論文の内容の要旨

論文題目　Algebraic structure on the space of intertwining operators
(絡作用素の空間上の代数構造)

氏名　北川 宜稔

本論文の目的は、絡作用素全体の空間に自然に入る代数構造を調べ、その結果を用いて表現の分岐則を理解することである。

$G_{\mathbb{R}}$ を実簡約 Lie 群とし、$G'_{\mathbb{R}}$ をその簡約部分 Lie 群とする。このとき、$G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現 V を $G'_{\mathbb{R}}$ に制限すると、既約表現の直積分に一意的に分解することが知られている:

$$V|_{G'_{\mathbb{R}}} \simeq \int^{\oplus}_{\widehat{G'_{\mathbb{R}}}} m(\pi) V_\pi d\mu(\pi). \tag{1}$$

ここで、V_π は表現 π の表現空間で、$d\mu$ はユニタリ双対 $\widehat{G'_{\mathbb{R}}}$ の測度である。$m(\pi)$ は π に対する重複度と呼ばれる。この既約分解を求める問題は分岐則と呼ばれ、小林俊行氏の 1990 年代の研究以後 Lie 群の表現論における主要な問題の一つとなってきている。

1940 年代以降、Harish-Chandra をはじめとする多くの数学者の研究により、実簡約リー群の既約ユニタリ表現はそれに付随する $(\mathfrak{g}, K)$-加群によって完全に統制されているということがわかっている。例えば、既約ユニタリ表現の分類問題はユニタリ化可能な $(\mathfrak{g}, K)$-加群の分類と同値である。

$(\mathfrak{g}, K)$-加群について述べる。$G_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群を $K_{\mathbb{R}}$ とし、$G_{\mathbb{R}}$ と $K_{\mathbb{R}}$ の Lie 環を $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ とする。また、それらの複素化を $K, \mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とする。このとき V を $G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現とすると、その $K_{\mathbb{R}}$-有限なベクトル全体の空間 V_K には $\mathfrak{g}$ と K の作用が自然に入る。この加群を V に付随する $(\mathfrak{g}, K)$-加群と呼ぶ。これは、より一般に admissible な連続表現に対しても同様に定義される。$G'_{\mathbb{R}}$ に対して、$K'_{\mathbb{R}}, K', \mathfrak{g}'$ 等を $G_{\mathbb{R}}$ のときと同様にとる。ただし、$K'_{\mathbb{R}} = G'_{\mathbb{R}} \cap K_{\mathbb{R}}$ となるようにする。一つの問題として、既約ユニタリ表現の分岐則を $(\mathfrak{g}, K)$-加群の情報から得ることができるか、というものが挙げられる。$(\mathfrak{g}, K)$-加群は既約ユニタリ表現の情報をすべて持っているので、V_K を $(\mathfrak{g}', K')$ に制限した加群の性質から $V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ の分解が得られるであろう、ということで

ある。

小林俊行氏による結果 (1998 及び 2000 年) として、$V_K|_{(\mathfrak{g}',K')}$ が離散分解する場合にはこの考え方はうまくいくことが知られている。$(\mathfrak{g}',K')$-加群 $V_K|_{(\mathfrak{g}',K')}$ が離散分解するとは、$V_K|_{(\mathfrak{g}',K')}$ が有限長の $(\mathfrak{g}',K')$-加群の合併で表される、ということである。今のようにユニタリな V から V_K を構成している場合、これは完全可約であることと同値となる。$V_K|_{(\mathfrak{g}',K')}$ が離散分解するとき、$V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ の分解 (1) は離散的な直和になり、$V_K|_{(\mathfrak{g}',K')}$ の既約分解と完全に対応する。

このように $V_K|_{(\mathfrak{g}',K')}$ が離散分解する場合にはユニタリ表現と $(\mathfrak{g},K)$-加群の分岐則は完全に対応するが、$V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ の分解に連続的なスペクトルを持つ場合には、このようなよい一般論は今のところ存在しない。本論文では、離散分解する場合と、特別な場合ではあるが連続的な分解をする場合の代数的な性質も考察する。

以下では、$G_{\mathbb{R}}$ は連結であるとする。V_K を既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群とし、$V'_{K'}$ を既約 $(\mathfrak{g}',K')$-加群とする。これらの加群に対して、$(\mathfrak{g}',K')$ の作用と可換な線型写像 (絡作用素) 全体の空間 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V_K,V'_{K'})$ を考える。この空間には普遍包絡環の $G'_{\mathbb{R}}$-不変元全体のなす部分代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$ が自然に作用している。同様に $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V'_{K'},V_K)$ も $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群になる。この加群に対して次のような問題を考える。

問題. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V_K,V'_{K'})$(または $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V'_{K'},V_K)$) の長さを求めよ。

