

論文の内容の要旨

論文題目 Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and special cases of the local Langlands correspondence in positive characteristic

(Lubin-Tate パーフェクトイド空間のアフィノイドと正標数の局所 Langlands 対応の特別な場合について)

氏名 時本一樹

K を剰余体 k の標数が $p > 0$ の非アルキメデス局所体とする. W_K を K の Weil 群とする. $n \geq 1$ を整数とし, D を Hasse 不変量が $1/n$ なる K 上の中心的斜体とする. K の付値環を \mathcal{O}_K で, その極大イデアルを $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ で表すことにする. k の代数閉包 \bar{k} を 1 つ固定する. この時, Lubin-Tate 空間は \bar{k} 上のレベル構造つきの 1 次元形式 \mathcal{O}_K 加群の変形空間として定義される. レベルを動かす時, Lubin-Tate 空間は自然な射影系をなし, それを Lubin-Tate 塔と呼ぶ. 非可換 Lubin-Tate 理論は, Lubin-Tate 塔のコホモロジーは $\mathrm{GL}_n(K) \times D^\times \times W_K$ の大きな部分群の自然な作用を持ち, それが $\mathrm{GL}_n(K)$ の局所 Langlands 対応と局所 Jacquet-Langlands 対応を同時に実現することを主張する. しかし, この事実の証明 ([Boy99], [HT01]) は, 保型表現論および大域的な幾何を駆使して, Lubin-Tate 空間の幾何やその表現論との関係についてはまだよくわかっていないことが多い.

Lubin-Tate 空間の幾何に関する研究の 1 つに吉田輝義氏の研究 ([Yos10]) がある. そこでは, レベル \mathfrak{p} の Lubin-Tate 空間の半安定モデルが構成され, その還元のある開部分スキームが $\mathrm{GL}_n(k)$ の Deligne-Lusztig 多様体と同型であることが示されている. Deligne-Lusztig 多様体が現れることは, $\mathrm{GL}_n(K)$ のある種の既約超尖点表現が $\mathrm{GL}_n(k)$ の既約尖点表現から構成できることを反映している. 管状近傍を考えればわかるように, この開部分スキームは Lubin-Tate 空間のアフィノイド部分空間の還元としても得られる.

近年, Weinstein は [Wei14] において, Lubin-Tate 塔のある種の極限空間がパーフェクトイド空間として意味を持つことを示した. Lubin-Tate パーフェクトイド空間は通常の有限型の解析空間ではないが, 幾何がより単純である. 例えば, 個々の Lubin-Tate 空間では定義されないある座標を用いると, 定義方程式が単純になり, 群作用も非常に明示的に記述できる. これらの性質を利用することで, Weinstein, Boyarchenko-Weinstein および今井直毅, 津嶋貴弘両氏はそれぞれ [Wei14], [BW16], [IT15] において, Lubin-Tate パーフェクトイド空間の中にアフィノイド (部分空間) とその形式モデルの族であって, 各形式モデルの還元のコホモロジーが局所 Langlands 対応と局所 Jacquet-Langlands 対応を実現するものを構成している. 本論文の目的は, K の標数が $p > 0$ である場合に, このような性質を持つアフィノイドの新たな族を構成することである.

$l \neq p$ を素数とし, 体の同型 $\overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$ を固定する. さらに, $G = \mathrm{GL}_n(K) \times D^\times \times W_K$ とおく. この時, 主定理は以下の通り.

定理 0.1 K は等標数であり, さらに p は n を割らないと仮定する. $\nu > 0$ を n と互いに素な整数とする. L/K を n 次の完全分岐拡大体とする. この時, Lubin-Tate パーフェクトイド空間にアフィノイド \mathcal{Z}_ν とその形式モデル \mathcal{Z}'_ν であって次を満たすものが存在する.

- (1) \mathcal{Z}_ν の固定部分群 Stab_ν は還元 $\overline{\mathcal{Z}}_\nu$ に自然に作用する.
- (2) $\text{GL}_n(K)$ の既約超尖点表現 π に対して,

$$\text{Hom}_{\text{GL}_n(K)} \left(\text{c-Ind}_{\text{Stab}_\nu}^G H_c^{n-1}(\overline{\mathcal{Z}}_\nu, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) ((1-n)/2), \pi \right) \neq 0$$

が成立するための必要十分条件は, 局所 Langlands 対応による π の像として得られる W_K の n 次元既約平滑表現 τ が次のような形のもの指標による捻りであることである:

$$\text{Ind}_{W_L}^{W_K} \xi$$

ここで ξ は L^\times の指標で, U_L^ν では非自明だが $U_L^{\nu+1}$ では自明なものとし, 局所類体論の相互写像によって W_L の指標と同一視されている.

