論文審査の結果の要旨

氏　名　大久保　直人

クラスター代数とは quiver を用いて定義される可換環で、Fomin と Zelevinsky によって導入された。クラスター代数の生成元はクラスター変数と呼ばれ、seed の mutation によって定義される。Seed とは quiver、クラスター変数、係数の組のことで、mutation とは seed の変換のことである。初期 seed に mutation を施すことにより得られるクラスター変数と係数は quiver の形に依存したある関係式を満たす。また、初期 seed に mutation を施すことにより得られるクラスター変数は、初期 seed のクラスター変数のローラン多項式となることが知られている。この性質はローラン性と呼ばれている。

先行研究として、大久保氏自身が初期 seed として適当な quiver を選んだとき、mutation により得られる係数が q-パンルヴェ I 方程式や q-パンルヴェ II 方程式を満たすことを示した。これらの quiver は mutation-period と呼ばれる性質をもつ。quiver に対して m 回の mutation を施したものが、元の quiver の頂点を置換したものになるとき、その quiver を period-m quiver という。これらのうち、period-1 quiver については Fordy と Marsh によりすべて得られているが、周期が 2 以上の quiver については完全な分類はされていない。上記の q-パンルヴェ I 方程式と q-パンルヴェ II 方程式を与える quiver は period-1 quiver である。大久保氏は本論文で、新たに period-2 quiver から q-パンルヴェ III 方程式と period-4 quiver から q-パンルヴェ VI 方程式が得られることを証明した。これらの差分方程式は、初期 seed に対して mutation を繰り返すことにより得られる係数の満たす関係式を求め、その保存量を用いて差分方程式を 2 階に書き直すことにより得られたものである。

大久保氏は、自身の過去の研究において、ランクが無限大である適当なクラスター代数を考えることにより、そのクラスター変数が広田・三輪方程式や離散 KdV 方程式などの高次元の可積分差分方程式を満たすことを示した。クラスター代数のランクとは初期 seed の quiver の頂点の個数のことである。これらの偏差分方程式を与える quiver は mutation-period の拡張である特殊な性質をもつ。広田・三輪方程式と離散 KdV 方程式を与える quiver は period-1 quiver の拡張である。本論文では新たにクラスター変数が離散 mKdV 方程式を満たすようなクラスター代数を period-2 quiver の拡張から構成した。さらに、離散 mKdV 方程式を与える quiver に対して、適当な変形を施すことにより、q-パンルヴェ III 方程式や q-パンルヴェ VI 方程式を与える quiver が攻勢できることを示した。また、修士論文において大久保氏の得た広田・三輪方程式を与える

quiver に対して同様の変形を施すことにより、離散 mKdV 方程式を与える quiver が得られることも示している。この変形は差分方程式に拘束条件を課すことで別の差分方程式を導く reduction に対応している。

一般に、クラスター変数の満たす関係式は、(2 つのクラスター変数の積) = (クラスター変数の単項式 2 つの和)の形で得られる。しかし、離散 BKP 方程式、Somos-7 などの差分方程式はこの形の関係式ではない。そこで、大久保氏は、Lam と Pylyavskyy によりクラスター代数のローラン性をもつような拡張として導入されたローラン現象代数を考察した。ローラン現象代数はクラスター変数と exchange polynomial から成る seed の mutation により定義される。本論文では初期 seed の exchange polynomial を適当に選ぶことにより、クラスター変数が離散 BKP 方程式や Somos-7 などを満たすようなローラン現象代数を新たに構成した。Somos-7 を与える初期 seed はクラスター代数の mutation-period に相当する性質をもつこと、また、離散 BKP 方程式はランクが無限大であるローラン現象代数から得られ、その初期 seed はクラスター代数の mutation-period の拡張に相当する性質をもつことも証明している。

本論文の構成は以下の通りである。第 1 章では本論文の主張を概説する。第 2 章ではクラスター代数の定義について述べる。第 3 章ではランクが無限大の適当なクラスター代数のクラスター変数が離散 mKdV 方程式を満たすことを述べ、差分方程式の reduction と対応する quiver の変形についても説明する。第 4 章では mutation-period と呼ばれる性質について説明し、適当な mutation-periodic quiver から得られるクラスター代数の係数が q-パンルヴェ III 方程式と q-パンルヴェ VI 方程式を満たすことを示す。第 5 章ではローラン現象代数と period-1 seed の定義について述べる。第 6 章では適当な exchange polynomial から得られるランクが無限大のローラン現象代数のクラスター変数が離散 BKP 方程式を満たすことを述べる。第 7 章では離散 BKP 方程式を与える初期 seed の reduction によって Somos-7 などの差分方程式の初期 seed も得られることについて述べる。第 8 章では本論文のまとめと今後の展望について述べられている。

本研究は、q パンルベ方程式や離散 BKP 方程式など重要な離散可積分方程式の例をクラスター代数およびその拡張から構成した研究で一般論や統一的な指針のない状況で、このように具体例を構成し実現できるのは独特のセンスと相当の計算力を要するものである。結果も非自明で大変興味深いものであり、今後の進展が期待される。よって、論文提出者 大久保 直人 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。