論文の内容の要旨

論文題目: Heavy subsets and non-contractible trajectories (重い部分集合と非可縮軌道)

氏名: 川﨑盛通

1. 背景

ハミルトン・イソトピーの非可縮 (周期) 軌道の存在はシンプレクティック幾何学においてよく知られた問題の一つである.

アーノルド予想によって, 任意のハミルトン・イソトピーは可縮軌道を持つことが知られている. 一方で C^2 ノルムの充分小さいハミルトン函数から生成されるハミルトン・イソトピーは非可縮軌道を持たないことが知られている.

したがって, いかなるハミルトン・イソトピーに非可縮軌道が存在するかが一つの問題となる. この問題に答えるための一つの概念が Biran, Polterovich と Salamon によって考え出された相対的シンプレクティック容量である. 以下, この相対的シンプレクティック容量 (Biran-Polterovich-Salamon 容量と呼ぶ) について説明する.

開シンプレクティック多様体 (N,ω) 内のコンパクト部分集合 Y, N 内の自由ホモトピー類 $\alpha\in[S^1,N]$ について, Biran, Polterovich と Salamon は以下のように相対的シンプレクティック容量 $C_{BPS}(N,Y;\alpha)$ を定義した.

$$C_{BPS}(N,Y;\alpha)=\inf\{K>0;\forall H\in\mathcal{H}_K(N,Y),\mathcal{P}(H;\alpha)\neq\emptyset\}.$$

ここで, $\mathcal{H}_K(N,Y)=\{H\in C^\infty_c(S^1\times N);\inf_{S^1\times Y}H\geq K\}$ であり, $\mathcal{P}(H;\alpha)$ は α を代表するような周期 1 の周期軌道の集合である.

上の相対的シンプレクティック容量について Biran, Polterovich と Salamon の示したことは以下である.

定理 1.1 ([BPS]). *N を連結なリーマン多様体とし, $\alpha\in[S^1,N]$ を N 内の自由ループ類とする. N は n 次元トーラス, もしくは負の曲率のリーマンを許容するものと仮定する. このとき,*

$$C_{BPS}(B^*N,N;\alpha)=l_\alpha.$$

ここで, l_α は α を代表する測地線の長さの下限であり, (B^*N,ω_N) は余接束の単位球体部分束と標準的なシンプレクティック形式 ω_N である.

上のように相対的シンプレクティック容量の言葉で非可縮軌道の研究される一方で, non-displaceability もシンプレクティック幾何学にお

いてよく研究されている現象の一つである ([G], [F]). 我々の結果は X が non-displaceable な場合の $C_{BPS}(M, X, \alpha)$ の振る舞いに関するものである.

Biran, Polterovich と Salamon は以下を示した.

命題 1.2 ([BPS])**.** *Y を連結な開多様体 (N, ω) のコンパクト部分集合とし, $\alpha \in [S^1, N]$ を N の非自明な自由ホモトピー類とする. コンパクト台を持つハミルトン函数 $H\colon S^1 \times N \to \mathbb{R}$ は $Y \cap \phi_H^1(Y) = \emptyset$ と $\mathcal{P}(H; \alpha) = \emptyset$ を充たすと仮定する. このとき, $C_{BPS}(N, Y; \alpha) = \infty$.*

上の命題により, X が non-displaceable な場合の $C_{BPS}(M, X, \alpha)$ の振る舞い (有限となるか否か) への関心が浮かぶ.

non-displaceable な部分集合のクラスのうちで重要なものの一つに重い部分集合というものがある.

重い部分集合は non-displaceable であるのが知られている. 例えば, $\mathbb{C}P^n \times (\text{ball}) \times T^n$ 内の (Clifford torus of $\mathbb{C}P^n$) $\times T^n$ は重い部分集合であり, 特に non-displaceable である.

本論文においては X が M の重い部分集合の場合の Biran-Polterovich-Salamon 容量 $C_{BPS}(M, X, \alpha)$ の上からの評価を行った. 先行研究 ([BPS], [W], [N], [X]) では Biran-Polterovich-Salamon 容量 $C_{BPS}(M, X, \alpha)$ を上から評価するのに α を代表する軌道のハミルトン・フレアー理論を用いてきた. 一方, 重い部分集合は可縮軌道のハミルトン・フレアー理論により定義される概念であり, 我々の主結果も可縮軌道のハミルトン・フレアー理論により証明される.

2. 主結果

本論文における主結果を説明するためにいくつかの記法を導入する.

