論文の内容の要旨

論文題目

Riemann-Hilbert correspondence for unit F-crystals on embeddable algebraic varieties

(埋め込み可能な代数多様体上のユニット F-クリスタルに対するリーマン-ヒルベルト対応)

氏名　大川 幸男

1　背景

古典的にリーマン-ヒルベルト対応とは, 基本群の表現が与えられた時, それをモノドロミー表現に持つ線形微分方程式の存在を問う. 1980 年代に柏原 [Kas1] と Mebkhout[Me] はそれぞれ, 複素多様体 X に対し, リーマン-ヒルベルト対応をコホモロジー層が正則ホロノミックな $\mathcal{D}_X$-加群の複体が定める導来圏 $D^b_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ とコホモロジー層が構成可能な $\mathbb{C}$-線形空間に値をもつ層の複体が定める導来圏 $D^b_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{C})$ との三角圏の反変同値

$$D^b_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\cong} D^b_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{C}) \tag{1.1}$$

として定式化した. この圏同値はコホモロジー理論の観点から重要な意味をもつ. $D^b_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ および $D^b_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{C})$ にはそれぞれ Grothendieck の 6 つの演算 f_*, f^*, $f_!$, $f^!$, $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}$, $\otimes^{\mathbb{L}}$ が定義され, 良い相対コホモロジー論を与える. (1.1) の特筆すべき性質は, (1.1) が Grothendieck の 6 つの演算と整合的になることで, 従って (1.1) は相対コホモロジー論としての比較を与えている.

数論幾何においても様々なコホモロジー理論とそれらの間の比較同型が研究されてきた. k を標数 $p>0$ の完全体, W_n をその長さ n のヴィット環とする. Emerton と Kisin は [EK] において, 滑らかな W_n-スキーム X に対し, フロベニウス構造付き $\mathcal{D}_X$-加群の充満部分圏として, 三角圏 $D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^{\circ}$ を導入し, また $D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^{\circ}$ 上に順像 f_+, 逆像 $f^!$ およびテンソル $\otimes^{\mathbb{L}}$ を構成した. これらの演算は Grothendieck の 6 つの演算のうちの 3 つを与える. Emerton と Kisin はさらに, $\mathcal{M}\in D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^{\circ}$ に対して解関手

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{M}) := \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_{F,X}}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)$$

を考えることで, 三角圏の反変同値

$$D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^{\circ} \xrightarrow{\cong} D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

を構成し, この反変同値が 3 つの演算と整合的になることを証明した. ここで左辺に表れた三角圏 $D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ の対象はエタールサイト $X_{\text{ét}}$ 上の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-加群の層の有限複体で, Tor 次元が有限かつそのコホモロジー層が構成可能となるものである. Emerton と Kisin の結果は柏原, Mebkhout によるリーマン-ヒルベルト対応の正標数における類似とみなすことが出来る.

2 研究の動機

P を滑らかな W_n-スキームとする．Emerton-Kisin のリーマン-ヒルベルト対応

$$D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,P})^{\circ} \xrightarrow{\cong} D^b_{\mathrm{ctf}}(P_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

における右辺は P の標数 p への還元 X から完全に決定される．このことから, 左辺の圏の定義, およびリーマン-ヒルベルト対応の構成も X のみによる形で与えられることが自然に期待される．また W_n 上滑らかに持ち上げ可能とは限らない k 上の代数多様体 X に対しても, Emerton-Kisin の理論が存在するべきである．そこで筆者は本論文において W_n 上埋め込み可能な k-スキームに対して, Emerton-Kisin の理論を一般化した．ここで分離的有限型な k-スキーム X が W_n 上埋め込み可能とは, 固有滑らかな W_n-スキーム P と埋め込み $X \hookrightarrow P$ で以下の図式を可換にするものが存在することをいう．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ \mathrm{Spec} k \arrow[r] & \mathrm{Spec} W_n \end{tikzcd}$$

