論文の内容の要旨

論文題目　A moving lemma for algebraic cycles with modulus and contravariance

(モジュラス付き代数的サイクルの移動補題と反変性)

氏名　甲斐 亘

背景

代数的サイクルをモジュラス付きで考察するという分野が近年勃興しつつある．これはスキームにカルティエ因子で表される境界を設定し, 代数的サイクルの境界附近での振舞いを考慮に入れるものである．モジュラスという考え方は類体論に既に見られ, 代数曲線にも 1950 年代以降 Rosenlicht らによって移植された．

モジュラス付きサイクル理論の現在の展開は Bloch-Esnault が 2003 年に加法的高次 Chow 群を導入したことに始まる (彼らは 0 次元サイクルの群を定義し, 一般の定義は Park によってなされた)．この理論においては $X \times \mathbb{A}^1$ 上に $X \times m\{0\}$ という因子が載っている状況で代数的サイクルを考察する．これを導入することの意図の一つは加法的高次 Chow 群によって相対 K 群

$$K_*(X \times \mathbb{A}^1, X \times m\{0\})$$

を捉えることである．これは古典論において Bloch の高次 Chow 群が K 群に対応すること

$$K_n(X)_{\mathbb{Q}} \cong \bigoplus_r \mathrm{CH}^r(X, n)_{\mathbb{Q}}$$

(X は体上スムーズ) の類似を意識してのことである．しかしながら相対 K 群と代数的サイクルの群の比較は未だ成功していない．

さらに最近になって, 一般のスキーム X とカルティエ因子 D に対してモジュラス付き高次 Chow 群を導入する動きが現れた．Kerz-斎藤秀司は 0 次元サイクルのモジュラス付き Chow 群を定義し, 有限体上の多様体においてそれが暴分岐を含む類体論と深くつながることを明らかにした．Russell はそれよりも早く, Kerz-斎藤とはやや異なる定義を採用し彼の定義したモジュラス付

き Albanese 多様体との関係を研究していた．こうしたことを承けて Binda-斎藤秀司は 2014 年にモジュラス付き高次 Chow 群の完全に一般な定義を与えた．彼らの群 $\mathrm{CH}^r(X|D,n)$ の元は $X \times \mathbb{A}^n$ 上の余次元 r サイクルであって「面条件」(D に依らない) と「モジュラス条件」(D に依る) という二つの条件を満たすもので代表される．これは特殊な場合として上記の Rosenlicht, Bloch-Esnault-Park, Kerz-斎藤の定義した群を含む．$D = \emptyset$ の場合は Bloch の高次 Chow 群の定義を復元する．X がスムーズの時にかれらの群は相対 K 群

$$K_n(X,D)$$

と関係するであろうと信じられているが, この試みはまだ成功していない．

代数的サイクルのモジュラス付き理論を考察するもう一つの動機は, $X \times m\{0\}$ や D という被約でないスキームのコホモロジー的サイクル理論を建設することである．X という非特異多様体については既に Bloch の高次 Chow 群という理論があり, 対 (X,D) に対してモジュラス付き高次 Chow 群が良いコホモロジー理論として機能すれば, それを組み合わせて D に対するサイクル理論が作れる (X という容れ物を利用してではあるが) というわけである．

モジュラス付きサイクル理論にはこのような魅力的な夢がある一方で, 加法的高次 Chow 群やモジュラス付き高次 Chow 群については, 反変関手性すら未だ知られていない．射影的な場合に限れば Krishna-Park によって反変関手性が示せているが, アフィンなどの一般の場合には「モジュラス条件」は扱いづらいものとなり対処できていなかった．

本論文の内容

本論文では新しい「モジュラス付き」移動補題を証明することにより, 反変関手性の問題が少なくとも局所的には解けることを示す．われわれは Bloch-Esnault の加法的高次 Chow 群がスムーズ・アフィンスキームへの射に関して反変性を持ち, Binda-斎藤のモジュラス付き高次 Chow 群は定義を Nisnevich 位相について局所的なものに修正すれば非特異多様体と因子の対の間の射に関して反変性を持つことを示す．

そもそも代数的サイクルはスキーム間の任意の射で必ずしも引き戻せないのだが, これはサイクルを閉部分集合として素朴に引き戻すという操作が一般に余次元を保たないためである．新しい移動補題は与えられたサイクルを,「モジュラス条件」を保ったまま十分一般の場所に動かし, 与えられた射による台の逆像が余次元を保つように修正する．このことで引き戻しを可能にする．

残りのスペースで主定理の正確な主張 (を僅かに弱めたもの) と, 証明の概略を述べる．

Binda-斎藤の Chow 群はサイクル複体のホモロジー群として定義される. サイクル複体

$$z^r(X|D,\bullet)$$

とそれに付随する Nisnevich 層 $z^r(X|D,\bullet)_{\mathrm{Nis}}$ の完全な定義は本文を参照されたい. この複体はホモロジー次数 ≥ 0 に集中しており n 次部分の元は $X \times \mathbb{A}^n$ 上の余次元 r サイクルのうち「面条件」と「モジュラス条件」という二つの条件 (本文で述べる) を満たすもので代表される. 「モジュラス条件」により, 台 $|V|$ は部分集合 $|D| \times \mathbb{A}^n$ とは交わらない. 各座標軸を無限にまで延長 ($\mathbb{A}^n \subset (\mathbb{P}^1)^n$) して V の閉包をとるときは交わっても構わないが, その近づく速さに D の重複度から決まる制限が課される.

