論文審査の結果の要旨

氏　名　　　　　川　埼　盛　通

シンプレクティク多様体 N のハミルトン微分同相は、$(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \times M$ 上の関数 H をハミルトン関数とするハミルトン・アイソトピー ϕ_H^t の時刻 1 写像 ϕ_H^1 として定まる。このハミルトン微分同相の固定点 x に対しては、閉軌道 $\gamma^x = \{\phi_H^t(x)\}$ が定まる。このような閉軌道の存在の問題は、シンプレクティク多様体の位相の研究において、フレア理論の背景となる重要な問題であり、多くの研究がなされてきた。

このような研究の中で、ハミルトン微分同相が与えられた自由ホモトピー類 α に属する（非可縮な）閉軌道をもつかどうかを用いて、Biran-Polterovich-Salamon は、開シンプレクティク多様体 N の部分集合 Y の相対シンプレクティク容量 $C_{\mathrm{BPS}}(N, Y, \alpha)$ を、$(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \times Y$ 上で K 以上となる任意のコンパクト台のハミルトン関数 $H : (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \times N \longrightarrow \boldsymbol{R}$ に対して、そのハミルトン・アイソトピー ϕ_H^t が α に属する閉軌道 γ^x を持つような正実数 K の下限として定義した。

$$C_{\mathrm{BPS}}(N, Y, \alpha) = \inf\left\{K > 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} H \in C_c^\infty((\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \times N) \text{ が } H|(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \times Y \geqq K \\ \text{を満たすならば } \phi_H^t \text{ は } \alpha \text{ に属する閉軌道を持つ} \end{array}\right\}$$

Biran-Polterovich-Salamon は、N がトーラスあるいは負曲率多様体 M の余接束の単位球体束 B^*M の場合に、$C_{\mathrm{BPS}}(B^*M, M, \alpha)$ が α に属する閉測地線の長さに一致することを示した。一方、彼らは、Y が α に属する閉軌道を持たないハミルトン・アイソトピーで Y と交わらないように移動できるときに、$C_{\mathrm{BPS}}(N, Y, \alpha) = \infty$ を示している。

論文提出者 川埼盛通 は、$C_{\mathrm{BPS}}(N, Y, \alpha)$ の有限性と Y が移動不可能 (non-displaceable) であることの関連を研究し、次の結果を得た。$I_{(R_1,\ldots,R_n)} = (-R_1, R_1) \times \cdots \times (-R_n, R_n)$ に対し、$(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^n = T^n = \{0\} \times T^n \subset I_{(R_1,\ldots,R_n)} \times T^n \subset T^*T^n$ と考える。

<u>定理</u>。(M, ω) を $2m$ 次元 λ 単調閉シンプレクティク多様体、X を M の重集合とする。ただし、λ 単調とは $\pi_2(M)$ 上で $[\omega] = \lambda c_1$（第 1 チャーン類）が成立していることである。このとき、0_M を M の可縮なループの自由ホモトピー類として、相対シンプレクティク容量は次のように評価される。

$$\begin{aligned} &C_{\mathrm{BPS}}(M \times I_{(R_1,\ldots,R_n)} \times T^n, X \times T^n, (0_M, (e_1, \ldots, e_n))) \\ \leqq\, &2 \sum_{i=1}^n R_i |e_i| + \max\{0, -\lambda(m+n)\}. \end{aligned}$$

この相対シンプレクティク容量は、M, X, $(R_1, \ldots, R_n)$, $(e_1, \ldots, e_n)$ のみに依存している。

また、論文提出者は X が移動可能な集合のときには、ある k に対して $R_k|e_k|$ が移動エネルギーよりも大となれば、この相対シンプレクティク容量が無限大になることを示した。

例えば、$\boldsymbol{C}P^m$ は、λ 単調 $(\lambda > 0)$ であり、$\boldsymbol{C}P^n$ の自然なモーメント写像 $\Psi : \boldsymbol{C}P^m \longrightarrow \Delta^m \subset \boldsymbol{R}^{m+1}$ （Δ^m は基本ベクトルで張られる m 次元単体）に対し、クリフォードトーラス $\Psi^{-1}(b)$ $(b = (\frac{1}{m+1}, \dots, \frac{1}{m+1}))$ は、重集合であるから、上の定理により、相対シンプレクティク容量 $C_{\mathrm{BPS}}(\boldsymbol{C}P^n \times I_{(R_1,\dots,R_n)} \times T^n, \Psi^{-1}(b) \times T^n, (0_M, (e_1, \dots, e_n)))$ は有限となる。しかし、モーメント写像の他のファイバーに対しては、相対シンプレクティク容量は無限大となる。

重集合の定義は、ハミルトン・アイソトピーの可縮な閉軌道を用いるフレア理論、特に津ペクトル不変量によっているので、重集合についての上記の命題の証明に、論文提出者は可縮な閉軌道を用いるフレア理論を使っている。$C_{\mathrm{BPS}}(N, Y, \alpha)$ を評価する際に、N を含む閉シンプレクティク多様体上の、ハミルトン関数 H で、そのハミルトン・アイソトピー ϕ_H^t に対し、N 上の点は考えている自由ホモトピー類 α の逆向き $-\alpha$ の閉軌道となるものを用意し、自由ホモトピー類 α の閉軌道を持たないハミルトン関数 F に対し、ϕ_H^t と ϕ_F^t の合成のスペクトル不変量の評価を用いている。これは、非可縮な閉軌道の存在と、可縮な閉軌道の存在の間のバランスを使う面白い手法であり、今後の研究に使える可能性がある。

さらに論文提出者 川崎盛通 は、X が安定的にも移動不可能であるときに、$C_{\mathrm{BPS}}(M \times I_{(R_1,\dots,R_n)} \times T^n, X \times T^n, (0_M, (e_1, \dots, e_n)))$ の値は $\sum_{i=1}^n R_i |e_i|$ となることを予想している。これを支持するいくつかの命題を示すとともに、移動不可能かつ安定的移動可能で、相対シンプレクティク容量が無限大となる例を与えている。

これらの論文提出者の結果は、シンプレクティク幾何学において、シンプレクティク多様体の重集合とそれに関連するシンプレクティク多様体上のハミルトン力学系の非可縮軌道の間の関係を記述したもので、今後のシンプレクティク多様体の研究において重要な意味を持つものであり、この分野のこれからの研究の基礎となるものである。よって論文提出者 川崎盛通 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。