k 上の準射影代数多様体は W_n 上埋め込み可能であり, W_n 上埋め込み可能な k-スキームはある意味で十分広いクラスをなすと考えられる．

3 主結果

研究の最初の困難は W_n 上埋め込み可能な k-スキーム X に対し, その $\mathcal{D}$-加群の三角圏を適切に定義することである．筆者は $\mathcal{D}$-加群の理論における柏原の定理に基づく自然な発想によりこの困難を克服した．W_n 上埋め込み可能な k-スキーム X と固有滑らかな W_n-スキームへの埋め込み $X \hookrightarrow P$ をとる．この時 $\mathcal{C}_{P,X}$ を "台が X に含まれる $D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,P})^{\circ}$ の対象" のなす充満部分圏として定義する．この時 $\mathcal{D}$-加群の圏を定義する鍵となる, 次の定理が成立する．

定理 3.1. $f : P \to Q$ を固有滑らかな W_n-スキームの間の固有滑らかな射とし, さらに 2 つの埋め込み $i_1 : X \hookrightarrow P$, $i_2 : X \hookrightarrow Q$ で $f \circ i_1 = i_2$ を満たすものが与えられたとする．この時 f_+ は三角圏の同値

$$f_+ : \mathcal{C}_{P,X} \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_{Q,X}$$

を誘導する．

この定理によって, W_n 上埋め込み可能な k-スキーム X に対する $\mathcal{D}$-加群の三角圏は次のように定義すれば良いとわかる．

定義 3.2. X を W_n-上埋め込み可能な k-スキームとし, 固有滑らかな W_n-スキーム P への埋め込み $X \hookrightarrow P$ を一つ取る．この時, 三角圏 $D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^{\circ}$ を $\mathcal{C}_{P,X}$ で定義する．この定義は定理 *3.1* によって埋め込み $X \hookrightarrow P$ の取り方に *up to natural equivalence* でよらない．

X を W_n 上埋め込み可能な k-スキームとし, 固有滑らかな W_n-スキーム P への埋め込み $X \hookrightarrow P$ を一つ取る. 反変関手 $\mathrm{Sol}_X : D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ \to D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ を合成

$$D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ = \mathcal{C}_{P,X} \subset D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,P}) \xrightarrow{\mathrm{Sol}_P} D^b_{\mathrm{ctf}}(P_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^{-1}} D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

と定義すると, この定義は埋め込みの取り方によらないことが示せる. 本論文の主定理であるリーマン-ヒルベルト対応は次のように述べることが出来る.

定理 3.3. X を W_n 上埋め込み可能な k-スキームとする. この時 Sol_X は三角圏の反変同値

$$\mathrm{Sol}_X : D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ \xrightarrow{\cong} D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

を定める.

W_n 上埋め込み可能な k-スキームの間の射 $f : X \to Y$ に対し, $D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ$ 上の順像 f_+, 逆像 $f^!$, およびテンソル積 $\otimes^{\mathbb{L}}$ を埋め込みの取り方によらない形で構成することが出来る. これらの演算とリーマン-ヒルベルト対応の整合性として, 次の定理を得た.

定理 3.4. $f : X \to Y$ を W_n 上埋め込み可能な k-スキームの間の射とする

(1) 関手の同型 $\mathrm{Sol}_X(-) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \mathrm{Sol}_X(-) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sol}_X\left(- \otimes^{\mathbb{L}} -\right)$ が存在する.

(2) 関手の同型 $f^{-1} \circ \mathrm{Sol}_Y \cong \mathrm{Sol}_X \circ f^!$ が存在する.

(3) 関手の同型 $f_! \circ \mathrm{Sol}_X \cong \mathrm{Sol}_Y \circ f_+$ が存在する.

複素数体上のリーマン-ヒルベルト対応 (1.1) の著しい帰結として, $D^b_{\mathrm{c}}(X, \mathbb{C})$ に偏屈 t-構造を導入することが出来る. これは (1.1) によって $D^b_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ の標準 t-構造に対応している. Emerton と Kisin は X が k 上滑らかなスキーム ($n = 1$) の場合に類似した結果を得ていた. 本論文では Emerton-Kisin の結果を k 上埋め込み可能な k-スキームに対して一般化する以下の定理を得た.

