

論文審査の結果の要旨

氏名 北川宜稔

論文題目: Algebraic structure on the space of intertwining operators

和訳: 絡作用素の空間上の代数構造

北川宜稔氏の博士論文は、実簡約リー群の表現の分岐則をテーマとするもので、特に、対称性の破れ作用素の空間に自然に入る代数構造を研究したものである。

群の既約表現を部分群に制限したとき、どのように振る舞うか? という問題は表現論の重要な主題である。与えられた表現を部分群の表現として既約分解する公式を分岐則という。テンソル積表現の分解は分岐則の特別な場合である。

π が群 G の有限次元表現であり、 π を部分群 G' に制限した表現 $\pi|_{G'}$ が完全可約の場合は、その既約分解は

$$(1) \quad \pi|_{G'} \simeq \bigoplus m_\pi(\tau) \tau$$

と表される。ここで τ は G' の互いに相異なる既約表現で、 $m_\pi(\tau)$ 個の τ の直和を $m_\pi(\tau)\tau$ と略記した。自然数 $m_\pi(\tau)$ は重複度と呼ばれる。

さて、 $SL(n, \mathbb{R})$ のような非コンパクト群の既約表現は必ずしも有限次元ではなく、その分岐則は一般に (1) のような有限和として表すことはできない。しかし、既約表現 π がユニタリ表現の場合は、制限 $\pi|_{G'}$ は Hilbert 空間の直積分という概念を用いて、

$$(2) \quad \pi|_{G'} \simeq \int_{\widehat{G'}} m_\pi(\tau) \tau d\mu(\tau)$$

と既約分解される (Mautner). G' が実簡約リー群ならば、 G' のユニタリ双対 $\widehat{G'}$ 上の測度 μ , および、 $\widehat{G'}$ 上の可測関数 $m_\pi : \widehat{G'} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ は一意的に定まる (Harish-Chandra). $\tau \in \widehat{G'}$ を動かしたときの重複度 $m_\pi(\tau) \in \mathbb{N}$ の測度論的な上界を $C(\pi, G')$ と表記する。

G が実簡約リー群の場合、 G の既約ユニタリ表現 π のかわりに、その (\mathfrak{g}, K) 加群 π_K を取り扱うことにより代数的に表現の理論を研究することもできる。ここで、 K は G の極大コンパクト部分群、 \mathfrak{g} は G のリー環である。

1990 年代、小林俊行は、実簡約リー群の無限次元表現の分岐則の一般理論の構築を始めた。その端緒として、離散分解可能な分岐則に着目し、その判定条件を与えた

(Invent Math 1994, Ann Math 1998, Invent Math 1998)。簡約リー群の組 (G, G') に対して、直積分分解 (2) における重複度 $m_\pi(\tau)$ と代数的な意味での対称性の破れ作用素のなす空間 $\text{Hom}_{\mathfrak{g}', K'}(\pi_K|_{(\mathfrak{g}', K')}, \tau_{K'})$ および $\text{Hom}_{\mathfrak{g}', K'}(\tau_{K'}, \pi_K|_{(\mathfrak{g}', K')})$ の次元は、一般には、一致しないが、分岐則が離散的な場合はこれらの 3 つの数は一致し、

$$\pi|_{G'} \simeq \sum_{\tau \in \widehat{G'}}^{\oplus} m_\pi(\tau) \tau \quad (\text{ヒルベルト直和})$$

と分岐則が記述される (T. Kobayashi)。

北川氏は、離散分解する分岐則において、対称性の破れ作用素のなす空間が、普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の不変式環 $U(\mathfrak{g})^{G'}$ の加群としてどのような代数構造をもつかを調べ、次の定理を証明した。

定理 A (北川) (G, G') を対称対とし、 π と τ をそれぞれ G および G' の離散系列表現とし、 π_K は (\mathfrak{g}', K') -加群として離散分解すると仮定する。このとき、対称性破れ作用素の空間 $\text{Hom}_{\mathfrak{g}', K'}(\pi_K|_{(\mathfrak{g}', K')}, \tau_{K'})$ は $\{0\}$ でなければ $U(\mathfrak{g})^{G'}$ -加群として既約である。

