論文審査の結果の要旨

氏　名　　佐々木　多希子

解の爆発は，現代の非線形偏微分方程式論における一つの中心的な課題である．爆発の有無，爆発率の評価など，いろいろな成果が報告されている一方で，爆発時刻付近での解の具体的な情報を得ることは，一般には最新の解析理論を用いても困難である．したがって，数値シミュレーションによる実験的な研究手法は，数少ない有効な手法であり，その正当性を保証する数値解析の理論は，純粋に数学的な興味からも重要である．

本学位論文は，主に非線形波動方程式を対象にした，爆発解の数値解析に関する，佐々木氏の一連の研究成果をまとめたものであり，次の三章からなる．

第1章　Blow-up of finite-difference solutions to nonlinear wave equations（非線形波動方程式に対する差分解の爆発）

第2章　Error analysis of splitting methods for semilinear evolution equations（抽象的半線形発展方程式の作用素分解解法の誤差解析）

第3章　Regularity and singularity of blow-up curve for $u_{tt} - u_{xx} = |u_t|^p$（導関数を非線形項に含む非線形波動方程式に対する爆発曲線の正則性と特異性）

第 1 章では，冪乗型の非線形項を持つ非線形波動方程式に対して，時間刻み幅制御に基づく，差分スキームを提案し，その詳細な誤差解析を行っている．また，その応用として，数値爆発時刻を提案し，それが偏微分方程式の厳密な爆発時刻に収束することを証明し，数値計算例によって，その妥当性を検証している．放物型方程式対しては，対応する研究はよく知られているが，波動方程式に関しての完成した結果はこれが初めてといえる．実際，刻み幅制御を行った際には，非線形波動方程式の差分解の安定性に関する情報が得られず，差分解の収束性そのものが自明でなくなる．佐々木氏は，特性曲線の考えに基づいて，新しい中間的な関数を導入し，波動方程式を１階の双曲系に書き換えることで，この困難を克服した．

第２章では，半線形の抽象的コーシー問題に対して，方程式の線形部分の解作用素と，非線形部分の解作用素を交互に組み合わせることによって導入される時間離散化手法である作用素分解解法，特に Strang 型解法の詳細な誤差解析を行っている．作用素分解解法は，線形部分と非線形部分を同時に扱うことは

困難だが，一方ずつであれば容易に計算できる場合に有効で，さらに保存則を持つような問題に対してよく応用される．方程式の線形部分については，縮小強連続半群を生成することのみを仮定し，非線形部分は，完全に一般的なものを考える．このような問題設定で，Strang 解法が１次収束することが証明されているが，一方で，２次収束することが実験的には知られている．この章で，佐々木氏は，Strang 解法が，２次収束することに関する完全な証明を与えた．一方で，より広い範囲の非線形に対応できるように，Strang 解法を一般化し，その解法についても２次収束性の証明を与え，数値計算例によって，その妥当性を検証している．

第３章では，導関数を非線形項に含む非線形波動方程式 $u_{tt} - u_{xx} = |u_t|^p$ に対して，爆発曲線の（存在と）正則性・特異性を研究している．波動方程式の爆発曲線については，1985 年，1986 年の L. A. Caffarelli と A. Friedman の有名な一連の論文から，多くの興味深い結果が提出されているが，非線形項に導関数が含まれている方程式に対しては，ほとんど結果は知られていなかった．佐々木氏は，自身が開発した中間変数の導入法（第１章）を応用して，この非線形方程式を１階の双曲系に書き直し，初期値に適切な仮定を置くことで，爆発曲線が C1 級の曲線になることを証明した．証明方法は，Caffarelli—Friedman の方法の応用であるが，できる限りの簡略化や初等化を行っており，爆発曲線を扱った従来の研究と比べて，精錬された結果となっている．また，初期値に対する仮定の妥当性を検証する目的で，数値計算により爆発曲線を可視化し，その滑らかさを実験的に検証している．その結果によれば，初期値に対する仮定は，大幅に簡素化できる可能性がある．さらに，曲線が特異になる場合についても，数値計算により例を与えており，今後のこの分野の発展に大きく寄与をなすものと高く評価できる．

本学位論文で報告されている，佐々木氏の結果は，結果そのもの価値に加えて，純粋に解析的な研究課題に対して有効な数値計算手法の提案とその数学的妥当性の保証をあたえるばかりでなく，近似手法の解析的問題解決への応用，数値計算に基づく数学的現象の予見など，従来の数学・応用数学の枠にとらわれない，未来型の応用数理の研究のスタイルを例示するものであり，高く評価できる．

よって，論文提出者 佐々木多希子 は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．