$G'_{\mathbb{R}}$ がコンパクトである場合には、この加群が既約であることは古くから知られている。また、$G'_{\mathbb{R}}$ が極大コンパクト部分群 $K_{\mathbb{R}}$ の場合には、$(\mathfrak{g},K)$-加群の構造論において重要な役割を果たしてきた (例えば、Harish-Chandra の subquotient theorem (1954 年) など。) $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$ 自体は、対称空間上の不変微分作用素環として自然に現れるため、調和解析においても重要な対象になっている。

一方、$G'_{\mathbb{R}}$ が非コンパクトである場合に $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V_K,V'_{K'})$ が既約かどうかというのはあまり調べられていない。この問題を扱うために、以下のような加群を定義する。$(\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{g})$-加群 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_K,V'_{K'})$ における対角部分代数 $\Delta(\mathfrak{g}')$ の作用は

$$(\Delta(X)\cdot f)(v) = Xf(v) - f(Xv).$$

となっている。この作用に関して有限なベクトル全体を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_K,V'_{K'})_{\Delta(G')}$ と表すと、これには $(\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{g},\Delta(G'))$-加群の構造が入る。また、この加群の $\Delta(G')$-不変なベクトルがちょうど絡作用素になっている。したがって、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_K,V'_{K'})_{\Delta(G')}$ の加群の構造を調べることで、目的の $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の構造を知ることができる。このような加群を考える利点として、 Lie 環の表現に対してすでに知られている多くの手法が使えるという点がある。例えば、 Jantzen–Zuckerman translation functor を使い計算しやすい加群に帰着させることができる。

$G'_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}$ かつ V,W が最高ウェイト加群の場合には $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)_{\Delta(G)}$ という加群は普遍包絡環の primitive ideal の分類や BGG category との関係で、1970 年代から 80 年代にかけて Duflo, Dixmier, Joseph, Bernstein–Gelfand 等多くの数学者によって研究された。特に、本論文で用いた Zuckerman 導来関手を使って $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_K,V'_{K'})_{\Delta(G')}$ の subquotient の構成を行う手法は、

Enright (1981 年及び 1983 年) による BGG category $\mathcal{O}$ から複素単純リー群の Harish-Chandra 加群の圏への関手:

$$R^S\Gamma_{\Delta(T)}^{\Delta(G)}(M'\otimes\cdot):\mathcal{O}\to\mathcal{C}(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g},\Delta(G))$$

を一般化したものを用いている。ここで、M' はある既約な Verma 加群である。

定理 A (Corollary 8.28)**.** $(G_{\mathbb{R}},G'_{\mathbb{R}})$ が対称対であり、V は $G_{\mathbb{R}}$ の、V' は $G'_{\mathbb{R}}$ の離散系列表現とする。$V_K|_{(\mathfrak{g}',K')}$ は離散分解すると仮定する。このとき、$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V'_{K'},V_K)$ は非零ならば既約 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群である。

ここで、$(G_{\mathbb{R}},G'_{\mathbb{R}})$ が対称対であるとは、$G'_{\mathbb{R}}$ が $G_{\mathbb{R}}$ のある対合 σ による固定部分群の開部分群になっていることであり、離散系列表現とは、$L^2(G_{\mathbb{R}})$ の部分表現として現れる既約表現である。離散系列表現を含む $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ と呼ばれる表現の分岐則は、簡約部分群に制限したときに離散分解する場合に小林俊行氏 (1993 年など) によって研究が始められ、特に離散系列表現に対しては Gross–Wallach (2000 年), Duflo–Vargas (2010 年) の結果が知られている。また、より一般に大島芳樹氏による $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ に対する分岐則の結果 (2013 年) もある。

定理 A の設定において、離散系列表現は一般化 Verma 加群 M,M' と Zuckerman 導来関手 $R^S\Gamma_{L'}^{K'}$ を用いて $V_K\simeq R^S\Gamma_{L'}^{K'}(M),V'_{K'}\simeq R^S\Gamma_{L'}^{K'}(M')$ という形で実現することができる。したがって、

$$\Gamma_{L'}^{K'}:\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',L'}(M',M)\to\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V'_{K'},V_K)$$

という写像が定まる。今の設定では、この写像は全単射になり一般化 Verma 加群に対して同様の定理を示すことに帰着される。$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',L'}(M',M)$ は Zuckerman 導来関手と $\mathfrak{g}'$ のある既約最高ウェイト加群 M'' を用いて、$R^S\Gamma_{\Delta(L')}^{\Delta(G')}(M''\otimes M)^{\Delta(G')}$ と同型になることがわかる。$R^S\Gamma_{\Delta(L')}^{\Delta(G')}(M''\otimes M)$ の既約性は Zuckerman 導来関手加群の既約性と同様にして示すことができ、そこから $R^S\Gamma_{\Delta(L')}^{\Delta(G')}(M''\otimes M)^{\Delta(G')}$ の既約性が従う。

