論文審査の結果の要旨

氏　名　　　　　　古　川　　遼

奇数次元多様体上の接触構造の研究は、偶数次元多様体上のシンプレクティク構造の研究と関連しつつ発展してきた。Darboux の局所標準形、Gray の安定性などの古典的な結果の後、1960 年代の Gromov のホモトピー原理による接触構造の構成法により、存在とおおまかな分類の問題は開多様体上ではホモトピー理論に帰着されることとなった。Gromov は接触多様体を次元の高い接触多様体に埋め込む問題についてもホモトピー原理を証明している。

1980 年代に 3 次元多様体の overtwisted 接触構造が Thurston, Bennequin により発見されたが、overtwisted 接触構造の分類はホモトピー原理に従うことが Eliashberg により示された。一方で overtwisted ではない構造はタイトな構造と呼ばれ、Eliashberg, 神田, Giroux, 本田, Etnyre 達により、その分類の研究がなされてきた。2014 年以降、Eliashberg, Murphy 等により、5 次元以上の接触多様体における overtwisted な接触構造の存在と分類の問題がほとんどホモトピー原理に従う形で示されることとなった。

これらの研究の中で接触部分多様体への関心が高まり、特に超平面場の 1 つのホモトピー類に複数の接触構造が存在するかという問題との関連で、例えば、余次元 2 接触部分多様体の列 $K \subset L \subset M$ で、K が L の開本構造の軸となり、L が M の開本構造の軸となっているような場合の研究などが行われてきた。

論文提出者 古川遼 は、余次元 2 の接触部分多様体の存在と分類の問題に興味を持ち研究を行った。3 次元接触多様体では、横断的絡み目が余次元 2 の接触多様体であり、どのような絡み目も横断的絡み目にアイソトピーで変形でき、余次元 2 の接触部分多様体は豊富に存在する。さらに、ザイフェルト膜をもつ場合には、横断的絡み目の自己交叉数が定義され、これは接触部分多様体としてのアイソトピー類が豊富にあることを示すものである。さらに、タイトな構造に対しては、自己交叉数とザイフェルト膜のオイラー数について Thurston-Bennequin 不等式が成立することが知られていた。しかし奇数次元球面内の余次元 2 の接触多様体がどれくらいあるか、どのように分類されるかは、あまり知られていなかった。

論文提出者 古川遼 は、Etnyre との共同研究で、余次元 2 の接触部分多様体 L が自明な法束を持つときに、L の管状近傍に埋め込まれた余次元 2 の多様体 $\widetilde{L}$ が、L への射影が分岐被覆になるとき（これを M が L の周りのブレイドとなるという）、分岐集合 K が L の余次元 2 接触部分多様体であり、$\widetilde{L}$ の特異点における向きについての条件が満たされれば、$\widetilde{L}$ をアイソトピーで変形して、接触部分多様体とできることを示した。また、L の分岐被覆となる多様体から法束が自明な部分接触多様体 L の管状近傍への埋め込みを、特

に巡回分岐被覆の場合に構成して、この L の分岐被覆となる多様体が接触部分多様体となることがわかる。接触部分多様体のアイソトピー類が豊富に存在するかどうかということ判定するためには、ザイフェルト超曲面 Σ_L をもつ部分接触多様体 L に対して、自己交叉数を拡張する相対オイラー数を用いている。この相対オイラー数 $e_{\mathrm{rel}}(L, \Sigma_L)$ は、L の K を分岐集合とする k 次巡回分岐被覆となる接触部分多様体 $L_{K,k}$ の構成において、ザイフェルト超曲面も構成できることから、特に $K \subset L \subset M$ がホモロジー球面であるときには、$(L_{K,k}, \Sigma_{L_{K,k}})$ の相対オイラー数が次のように計算できる。

定理。$e_{\mathrm{rel}}(L_{K,k}, \Sigma_{L_{K,k}}) = ke_{\mathrm{rel}}(L, \Sigma_L) - (k-1)e_{\mathrm{rel}}(K, \Sigma_K)$. ただし、ホモロジー球面の仮定から、$e_{\mathrm{rel}}(L, \Sigma_L)$, $e_{\mathrm{rel}}(K, \Sigma_K)$ は、ザイフェルト超曲面 Σ_L, Σ_K のとり方によらない。

これらを用いて、論文提出者は Etnyre との共同研究で以下を示している。

定理。(1) S^3 上の任意の正の接触構造は S^3 の標準埋め込みとアイソトピックになるように $(S^5, \xi_{\mathrm{std}})$ へ接触埋め込み可能である。

(2) M を有向 3 次元閉多様体で $H_1(M^3)$ が 2-torsion を持たないものとするとき, M 上の overtwisted な正の接触構造 ξ が $(S^5, \xi_{\mathrm{std}})$ へ接触埋め込み可能であることと $c_1(\xi)$ が自明であることは同値である。

(3) $S^1 \times S^2$, T^3, レンズ空間 $L(p, q)$ で p が奇数の場合は、正の接触構造 ξ が接触埋め込み可能であることと $c_1(\xi)$ が自明であることは同値である。

ここで、チャーン数 $c_1(\xi) = 0$ の必要性は、粕谷直彦の結果による。

また、論文提出者 古川遼 は、前述の e_{rel} についての計算式を示すとともにそれを用いて以下を示している。

定理。(1) m を整数、n を正の整数とするとき、S^{2n+1} 上のある overtwisted な接触構造 ξ_m の $(S^{2n+3}, \xi_{\mathrm{std}})$ への接触埋め込みで、その相対オイラー数が $2m+1$ に等しく、標準的な埋め込みにアイソトピックであるものが存在する。

(2) n を正の偶数とするとき、S^{2n+1} 上のある overtwisted な接触構造 ξ_{ot} の $(S^{2n+3}, \xi_{\mathrm{std}})$ への異なる相対オイラー数をもつ無限個の接触埋め込みで、標準的な埋め込みにアイソトピックであるものが存在する。特に、任意の整数 m に対し、S^5 上の唯一つの overtwisted な接触構造 ξ_{ot} の $(S^7, \xi_{\mathrm{std}})$ への接触埋め込みで、その相対オイラー数が $2m+1$ に等しく、標準的な埋め込みにアイソトピックであるものが存在する。

論文提出者の接触部分多様体の埋め込みに関する結果は、これまでほとんどわかっていなかった接触部分多様体についてのまとまった研究であり、今後の接触幾何の研究において重要な意味を持つものである。よって論文提出者 古川遼 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。