論文審査の結果の要旨

氏名　大川　幸男

複素代数多様体 X 上の Riemann-Hilbert 対応とは X 上の正則可積分接続の圏と $X(\mathbb{C})$ 上の局所系の圏との対応であるが，1980 年代に柏原と Mebkhout により，コホモロジー層が正則ホロノミックとなる D_X 加群の有界複体の導来圏とコホモロジー層が構成可能となる $\mathbb{C}_X$ 加群の有界複体の導来圏との三角圏の反変同値という形への一般化が証明された．この圏同値は Grothendieck の 6 つの演算 $f_*, f^*, f_!, f^!, \mathrm{RHom}, \otimes^L$ と整合的である．また，前者の圏における自然な t 構造に対応する t 構造が後者の圏における偏屈 t 構造として与えられ，また後者の圏における自然な t 構造に対応する前者の圏の t 構造も柏原により与えられている．

以上の定理の標数 $p>0$ における類似も研究されてきた．k を標数 $p>0$ の完全体，W_n を k の長さ n のヴィット環とし，X を W_n 上滑らかな代数多様体とするとき，Katz は X 上の局所自由ユニット $\mathcal{O}_{F,X}$ 加群の圏と X のエタールサイト X_{et} 上の構成可能局所定数 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 加群層の圏との圏同値を示した．(ここで $\mathcal{O}_{F,X}$ 加群とは $\mathcal{O}_X$ 加群でフロベニウス作用を持つものと自然に同一視できるものである.) この定理の一般化として，Emerton と Kisin は，コホモロジー層が局所有限生成ユニットとなる $\mathcal{D}_{F,X}$ 加群の有界複体の導来圏において有限 Tor 次元を持つもののなす部分圏 $D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ$ とコホモロジー層が構成可能となる X_{et} 上の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 加群層の有界複体の導来圏において有限 Tor 次元を持つもののなす部分圏 $D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ との三角圏の反変同値

$$\mathrm{Sol}_X : D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ \longrightarrow D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

を構成した．(ここで $\mathcal{D}_{F,X}$ 加群とは $\mathcal{D}_X$ 加群でフロベニウス作用を持つものと自然に同一視できるものである.) この圏同値はユニット F クリスタルに対する Riemann-Hilbert 対応と呼ばれている．また，Emerton と Kisin は，この圏同値と Grothendieck の演算のうちの 3 つ (前者の圏の $f_+, f^!, \otimes^L$ と後者の圏の $f_!, f^{-1}, \otimes^L$) についての整合性も証明した．更に $n=1$ のときに前者の圏における自然な t 構造に対応する t 構造が後者の圏における (Gabber の定義した) 偏屈 t 構造として与えられることも証明した．また，$n=1$ のときに圏 $D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ$ の自然な t 構造に関する中心の有界導来圏が元の圏と同値になること (Beilinson の定理) も証明している．

上記の設定の下で圏 $D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ は X の法 p 還元のみに依存しているので，圏 $D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ$ 及び Riemann-Hilbert 対応も X の法 p 還元のみに依存して定義されているべきである．Katz の定理の状況においてはこのこと

は Crew により示されているが，Emerton と Kisin の扱った状況ではそれは示されていなかった．更に，W_n 上滑らかに持ち上がるとは限らない k 上の (特異かもしれない) 代数多様体に対しても Riemann-Hilbert 対応が存在することが期待されるが，それも示されてはいなかった．

大川氏の博士論文は上記の問題に対して充分な解答を与えるものである．X を k 上の (特異かもしれない) 代数多様体で，W_n 上埋め込み可能である，すなわち W_n 上の固有かつ滑らかなスキーム P への埋め込み $X \hookrightarrow P$ をもつと仮定する．(k 上の任意の準射影的代数多様体はこの仮定を満たすのでこれは充分広いクラスをなす.) このとき，大川氏は台が X に含まれる $D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,P})^\circ$ の充満部分圏として圏 $D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ$ を定義し，これが埋め込み $X \hookrightarrow P$ に依存せずに定まることを示した．また，この状況において Emerton-Kisin の構成の一般化となる三角圏の反変同値

$$\mathrm{Sol}_X : D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ \longrightarrow D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

を構成した．そしてこの圏同値と Grothendieck の演算のうちの 3 つについての整合性も示した．また，$n = 1$ のときに前者の圏における自然な t 構造に対応する t 構造が後者の圏における偏屈 t 構造として与えられることを証明し，また後者の圏における自然な t 構造に対応する前者の圏の t 構造も明らかにした．更に $n = 1$ のとき，圏 $D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ$ の自然な t 構造に関する中心の有界導来圏が元の圏と同値になること (Beilinson の定理) も証明した．以上の結果の証明の要点は圏 $D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,P})^\circ$ における局所コホモロジー関手を構成してその性質を調べることにあり，$\mathcal{D}$ 加群の研究における標準的なものであるが，正標数の場合特有の独自の工夫も見られるものである．

本博士論文における大川氏の結果は Emerton-Kisin によるユニット F クリスタルに対する Riemann-Hilbert 対応をより理想的な状況にまで拡張する，大変意義深いものである．よって，論文提出者　大川幸男　は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．