$(\mathbb{R}_{>0})^n$ の元 $R = (R_1, \ldots, R_n)$ に対し, I_R^n を $I_R^n = \{p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n; |p_i| < R_i \text{ for } i = 1, \ldots, n\}$ により定義される開区間の積とし, $I_R^n \times T^n$ の上に座標 $(p, q) = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ を設定し, 標準的なシンプレクティック形式 $\omega_0 = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n$ を考える. また, $I_R^n \times T^n$ の 0 切断 $\{(p, q) \in I_R^n \times T^n; p = 0\}$ を T^n と書く.

(M, ω) を連結なシンプレクティック多様体とし, X を M のコンパクトな部分集合とする. $e = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{Z}^n$ と $R = (R_1, \ldots, R_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ について, 相対的シンプレクティック容量 $C(M, X, R; e)$ を以下のように定義する.

$$C(M, X, R; e) = C_{BPS}(M \times I_R^n \times T^n, X \times T^n; (0_M, e)).$$

ただし, ここでは $M \times I_R^n \times T^n$ 上のシンプレクティック形式として $\mathrm{pr}_1^* \omega + \mathrm{pr}_2^* \omega_0$ を考えている.

実数 λ に対し, シンプレクティック多様体 (M, ω) が λ-単調であるというのは $\pi_2(M)$ 上で $[\omega] = \lambda c_1$ となることを指す. そして (M, ω) があ

る正の λ について λ-単調であるとき, (M,ω) は単調であるという. ここで, c_1 は ω に適合した概複素構造の定める第一チャーン類をする.

我々の主定理は以下である.

定理 2.1 (Theorem 1.3)**.** (M,ω) を $2m$ 次元の連結で λ-単調な閉シンプレクティック多様体とし, X を M の重い部分集合とする. このとき, それぞれ $\mathbb{Z}^n$ と $(\mathbb{R}_{>0})^n$ の元である $e=(e_1,\dots,e_n)$ と $R=(R_1,\dots,R_n)$ について $C(M,X,R;e)\leq 2\sum_{i=1}^n R_i\cdot|e_i|+\max\{0,-\lambda(m+n)\}$ が成立する.

定理 2.1 は以下のように書き直すことができる.

定理 2.2 (Theorem 1.4)**.** X を連結な $2m$ 次元 λ-単調な閉シンプレクティック多様体 (M,ω) の重い部分集合とする. $e=(e_1,\dots,e_n)$ と $R=(R_1,\dots,R_n)$ をそれぞれ $\mathbb{Z}^n$ と $(\mathbb{R}_{>0})^n$ の元とする. $M\times I_R^n\times T^n$ 上のシンプレクティック形式 $\mathrm{pr}_1^*\omega+\mathrm{pr}_2^*\omega_0$ を固定する. $F\colon S^1\times M\times I_R^n\times T^n\to\mathbb{R}$ をコンパクト台を持つハミルトン函数で $F|_{S^1\times X\times T^n}\geq 2\sum_{i=1}^n R_i\cdot|e_i|+\max\{0,-\lambda(m+n)\}$ を満たすものとする. このとき, ハミルトン・イソトピー $\{\phi_F^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は $(0_M,e)\in[S^1,M\times I_R^n\times T^n]$ に属する周期 *1* の周期軌道をもつ.

定理 2.1, 2.2 の証明には (Oh-Schwarz) スペクトル不変量 ([S], [Oh02], [Oh06]) の上からの評価 (Proposition 4.1) を用いる. スペクトル不変量は可縮軌道のハミルトン・フレアー理論により定義される概念であり, 証明でもハミルトン・イソトピーの可縮軌道に関する考察が本質的な役割を果たす.

displaceable なコンパクト部分集合 X については以下がいえる.

命題 2.3 (Proposition 1.5)**.** X を連結なシンプレクティック多様体 (M,ω) の *displaceable* なコンパクト部分集合とする. $e=(e_1,\dots,e_n)$ と $R=(R_1,\dots,R_n)$ をそれぞれ $\mathbb{Z}^n$ と $(\mathbb{R}_{>0})^n$ の元とし, ある k について $R_k\cdot|e_k|>E(X)$ を充たすとする. ここで, $E(X)$ は X の *displacement energy* である. このとき, $C(M,X,R;e)=\infty$.

したがって, $\mathbb{C}P^n\times I_R^n\times T^n$ 内の (Clifford torus of $\mathbb{C}P^n$) $\times\, T^n$ についての Biran-Polterovich-Salamon 容量の上からの評価を与えることができ, (other fiber of $\mathbb{C}P^n$) $\times\, T^n$ については下からの評価を与えることが出来る.

