Chapter 3 explains the meanings of values derived from analysis in chapter 2 and states the meanings and the strength of formula in chapter 2 from the engineering point of view. The eigenvalue derived from chapter 2 in the form of formula by using a trigonometric function is equivalent to the data correction magnification of mid-chord versine method. Therefore, the relationship between mid-chord method and the circle-ordinate method can be defined as a linear transformation by a matrix. Based on this assumption, it is indicated that the matrix a function to decompose all measurement waves into a sum of sine waves. Specifically, this can transfer a primary measurement wave into standing waves which wavelengths are . Here is measurement interval and is number of measurement points. For this reason, the function of transformation into standing wave has a strength in engineering field which assures the successive connection between both adjacent track sections.

Chapter 4 proposes the solution of the theoretical problem of accumulation of measurement errors with combination between numerical simulation for reproduction of accumulation of errors, transformation into standing waves mentioned in chapter 3 and Singular Value Decomposition (SVD). This analysis concludes that a 95 % of errors occur in the range from the first standing wave to the fifth one intensively rather than irregularly. Specifically, the first standing wave has a 72 % of errors according to the physical law of string vibration. Moreover, the reasonableness of the past engineering works of track geometry adjustment is proved theoretically based on this fact. Besides of them, statistical presumption of the absolute values of errors produced by two parameters are presumed statistically; the precision of track geometry measurement in the mid-chord versine method and the wavelength of track irregularity. Also, this statistical presumption enables examination of the output of track displacement calculation in the circle-ordinate method to judge whether significant or not from the point of view of S/N ratio. This concept of the examination can be applied for restored track irregularity method as well.

Chapter 5 reports the fitness of the theory of the circle-ordinate method stated above to the actual engineering works. The method of examination to avoid the influence of track geometry measurement errors is detailed by using the examples of the sites in JR West for this 25 years. As a result, it is confirmed that the actual track geometry adjustment can give the result within the range of the theoretical precision.

Finally, chapter 6 summarises the main topic indicated in this research as follows,

- The logic of the circle-ordinate method
- The proof of the utility of the circle-ordinate method
- Practicability and reasonableness of the circle-ordinate method to calculate actual track geometry

On the other hand, there is an issue of further research. There is the limitation of the wave length of track geometry adjustment by the examination method suggested in this research and depends on the track geometry measurement precision. In order to solve this problem, the further development of track geometry measurement technology is required with improvement of precision of track measuring system.

参考文献

- 1) 山口義信 我国の線路保守における技術発達史とその移入, 定着, 変容及び創出に関する研究 - 線路保守技術のオリジナリティーを探る - P192 ~ 218 東京大学 学位論文 2010.4
- 2) 安部俊一 鉄道技術研究報告 No145 (施設編第50号) 軌道狂い測定法についての原理的考察 1960.8
- 3) 佐藤吉彦 乗り心地の立場から見た軌道高低狂いの整備限度」鉄道技術研究報告 第549号 (施第240号) 1966.8
- 4) 高井秀之, 内田雅夫 在来線160km/h化に対応した軌道管理手法 日本鉄道施設協会誌 1991.10 P20 ~ 25
- 5) 高井秀之, 須永陽一, 竹下邦夫 新幹線の高速化に対応した軌道管理手法 鉄道総研報告 Vol.9, No-1, P13 ~ 18 1995
- 6) Coenraad Esveld Comparison Between Theoretical and Actual Transfer Function of Track Maintenance Machines
A Dissertation Presented to the Graduate Faculty of the Civil Engineering Department of the Warsaw Technical University P77 ~ 87 Appendix 2.5 1978.3
- 7) 藤岡義香 マルチプルタイタンパーの作る曲線 (第2法) 鉄道技術研究所速報 P1 ~ 10 1982.2
- 8) 江原 学, 橋本涉一 行列モデルを用いたMTTライニング挙動の解析 第19回鉄道技術連合シンポジウム論文集 <2051> 2012.12
- 9) Dr. Bernhard Lichtberger, Track Compendium, P430 ~ 434, Eurail Press 2005
- 10) Geoffrey H. Cope, British Railway Track Edition6, Chapter20 P371 ~ 412, The Permanent Way Institution, 1993
- 11) 立花次郎 円距法に依る緩和曲線の敷設, 並びに歪める曲線の整正 土木学会誌 第18巻3号 1932.3
- 12) Walter F. Reach, RoadWay and Track, 訳 堀越一三 「保線現業」第3編18章 保守の諸問題と保守方法 1946
- 13) 柿崎好男 糸張式曲線整正法 鉄道現業社 1952
- 14) 相馬 勇 糸張式曲線整正の手引 鉄道日本社 1956
- 15) 安田鶴雄 交差法による曲線整正 交友社 1959
- 16) 伊地知堅一 新曲線整正 鉄道現業社 1959
- 17) 神谷 進 鉄道曲線 p187 ~ 256 交友社 1961
- 18) 金子慶尚 正矢と曲線の整正 カネコ 1971
- 19) 多谷虎男 糸張式 (移動式) 曲線整正法の精度と食違量の合理的消去法について土木学会論文集第75号 1961.7
- 20) 吉村彰芳: 鉄道技術研究報告No1336 (施設編第586号) 軌道狂い原波形の復元に関する理論的基礎の検討とその応用 1987.2