いま $X \setminus D$ の既約閉部分集合のなす有限集合 $\mathcal{W}$ が与えられたとする. 複体

$$z^r(X|D,\bullet)_{\mathcal{W}} \subset z^r(X|D,\bullet)$$

を「すべての $W \in \mathcal{W}$ と正しく交わる」サイクルのなす $z^r(X|D,\bullet)$ の部分複体とする (正確な定義は本文を参照されたい). この部分複体は X 上の Nisnevich 層の部分複体 $z^r(X|D,\bullet)_{\mathcal{W},\mathrm{Nis}}$ に拡張される.

射 $X' \to X$ で因子どうしの射 $D' \to D$ を誘導するものが与えられたとき, 適当な $\mathcal{W}$ をとると, モジュラス付きサイクルが X' に引き戻せるための (十分) 条件が $V \in z^r(X|D,\bullet)_{\mathcal{W}}$ であるという事実が, 上のような部分複体を考察する理由である.

主定理は次である:

主定理 (Theorem 4.11)**.** X を体 k 上有限型等次元スキームとし, D を X 上の有効 Cartier 因子とする. $X \setminus D$ はスムーズであると仮定する. $\mathcal{W}$ を $X \setminus D$ の既約閉部分集合のなす任意の有限集合とする. このとき包含写像

$$z^r(X|D,\bullet)_{\mathcal{W},\mathrm{Nis}} \hookrightarrow z^r(X|D,\bullet)_{\mathrm{Nis}}$$

は Nisnevich 位相で擬同型である.

とくに, サイクル複体を係数とする Nisnevich ハイパーコホモロジーは反変関手性を持つ.

証明の概略を述べる. 証明は, $X = \mathbb{A}^d$ の場合と, この場合への帰着に分かれる. 帰着のステップで Nisnevich 位相による局所化が必要となる.

アフィン空間 $\mathbb{A}^d$ の場合には, 平行移動による自己同型を利用してサイクルを動かすというのが基本戦略となる. ただし, 平行移動を単純に当てはめただけでは証明が機能しない (D が超平面という簡単な場合でも) ことがかねてより認識されていた。そこで筆者は点ごとに異なる移動速度を採用した：

二つのパラメーター, 移動速度ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{A}^d$ と整数 $s \geq 1$ を与えておく. D の定義方程式を u とする. 点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^d$ における移動速度を $u(\boldsymbol{x})^s\boldsymbol{v}$ と

定める．$\mathbb{A}^d \times \mathbb{A}^n$ 上のモジュラス付きサイクル V が与えられたとき, この移動速度によって時刻 $t = 0$ から連続的にサイクルを動かしていくことにより $\mathbb{A}^d \times \mathbb{A}^{n+1}$ 上のサイクル ($\Phi_{\boldsymbol{v},s}(V)$ と書こう) を得る．

ベクトル $\boldsymbol{v}$ が十分一般に選んであれば「移動後のサイクル」$\Phi_{\boldsymbol{v},s}(V)|_{t=1}$ は部分複体に属することが確認できる．$\Phi_{\boldsymbol{v},s}(V)$ には「移動前」V と「移動後」$\Phi_{\boldsymbol{v},s}(V)|_{t=1}$ とをつなぐホモトピーとしての役割を期待したい．そこで大きなサイクル $\Phi_{\boldsymbol{v},s}(V)$ についてモジュラス条件をチェックしなければならない．モジュラス条件にはコンパクト化 $\mathbb{A}^{n+1} \subset (\mathbb{P}^1)^{n+1}$ が関わり、とくに時間軸である $n+1$ 番目の $\mathbb{A}^1$ を $\mathbb{P}^1$ にコンパクト化する操作がともなう．これは時刻無限大におけるサイクルの振舞いを考慮することにあたる．モジュラス付き理論で初めて現れる論点である．筆者は整数パラメーター s を与えられたサイクルに対して十分大きくとれば t を無限大に発散させる際の振舞いを制御できることを見出した.

アフィン空間 $\mathbb{A}^d$ の場合に問題が解けたら, アフィンスキーム X の場合には Noether 正規化定理により有限全射 $X \to \mathbb{A}^d$ を構成して問題をアフィン空間に帰着することを考える．これは多かれ少なかれ標準的なプロセスである．ただし, ここではモジュラス条件に対処するために, X 上に与えられた因子 D が $\mathbb{A}^d$ 上の因子の引き戻しであってほしい．残念ながらこれは D が主因子であっても一般には実現しない．本論文では, おおむね, これが Nisnevich 局所的には可能であることを証明して帰着の議論を機能させる：

定理 (Theorem 4.6)**.** X を, Dedekind 環のスペクトラム B 上等次元的なスキームとする．すると X および B 上 Nisnevich 局所的には, 有限全射

$$X \to \mathbb{A}^d_B$$

が存在する (d は X の B 上の相対次元).

定理は Levine が $X \to B$ がスムーズ, B が一般の Noether スキームという状況で証明していたので彼の証明を参考にした.

われわれは代数的スキーム X を, 主因子 D の定義方程式により $\mathbb{A}^1$ 上のスキームとみなして定理を適用する．したがって, 実際の取扱いとしては先立つ議論を若干修正し, 離散付値環 R 上のアフィン空間 $\mathbb{A}^d_R$ に対して主定理を先に示しておき (因子としては閉ファイバーを与える), そこへ帰着することになる．この場合も証明は上と本質的には異ならない.

加法的高次 Chow 群の場合には考察する因子は必ず $m\{0\} \subset \mathbb{A}^1$ の引き戻しであるため, Noether 正規化定理を巡るこのような余分な手間はかからない.このため加法的高次 Chow 群については前半に述べたように一般のスムーズ・アフィン多様体に対して反変関手性が証明できる.