定理 B (Corollary 9.36)**.** $G_{\mathbb{R}}$ はエルミート型単純リー群とし、$(G_{\mathbb{R}},G'_{\mathbb{R}})$ は反正則型の対称対であるとする。また、V は $G_{\mathbb{R}}$ の正則離散系列表現とし、V' を $G'_{\mathbb{R}}$ の非退化主系列表現とする。V' の無限小指標が V から定まるある非整数条件を満たしているとすると、$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V_K,V'_{K'})$ は既約 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群となる。

$G_{\mathbb{R}}$ は $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ に $G_{\mathbb{R}}$-不変な複素構造が入るときエルミート型であると呼ばれ、$G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ 上の $G_{\mathbb{R}}$-同変正則ベクトル束 $\mathcal{V}$ の L^2 な正則切断全体の空間として実現される既約ユニタリ表現は正則離散系列表現と呼ばれる。$G'_{\mathbb{R}}/K'_{\mathbb{R}}\subset G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ が総実部分多様体になっているとき、$(G_{\mathbb{R}},G'_{\mathbb{R}})$ は反正則型であると呼ばれるが、このような場合の正則離散系列表現の分岐則は Repka(1979 年), Howe(1983 年), Ólafsson–Ørsted (1996 年) 等による結果として、

$$V|_{G'_{\mathbb{R}}}\simeq L^2(G'_{\mathbb{R}}/K'_{\mathbb{R}},\mathcal{V}|_{G'_{\mathbb{R}}/K'_{\mathbb{R}}})$$

となることが知られている。したがって、この場合 $V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ には連続的なスペクトルが現れる。定理 B はそのような場合でも一般の V'_K に対しては $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V_K, V'_{K'})$ が既約 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群になると主張している。

定理 B の証明にも $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_K, V'_{K'})_{\Delta(G')}$ を用いる。特に、$V'_{K'}$ が自明な表現の場合には、この $(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}, \Delta(G'))$-加群は $(\mathfrak{g}, G')$ の退化主系列表現になる。退化主系列表現の既約性を示すために、平井武氏 (1962 年) によって導入され Klimyk–Gavrilik (1976 年), Johnson–Wallach (1977 年), Kudla–Rallis (1990 年), Howe–Tan (1993 年), Lee (1994 年) 等によって用いられた、K-type 分解を行い、それぞれの K-type に対して $\mathfrak{k}^{\perp}$ の作用の様子を記述するすることで部分加群の構造をとらえる、という手法を本論文でも用いた。ただし、本論文では K-type 分解を無限次元表現による既約分解で代用している。

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の既約性から分岐則の重複度の性質を捉えることができる。表現 V_K を定める $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ から $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_K)$ への準同型を π とする。$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V_K, V'_{K'})$ が任意の $V'_{K'}$ に対して、零または既約であると仮定する。このとき次の等式が成り立つ：

$$\mathrm{PI.deg}(\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'})) = \sup\left\{\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V_K, V'_{K'}) : V'_{K'} \text{ irreducible}\right\}. \tag{2}$$

左辺は、 polynomial identity degree と呼ばれる代数の不変量であり、可換な時には 1 となるようなものである。この式により、分岐則における重複度の最大値を代数的な不変量で捉えることができる。特に、左辺は $\mathrm{Ker}(\pi)$ にしか依存していないので、重複度が一様にある定数で抑えられるような三つ組み $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}}, V)$ の分類に用いることができる。

定理 C (Theorem 8.19 and Corollary 9.37)**.** $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ は対称対とする。$G_{\mathbb{R}}$ の正則離散系列表現 V に対して、

$$\mathrm{PI.deg}(\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'})) = M_{G'_{\mathbb{R}}}(V)$$

が成り立つ。ここで、$M_{G'_{\mathbb{R}}}(V)$ は V を $G'_{\mathbb{R}}$ に制限したときの分岐則の重複度の最大値である。

$G''_{\mathbb{R}}$ を $G_{\mathbb{R}}$ の対称部分群であって、複素化 G', G'' が $G_{\mathbb{R}}$ の複素化 G の内部自己同型で移りあっているとする。$\mathrm{Ker}(\pi)$ は $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の両側イデアルなので、特に $\mathrm{Ad}(G)$ で不変である。したがって、$\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'})$ と $\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G''})$ が代数として同型になり、定理 C から $V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ と $V|_{G''_{\mathbb{R}}}$ の分岐則の重複度の最大値が等しいことがわかる。

この結果の応用として、対称対に制限したときに無重複 (つまり、$M_{G'_{\mathbb{R}}}(V) = 1$ となる) ような正則離散系列表現の分類を行うことができる。正則離散系列表現が無重複になる十分条件は、小林俊行氏によって与えられ (1997 年、2005 年など) 本論文においてそれが必要条件であることが示されている。また、正則離散系列表現の解析接続と呼ばれる手法を用いて、正則離散系列表現の無重複性を有限次元表現の無重複性に帰着させることができる。有限次元表現の無重複な表現の Stembridge による分類を用いることで、多くの対称対に対して計算を簡略化することができる。