定理 3.5. X を k 上埋め込み可能な k-スキームとし, 固有滑らかな k-スキーム P への埋め込み $X \hookrightarrow P$ をとる. この時,

$$\begin{aligned} D^{\leq 0}_{\mathrm{lfgu}}(X/k) &= \left\{\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{P,X} \mid k > 0 \text{ に対して } \mathrm{H}^k(\mathcal{M}) = 0\right\} \\ D^{\geq 0}_{\mathrm{lfgu}}(X/k) &= \left\{\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{P,X} \mid k > 0 \text{ に対して } \mathrm{H}^k(\mathcal{M}) = 0\right\} \end{aligned}$$

とおくと, 組 $(D^{\leq 0}_{\mathrm{lfgu}}(X/k), D^{\geq 0}_{\mathrm{lfgu}}(X/k))$ は $D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/k)$ 上の t-構造を定め, それは埋め込みの取り方によらない. またこの t-構造は Sol_X によって, $D^b_{\mathrm{c}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 上の偏屈 t-構造に対応する.

この定理から, t-構造 $(D^{\leq 0}_{\mathrm{lfgu}}(X/k), D^{\geq 0}_{\mathrm{lfgu}}(X/k))$ は $D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/k)$ の核 $\mu_{\mathrm{lfgu},X}$ は埋め込みの取り方によらないとわかる. Beilinson の定理の類似として以下の定理を得た.

定理 3.6. 自然な関手

$$D^b(\mu_{\mathrm{lfgu},X}) \to D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/k)$$

は三角圏の同値である.

一方逆に, 複素数体上のリーマン-ヒルベルト対応 (1.1) において $D^b_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{C})$ の標準 t-構造に対応する $D^b_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ の t-構造は [Kas2] において記述された. 本論文において [Kas2] に類似した結果を得た. X を k 上埋め込み可能な k-スキームとし, 固有滑らかな k-スキーム P への埋め込み $X \hookrightarrow P$ をとる.

$$\mathfrak{S}^n := \{Z \,|\, Z \text{ は余次元} \geq n \text{ の } P \text{ の閉集合 }\}$$

とし,

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{S}}D^{\leq -d_P}_{\mathrm{lfgu}}(X/k) &= \left\{\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{P,X} \,|\, \text{任意の } n \text{ に対して } \mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{S}^{n+d_P}}\mathrm{H}^n(\mathcal{M}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^n(\mathcal{M})\right\} \\ {}^{\mathfrak{S}}D^{\geq -d_P}_{\mathrm{lfgu}}(X/k) &= \left\{\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{P,X} \,|\, \text{任意の } n \text{ と } Z \in \mathfrak{S}^n \text{ に対して } \mathbb{R}\Gamma_Z\mathcal{M} \in \mathcal{C}^{\geq n-d_P}_{P,X}\right\}. \end{aligned}$$

とおく. ここに d_P は P の k 上の相対次元である.

定理 3.7. 組 $({}^{\mathfrak{S}}D^{\leq -d_P}_{\mathrm{lfgu}}(X/k), {}^{\mathfrak{S}}D^{\geq -d_P}_{\mathrm{lfgu}}(X/k))$ は $D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/k)$ 上の t-構造を定め, それは埋め込みの取り方によらない. またこの t-構造は Sol_X によって, $D^b_{\mathrm{c}}(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 上の標準 t-構造に対応する.

参考文献

[EK] M. Emerton and M. Kisin, The Riemann-Hilbert correspondence for unit F-crystals, *Astérisque* No. **293** (2004).

[Kas1] M. Kashiwara, The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **20** (1984), no. 2, 319-365.

[Kas2] M. Kashiwara, t-structures on the derived categories of holonomic $\mathcal{D}$-modules and coherent $\mathcal{O}$-modules, *Mosc. Math. J.* 4 (2004), no. 4, 847-868, 981.

[Me] Z. Mebkhout, Sur le Problème de Hilbert-Riemann, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B,* **290** (1980), no.9, A415-A417.