論文の内容の要旨

論文題目

Numerical and mathematical analysis for blow-up phenomena to nonlinear wave equations
(非線形波動方程式の爆発現象に関する数値・数学解析)

氏名

佐々木　多希子

非線形偏微分方程式の中心的課題の一つに解の爆発がある．爆発時間付近での解の挙動は解析的に非常に重要であり，したがって，爆発時間付近での解の挙動を数値的に観察することは，解析的な側面からも非常に重要だと言える．本論文では，爆発現象の中でも，特に爆発時間に焦点を当て，その数値解析を非線形波動方程式を対象に研究を行う．

また，爆発現象の数値解析には，用いる数値解法自体の誤差解析がなされていることが非常に大切である．本論文では，splitting method と呼ばれる時間離散数値解法の誤差解析も行う．

また，非線形波動方程式の数値解法のアイデアを応用することで，非線形項に未知関数の導関数を含む波動方程式の爆発曲線の連続微分可能性を解析的に示すことができた．さらに，この結果を数値的に再現することができた．特に，爆発曲線が滑らかになる場合だけではなく，特異性を持つ場合も数値的に示すことができたのでこれらの結果についても報告する．

第 1 章では次の非線形波動方程式を考える．

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = |u|^p, & t > 0,\ x \in S_L, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), & x \in S_L. \end{cases} \tag{0.1}$$

ここで，$S_L = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ とし，指数 $p > 1$ は，s^p が $s \geq 0$ で C^4 級になる実数とする．(0.1) の解は，初期値を十分大きく取ると有限時間で爆発することが知られている．

第 1 章の目的は，爆発時間を近似する数値解法の構築，及びその誤差解析を行うことである．爆発時間の近似，これを数値爆発時間と呼ぶことにするが，数値爆発時間の収束証明は次の二つのステップに分かれている．

(ステップ 1)　数値解法自体の収束証明
(ステップ 2)　数値爆発時間の収束証明

放物型の方程式に関しては爆発時間の数値解析に関する研究が多くなされているが，双曲型の方程式の場合には，このような研究はほとんど存在していなかった．近年，

空間1次元の波動方程式に対し，爆発時間を数値的に求める手法が開発された (Cho [2]). Cho [2] では，(ステップ1) が未解決であり，(ステップ1) が成り立つことを仮定して，(ステップ2) を証明した．

爆発時間付近での数値計算を正確に行うためには，爆発時間付近で，時間の刻み幅を小さく取る必要がある．つまり，時間の刻み幅を可変にする必要がある．本論文ではそれを可変時間刻み幅と呼ぶことにする．熱方程式の場合は，可変時間刻み幅を用いた数値解法の収束証明はよく知られているのだが，波動方程式の可変時間刻み幅を用いた数値解法の収束解析は筆者の知る限りでは存在しなかった．その理由は，波動方程式は，時間2階微分の項が含まれおり，可変時間刻み幅を用いた近似の解析が困難だからである．そこで本章では，(0.1) に対し，(ステップ1)，(ステップ2) を両立する可変時間刻み幅を用いた数値解法の構築と解析を行う．

(0.1) を次の1階の波動方程式系に書き直す．

$$\begin{cases} u_t + u_x = \phi, & t > 0,\ x \in S_L, \\ \phi_t - \phi_x = |u|^p, & t > 0,\ x \in S_L, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \phi(0,x) = u_1(x) + u_0'(x), & x \in S_L. \end{cases} \tag{0.2}$$

(0.2) に対し，可変時間刻み幅を用いた数値解法を構築し，[5] のアイデアをもとにすることで，その数値解法が (ステップ1) を満たすことを示した．また，この数値解法は (ステップ2) を満たすことを示した．さらに，(0.2) の解の爆発時間付近で数値計算を行い，爆発時間の推定も行った．

第2章では半線形発展方程式に対する splitting method の誤差解析を行う．第1章でも言及するが，爆発現象の数値解析を行うためには，数値解法そのものの収束性の証明が大切なので，このような研究は爆発現象の数値解析の側面からも非常に大切だと言える．

X を Hilbert 空間とし，A を X 上での m-dissipative 作用素とする．$u_0 \in D(A)$ に対して，半線形発展方程式

$$\begin{cases} u_t = Au + F(u), \quad t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{0.3}$$

を考える．Splitting method は，(0.3) の解の時間離散数値解法の一つである．

Splitting method の基本的なアイデアは (0.3) の解 $u(t) = S(t)u_0$ を，$\partial_t v = Av$ の解作用素 $\Phi_A(t)$ と，$\partial_t w = F(w)$ の解作用素 $\Phi_F(t)$ で近似することである．Splitting method は，$S(t)$ については解き難いが，$\Phi_A(t)$, $\Psi_F(t)$ に分割すれば解きやすい場合に有用な数値解法である．特に $S(t)$ を $\Phi_A(t/2)\Phi_F(t)\Phi_A(t/2)$ と近似すると，2次収束することが数値的に知られている．この近似は Strang formula と呼ばれている．また splitting method は，離散化の対象である方程式の性質の一部を引き継ぐことが知られており，Schrödinger 方程式など，多くの微分方程式の数値計算に使われている．