G' がコンパクトの場合は、 π が離散系列表現であるという仮定がなくても定理 A の結論は成り立つことは 1953 年に Harish-Chandra によって証明されていた。一方、 G' がコンパクトではなく、 π が離散系列表現ではない既約ユニタリ表現の場合には、定理 A の結論が成り立たない。定理 A を得ると同時に、北川氏はこのような反例も発見した。

さて、 G/K がエルミート対称空間となる場合は、 G に正則離散系列表現が存在する (Harish-Chandra)。この場合は離散分解に関する小林の判定条件は著しく簡単になり、次の定理が成り立つ。

Fact 1 (離散分解定理, T. Kobayashi, 1998) (G, G') を簡約対称対、 π を G の正則離散系列表現とすると、制限 $\pi|_{G'}$ が離散的に分解するための必要十分条件は (G, G') が正則型となることである。このとき、さらに $C(\pi, G') < \infty$ が成り立つ。

ここで (G, G') が正則型であるとは、 G'/K' がエルミート対称空間 G/K の複素部分多様体になるときをいう。

北川氏は $C(\pi, G')$ を有限次元表現の分岐則から計算する公式を証明し、特に、 $C(\pi, G') = 1$ 、すなわち、 $\pi|_{G'}$ が無重複となる場合を詳細に研究した。

さて、複素多様体における可視的作用の概念は、無重複表現を統一的に生み出す新しい幾何的原理として、小林俊行によって導入された (2003)。 $\mathcal{V} \rightarrow X$ を G' -同変な複素多様体上のエルミート線型束とし、群 G' が底空間 X に強可視的に作用しているとする。このとき次が成り立つ。

Fact 2 (無重複性の伝搬定理, T. Kobayashi 2001) X の一般の位置にある点 x に対して、固定部分群 G'_x のファイバー \mathcal{V}_x への作用が無重複ならば、正則切断の空間 $\mathcal{O}(X, \mathcal{V})$ に実現される G' の任意のユニタリ表現は無重複である。

Fact 1 の設定の下では、 G' の X へ作用は強可視的となり、Fact 2 が適用できる。 X における一般の位置にある G' -軌道の固定部分群を M とする。

Fact 3 (無重複定理, T. Kobayashi, 2005) π の極小 K -type $\mu(\pi)$ が M -加群として無重複ならば、無限次元表現の制限 $\pi|_{G'}$ も無重複である。

Fact 2 は、1 点のファイバーにおける有限次元表現の無重複性が切断の空間における表現 (有限次元の場合も無限次元の場合もある) の無重複性に伝播するという定理である。その逆も広い範囲で成り立つことが予想されている。例えば、有限次元表現のテンソル積が無重複に分解する場合はすべて、伝播定理で説明できることが A 型の場合 (Kobayashi 2007), B 型と D 型の場合 (Y. Tanaka 2015) によって証明されている。

北川氏は正則離散系列表現に対して解析的な重複度 $m_\pi(\tau)$ と代数的な対称性破れ作用素の次元との関係を調べ、伝播定理の逆を代数的手法により証明した (博士論文の第 3 章と第 9 章)。

定理 B (北川) Fact 3 における逆が成り立つ。すなわち、無限次元の制限 $\pi|_{G'}$ が無重複ならば、有限次元表現の制限 $\mu(\pi)|_M$ が M -加群として無重複である。

特に、有限次元表現 $\mu(\pi)|_M$ の計算により、正則離散系列表現 π を対称対 (G, G') に制限したときに無重複になるようなケースの分類を行うことができる。北川氏は本論文の第 10 章でこの計算を完遂し分類を行った。北川氏は関連したいくつかの興味深い定理も証明した。

以上のように、当該論文は表現の分岐則の代数的理論に新しい知見を与えたものであり、論文提出者 北川宜稔氏は、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。