- 21) 西本正人,竹下邦夫,長門正二 在来線マヤ車における曲線正矢検測誤差の補正 土木学会第51回年次講演会報文集 -291 P582~583 1996.9
- 22) 吉村彰芳,穴見徹広,奥村陽一,神山雅子 復元波形を用いた軌道狂い補修の実施例とその評価 鉄道総研報告 Vol.11 ,No.2 ,P13~18 1997.2
- 23) 江原 学,金岡裕之 新快速を130km/hで 日本鉄道施設協会誌 1999.8月号 P11~14
- 24) 竹内明男,渡辺一仁,古川 敦 ALC搭載マルチ(プラッサー08型)による軌道狂い整備 日本鉄道施設協会誌 2000.3月号 P21~23
- 25) 江原 学 長波長軌道狂い管理 日本鉄道施設協会誌 1993.9月号 P12~15
- 26) 藤原秀夫,武藤 実 200m半絶対線形システムによる高速域の軌道整備 日本鉄道施設協会誌 1993.9月号 P23~25
- 27) 深沢義郎,仁杉 巖 新幹線保線ものがたり P288~306 山海堂 2006.3
- 28) 高田憲一,川岸明美 マルタイと高速軌道検測車を利用した曲線整正作業 日本鉄道施設協会誌 1991.6月号P53~58
- 29) 小林昭七 曲線と曲面の微分幾何 P1~8 裳華房 1977
- 30) 山本哲郎 数値解析入門[増訂版] P257~260 サイエンス社 2001.11
- 31) Robert.T.Gregory.ph.D, David L.Karney,MA, A collection of Matrices for Testing Computational Algorithms, John.Wiley & Sons,Inc, P45~46 1969
- 32) 木村欣司 固有値/特異値計算ライブラリの性能評価のための数式処理のアルゴリズム 数理解析研究所講究録 1505巻 P3~4 2006.1-13
- 33) 小形正男 振動・波動 P42~64 裳華房 1999
- 34) 俵口忠功 振動・波動:講義ノート P11~27 立命館大学理工学部電気電子工学科 2011.2.13
<http://www.ike.dyn.ritsumeai.ac.jp/>
- 35) 佐武一郎 線形代数学 P169~170 裳華房 1958
- 36) 石畑 清 アルゴリズムとデータ構造 P1~25岩波書店 1989.3
- 37) 渡辺善隆 連立1次方程式の基礎知識 九州大学情報基盤研究開発センター 数値解析チュートリアル2004資料 P293 2004
- 38) 江原 学 多次元ベクトル逆変換手法を用いた平面線形修正量演算手法(交差法)の理論的解析とその応用第17回鉄道工学シンポジウム論文集 P101 2013.7
- 39) 桜井明,吉村和美,高山文雄 パソコンによるスプライン関数 - データ解析/CG/微分方程式 P1~60東京電気大学出版社 1988.11
- 40) 辰巳新太郎,片岡武 土木学会第65回年次学術講演会 -297 P593~594 2010.9
- 41) 幸谷智紀 ソフトウェアとしての数値計算 P91~102 2006.2
<http://na-inet.jp/nasoft/chap08.pdf>
- 42) 永沼泰洲,吉村彰芳 正則化手法を用いた軌道狂い原波形の復元 第13回鉄道工学シンポジウム論文集 P129~130 2009.7
- 43) 宮本俊光,渡辺偕年 線路 第 編 軌道管理 P509~513 山海堂 1980

- 44) 山本有作 特異値分析とその応用 神戸大学大学院工学研究科ホームページ 名古屋大学講義資料 2009.5
- 45) 芦野隆一, 萬代武史, 守本 晃 特異値分解とウェーブレットを使った画像処理 数理解析研究所講究録 1529巻 P28 2007.26-41
- 46) G.H.Golub and C.F.Van Loan Matrix Computations, 3rd edition, P69 ~ 73 The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996
- 47) 新音楽辞典 楽語 P431 音楽之友社 1987
- 48) 竹内淳 高校数学でわかるシュレディンガー方程式P75 ~ 85 ブルーボックスB-1470 講談社 2014.4
- 49) 佐藤吉彦 新軌道力学 V車両と軌道の相互作用p173 ~ 205 鉄道現業社 1997.7
- 50) 橋本渉一, 佐藤吉彦, 切敷啓介, 上浦正樹 在来線軌道狂いスペクトル特性の解析 鉄道技術研究所速報 P13 1985.6
- 51) 池守昌幸 軌道狂いのパワースペクトル 鉄道線路第29巻9号 日本鉄道施設協会 1981.9
- 52) 深沢義郎, 小林茂樹 新幹線の保線 7章3節 軌道整備・工事 P300 ~ 306 日本鉄道施設協会 1980.12
- 53) 飛田武幸 シュプリンガー量子数理シリーズ 第5巻 ホワイトノイズ P3 ~ 13 丸善出版株式会社 2014.4
- 54) 武者利光 ゆらぎの世界 自然界の1/fゆらぎの不思議 P179 ~ 84 ブルーボックスB-442 講談社 1980.10
- 55) 藤智亮 勝田啓亮 坂田智海 立石憲治 音刺激が新生児に及ぼす鎮静効果 日本生理人類学界誌 Vol.18, NO.4 P181 ~ 186 2013.11