例 2.4 (Example 1.6)**.** $(\mathbb{C}P^m,\omega_{FS})$ を Fubini-Study 形式 ω_{FS} 付きの複素射影空間とする. $\Phi\colon\mathbb{C}P^m\to\mathbb{R}^m$ を

$$\Phi([z_0:\dots:z_m])=\left(\frac{|z_0|^2}{|z_0|^2+\cdots+|z_m|^2},\dots,\frac{|z_m|^2}{|z_0|^2+\cdots+|z_m|^2}\right),$$

により定義された運動量写像とする. クリフォード・トーラス $\Phi^{-1}(y_0)$ は $(\mathbb{C}P^m,\omega_{FS})$ の重い部分集合である. ださし, $y_0=(\frac{1}{m+1},\dots,\frac{1}{m+1})$ と

する. $(\mathbb{C}P^m, \omega_{FS})$ は単調なシンプレクティック多様体なので, 定理 2.1 より, それぞれ $\mathbb{Z}^m$ と $(\mathbb{R}_{>0})^m$ の元 $e = (e_1, \ldots, e_m)$ と $R = (R_1, \ldots, R_m)$ について, $C(\mathbb{C}P^m, \Phi^{-1}(y_0), R; e) \leq 2\sum_{i=1}^m R_i \cdot |e_i|$ となる.

正の数 P が存在して, $y \neq y_0$ となる $\mathbb{R}^m$ 上の任意の点 y について $E(\Phi^{-1}(y)) < P$ となることが [BEP] により知られている. したがって, 命題 2.3 により, $y \neq y_0$ となる $\mathbb{R}^m$ 上の任意の点 y とある k について $R_k \cdot e_k > P$ を満た $\mathbb{Z}^m$ の元 e と $(\mathbb{R}_{>0})^m$ の元 R について, $C(\mathbb{C}P^m, \Phi^{-1}(y), R; e) = \infty$ が成立する.

また, 本論文では以下の定理 2.1 の一般化についても考察した.

問題 2.5 (Problem 9.1)**.** X を閉シンプレクティック多様体 (M, ω) の stably non-displaceable なコンパクト部分集合とする. このとき, それぞれ $\mathbb{Z}^n$ と $(\mathbb{R}_{>0})^n$ の任意の元 $e = (e_1, \ldots, e_n)$ と $R = (R_1, \ldots, R_n)$ について

$$C(M, X, R; e) \leq \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot |e_i|$$

が成立するか.

本論文においては上の不等式に関連した考察を幾つか行った (Theorem 5.1, Theorem 9.4, Proposition 9.5).

References

[BEP] P. Biran, M. Entov and L. Polterovich, *Calabi quasimorphisms for the symplectic ball*, Commum. Contemp. Math., **6** (2004), 793-802.

[BPS] P. Biran, L. Polterovich and D. Salamon, *Propagation in Hamiltonian dynamics and relative symplectic homology*, Duke Math. J., **1** (2003), 65-118.

[EP] M. Entov and L. Polterovich, *Rigid subsets of symplectic manifolds*, Comp. Math., **145** (3) (2009), 773-826.

[F] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differential Geom., **28**(3) (1988), 513-547.

[G] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math., **82**(2) (1985), 307-347.

[N] C. Niche, *Non-contractible periodic orbits of Hamiltonian flows on twisted cotangent bundles*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **14** (4) (2006), 617-630.

[Oh02] Y. -G. Oh, *Chain level Floer theory and Hofer's geometry of the Hamiltonian diffeomorphism group*, Asian J. Math., **6**(4) (2002), 579-624.

[Oh06] Y. -G. Oh, *Lectures on Floer theory and spectral invariants of Hamiltonian flows*, Morse Theoretic Methods in Nonlinear Analysis and in Symplectic Topology, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.y, **217** (2006), 321-416.

[S] M. Schwarz, *On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds*, Pacific J. Math., **193**(2) (2000), 419-461.

[W] J. Weber, *Noncontractible periodic orbits in cotangent bundles and Floer homology*, Duke Math. J., **133**(3) (2006), 527-568.

[X] J. Xue, *Existence of noncontractible periodic orbits of Hamiltonian system separating two Lagrangian tori on $T^*\mathbb{T}^n$ with application to non convex Hamiltonian systems*, arXiv:1408.5193v3.