さらに, 上の空間は 0 でなければ, $D^\times \times W_K$ の表現として, $\rho \boxtimes \tau$ と同型である. ただし, ここで ρ は局所 Jacquet-Langlands 対応による π の像である.

定理 0.1 と先行研究を比較する. 定理 0.1 のアフィノイド \mathcal{Z}_1 と形式モデル \mathcal{Z}'_1 は実質的に [IT15] で構成されたものと同じである. また, [Wei14] では $n = 2, p \neq 2$ の場合に, 定理 0.1 のアフィノイドと形式モデル, および適切な意味でのその不分岐版が構成されている. よって定理 0.1 は等標数の場合に [Wei14] の一部と [IT15] を一般化するものである. (ただし, 今井津嶋両氏は p が n を割る場合にも対応する結果を得たと発表している.) [BH05b] の用語を基にして本文第 4 節で定義される用語を使うと, 定理 0.1 で述べられている, 準同型の空間が消えないための π の条件は, π が, ν で jump を持つ minimal admissible pair $(L/K, \xi)$ によってパラメライズされることと同値である. F/K を不分岐 n 次拡大体とすれば, [BW16] で構成されたアフィノイドは, ある $\nu > 0$ で jump を持つ minimal admissible pair $(F/K, \xi)$ によってパラメライズされるような π に対して定理 0.1 と同様の性質を持っている (先行研究との比較について, より詳しくは本文の Remark 4.5 (5) を参照のこと). 今井津嶋両氏から直接に聞いたところによると, 彼らは $\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}'_2$ にあたるものも構成し, その還元を計算し, $n-1$ 次のコホモロジーが消えないことを示していたらしい. この結果は我々の結果に先行するものだが, 未発表であり, 定理 0.1 はそれを参照することなく独立に得られたことを注意しておく. また, これと関連する研究として, 最近の [IT15] がある. そこでは, K が等標数で $n = 3$ の場合にレベル \mathfrak{p}^2 の Lubin-Tate 空間の中に \mathcal{Z}_2 に対応するアフィノイドが構成され, その還元とコホモロジーが調べられている.

定理 0.1 のアフィノイド \mathcal{Z}_ν や形式モデルの還元 $\overline{\mathcal{Z}}_\nu$ の性質について述べる. 定理 0.1 では n と互いに素な ν しか現れないが, アフィノイド \mathcal{Z}_ν と形式モデル \mathcal{Z}'_ν は自然に全ての $\nu > 0$ に対して定義される. 還元 $\overline{\mathcal{Z}}_\nu$ はある代数多様体 Z_ν の perfection と関連しており, Z_ν は ν について $2n$ を周期として周期的である. さらに, Z_ν は ν が奇数か偶数かによって大きく異なる. ν が奇数の場合, Z_ν は Artin-Schreier 被覆 $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ を, ν によって定まるある二次形式に対応する射 $\mathbb{A}_k^{n-1} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ によって引き戻して得られる代数多様体である. ν が偶数の場合には, Z_ν の定義方程式はもっと複雑だが, ある代数群 \mathcal{G}_ν の Lang torsor と二次形式に関連する射を用いると比較的簡明に表示することができる (より詳しくは本文の 2.6 小節を参照のこと). 代数群とその Lang torsor に着目する, このような表示は [BW16] にヒントを得て, 類似をたどったものだが, 相違もある. 例えば, 現れる代数群はかなり様子の違うものであるし, [BW16] においては特に二次形式は現れ

ない。また、[BW16] では、このような表示はコホモロジーの計算で有効に活用されているが、本論文では、コホモロジーの計算の際には元の定義方程式を用いる。

本論文の構成について述べる。

第 1 節では、Lubin-Tate パーフェクトイド空間とその形式モデルについての事実を [Wei14], [BW16], [IT15] に従って復習する。特に、Lubin-Tate パーフェクトイド空間の形式モデルの、ある種の定義方程式である、冪級数 δ が定義される。また、形式モデルへの群の作用の具体的な記述も与えられる。

第 2 節では、定理 0.1 にあるアフィノイドと形式モデルの族が構成され、固定部分群やその作用も含めて、還元が調べられる。[BW16] および [IT15] にある、CM 点の概念やその性質を 2.1 小節で復習した後、これらを基に 2.2 小節でアフィノイド Z_ν が構成される。2.4 小節では、形式モデル \mathcal{Z}_ν が構成され、還元 $\overline{\mathcal{Z}}_\nu$ が計算されるが、その際、ある変数変換に関する δ の振る舞いが重要な役割を果たす。そこで、2.3 小節は δ についての補題に割かれている。この周辺の議論は、 $n = 2$ の場合を扱った [Wei14] の議論から着想を得たものだが、 $n = 2$ の場合と比べてはるかに複雑であるため、かなり詳細に述べた。続く 2.5 小節ではアフィノイド Z_ν の固定部分群 Stab_ν とそれが還元に誘導する作用を計算する。上述の、 Z_ν の簡明な記述は 2.6 小節で述べられるが、そこで必要となる代数群 G_ν は、 Stab_ν の還元への作用が経由する有限群をモデルにして定義される。