しかし，(0.3) の splitting method の誤差解析については未解決な部分も多い．特に，(0.3) の Strang type の splitting method が2次収束することは解析的には知られていなかった．また splitting method は，通常2つに分ける場合が多いが，離散化の対象である方程式によっては3つ以上に分割した方が計算が簡単になる場合もある．そ

こで，本章は (0.3) に対して，3 つに分割する場合も含まれる Strang type の splitting method が 2 次収束することを解析的に示した．

第 3 章では非線形波動方程式の爆発曲線を考える．以下の非線形波動方程式

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(u), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{0.4}$$

について考える．ここで，$F(u) = |u_t|^p$ とし，指数 $p > 1$ は，s^p が $s \geq 0$ で C^4 級になる実数とする．(0.4) の解は，初期値が十分大きい場合に有限時間で爆発することが知られている．R^* and T^* を正定数とし，$B_{R^*} = \{x \mid |x| < R^*\}$ とおく．次の関数

$$T(x) = \sup\{t \in (0, T^*) \mid \ |u_t(t,x)| < \infty\} \qquad (x \in B_{R^*})$$

を考える．$\Gamma = \{(T(x), x) \mid x \in B_{R^*}\}$ を爆発曲線と呼ぶ．以下，爆発曲線 Γ を T とみなす．本章の目的は，T が C^1 級になることを解析的に示すこと，また，T が滑らかになる例，特異点を持つ例を数値的に示すことである．

先行研究では，$F(u) = |u|^p$, e^u の場合に，次の爆発曲線

$$\tilde{T}(x) = \sup\{t \in (0, T^*) \mid \ |u(t,x)| < \infty\} \qquad (x \in B_{R^*})$$

が C^1 級になることが示された ([1], [3])．

これらの証明には，Caffarelli-Friedman [1] の手法が用いられている．しかし，この手法は $F(u) = |u_t|^p$ の場合には，(0.4) に直接適用することができない．このような技術的な問題から，非線形項に微分が入った波動方程式は，爆発曲線の解析が進んでいなかった．一方で，Ohta-Takamura [4] は独自の手法を用いて，$F(u) = (u_t)^2 - (u_x)^2$ である場合に，爆発曲線の解析を行った．証明のポイントは，$v = e^{-u}$ と変換することにより，$F(u) = (u_t)^2 - (u_x)^2$ である場合に (0.4) が，

$$v_{tt} - v_{xx} = 0$$

と書き直せることにある．しかしこの書き換えは，$F(u) = |u_t|^p$ の場合には用いることができない．そこで我々は第 1 章の数値解法のアイデアである，1 階の波動方程式系へ書き換えを行う．

$$\phi = u_t + u_x, \qquad \psi = u_t - u_x$$

とおく．このとき，(0.4) は次のように書き直せる．

$$\begin{cases} D_-\phi = 2^{-p}|\phi + \psi|^p, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ D_+\psi = 2^{-p}|\phi + \psi|^p, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ \phi(x,0) = f(x), \quad \psi(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{0.5}$$

ただし，$D_-v = v_t - v_x$, $D_+v = v_t + v_x$, $f = u_1 + \partial_x u_0$, $g = u_1 - \partial_x u_0$ とする．このような書き換えを行うことで，数値解法の解析がしやすくなることはもちろんだが，Caffarelli-Friedman [1] の論法を適用することができるようになる．また，本章では Caffarelli-Friedman [1] の証明の一部を別証明にし，より解析を簡単にした．

さらに，爆発曲線 T の数値計算を行った．その結果，初期値が滑らかでも，十分大きくない場合には，爆発曲線が滑らかにならないことがあることが数値的に分かった．これは，$F(u) = |u_t|^p$ の場合，解析的にはまだ示されていないことである．

Bibliography

[1] L. A. Caffarelli and A. Friedman: *The blow-up boundary for nonlinear wave equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **297** (1986) 223–241.

[2] C. H. Cho: *A finite difference scheme for blow-up solutions of nonlinear wave equations*, Numer. Math. Theory Methods Appl. **3** (2010) 475–498.

[3] P. Godin: *The blow-up curve of solutions of mixed problems for semilinear wave equations with exponential nonlinearities in one space dimension. I*, Calc. Var. Partial Differential Equations **13** (2001) 69–95.

[4] M. Ohta and H. Takamura: *Remarks on the blow-up boundaries and rates for nonlinear wave equations,* Nonlinear Anal. **33** (1998) 693–698.

[5] T. Sasaki: *A second-order time-discretization scheme for a system of nonlinear Schrödinger equations*, Proc. Japan. Acad. Ser. A Math. Sci. **90** (2014) 15–20.