第 3 節では、 $\overline{\mathcal{Z}}_\nu$ のコホモロジーを群作用も含めて計算する。この計算は Z_ν のコホモロジーの考察に帰着され、 ν が奇数の場合と偶数の場合が個別に扱われる。 ν が奇数の場合には、全ての ν について Z_ν のコホモロジーが計算される。特に、この場合には $n - 1$ 次のコホモロジーが非自明であることと n と ν が互いに素であることが同値であることがわかる。 Z_ν がより複雑な形をしている、 ν が偶数の場合には、全ての ν についてのコホモロジーは計算できていないため、 n と ν が互いに素な場合に議論を限定する。(定理 0.1 の証明には十分である。) ν が奇数の場合、 Z_ν のコホモロジーの計算は上述の二次形式の様々な不変量の計算に帰着される。このことについて述べたのが 3.1 小節である。 $p \neq 2$ ならこの事実はよく知られていると思われるが、 $p = 2$ の場合にも類似の事実が成立することは多少興味ある話題かも知れない。実際に、 Z_ν を定義する二次形式の種々の不変量を計算するにあたって注目するのはこれらの二次形式が位数 n の巡回群と関連していることである。似た状況は [BF83], [BH05b], [BH10] など表現の不変量を計算する際にも現れていて、実際、[BH05b] にまとめられている理論を援用すると見通しのよい計算ができる。この理論は 3.2 小節で説明される。 ν が偶数 (で n と ν が互いに素) の場合には、 Z_ν への $\text{Stab}_\nu \cap \text{GL}_n(K)$ と $\text{Stab}_\nu \cap D^\times$ の作用は、それぞれ有限 Heisenberg 群を経由することがわかる。有限 Heisenberg 群は、非可換だが表現論がとりわけ易しい群で、実際、コホモロジーを計算する際には、この性質のために、中心の作用のみに注目すれば十分である。3.3 小節は有限 Heisenberg 群関連の準備にあてられる。

第 4 節で定理 0.1 が証明される。それには、Bushnell-Henniart によって、[BH05a], [BH05b], [BH10] および [BH11] で確立された、“essentially tame” な場合に局所 Langlands 対応と局所 Jacquet-Langlands 対応を具体的に記述する理論を用いる。そのため、4.1 小節では必要な場合に限ってこの理論を復習する。4.2 小節では、Bushnell-Henniart の理論をここまでの節で得られた結果と組み合わせることで、定理 0.1 を導く。

参考文献

- [BF83] Colin J. Bushnell and Albrecht Fröhlich. *Gauss sums and p -adic division algebras*, volume 987 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.
- [BH05a] Colin J. Bushnell and Guy Henniart. The essentially tame local Langlands correspondence, *I. J. Amer. Math. Soc.*, 18(3):685–710, 2005.

- [BH05b] Colin J. Bushnell and Guy Henniart. The essentially tame local Langlands correspondence, II: Totally ramified representations. *Compos. Math.*, 141(4):979–1011, 2005.
- [BH10] Colin J. Bushnell and Guy Henniart. The essentially tame local Langlands correspondence, III: the general case. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 101(2):497–553, 2010.
- [BH11] Colin J. Bushnell and Guy Henniart. The essentially tame Jacquet-Langlands correspondence for inner forms of $GL(n)$. *Pure Appl. Math. Q.*, 7(3, Special Issue: In honor of Jacques Tits):469–538, 2011.
- [Boy99] Pascal Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3):573–629, 1999.
- [BW16] Mitya Boyarchenko and Jared Weinstein. Maximal varieties and the local langlands correspondence for $GL(n)$. *J. Amer. Math. Soc.*, 29(1):177–236, 2016.
- [HT01] Michael Harris and Richard Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. With an appendix by Vladimir G. Berkovich.
- [IT15] Naoki Imai and Takahiro Tsushima. Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple epipelagic representations I: tame case, 2015. arXiv:1308.1276v3.
- [IT15] Naoki Imai and Takahiro Tsushima. Affinoids in Lubin-Tate surfaces with exponential full level two, 2015. submitted for the proceedings of the conference “Around Langlands Correspondences” Available at <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/naoki/proceedings.html>
- [Wei14] Jared Weinstein. Semistable models for modular curves of arbitrary level, 2014. arXiv:1010.4241v3.
- [Yos10] Teruyoshi Yoshida. On non-abelian Lubin-Tate theory via vanishing cycles. In *Algebraic and arithmetic structures of moduli spaces (Sapporo 2007)*, volume 58 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 361–402. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.